НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ИХ СИСТЕМ

К.С. Мамий

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

В работе излагается метод промежутков одновременного решения четырех типов неравенств с одной переменной, а также их систем.

1°. Одним из эффективных методов решения неравенств с одной переменной, а также их систем является *метод промежутков.* Здесь излагается одна из версий этого метода, которая иллюстрируется на конкретных примерах.

Пусть $f(x)$ некоторое выражение с одной переменной x, записанное в «удобной» форме, то есть представлено в виде дроби (при наличии дробей), у которой числитель и знаменатель разложены на возможно простые множители. Тогда, чтобы решить неравенства

$$а)\ f(x)<0; \qquad б)\ f(x)\le 0; \qquad в)\ f(x)\ge 0; \qquad г)\ f(x)>0,$$

можно придерживаться следующего *алгоритма:*

1. Найти область определения $D(f)$ функции f.
2. Найти нули функции f, решив уравнение $f(x)=0$.
3. Удалить из $D(f)$ нули функции f и оставшуюся часть области $D(f)$ изобразить на координатной прямой Ox.

При этом получится некоторая совокупность промежутков, на каждом из которых функция f определена, непрерывна (быть может, только с одной стороны на концах отдельных промежутков) и не обращается в нуль. Концы промежутков, в которых функция определена и непрерывна, но не обращается в нуль, отметим *темными кружочками*, а точки, в которых функция f обращается в нуль – *светлыми кружочками.* Из последних выведем стрелки вверх и в их концах поставим нулики. Те концы промежутков, в которых функция f не определена, отметим просто светлыми кружочками без каких-либо стрелок.

4. После этого над каждым из полученных промежутков из $D(f)$ проведем дуги, соединяющие их концы. Отметим знаки функции f на этих промежутках и нули функции f символами +, – и 0, пользуясь при этом следующим определением:

$$\text{знак } f(x):=\begin{cases}+, \text{ если } f(x)>0,\\ 0, \text{ если } f(x)=0,\\ -, \text{ если } f(x)<0.\end{cases} \tag{1}$$

Заметим, что символ « := » следует читать как «по определению равен».

Те промежутки оси Ox, над которыми нет дуг, функция f не определена. В результате всех этих действий получим некоторый рисунок, который условно назовем «рисунком знаков функции f ».

5. Посмотрев на рисунок знаков функции f, записываем ответ.

Замечание. Для удобства читателя отметим, что при решении уравнений и неравенств мы придерживаемся следующих определений.

1) *Решением неравенства (уравнения)* с одной переменной x назовем такое значение переменной x, при котором неравенство (уравнение) превращается в верное числовое неравенство (равенство).

2) *Решением системы* (*совокупности*) уравнений или неравенств, а также смешанной системы (совокупности) с одной переменной x назовем такое значение переменной x, при котором каждое уравнение и неравенство системы (хотя бы одно уравнение или неравенство совокупности) превращается в верное числовое равенство или неравенство.

3) *Решить неравенство или уравнение (систему или совокупность)* – это значит найти *множество* всех его (ее) решений.

При решении простейших неравенств, уравнений, а также совокупностей или систем мы предпочитаем метод равносильных их преобразований к системе или совокупности уравнений или неравенств, решения которых очевидны.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих изложенную выше версию метода промежутков.

Пример 1. Решить неравенства *а*) – *г*), если

$$f(x)=\frac{(x-6)^2\left(\sqrt{x^2-9}-\sqrt{x+11}\right)}{(|x+6|-2)\left(\sqrt{9-x}-1\right)}.$$

Решение. 1. Найдем $D(f)$, решив систему простейших неравенств:

$$\begin{cases} x^2-9\ge 0,\\ x+11\ge 0,\\ 9-x\ge 0,\\ |x+6|-2\ne 0,\\ \sqrt{9-x}\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -3\vee x\ge 3,\\ x\ge -11,\\ x\le 9,\\ x\ne -8,\\ x\ne -4,\\ x\ne 8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -11\le x\le -3\\ x\ne -8,\\ x\ne -4 \end{cases} \vee \begin{cases} 3\le x\le 9,\\ x\ne 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in[-11;-8)\cup(-8;-4)\cup(-4;-3]\cup[3;8)\cup(8;9].$$

Таким образом, $D(f)=[-11;-8)\cup(-8;-4)\cup(-4;-3]\cup[3;8)\cup(8;9]$.

