ОЦЕНКА ЧИСЛА ОСОБЫХ ТОЧЕК ВТОРОЙ ГРУППЫ КУБИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

А.Д. Ушхо, Д.С. Ушхо

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

В заметке приводится новое доказательство утверждения о том, что кубическая дифференциальная система не может иметь более пяти особых точек второй группы.

Исследованию числа особых точек второй группы дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{i+j=0}^{3}a_{ij}x^iy^j\equiv P_3(x,y),\ \ \frac{dy}{dt}=\sum_{i+j=0}^{3}b_{ij}x^iy^j\equiv Q_3(x,y). \tag{1}$$

где $a_{ij},\ b_{ij}\in\mathbb{R},\ \ (P_3,Q_3)=1,$ посвящена работа [1], основной результат которой сформулирован в виде теоремы 3: система (1) не может иметь более пяти особых точек второй группы с чисто мнимыми характеристическими корнями.

Напомним, что особая точка $M(x_0,y_0)$ типа "фокус"или "центр"дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\ \ \frac{dy}{dt}=Q(x,y). \tag{2}$$

называется особой точкой второй группы, если выполняется одно из условий:

$$P'_x(x_0,y_0)+Q'_y(x_0,y_0)=0, P'_x(x_0,y_0)Q'_y(x_0,y_0)-P'_y(x_0,y_0)Q'_x(x_0,y_0)>0, \tag{3}$$

$$P'_x(x_0,y_0)+Q'_y(x_0,y_0)=0, P'_x(x_0,y_0)Q'_y(x_0,y_0)-P'_y(x_0,y_0)Q'_x(x_0,y_0)=0 \tag{4}$$

Очевидно, условие (3)((4)) соответствует случаю чисто мнимых (двух нулевых)корней характеристического уравнения особой точки $M(x_0,y_0)$.

Целью данной заметки является новое доказательство упомянутой теоремы 3[1].

Предварительно докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Теорема 1. *Пусть система (1) имеет шесть состояний равновесия, расположенных на параболе L. Тогда L – изоклина этой системы.*

Доказательство. Существует [2] невырожденное линейное преобразование, переводящее параболу L в параболу $\overline{L}:\overline{y}=a\overline{x}^2$. При этом система (1) преобразуется к системе:

$$\frac{d\overline{x}}{dt}=\sum_{i+j=0}^{3}\alpha_{ij}\overline{x}^i\overline{y}^j\equiv\overline{P}_3(\overline{x},\overline{y}),\ \ \frac{d\overline{y}}{dt}=\sum_{i+j=0}^{3}\beta_{ij}\overline{x}^i\overline{y}^j\equiv\overline{Q}_3(\overline{x},\overline{y}), \tag{5}$$

По условию система (5) имеет шесть состояний равновесия на параболе $\overline{L}$. Это возможно в том и только в том случае, когда

$$\overline{P}_3(\overline{x},a\overline{x}^2)\equiv\alpha(\overline{x}-a_1)(\overline{x}-a_2)...(\overline{x}-a_6), \overline{Q}_3(\overline{x},a\overline{x}^2)\equiv\beta(\overline{x}-a_1)(\overline{x}-a_2)...(\overline{x}-a_6), \tag{6}$$

где $a_i, i=\overline{1,6}$ – абсциссы точек равновесия, расположенных на $\overline{L}$. Из (6) следует, что

$$\left(\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}}\right)_{\overline{y}=a\overline{x}^2}=\frac{\beta}{\alpha}-\text{const}\ ,$$

то есть $\overline{L}$ – изоклина системы (5). Так как свойство кривой быть изоклиной дифференциальной системы инвариантно относительно аффинного преобразования [3], то парабола L – изоклина системы (1). Теорема доказана.

Теорема 2. *Если система (1) имеет шесть состояний равновесия, расположенных на кривой L второго порядка, являющейся эллипсом или гиперболой,то L – изоклина этой системы.*

Доказательство проведем в случае, когда L – эллипс, так как в случае гиперболы рассуждения аналогичны.

