О ПРЯМЫХ ИЗОКЛИНАХ НЕКОТОРЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Статья расширяет и уточняет вопросы применения прямых изоклин при исследовании полиномиальных автономных дифференциальных систем. В частности, корректно доказывается теорема о существовании хотя бы одной прямой изоклины, проходящей через любую особую точку дифференциальной системы. Решается проблема оценки числа прямых кубической системы на глобальном уровне, когда дается оценка сверху общего числа прямых изоклин. Полученные результаты могут быть применены также и при исследовании распадающихся плоских кривых третьего порядка.

Введение

Несмотря на бурное развитие в последние десятилетия компьютеров и численных методов решения дифференциальных уравнений, качественные методы не потеряли своей актуальности и важности, в силу обеспечения более общего подхода при объяснении расположения интегральных кривых.

Среди обширного арсенала методов качественного исследования динамических автономных систем особое место принадлежит геометрическому методу исследования, так называемому методу изоклин. Данный метод является достаточно простым и наглядным, так как он позволяет, при достаточно общих предположениях относительно правой части системы, весьма эффективно решать задачу о поведении интегральных кривых в окрестности особой точки и в целом. [1]. Широко известен и эффективно применяется метод двух изоклин Еругина [2-5].

Следует отметить, что, несмотря на свою эффективность, метод изоклин был применен лишь к решению несколько ограниченного класса задач качественного исследования двумерных динамических систем. Например, он был использован при решении проблемы Айзермана о глобальной устойчивости особой точки специальной системы из теории автоматического управления; при нахождении достаточных условий существования определенного числа предельных циклов для уравнения Льенарда; для качественного исследования в целом квадратичных систем с особой точкой типа центра и для некоторых других задач [5, 6]. В [6] построены полные портреты изоклин полиномиальных систем, изучены их контакты и свойства вращения, выполнена классификация соответствующих фазовых портретов. С их помощью построены канонические системы, которые позволили решить самые сложные задачи качественного исследования, такие как проблема центра, исследование раздвоений предельного цикла, анализ глобального поведения предельных циклов и другие.

Не случайно метод изоклин был применен для исследования полиномиальных систем. Он позволяет преодолеть возникающие трудности при описании картины интегральных кривых.

Актуальность исследования динамических систем второго и третьего порядка обусловлена практическими задачами, возникающими при объяснении различных физических, химических и биологических явлений и процессов [7, 8]. Например, в [8] динамика процесса кристаллизации кальцита из водного раствора описывается системой дифференциальных уравнений с полиномиальной правой частью. При этом качественное исследование этой системы позволяет объяснить явление ритмического зонирования в составе растущих кристаллов.

Основные результаты

Как известно главной целью качественного интегрирования системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{1}$$

является установление полной схемы поведения ее траекторий на фазовой плоскости ($x;y$). Но поведение траекторий системы (1), в первую очередь, определяется особыми траекториями, такими, как состояние равновесия, сепаратриса, предельный цикл. При этом важно знать количество состояний равновесия, их координаты, взаимное расположение сепаратрис седел и седлоузлов, число предельных циклов, их устойчивость и взаимное расположение. В решении такого рода вопросов вполне определенную роль играют прямые изоклины системы (1). Так, например, из результатов работы [9] следует, что взаимное расположение предельных циклов системы (1) в случае, когда P и Q - взаимно простые многочлены второй степени существенно зависит от наличия и взаимного расположения прямых изоклин этой системы. Следует заметить, что автором статьи [9] использованы результаты работы [10], согласно которой число предельных циклов квадратичной системы не превосходит трех. Впрочем, данная оценка впоследствии не подтвердилась. Сошлемся для этого на монографию [11], в которой в качестве примера приводится следующая система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - y - 10x^2 + (5+\delta)xy + y^2, \quad \frac{dy}{dt} = x + x^2 + (-25+8\varepsilon - 9\delta)xy,$$

имеющая, по меньшей мере, четыре предельных цикла. Здесь $\lambda = -10^{-20}, \delta = -10^{-13}, \varepsilon = -10^{-52}$.