Заметим, что символ «$\vee$», использованный выше, читается как союз «или».

2. Найдем нули функции f :

$$f(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}(x-6)^2\left(\sqrt{x^2-9}-\sqrt{x+11}\right)=0,\\ x\in D(f)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\vee x^2-x-20=0,\\ x\in D(f)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\{6;\ 5;-4\},\\ x\in D(f)\end{cases}\Leftrightarrow x\in\{5;\ 6\}.$$

3. Удалим из области $D(f)$ нули функции f. Тогда получим:

$$D(f)\setminus\{5;6\}=[-11;-8)\cup(-8;-4)\cup(-4;-3]\cup[3;5)\cup(5;6)\cup(6;8)\cup(8;9].$$

4. Пользуясь определением (1) изобразим на координатной прямой знаки функции f (см. рис.1).

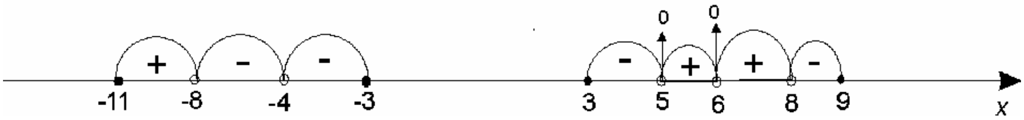

Рис. 1.

5. Посмотрев на рисунок 1 знаков f легко записать

О т в е т ы: *а*) $(-8;-4)\bigcup(-4;-3]\bigcup[3;5)\bigcup(8;9]$; б) $(-8;-4)\bigcup(-4;-3]\bigcup[3;5]\bigcup\{6\}\bigcup(8;9]$;
в) $[-11;-8)\bigcup[5;8)$; г) $[-11;-8)\bigcup(5;6)\bigcup(6;8)$.

Замечание 1. Для установления знака функции *f*, например, на промежутке [3;5), где число 3 изображено на рис. 1 темным кружочком, удобно установить знак функции *f* в точке 3: таков будет ее знак и на всем промежутке.

Замечание 2. Пусть $\lhd\in\{<;\le;\ge;>\}$. Тогда любое из неравенств а)-г) можно записать в виде $f(x)\lhd 0$. Используя одну из идей работы [1], последнее неравенство можно рационализировать. В самом деле, так как выражения $\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x+11}$, $|x+6|+2$ и $\sqrt{9-x}+1$ положительны для всех $x\in D(f)$, то справедлива следующая цепочка логических равносильностей:

$$f(x)\lhd 0\Leftrightarrow\frac{(x-6)^2(\sqrt{x^2-9}-\sqrt{x+11})(\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x+11})}{(|x+6|-2)(|x+6|+2)(\sqrt{9-x}-1)(\sqrt{9-x}+1)}\lhd 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-6)^2[(\sqrt{x^2-9})^2-(\sqrt{x+11})^2]}{(|x+6|^2-2^2)[(\sqrt{9-x})^2-1^2)]}\lhd 0\overset{x\in D(f)}{\Longleftrightarrow}\frac{(x-6)^2(x^2-x-20)}{(x^2+12x+32)(8-x)}\lhd 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-6)^2(x+4)(x-5)}{(x+8)(x-8)(x+4)}\rhd 0\Leftrightarrow\frac{(x-6)^2(x-5)}{(x+8)(x-8)}\rhd 0\Leftrightarrow\varphi(x)\rhd 0,$$