Если
$$(P_3(x,y))_{(x,y)\in L} \equiv 0 \tag{7}$$
или
$$(Q_3(x,y))_{(x,y)\in L} \equiv 0 \tag{8},$$
то L – изоклина бесконечности или нуля системы (1), и теорема доказана. Заметим, что одновременно тождества (7) и (8) не могут быть выполнены, так как $(P_3, Q_3) = 1$.

Пусть не выполняется ни одно из равенств (7) и (8). Тогда, не сужая общности рассуждений, считаем, что система (1) имеет шесть состояний равновесия на эллипсе $L : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ [2]. Иначе говоря, система уравнений:
$$P_3(x,y) = 0, \quad Q_3(x,y) = 0, \quad x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2 \tag{9},$$
имеет шесть решений.

Заменив x^2 в многочленах $P_3(x,y)$, $Q_3(x,y)$ в силу третьего уравнения системы (9), получаем систему уравнений:
$$f_2(y)x + f_3(y) = 0, \quad g_2(y)x + g_3(y) = 0, \quad x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2 \tag{10},$$
равносильную системе (9). В системе (10):
$$f_2(y)x + f_3(y) \equiv (P_3(x,y))_{x^2=a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2}; \quad g_2(y)x + g_3(y) \equiv (Q_3(x,y))_{x^2=a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2};$$
$f_i(y), g_i(y), i = 2,3$ - многочлены i-ой степени.

Прежде всего отметим, что решения системы (10) расположены не менее чем на трех прямых $y = m_i$.

Случай 1. Все шесть состояний равновесия системы (1), расположенных на эллипсе L, принадлежат прямым $y = m_i$, $i = \overline{1,3}$. Тогда на каждой прямой из трех указанных лежат две особые точки. Это же означает, что при каждом $i \in \{1,2,3\}$ уравнения:
$$f_2(m_i)x + f_3(m_i) = 0, \quad g_2(m_i)x + g_3(m_i) = 0$$
имеют два решения. Так как линейное уравнение имеет более одного решения в том и только в том случае, когда коэффициент при переменной и свободный член равны нулю, то: $f_2(y) \equiv 0, g_2(y) \equiv 0, f_3(y) \equiv \alpha(y-m_1)(y-m_2)(y-m_3), g_3(y) = \beta(y-m_1)(y-m_2)(y-m_3)$.

Из двух последних тождеств следует, что $\left(\frac{Q_3(x,y)}{P_3(x,y)}\right)_{(x,y)\in L} = \frac{\beta}{\alpha}$–const , то есть L – изоклина системы (1).

Случай 2. Все шесть состояний равновесия системы (1), расположенных на эллипсе L, лежат на четырех прямых $y = m_i$, $i = \overline{1,4}$. Тогда на двух из них расположены по две особые точки,а на двух других – по одной особой точке.Ради определенности считаем, что на прямых $y = m_1$ и $y = m_2$ расположены по два состояния равновесия. Тогда m_1, m_2 – корни уравнений $f_i(y) = 0$, $g_i(y) = 0$, $i = 2,3$. Так как в рассматриваемом случае $f_2(y) \not\equiv 0$, $g_2(y) \not\equiv 0$, то систему (10) перепишем в виде:
$$x = -\frac{f_3(y)}{f_2(y)}, \; g_3(y)f_2(y) - g_2(y)f_3(y) = 0, \; f_3^2(y) - f_2^2(y)(a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2) = 0. \tag{11}$$

