К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КЕПЛЕРА

В.С. Малых, П.С. Сурков

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Сопоставлены аналитический и геометрический выводы уравнения Кеплера. Показано каким образом они дополняют друг друга в дидактическом аспекте, то есть в плане обучения студентов механике.

Как известно, при движении частицы в центрально-симметричном поле ее расстояние r до силового центра меняется со временем так, что

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[W - U(r)] - \frac{L^2}{m^2 r^2}}}, \tag{1}$$

где W – энергия, U – потенциальная энергия, L – момент импульс частицы.

В классической механике наибольший интерес вызывает поле притяжения, в котором $U = -\frac{\alpha}{r}$. Например, при движении спутника Земли ($\alpha = Gm_3 m$, где m_3 – масса Земли) совершенно необходимым является знание его положения на орбите в любой момент времени. Решение этой задачи является весьма поучительным для начинающих и поэтому приводится практически во всех учебниках по механике. Ограничимся здесь случаем $W < 0$. В этом случае частица движется по эллипсу с эксцентриситетом $e = \sqrt{1 - \frac{2|W|L^2}{m\alpha^2}}$ и большой полуосью $a = \frac{\alpha}{2|W|}$ (для доказательства кроме закона сохранения энергии, использованного при выводе формулы (1), применяется закон сохранения момента импульса: $mr^2\dot{\varphi} = L = \text{const}$), и уравнение (1) приобретает вид [1, с.54]:

$$t = \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \int \frac{rdr}{\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}}. \tag{2}$$

Этот интеграл находится с помощью подстановки $r = a(1 - e\cos\xi)$:

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi - e\sin\xi) + \text{const} . \tag{3}$$

Для выяснения смысла безразмерной переменной ξ ниже приводится геометрическое доказательство уравнения Кеплера

$$E - eE = M, \tag{4}$$

где E – эксцентрическая аномалия, M – средняя аномалия, равная $\frac{2\pi}{T}(t - t_0)$, а T – период обращения спутника, t_0 – момент прохождения спутником перицентра орбиты.

Эллипс, изображающий орбиту спутника, рассматриваем как результат сжатия окружности с коэффициентом $k = \frac{a}{b}$ (рис. 1). На этом же рисунке показаны: P – положение спутника в некоторый момент времени t, φ – истинная аномалия, E – эксцентрическая аномалия спутника.

Согласно второму закону Кеплера площадь, описываемая радиус-вектором $\vec{r}$ с момента прохождения перигелия G до момента t, равна $S_{GFP} = \sigma(t - t_0)$, где σ – секториальная скорость, которая элементарно выражается через площадь эллипса $\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{\pi ab}{T}$. Получаем: $S_{GFP} = \frac{1}{2}abM$.

Заметим теперь, что в указанном преобразовании сжатия фигура GNK переходит в фигуру GPK так, что $\frac{S_{GNK}}{S_{GPK}} = \frac{a}{b}$.

Площади этих фигур выразим следующим образом:

$$S_{GNK} = S_{GNO} - S_{\triangle ONK} = \frac{1}{2}a^2E - \frac{1}{2}a\cos Ea\sin E = \frac{1}{2}a^2(E - \sin E\cos E), \tag{5}$$

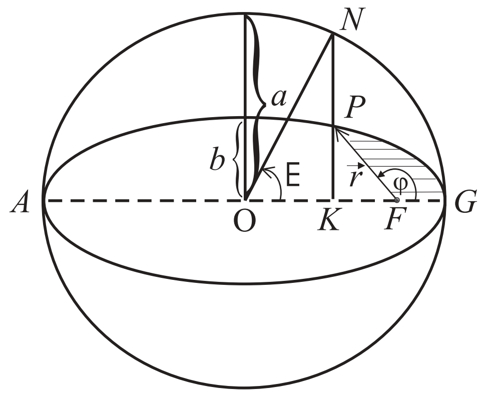

Рис. 1. Эллипс, изображающий орбиту спутника, как результат сжатия окружности

$$S_{GPK} = S_{GFP} + S_{\triangle FPK} = \frac{1}{2}abM + \frac{1}{2}(c - a\cos E)\frac{b}{a}a\sin E = \frac{1}{2}ab(M + e\sin E - \sin E\cos E). \quad (6)$$

Из последних трех формул следует уравнение Кеплера (4).

Таким образом, $\frac{2\pi}{T}(t - t_0) = E - e\sin E$, и $t = \frac{T}{2\pi}(E - e\sin E) + t_0$, что полностью соответствует формуле (3): переменная ξ является эксцентрической аномалией спутника; постоянная интегрирования равна нулю, если начать отсчет времени с момента прохождения спутником перигея, то есть положить $t_0 = 0$.

Знание эксцентрической аномалии в момент времени t полностью определяет положение спутника в этот момент времени. Например, в системе декартовых координат, соответствующей каноническому уравнению эллипса:

$$x = OK = a\cos E, \;\; y = KP = \frac{b}{a}a\sin E = a\sqrt{1 - e^2}\sin E. \quad (7)$$

Решение трансцендентного уравнения (4) требует для начинающих изучать данную задачу некоторых пояснений.

Покажем прежде всего, что уравнение имеет в рассматриваемом случае ($e < 1$) единственный корень. Для этого представим левую часть уравнения (4) как функцию эксцентрической аномалии: $f(E) = E - e\sin E$. Поскольку $f'(E) = 1 - e\cos E > 0$, то $f(E)$ монотонно возрастает, и линия, выражающая график ее зависимости от E, пересечет прямую $M = \text{const}$ только в одной точке, что и доказывает единственность решения.