Тем не менее, в пользу актуальности использования прямых изоклин в качественном исследовании автономных дифференциальных систем на плоскости говорит и тот факт, что задача нахождения координат состояний равновесия даже квадратичной системы становится трудно разрешимой в общем случае. В тоже время знание хотя бы одной прямой изоклины делает эту задачу реально разрешимой благодаря так называемым каноническим формам. Именно в связи с каноническими формами квадратичной дифференциальной системы впервые к проблеме прямых изоклин обратился А.Н. Берлинский в своей работе [12]. Благодаря существованию прямых изоклин стало возможным приведение квадратичной системы к каноническому виду, что позволило автору [12] полностью решить проблему сосуществования четырёх особых точек квадратичной системы в конечной части фазовой плоскости. Под канонической формой записи системы (1) понимается такая форма её записи, при которой $P(x,y) = \prod_{r=1}^{k}(a_r x + b_r y + c_r)^{\alpha_r}$ или $Q(x,y) = \prod_{r=1}^{s}(m_r x + n_r y + l_r)^{\beta_r}$, где $\alpha_i, \beta_j, i = \overline{1,k}, j = \overline{1,s}$ - целые неотрицательные числа, $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i = \sum_{j=1}^{s}\beta_j = n$ – степень многочленов $P(x,y)$ и $Q(x,y)$.

По-видимому, впервые попытка исчерпывающего исследования квадратичной системы на предмет существования и взаимного расположения прямых изоклин была предпринята в работе [13]. В ней дается доказательство следующей теоремы: если дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q_2(x,y)}{P_2(x,y)} \tag{2}$$

имеет хотя бы одну особую точку, то семейство изоклин

$$\frac{Q_2(x,y)}{P_2(x,y)} = \lambda, \tag{3}$$

где $P_2(x,y) = \sum_{i+j=0}^{2} a_{ij}x^i y^j$, $Q_2(x,y) = \sum_{i+j=0}^{2} b_{ij}x^i y^j$, $a_{ij}, b_{ij} \in R$ всегда содержит хотя бы одну прямую изоклину*.

Теорема верна, но доказательство имеет определенные изъяны и от этого выглядит не убедительно. Приведем рассуждения автора [13], следуя которому введем обозначения:

* Заметим, что факт существования хотя бы одной прямой изоклины, проходящей через особую точку квадратичной системы раньше был доказан в [9] (лемма 1), а возможность приведения квадратичной системы к канонической форме в указанном виде в случае четырех особых точек впервые доказана в работе Берлинского А.Н. – Одна теорема о поведении интегральных кривых дифференциального уравнения // Ученые записки Сталинабадского пед института. – 1958. – Т. 20. – Вып. 3.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{20} & \frac{1}{2}a_{11} & \frac{1}{2}a_{10} \\ \frac{1}{2}a_{11} & a_{02} & \frac{1}{2}a_{01} \\ \frac{1}{2}a_{10} & \frac{1}{2}a_{01} & a_{00} \end{vmatrix}, \qquad |B| = \begin{vmatrix} b_{20} & \frac{1}{2}b_{11} & \frac{1}{2}b_{10} \\ \frac{1}{2}b_{11} & b_{02} & \frac{1}{2}b_{01} \\ \frac{1}{2}b_{10} & \frac{1}{2}b_{01} & b_{00} \end{vmatrix}.$$

Кривая (3) является распадающейся* тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$\begin{vmatrix} b_{20} - \lambda a_{20} & \frac{1}{2}(b_{11} - \lambda a_{11}) & \frac{1}{2}(b_{10} - \lambda a_{10}) \\ \frac{1}{2}(b_{11} - \lambda a_{11}) & b_{02} - \lambda a_{02} & \frac{1}{2}(b_{01} - \lambda a_{01}) \\ \frac{1}{2}(b_{10} - \lambda a_{10}) & \frac{1}{2}(b_{01} - \lambda a_{01}) & b_{00} - \lambda a_{00} \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Характеристическое уравнение (4) в [13] представлено в виде:

$$C_0\lambda^3 + C_1\lambda^2 + C_2\lambda + C_3 = 0, \tag{5}$$

где $C_0 = |A|$, $C_3 = |B|$.