В силу выше отмеченного, а именно: $f_2(m_i) = f_3(m_i) = 0$, $g_2(m_i) = g_3(m_i) = 0$, $i = 1, 2$, второе и третье уравнения системы (11) запишутся в виде:

$$(y - m_1)^2(y - m_2)^2 M_1(y) = 0, \quad (y - m_1)^2(y - m_2)^2 N_2(y) = 0,$$

где $M_1(y)(N_2(y))$ – многочлены первой (второй)степени. Так как система (11) имеет еще два решения $y = m_3, y = m_4$,то $M_1(y) \equiv 0$. Это же означает, что

$$g_3(y)f_2(y) - g_2(y)f_3(y) \equiv 0 \qquad (12).$$

Из (12) следует, что

$$\frac{g_3(y)}{f_3(y)} \equiv \frac{g_2(y)}{f_2(y)} - \mathrm{const}\ .$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{Q_3(x,y)}{P_3(x,y)}\right)_{(x,y)\in L} \equiv \frac{g_2(y)x + g_3(y)}{f_2(y)x + f_3(y)} - \mathrm{const}\ ,$$

то есть L – изоклина системы (1).

Случай 3. Все шесть состояний равновесия системы (1), расположенных на эллипсе L, лежат на пяти прямых $y = m_i$, $i = \overline{1,5}$. Тогда на одной из них, например на прямой $y = m_1$,расположены два состояния равновесия системы (1), а на четырех остальных – по одному состоянию равновесия. Таким образом, $f_2(m_1) = f_3(m_1) = 0$, $g_2(m_1) = g_3(1) = 0$. Поэтому уравнения системы (11) могут быть записаны в виде: $(y - m_1)^2 M_3(y) = 0$, $(y - m_1)^2 N_4(y) = 0$. Поскольку система (11) имеет, кроме $y = m_1$ еще четыре решения, то $M_3(y) \equiv 0$ ($M_3(y)$ – многочлен третьей степени). Следовательно, имеет место тождество (12), а значит коэффициенты в линейных относительно x первых двух уравнениях системы (10) пропорциональны. Поэтому

$$\left(\frac{Q_3(x,y)}{P_3(x,y)}\right)_{(x,y)\in L} \equiv \frac{g_2(y)x + g_3(y)}{f_2(y)x + f_3(y)} - \mathrm{const}\ ,$$

то есть L – изоклина системы (1).

Случай 4. Все шесть состояний равновесия системы (1), расположенных на эллипсе L, лежат на шести прямых $y = m_i$, $i = \overline{1,6}$. Тогда левая часть второго уравнения системы (11) как многочлен пятой степени тождественно обращается в нуль, то есть и в этом случае L – изоклина системы (1). Теорема доказана.

В заметке [3] доказана теорема 16, согласно которой прямые l_1 и l_2 представляют собой распавшуюся кривую второго порядка, являющуюся изоклиной системы (1), если сумма состояний равновесия этой системы на двух указанных прямых равна шести.

Итак, из упомянутой теоремы [3] и доказанных выше теорем 1 и 2 следует

Теорема 3. *Если на кривой L второго порядка расположены шесть состояний равновесия системы (1), то L – изоклина этой системы.*

Лемма 1. *Пусть в открытой односвязной области G система (1) имеет только четыре состояний равновесия A, B, C, D, причем все они грубые. Если в этой области O – простая и притом единственная точка пересечения дуг AB и CD изоклины бесконечности $P_3(x, y) = 0$, то A и B – седла (антиседла), а C и D – антиседла (седла).*

Справедливость данного утверждения следует из определения индекса Пуанкаре [4]

$$J = \frac{p - q}{2},$$

и из того, что индекс простого состояния равновесия равен $+1$ или -1 [4]. Здесь $p(q)$ – число скачков, совершаемых функцией $Q_3(x,y)/P_3(x,y)$ от $+\infty$ к $-\infty$ (от $-\infty$ к $+\infty$), когда точка $M(x, y)$ переходит через изоклину $P_3(x, y) = 0$, обходя один раз в положительном направлении простую замкнутую кривую,окружающую состояние равновесия.

Аналогичными рассуждениями устанавливается справедливость следующих утверждений.