Графический метод решения уравнения (4), основанный на построении и нахождении точки пересечения графиков функций $y(E) = \frac{1}{e}(E - M)$ и $y(E) = \sin(E)$ не всегда даст необходимую точность. Наиболее простым приемом, позволяющим получить приемлемую точность, здесь является итерационный метод неподвижной точки. Уравнение Кеплера записывается в виде $E = e\sin E + M$. За нулевое приближение искомого корня можно принять среднюю аномалию: $E_0 = e\sin M + M$. Первое приближение $E_1 = e\sin E_0 + M$ и т.д. За конечное число шагов получаем уравнение $E_{n+1} = e\sin E_n + M$, в котором $E_{n+1} = E_n$, то есть находим корень уравнения (4). Подробнее см. в [2. с. 62-64].

Приложение

Здесь рассматриваются некоторые детали методики преподавания, в частности, проблемы, возникающие у студентов при прохождении данной темы.

Вывести (геометрически) формулу Кеплера при других (нежели на рис. 1) положениях планеты на орбите.

При движении планеты от перигелия к афелию меняется взаимное расположение фигуры GFP и треугольников KPF и ONK. Соответственно несколько изменяются преобразования (5) и (6). Положение точки K на рис. 1 определяет 7 случаев.

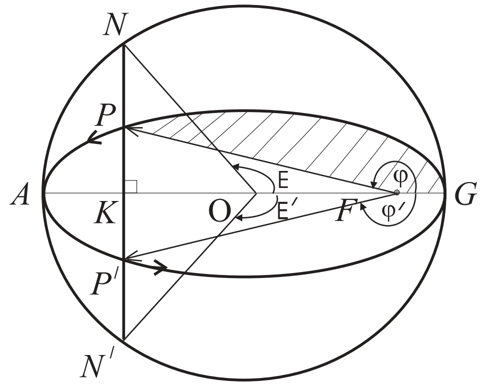

Рис. 2. Геометрическая иллюстрация изменения вида преобразований (5) и (6)

1). Точка K совпадает с перигелием. Все названные фигуры вырождаются в отрезки. При этом $M = 0$, $E = 0$ (и $\varphi = 0$).

2). Точка K находится между G и F. Все три аномалии не превышают 90^0 (являются острыми углами). Этот случай рассмотрен в [3, с. 138] (на элементарном уровне). Здесь же в преобразовании (6) поменяются знаки перед $S_{\triangle KPF}$ и у $(c - a\cos E)$. Все остальное остается прежним.

3). Точка K оказывается в фокусе F. Здесь в отрезок вырождается только $\triangle KPF$, и в преобразовании (6) $S_{\triangle KPF} = 0$. Тогда из (5) и (6) следует $M = E - \sin E \cos E$. Но в данном случае $\cos E = e$, и формула (4) также верна.

4). Точка K – между F и O. Этот случай рассмотрен в основном доказательстве формулы (4).

5). Точка K совпадает с центром O. В отрезок вырождается $\triangle ONK$. Теперь $S_{KNG} = \frac{1}{2}a^2E$; $S_{KPG} = \frac{1}{2}abM + \frac{1}{2}cb$, и $E = M + e$. Это не противоречит уравнению (4), так как для этого случая $E = 90^0$ и $\sin E = 1$.

6). Если $90^0 < E < 180^0$ (точка K между O и A), то преобразования (5) и (6) согласно рис. 2 слегка изменяются:

$$S_{KNG} = S_{ONG} + S_{ONK} = \frac{1}{2}a^2E + \frac{1}{2}a\cos(180^0 - E)a\sin(180^0 - E) = \frac{1}{2}a^2(E - \sin E\cos E),$$

$$S_{KPG} = S_{GFP} + S_{\triangle KPF} = \frac{1}{2}abM + \frac{1}{2}(c + a\cos(180^0 - E)b\sin E) = \frac{1}{2}ab(M + e\sin E - \sin E\cos E),$$

но окончательный вид будет таким же, что и для рис. 1.

7). Точка попадает в афелий. То же, что в случае 1), только $M = E = \varphi = 180^0$.

Дальнейшее движение планеты от афелия к перигелию не обязательно рассматривать так подробно. Достаточно заметить, что положения P' (рис.2) являются симметричными относительно прямой AG рассмотренным ранее положениям планеты P.

Прежним эксцентрической и истинной аномалиям будут соответствовать точно такие же углы E' и φ'. Но так как новые аномалии связаны с этими углами соотношениями: $E = 360^0 - E'$ и $\varphi = 360^0 - \varphi'$, то во всех формулах произойдет замена $E \to 360^0 - E$ и $\varphi \to 360^0 - \varphi$, и $(t - t_0) \to T - (t - t_0)$, откуда следует: $M \to 360^0 - M$. При всех этих заменах уравнение Кеплера (4) не изменяется.

От редколлегии

Представленная в статье модификация геометрического метода была найдена Петром Сурковым, когда он был еще студентом АГУ. Она значительно выигрывает в краткости и ясности по сравнению с доказательством, приводимым в современных источниках [2, с. 56-58]. В дальнейшем, работая на кафедре теоретической физики, П. Сурков отличался умением находить короткие и убедительные пути решения задач и добиваться наибольшей ясности изложения. В его лице кафедра потеряла талантливого физика и преподавателя.

Литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. – Т.1. Механика. – М.: Наука, 1988. – 216 с.

2. *Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г.* Основы механики космического полета: Учебное пособие. – М.: Наука, 1990. – 448 с.

3. *Полак И.Ф.* Курс общей астрономии. – М.-Л.: Государственное технико-теоретическое издательство, 1933. – 364 с.

On solution of Keplers problem

V.S. Malykh, P.S. Surkov

The analytical and geometrical conclusions of Keplers equation is comparable.