Далее в работе рассматривается случай $C_0C_3 \neq 0$, когда ни одна из главных изоклин не является распадающейся. Тогда уравнение (5) или, что тоже самое, уравнение (4) имеет хотя бы один действительный корень λ_0 и соответствующая ему изоклина $Q_2(x,y) - \lambda_0 P_2(x,y) = 0$ будет распадающейся. Это распадение будет действительным, если $\delta(\lambda_0) \leq 0$ и мнимым, если $\delta(\lambda_0) > 0$, где

$$\delta(\lambda_0) = \begin{vmatrix} b_{20} - \lambda_0 a_{20} & \frac{1}{2}(b_{11} - \lambda a_{11}) \\ \frac{1}{2}(b_{11} - \lambda a_{11}) & b_{02} - \lambda_0 a_{20} \end{vmatrix}.$$

Автор далее пишет: докажем, что всегда $\delta(\lambda_0) \leq 0$. Для этого предположим противное, что $\delta(\lambda_0) > 0$. Из того, что неравенство $\delta(\lambda_0) > 0$ не выполняется для всех значений $\lambda_0 \in R(\lambda_0 \neq 0)$, автор [13] делает вывод о том, что для любого корня λ_0 уравнения (4) выполняется неравенство $\delta(\lambda_0) \leq 0$. Этот вывод содержит изъян, ибо из него следует лишь то, что существуют значения λ_0 (и не обязательно корни уравнения (4)) при которых выполняется неравенство $\delta(\lambda_0) \leq 0$.

Приведем доказательство вышеназванной теоремы, но уже лишенное этого недостатка.

Прежде всего, не умаляя общности, полагаем, что $a_{00} = b_{00} = 0$, так как в противном случае соответствующим преобразованием начало координат всегда можно перенести в особую точку.

Пусть, далее λ_0 – корень уравнения (4). Если $|a_{10}| + |a_{01}| + |b_{10}| + |b_{01}| = 0$, то очевидно, любая прямая, проходящая через начало координат уравнения (2), является изоклиной. Поэтому будем рассматривать случай

$$|a_{10}| + |a_{01}| + |b_{10}| + |b_{01}| > 0.$$

Если выполняется хотя бы одно из условий

$$b_{10} - \lambda_0 a_{10} = 0, \tag{6}$$

$$b_{01} - \lambda_0 a_{01} = 0, \tag{7}$$

то непременно существует прямая изоклина уравнения (2), проходящая через точку (0,0).

* Случай, когда хотя бы одна из главных изоклин ($P(x,y)=0$, $Q(x,y)=0$) имеет в качестве компоненты не менее одной прямой.

В самом деле, если имеет место равенство (6), то уравнение (4) принимает вид:

$$-\frac{1}{4}(b_{01}-\lambda_0 a_{01})^2(b_{20}-\lambda_0 a_{20})=0. \tag{8}$$

При невыполнимости (7) из (8) следует, что $b_{20}-\lambda_0 a_{20}=0$, то есть прямая $y=0$ – изоклина уравнения (2).