где $\varphi(x):=\dfrac{(x-6)^2(x-5)}{(x+8)(x-8)}$, а $\rhd\in\{>;\ge;\le;<\}$. Таким образом,

$$f(x)\lhd 0\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi(x)\rhd 0,\\ x\in D(f).\end{cases}$$

Поэтому рис. 1 знаков функции *f* совпадает с рисунком знаков функции – φ на множестве *D*(*f*). Ясно, что установить знаки функции φ на промежутках из пункта 3 проще, чем для функции *f*. Однако, в данном случае, переход от функции *f* к функции φ является слишком громоздким.

П р и м е р 2. Решить систему

$$\begin{cases}\sqrt{x+5}+x-7<0,\\ (x^2-36)(x+4)(\sqrt{12-x}-x)\ge 0.\end{cases}\tag{2}$$

Р е ш е н и е. 1. Положим $f(x)=\sqrt{x+5}+x-7$ и $g(x)=(x^2-36)(x+4)(\sqrt{12-x}-x)$. Тогда система (2) будет равносильна системе

$$\begin{cases}f(x)<0,\\ g(x)\ge 0.\end{cases}\tag{2'}$$

Обозначим через D область определения (ОДЗ) системы (2′). Тогда $D=D(f)\bigcap D(g)$. Очевидно, что $D(f)=[-5;+\infty)$ и $D(g)=(-\infty;12]$. Следовательно, $D=[-5;12]$.

2. Найдем теперь нули функций f и g, принадлежащих области D. Очевидно, что 4 является нулем функции *f* и, так как *f* – строго возрастающая функция, то она других нулей иметь не может. Ясно, что $4\in D$.

$$g(x)=0\Leftrightarrow(x^2-36)(x+4)(\sqrt{12-x}-x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 12,\\ (x^2-36)=0\vee x+4=0\vee 12-x-x^2=0;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 12,\\ x\in\{-6;\ 6;-4;3\};\end{cases}\Leftrightarrow x\in\{-6;-4;3;6\}.$$

Но $-6\notin D$, а числа – 4, 3 и 6 принадлежат D.

3. Удалим нули функций f и g из области D. Тогда получим совокупность промежутков

$D\setminus\{-4;\ 3;\ 4;\ 6\}=[-5;-4)\cup(-4;3)\cup(3;4)\cup(4;6)\cup(6;12]$, на каждом из которых функции f и g непрерывны и не обращаются в нуль.

4. Изобразим теперь знаки функций f и g на координатной прямой *Ox*, пользуясь определением (1) (см. рис.2). Для этого отметим сверху знаки функции f, а снизу знаки функции g.

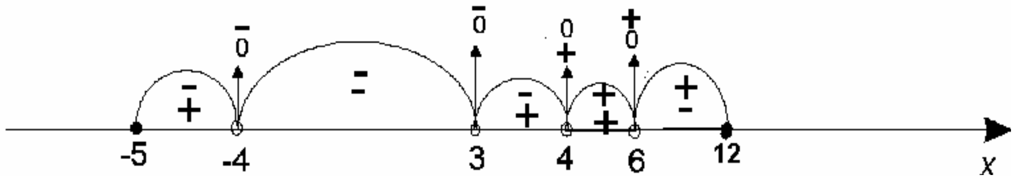

Рис. 2.

5. Посмотрев на рисунок 2 знаков функций f, g и систему (2'), записываем

О т в е т: $[-5;\ -4]\cup[3;\ 4)$.

Заметим, что рисунок 2 позволяет записать множества решений ещё 15 систем с функциями f и g. Например,

$$\begin{cases} f(x)\ge 0,\\ g(x)\le 0\end{cases} \Leftrightarrow x\in[6;12];\quad \begin{cases} f(x)<0,\\ g(x)<0\end{cases} \Leftrightarrow x\in(-4;\ 3);\quad \begin{cases} f(x)\le 0,\\ g(x)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x\in[-5;-4]\cup[3;4].$$

Читателю рекомендуем, в качестве упражнений, записать 12 оставшихся систем и множества их решений.