Лемма 2. *Пусть в открытой односвязной области G система (1) имеет только три состояния равновесия A, B, C, причем все они грубые, кроме того точка $D \in G$. Если в этой области O – простая и притом единственная точка пересечения дуг AB и CD изоклины $P_3(x,y) = 0$, то C – седло (антиседло), а A и B – антиседла (седла).*

Лемма 3. *Пусть в открытой односвязной области G система (1) имеет только простые состояния равновесия, и они расположены на ветви L главной изоклины системы (1). Если L имеет особую точку, являющуюся точкой возврата, то на L седла чередуются с антиседлами.*

Замечание 1. Под антиседлом следует понимать простое состояние равновесия системы (1), не являющееся седлом (т.е. узел, фокус, центр).

Из лемм 1 и 3 вытекает

Лемма 4. Пусть система (1) имеет только простые состояния равновесия, среди которых не более трех седел. Тогда на ветви L неприводимой изоклины бесконечности $P_3(x,y) = 0$ или нуля $Q_3(x,y) = 0$ с узловой особой точкой (с особой точкой возврата) эта система имеет не более восьми (семи) состояний равновесия.

Замечание 2. Узловую точку и точку возврата кривой следует понимать в смысле терминологии [5].

Из леммы 4 и теоремы 36[6] следует

Лемма 5. *Пусть система (1) имеет три седла и шесть антиседел. Тогда неприводимая изоклина $P_3(x,y) = 0$ либо не имеет особой точки, но состоит не менее чем из трех различных ветвей, либо имеет единственную особую точку M_0. В случае, когда M_0 является узловой точкой (точкой возврата), изоклина $P_3(x,y) = 0$ имеет, кроме ветвей, инцидентных точке M_0, хотя бы одну ветвь (хотя бы две ветви).*

Теорема 4. *Никакие шесть простых состояний равновесия системы (1), каждое из которых имеет индекс Пуанкаре, равный +1 (-1) не могут принадлежать одной и той же кривой второго порядка.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что система (1) не может иметь более шести состояний равновесия на кривой $L: \ F_2(x,y) = 0$ второго порядка, так как система уравнений $F_2(x,y) = P_3(x,y) = Q_3(x,y) = 0$ имеет не более шести решений.

Предположим, что на L система имеет шесть состояний равновесия с одним и тем же индексом Пуанкаре. Тогда в силу теоремы 3 L – изоклина системы (1). Поэтому, без ограничения общности рассуждений, считаем, что, $P_3(x,y) = 0$ распадается на кривую L и прямую l_0. Если L является эллипсом, либо гиперболой, либо параболой, либо парой параллельных прямых, то прямая l_0 пересекает ее разве что в двух точках. В силу этого в одной из двух полуплоскостей, на которые прямая l_0 разбивает всю фазовую плоскость системы (1), окажутся не менее трех особых точек. Но это противоречит теореме 36 [6],согласно которой две простые особые точки с одним и тем же индексом Пуанкаре не могут находиться рядом, если между ними нет особой точки самой изоклины.

Если кривая L суть пара пересекающихся прямых, то в силу лемм 1 и 2 и теоремы 36 [6] на L не более четырех состояний равновесия с одним и тем же индексом Пуанкаре. Теорема доказана.

Теорема 5. *Система (1) не может иметь шесть особых точек второй группы с чисто мнимыми характеристическими корнями.*

Доказательство. Пусть система (1) имеет шесть особых точек второй группы с чисто мнимыми корнями характеристического уравнения. Тогда $\sigma(x,y) = P'_{3x}(x,y) + Q'_{3y}(x,y) \equiv 0$, так как в противном случае шесть состояний равновесия, индекс Пуанкаре каждого из которых равен $+1$, принадлежит кривой второго порядка $\sigma(x,y) = 0$. А это противоречит теореме 4.