Аналогично, при выполнении (7) и невыполнении (6) прямая $x=0$ – изоклина уравнения (2). Если (6) и (7) выполняются одновременно, то прямая $a_{10}x+a_{01}y=0$ – изоклина уравнения (2). Таким образом, условие $C_0C_3\neq 0$ априори исключает выполнение любого из условий (6) и (7). Из уравнения (4) при $a=\lambda_0$ получаем равенство:

$$b_{11}-\lambda_0 a_{11}=\frac{(b_{10}-\lambda_0 a_{10})(b_{02}-\lambda_0 a_{02})}{b_{01}-\lambda_0 a_{01}}+\frac{(b_{01}-\lambda_0 a_{01})(b_{20}-\lambda_0 a_{20})}{b_{10}-\lambda_0 a_{10}}. \tag{9}$$

Кроме того,

$$\delta(\lambda_0)=(b_{20}-\lambda_0 a_{10})(b_{02}-\lambda_0 a_{02})-\frac{1}{4}(b_{11}-\lambda_0 a_{11})^2. \tag{10}$$

С учетом (9) выражение (10) запишется в виде:

$$\delta(\lambda_0)=-\frac{1}{4}\left[\frac{(b_{10}-\lambda_0 a_{10})(b_{02}-\lambda_0 a_{02})}{b_{01}-\lambda_0 a_{01}}-\frac{(b_{01}-\lambda_0 a_{01})(b_{20}-\lambda_0 a_{20})}{b_{10}-\lambda_0 a_{10}}\right]^2. \tag{11}$$

Теперь ясно, что для любого корня уравнения (4) λ_0 имеет место неравенство $\delta(\lambda_0)\leq 0$ и распадение кривой (3) действительное. Если хотя бы один из определителей $|A|$ и $|B|$ равен нулю, например $|A|$, то нетрудно показать, что существует хотя бы одна прямая изоклина, инцидентная точке (0,0). Итак, пусть $|A|=0$. Если при этом $a_{10}=a_{01}=0$, то $b_{10}x+b_{01}y=0$ - изоклина уравнения (2). Если $a_{10}=0$, $a_{01}\neq 0$, то $a_{20}=0$ (это следует из равенства $|A|=0$). Тогда $a_{20}a_{02}-\frac{1}{4}a_{11}^2<0$, а значит, изоклина бесконечности $P_2(x,y)=0$ распадается на две действительные прямые. Если $a_{10}\cdot a_{01}\neq 0$, то из равенства $|A|=0$ следует, что

$$a_{11}=\frac{a_{01}a_{20}}{a_{10}}+\frac{a_{10}a_{02}}{a_{01}}. \tag{12}$$

С учетом (12) второй инвариант J_2 кривой $P_2(x,y)=0$ [14] является неположительным и, следовательно, распадение $P_2(x,y)=0$ действительное. Теорема доказана полностью.

Доказанная нами выше теорема также сформулирована в работе [9] в виде леммы 1, но как отмечает автор работы [15] доказательство этой леммы ошибочно, так как автор не рассмотрел второй инвариант кривой $Q_2(x,y)-\lambda P_2(x,y)=0$.

Проблеме прямых изоклин квадратичной дифференциальной системы, а также систем более общего вида

$$\frac{dx}{dt}=P_m(x,y)+P_n(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=Q_m(x,y)+Q_n(x,y) \tag{13}$$

посвящена работа [15].

Автор работы [15] вводит в рассмотрение (α,β) – изоклину системы (1), а затем прямолинейную изоклину. Им доказана теорема 1 [15]: если m и n – числа разной четности, то через особую точку (0,0) системы (13) проходит по крайней мере одна прямолинейная изоклина. При этом либо каждая прямая, проходящая через точку (0,0), есть изоклина, либо прямолинейных изоклин не более $m+n$. В системе (13) P_k, Q_k, ($k=m,n$) – однородные многочлены k-ой степени.

Доказательство теоремы 1 [15] основано на возможности разложения однородного многочлена от двух переменных. Из нее очевидным образом следуют лемма 1 [9] и теорема из [13].

Отметим, что автором [15] не упоминается статья [13], в которой была предпринята попытка доказать, что распадение кривой (3), соответствующее корню уравнения (4) всегда действительное.