2°. Приведем еще довольно простой метод решения уравнений и неравенств, содержащих несколько модулей (он удобен, когда подмодульные выражения либо линейные, либо квадратичные, либо другие, сравнительно простые, функции). Назовем его условно *методом составления таблиц*. Суть этого метода продемонстрируем на конкретных примерах.

П р и м е р 3. Решить неравенства *а*) – *г*), если

$$f(x)=|x+5|-2|x+3|+4|x-2|-x-25. \qquad (3)$$

Р е ш е н и е. Очевидно, что функция f определена и непрерывна на всей числовой прямой. Поэтому для решения неравенств *а*) – *г*) достаточно найти нули функции f и затем применить метод промежутков. Но для решения последней задачи следует предварительно освободить функцию f от модулей. С этой целью найдем сначала нули подмодульных выражений и отметим их (в порядке возрастания) на координатной прямой (в области определения функции *f*) (см. рис. 3).

$$x+5=0 \Leftrightarrow x=-5;\quad x+3=0 \Leftrightarrow x=-3;\quad x-2=0 \Leftrightarrow x=2.$$

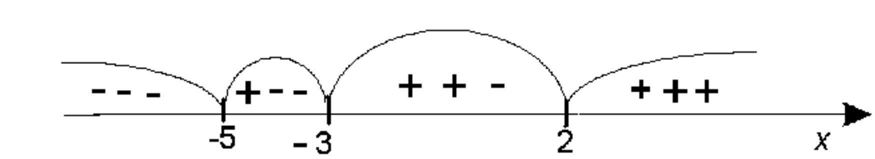

Рис. 3.

На рисунке 3 изображены знаки подмодульных выражений только на интервалах $(-\infty;-5)$, $(-5;\ -3)$, $(-3;2)$ и $(2;\ +\infty)$. Здесь знаки подмодульных выражений в точках –5, –3 и 2 не указаны (в этом нет и необходимости), так как каждое подмодульное выражение на любом из промежутков $(-\infty;-5]$, $(-5;-3]$, $(-3;2]$ и $(2;\ +\infty)$ либо неположительно, либо неотрицательно. Следовательно, в силу определения модуля и рисунка 3, легко составляется таблица № 1, освобождающая функцию *f*, заданную равенством (3), от модулей и позволяющая сравнительно легко найти нули функции f на каждом из указанных выше промежутков.

Таблица № 1

(для записи $f(x)$ без модулей и решения уравнения $f(x)=0$)

x	$\in$	$(-\infty;-5]$	$(-5;-3]$	$(-3;2]$	$(2;+\infty)$
$\|x+5\|$	=	$-x-5$	$x+5$	$x+5$	$x+5$
$-2\|x+3\|$	=	$2x+6$	$2x+6$	$2x-6$	$-2x$-6
$4\|x$-2$\|$	=	$-4x+8$	$-4x+8$	$-4x+8$	$4x-8$
$-x-25$	=	$-x-25$	$-x$-25	$-x-25$	$-x-25$
$f(x)$	=	$-4x-16$	$-2x-6$	$-6x-18$	$2x-34$
$f(x)=0$	$\Leftrightarrow$	$x\in\varnothing$	$x=-3$	$x\in\varnothing$	$x=17$

Запись «$f(x)=0\Leftrightarrow x\in\varnothing$» означает, что уравнение $f(x)=0$ не имеет решений, или, что множество решений уравнения $f(x)=0$ пусто.

Предостерегая читателя, заметим, что вместо приведенной символической записи отсутствия решения уравнения в некоторых учебно-методических пособиях встречаются, к сожалению, такие записи: «$f(x)=0\Leftrightarrow \varnothing$» или «$f(x)=0\Leftrightarrow x=\varnothing$», лишенные какого-либо смысла (см., например, [4], стр. 25, 36, 141-144,…).