По лемме 1 [1] система (1), кроме шести антиседел имеет еще три седла. Исходя из лемм 1 и 2 и теоремы 36 [6], легко показать, что ни одна из главных изоклин системы (1) не является распадающейся кривой. Тогда мы оказываемся в условиях леммы 5. Согласно [7] изоклина $P_3(x,y) = 0$, удовлетворяющая условиям леммы 5, встречается только в одном из следующих классов: гиперболических гипербол, параболических гипербол, гиперболизмов конических сечений.

Пусть кривая $P_3(x, y) = 0$ принадлежит классу гиперболических гипербол. Тогда не уменьшая общности рассуждений, считаем, что система (1) имеет вид [7]:

$$\frac{dx}{dt} = cx - ey + bx^2 + ax^3 - xy^2 \equiv \overline{P}_3(x, y), \ \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=1}^{3} B_{ij}x^i y^j \equiv \overline{Q}_3(x, y), \tag{13}$$

где $a > 0$.

Так как $\sigma(x, y) \equiv 0$, то коэффициенты системы (13) подчинены условиям:

$$B_{01} = -c, \ B_{11} = -2b, \ B_{02} = 0, \ B_{21} = -3a, \ B_{12} = 0, \ B_{03} = \frac{1}{3}, \tag{14}$$

$B_{10}e > 0$ ((0,0) – центр).

Исследуем особые точки системы (13) на бесконечности. Посредством преобразований Пуанкаре [4]:

$$x = \frac{1}{z}, \ y = \frac{u}{z}$$

и

$$x = \frac{v}{z}, \ y = \frac{1}{z}$$

система (13) с учетом (14) приводится соответственно к виду:

$$\frac{du}{dt} = B_{30} - 4au + B_{20}z - 3buz + B_{10}z^2 + \frac{4}{3}u^3 - 2cuz^2 + eu^2z^2,$$

$$\frac{dz}{dt} = -az - bz^2 + u^2z - cz^3 + euz^3, \tag{15}$$

и

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{4}{3}v - ez^2 + 4av^3 + 3bv^2z + 2cvz^2 - B_{30}v^4 - B_{20}v^3z - B_{10}v^2z^2, \tag{16}$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{3}z + 3av^2z + 2bvz^2 + cz^3 - B_{30}v^3z - B_{20}v^2z^2 - B_{10}vz^3.$$

Очевидно, особая точка $v = z = 0$ системы (16) является простым устойчивым узлом [4]. Координаты остальных бесконечно удаленных особых точек системы (13) согласно [4] удовлетворяют системе уравнений $z = 0, \quad B_{30} - 4au + \frac{4}{3}u^3 = 0$.

Важно отметить следующее. Так как система (13) имеет девять состояний равновесия в конечной части фазовой плоскости, то сложные состояния равновесия системы (15) могут появиться лишь в результате слияния простых особых точек, расположенных на экваторе сферы Пуанкаре.

Характеристические корни особой точки ($u = u_i, z = 0$) системы (15), как нетрудно видеть, определяются по формулам:

$$\lambda_1(u_i) = u_i^2 - a, \quad \lambda_2(u_i) = 4(u_i^2 - a), \tag{17}$$

где u_i - корень уравнения

$$\frac{4}{3}u^3 - 4au + B_30 = 0. \tag{18}$$

Сразу заметим, что уравнение (18) не имеет трехкратного корня в силу $a \neq 0$.

Итак, уравнение (18) имеет: а) либо три различных действительных корня; б) либо один простой и один двукратный действительные корни; в) либо один простой действительный и два комплексно - сопряженных корня.

В случае а) согласно (17) все три особые точки системы (15) узлы. В случае б) система (15) имеет один простой узел и одну сложную двукратную особую точку с двумя нулевыми характеристическими корнями. В силу выше приведенных рассуждений, сложная точка покоя имеет индекс Пуанкаре, равный $+2$. В случае в) простому корню уравнения (18) соответствует особая точка типа "узел".