В работе [15] доказана также теорема 2: пусть векторное поле в системе (1) полиномиальное с особой точкой (0,0). Для того, чтобы каждая прямая, проходящая через эту точку, являлась изоклиной, необходимо и достаточно, чтобы это поле было коллинеарно однородному векторному полю, то есть чтобы существовали однородные полиномы $P_k(x,y)$, $Q_k(x,y)$, $(k \ge 0)$ и полином $R(x,y)$ такие, что имеют место тождественные представления:

$$P(x,y) \equiv P_k(x,y)R(x,y), \quad Q(x,y) \equiv Q_k(x,y)R(x,y). \tag{14}$$

Если правые части (1) взаимно простые, то в условиях теоремы 2, как следует из (14) $R(x,y) \equiv 1$.

В работе [16] способом, отличным от способа доказательства теоремы 1 [15] доказана теорема: пусть правые части системы

$$\frac{dx}{dt} = P_k(x,y) + P_{k+1}(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q_k(x,y) + Q_{k+1}(x,y) \tag{15}$$

взаимно простые многочлены, где P_k, Q_k – однородные многочлены степени $k = n$, $n+1$, $n \ge 1$. Тогда через точку (0,0) проходит не менее одной и не более $2n+1$ прямых изоклин. Если в (15) формально заменить $n+1$ через m и считать n и m числами разной четности, то мы получим доказательство теоремы 1 [15] другим способом.

Отмеченная теорема из работы [16] доказана в связи с изучением числа и взаимного расположения прямых изоклин кубической системы. Но, в отличие от квадратичной системы кубическая система в общем случае не сходна с системами (14) и (15). Поэтому естественно ожидать, что существуют кубические системы, для которых через ту или иную особую точку не проходит ни одна прямая изоклина.

В работе [16] также показано, что через особую точку кубической системы, отличной от однородной, проходит не более пяти прямых изоклин. Дана оценка числа прямых изоклин кубической системы, а именно, что их число не более десяти. Кроме этого приводится пример такой системы, обладающей десятью прямыми изоклинами. Результаты исследования, проведенного в работе [16] могут иметь применение в теории плоских кривых третьего порядка. В частности, справедливо следующее утверждение вытекающее из результатов работы [16]: в пучке кривых третьего порядка $Q_3(x,y) - \lambda P_3(x,y) = 0$ с девятью базисными точками существует не более трех кривых распадающихся на три − прямые, если таких кривых три, то разве что еще одна кривая пучка распадается на прямую и неприводимую кривую второго порядка.

Поскольку каждая инвариантная прямая системы (1) является ее прямой изоклиной, то в контексте проблемы прямых изоклин полиномиальных систем можно рассматривать число и взаимное расположение инвариантных прямых кубической дифференциальной системы. Например, в статье [17] доказано, что кубическая дифференциальная система может иметь не более восьми инвариантных прямых.

Заметим также, что ранее в работе [18] проведено исследование квадратичной дифференциальной системы по изучению вопроса о существовании, числе и взаимном расположении ее прямых изоклин. В отличие от работ [9, 12, 13] авторы статьи [18] не пользовались сведениями из теории кривых второго порядка и поэтому доказано, что число прямых изоклин квадратичной системы может быть не более шести. Кроме этого в [18] предложены линейные преобразования, позволившие получить некоторые новые канонические формы квадратичных систем. Подчеркнем также, что при изучении взаимного расположения прямых изоклин дифференциального уравнения (2) в зависимости от числа особых точек автор работы [13] рассматривает случай одной особой точки как результат слияния четырех особых точек в одну. Между тем единственная особая точка уравнения (2) может быть не только четырехкратной, но и трех, двукратной, и даже простой особой точкой. Все эти случаи исследованы подробно в статье [18].

Приведенный анализ работ полиномиальных динамических систем и их определенное уточнение показывает, что теория прямых изоклин может иметь достойное применение в решении различных вопросов качественной теории дифференциальных систем на плоскости.

Благодарности

Авторы благодарны доценту кафедры информатики АГУ Д.С. Ушхо за постоянное внимание к работе, полезные дискуссии, указание на основополагающие труды по теории прямых изоклин Л.В. Шаховой и А.Н. Берлинского.