Комментарий к таблице № 1. Прежде чем составить таблицу № 1 мысленно представляем себе $f(x)$ как сумму $f(x)=(|x+5|) + (-2|x+3|) + (4|x-2|) + (-x-25)$. Слагаемые этой суммы выписываем в 1-м столбце под переменной x. В первой строке, начиная с 3-го столбца, выписываем те промежутки, на которые нули подмодульных выражений разбивают область определения функции f, причем эти нули присоединяем к промежуткам с правой стороны (с таким же успехом можно их присоединить и с левой стороны; имеются и другие варианты). После этого под каждым промежутком записываем, чему равно каждое слагаемое функции f, убирая при этом модули, где они имеются. В предпоследней строке записываем в каждом столбце, начиная с 3-го, значение $f(x)$, просуммировав все ее слагаемые, записанные без модулей. В последней строке решаем уравнение $f(x)=0$ в каждом промежутке из первой строки и отмечаем знаки функции f на рисунке 4.

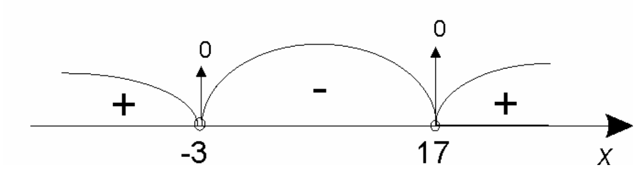

Рис. 4.

Из последней строки таблицы № 1 видно, что нулями функции f являются только числа –3 и 17, принадлежащие, соответственно, второму и четвертому промежуткам, и что на других промежутках функция f не обращается в нуль. Из рисунка 4 знаков функции f снимаем

О т в е т ы: а) (–3; 17); б) [–3; 17]; в) $(-\infty;-3]\cup[17;+\infty)$; г) $(-\infty;-3)\cup(17;+\infty)$.

П р и м е р 4. Решить уравнение 1^{o}. $f(x)=0$ и неравенства 2^{o}. $f(x)<0$, 3^{o}. $f(x)\le 0$, 4^{o}. $f(x)\ge 0$ и 5^{o}. $f(x)>0$, если $f(x)=\sqrt{5-|x-3|}+2|x-2|+|x+4|-3x-2$.

Р е ш е н и е. 1. Найдем $D(f)$, решив неравенство $5-|x-3|\ge 0$. Имеем:

$|x-3|\le 5 \Leftrightarrow -5\le x-3\le 5 \Leftrightarrow -2\le x\le 8$. Следовательно, $D(f)=[-2;8]$.

2. Найдем нули подмодульных выражений: $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$; $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$; $x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$.

Но $-4\notin D(f)$. Поэтому $x+4$ не может быть нулем в $D(f)$. Более того, так как $x\ge -2$ для всех $x\in D(f)$, то $x+4\ge 2$ в $D(f)$ и $|x+4| = x+4$. С учетом этого функция f примет вид:

$$f(x)=\sqrt{5-|x-3|}+2|x-2|-2x+2.$$

3. Изобразим теперь знаки подмодульных выражений в $D(f)$.

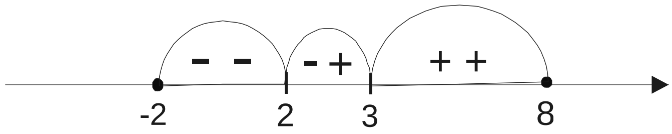

Рис. 5.

4. Составим таблицу № 2, аналогичную таблице № 1.