Таким образом, сумма индексов особых точек системы (13) на бесконечности не менее $+2$. Однако это противоречит известному утверждению о том, что сумма индексов Пуанкаре всех состояний равновесия, как конечных так и бесконечно удаленных, автономной дифференциальной системы (2) равна $+1$ (см.,например с.124 [8]).

Итак, изоклина $P_3(x, y) = 0$ системы (1) не может являться представителем класса гиперболических гипербол.

Если предположить, что кривая $P_3(x, y) = 0$ принадлежит классу параболических гипербол, то согласно [7] можно рассмотреть систему (13), где $a = 0$, $B_{01} = -c$, $B_{11} = -2b$, $B_{02} = B_{21} = B_{12} = 0$, $B_{03} = 1/3$. Соответствующим образом изменятся системы (15) и (16). Однако начало координат $v = z = 0$ системы (16) является также узлом, а характеристические корни особых точек системы (15) определяются по формулам:

$$\lambda_1(u_i) = u_i^2, \quad \lambda_2(u_i) = 4u_i^2, \tag{19}$$

где u_i – корень уравнения

$$\frac{4}{3}u^3 + B_{30} = 0. \tag{20}$$

.

Согласно (19) и (20) единственная точка покоя системы (15) будет только узлом. Снова приходим к противоречию с тем, что сумма индексов особых точек на всей фазовой плоскости равна $+1$.

Предположим, что изоклина $P_3(x, y) = 0$ является кривой класса гиперболизмов конических сечений. Тогда согласно [7] рассматриваем систему (13), где

$$a = b = 0, \ B_{01} = -c, \ B_{11} = B_{02} = B_{21} = B_{12} = 0, \ B_{03} = \frac{1}{3}.$$

Корни характеристических уравнений особых точек системы (15) определяются по тем же формулам (19), где u_i – корень уравнения (20). Здесь также $v = z = 0$ – узел системы (16). И в этом случае сумма индексов Пуанкаре всех состояний равновесия системы (13) не равна $+1$.
Теорема доказана.

Замечание 3. В заметке [1] приводится пример кубической системы с пятью центрами, характеристические корни каждого из которых являются чисто мнимыми. В этой связи уместно отметить, что, если система (1) имеет хотя бы одну особую точку второй группы с кратным нулевым характеристическим корнем (их число не более двух [9]), то общее число особых точек второй группы системы (1) заведомо меньше пяти.

Литература

1. *Ушхо Д.С.* О числе особых точек второй группы кубической системы / Д.С. Ушхо// Дифференциальные уравнения, 1993. – Т.29. – N2. – С. 240-245.

2. *Ильин В.А.* Аналитическая геометрия / В.А. Ильин,Э.Г. Позняк. – М.: Наука, 1981. – 232 с.

3. *Ушхо Д.С.* О прямых изоклинах кубической дифференциальной системы /Д.С. Ушхо// Труды ФОРА. – 2003. – N8. – С. 7-21.

4. *Андронов А.А.* Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1966. – 568 с.

5. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В трех томах. Т.1 / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1966. – 608 с.

6. *Андронов А.А.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1967. – 488 с.

7. *Смогоржевский А.С.* Справочник по теории плоских кривых третьего порядка / А.С. Смогоржевский, Е.С.Столова. – М.: Физматгиз, 1961. – 263 с.

8. *Баутин Н.Н.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. – М.: Наука, 1976. – 496 с.

9. *Ушхо Д.С.* Оценка числа центров кубической дифференциальной системы в случае кратного нулевого корня характеристического уравнения / Д.С. Ушхо//Вестник АГУ.– 1999. – N3. – С. 97-100.

The number of singular points of the second group of the cubic differential system

A.D. Ushkho, D.S. Ushkho

The new proof of authors theorem from journal "Differential Equation"is given. The theorem affirm that the cubic differential system have at the most five singular points of the second group.