Литература

1. *Каплунович Я.Ш.* Некоторые теоремы о расположении кривых в окрестности особой точки и в целом // Известия ВУЗов. Серия «Математика». – 1965. - № 5(48). – С. 74-79.
2. *Еругин Н.П.* О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений в целом. // ППМ. - 1950. - Т. XIV. - Вып. 5. - С. 459-512.
3. *Маркосян С.А.* Качественное исследование системы двух дифференциальных уравнений методом "двух изоклин". // Известия ВУЗов. Серия "Математика". - 1959. - № 1(8). - С. 114-128.
4. *Немыцкий В.В.* Некоторые современные проблемы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. // Успехи математических наук. - 1965. - Т. XX. - Вып. 4(124). - С. 3-36.
5. *Гайко В.А.* Глобальные бифуркации предельных циклов и шестнадцатая проблема Гильберта. - Минск: Университетское, 2000. – 167 с.
6. *Gaiko V.A.* Geometric Methods of Qualitative Analysis and Global Bifurcation Theory // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2002. – Vol. 5. – No. 1. – P. 1-20.
7. *Wilson H.R.* Spikes, Decisions and Actions: The Dynamical Foundations of Neuroscience. - New York: Oxford University Press, 1999. – 320 p.
8. *Волокитин Е.П.* Параметрический анализ динамической модели процесса кристаллизации // Сибирский журнал индустриальной математики. - 2000. - Том III, № 2(6). – С. 35-42.
9. *Тун Цзинь-Чжу.* Расположение предельных циклов системы $dx/dt = X_2(x, y)$, $dy/dt = Y_2(x, y)$ // Периодический сборник переводов иностранных статей: Математика. – 1962. – Т.6. - № 6. – С. 150-158.
10. *Петровский И.Г., Ландис Е.М.* О числе предельных циклов уравнения: $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$, где P и Q - многочлены второй степени // Математический сборник. - 1952. - В. 30 (72). - № 1. - С. 209-250.
11. *Амелькин В.В.* Нелинейные колебания в системах второго порядка / В.В. Амелькин, Н.А. Лукашевич, А.П. Садовский. – Минск: Изд-во БГУ, 1982. – 208 с.
12. *Берлинский А.Н.* О поведении интегральных кривых одного дифференциального уравнения /А.Н. Берлинский // Известия высших учебных заведений. – 1960. - № 2 (15). – С. 3-18.
13. *Шахова Л.В.* О прямых изоклинах / Л.В. Шахова // Труды Самаркандского гос. ун-та имени Алишера Навои. – Самарканд: Изд-во гос. ун-та, 1964. – Вып. № 144. – С. 93-105.
14. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. - М.: Наука, 1981. – 232 с.
15. *Чересиз В.М.* Об изоклинах полиномиальных векторных полей / В.М. Чересиз // Сибирский математический журнал. – 1994. – Т. 35, № 6. – С. 1390-1396.
16. *Ушхо Д.С.* О прямых изоклинах кубической дифференциальной системы / Д.С. Ушхо // Труды ФОРА. – 2003. - № 8. – С. 7-21.
17. *Любимова Р.А.* Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми // Дифференциальные и интегральные уравнения. – Горький: Изд-во Горьковского университета, 1977. - Вып. 1. – С. 19-22.
18. *Ушхо Д.С.* Прямые изоклины и канонические формы квадратичной дифференциальной системы на плоскости / Д.С. Ушхо, М.И. Горних // Труды ФОРА. – 2002. - № 7. – С. 72-82.

About straight line isoclines of some polynomial autonomous systems on a plane

V.B. Tlyachev, A.D. Ushkho

The paper expands and specifies problems of application of direct isoclines at research of polynomial autonomous differential systems. In particular, the theorem of existence at least one straight line isocline which is passing through any singular point of differential system is proved. The problem of an estimation of number of straight lines of cubic system at global level is solved. The obtained results can be applied for research of breaking up third order curves on plane.