Таблица № 2

x	$\in$	$[-2;\,2]$	$(2;\,3]$	$(3;8]$
$\sqrt{5-\|x-3\|}$	=	$\sqrt{x+2}$	$\sqrt{x+2}$	$\sqrt{8-x}$
$2\|x-2\|$	=	$-2x+4$	$2x-4$	$2x-4$
$-2x+2$	=	$-2x+2$	$-2x+2$	$-2x+2$
$f(x)$	=	$\sqrt{x+2}-4x+6$	$\sqrt{x+2}-2$	$\sqrt{8-x}-2$
$f(x)=0$	$\Leftrightarrow$	$x=2$	$x\in\varnothing$	$x=4$

5. Установим знаки функции f на рис.6. Имеем:

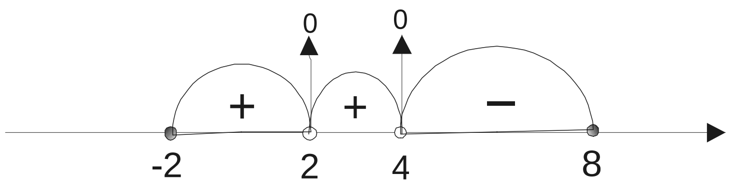

Рис. 6.

6. С рисунка 6 снимаем
О т в е т ы: 1°. {2;4}.   2°. (4;8].   3°. $\{2\}\cup[4;8]$.   4°. [–2;4].   5°. $[-2;2)\cup(2;4)$.

П р и м е р 5. Решить уравнение 1°. $f(x)=0$ и неравенства 2°. $f(x)<0$, 3°. $f(x)\le 0$, 4°. $f(x)\ge 0$ и 5°. $f(x)>0$, если $f(x)=|x^3-x|-2x|x^2-9|+8x$.

Р е ш е н и е. Решение будем проводить по той же схеме, по которой решен пример 3.

1. Функция f определена и непрерывна на всей числовой прямой. Поэтому достаточно найти нули функции f и установить ее знаки на интервалах, получающихся после удаления нулей функции из $\mathbb{R}$.

2. Для этого найдем сначала нули подмодульных выражений. Имеем:

$$x^3-x=0\Leftrightarrow x\in\{0;\pm 1\};\; x^2-9=0\Leftrightarrow x=\pm 3.$$

3. Изобразим рисунок знаков подмодульных выражений (см. рис. 7) и составим таблицу № 3, освобождающую функцию f от модулей и позволяющую решить данную задачу.

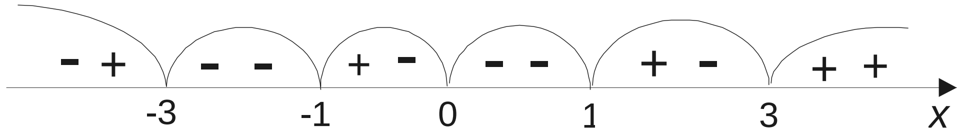

Рис. 7.

Таблица № 3

x	$\in$	$(-\infty; -3]$	$(-3; -1]$	$(-1; 0]$	$(0; 1]$	$(1; 3]$	$(3; +\infty)$
$\lvert x^3-x\rvert$	=	$-x^3+x$	$-x^3+x$	x^3-x	$-x^3+x$	x^3-x	x^3-x
$-2x\lvert x^2-9\rvert$	=	$-2x^3+18x$	$2x^3-18x$	$2x^3-18x$	$2x^3-18x$	$2x^3-18x$	$-2x^3+18x$
$8x$	=	$8x$	$8x$	$8x$	$8x$	$8x$	$8x$
$f(x)$	=	$-3x^3+27x$	x^3-9x	$3x^3-11x$	x^3-9x	$3x^3-11x$	$-x^3+25x$
$f(x)=0$	$\Leftrightarrow$	$x=-3$	$x\in\varnothing$	$x=0$	$x\in\varnothing$	$x=\frac{\sqrt{33}}{3}$	$x=5$

4. Теперь легко изобразить рисунок знаков основной функции f (см. рис. 8):

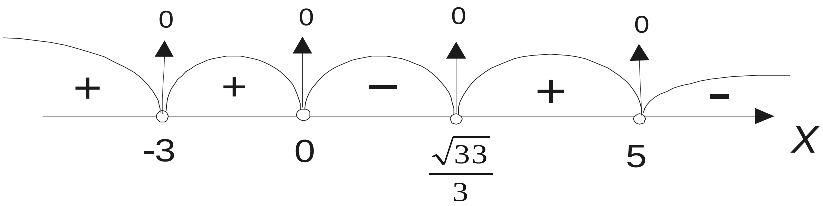

Рис. 8.

5. Ответы: 1^o. $\{-3; 0; \frac{\sqrt{33}}{3}; 5\}$; 2^o. $(0; \frac{\sqrt{33}}{3})\cup(5; +\infty)$; 3^o. $\{-3\}\cup[0; \frac{\sqrt{33}}{3}]\cup[5; +\infty)$;
4^o. $(-\infty; 0]\cup[\frac{\sqrt{33}}{3}; 5]$; 5^o. $(-\infty; -3)\cup(-3; 0)\cup(\frac{\sqrt{33}}{3}; 5)$.

Упражнения для самостоятельного решения

Решить уравнение 1^o. $f(x)=0$ и неравенства 2^o. $f(x)<0$, 3^o. $f(x)\le 0$, 4^o. $f(x)\ge 0$ и 5^o. $f(x)>0$, если $f(x)$ равна:

1). $\sqrt{x^2-5x+6}-x-4$. 2). $\sqrt{3x^2-22x}-2x+7$. 3). $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}-1$.

4). $(\sqrt{x^2-6}-\sqrt{3})(x^2-16)^2(x^2-25)$. 5). $2|x-2|-3|x+4|-1$. 6). $|2x+1|-|5x+2|-1$

7). $|3x-1|+|2x-3|-|x+5|-2$. 8). $|x+1|-|x+3|+3|x-1|-2|x-2|-|x-3|$.

9). $|x^2-x|+|x-2|-x^2+2$. 10). $|x-3|+2|x-2|-|x+1|-2x-4$. 11). $2|x-3|+|x-4|-|x-2|$.

12). $\sqrt{x-2}+|x-3|-|x-4|$. 13). $4\sqrt{x+1}-|2x-1|-3$. 14). $x|2x+5|+2x|x-3|-22$.

15). $|x^3-x|-2|x^3-9x|+8x$. 16). $|x^2-1|+|x^2-4|-6x-3$.

17). $\dfrac{-|x+3|+2|x-3|-3|x-4|}{\sqrt{x^2-4}-1}$. 18). $\dfrac{(|x|-4)^2(\sqrt{9-x}-2)}{(x-1)\sqrt{x+11}}$. 19). $\log_3\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}$.

20). $\dfrac{\log_{0,5}|x^2-3|}{x}$. 21). $\dfrac{\log_2|x^2-1|}{x^2-2x}$. 22). $\dfrac{\ln|x^2-2x|}{|x|-2}$.

23). $(x-1)|x+2|+3x|x-2|-4$. 24). $|x^2-5|x|+9|-|x-6|$.

Литература

1. *Голубев В.И.* Школа решения нестандартных задач. – М.: Газета «Математика», № 7, 2005. – С. 36-43.
2. *Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г.* Практикум по решению задач школьной математики. Вып. II. – М.: Просвещение, 1983. – 128 с.
3. *Мамий К.С.* Элементы математического анализа в школьном курсе математики. – Майкоп: Дебют, 1995. – 225 с.
4. *Ткачук В.В.* Математика – абитуриенту. – 10-е изд., исправленное и дополненное. – М.: МЦНМО, 2003. – 910 с.

Some methodical ways of solving the of inequalities and its systems with one variable

K.S. Mamiy

In this work the method of intervals of the simultaneous of solving of four types inequalities with one variable is stated.

