2005 г. №10

Труды ФОРА

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

М. М. Шумафов

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

В статье получены достаточные условия стохастической устойчивости одной двумерной нелинейной системы двух дифференциальных уравнений,возмущенной случайным процессом "белого"шума.

1. Введение. Хорошо известно,какую важную роль играют функции Ляпунова в теории устойчивости систем дифференциальных уравнений. Метод функции Ляпунова (прямой метод Ляпунова) оказался чрезвычайно общим и мощным инструментом для исследования вопросов устойчивости (а также ограниченности, диссипативности и др.) детерминированных систем. Этот метод нашел также широкое применение в стохастической теории дифференциальных уравнений. Одними из первых исследователей в этой области были Г.Дж.Кушнер [1] и Р.З.Хасьминский [2]. В статье [3] с помощью стохастического аналога метода частного интегрирования были построены функции Ляпунова для линейных и некоторых специальных нелинейных (степенного вида)стохастических дифференциальных уравнений 2-го порядка. В работе [4] были обобщены результаты статьи [3] и построены функции Ляпунова для некоторых классов нелинейных стохастических дифференциальных уравнений 2-го порядка.В работе [5] построены функции Ляпунова для двумерных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.На основе этих функций были даны условия стохастической устойчивости для двумерных линейных стационарных систем.В работах [6-8] с помощью функций Ляпунова проводится исследование стохастической устойчивости некоторых систем двух нелинейных дифференциальных уравнений, возмущенных случайным процессом типа "белого"шума.В этих работах известные для детерминированных систем результаты работ Н. П. Еругина [9], И. Г. Малкина [10] и Н. Н. Красовского [11] распространяются на стохастический случай.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему

$$y = \begin{cases} \dot{x} = f(x) + ay + \varphi(x)\dot{\xi}(t), \\ \dot{y} = bx + g(y), \end{cases} \tag{1}$$

где $x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \geq 0$, функции $f(x)$ и $g(y)$ - непрерывно дифференцируемые, $f(0) = g(0) = 0$, функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица, $\dot{\xi}(t)$ – гауссовский случайный процесс типа "белого"шума, a и b – постоянные. Точки над символами обозначают дифференцирование по времени. Систему (1) будем понимать как систему стохастических уравнений в смысле Ито [1,2]

$$\begin{aligned} dx(t) &= [f(x) + ay(t)]dt + \varphi(x(t))d\xi(t), \\ dy(t) &= [bx(t) + g(y(t))]dt, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\xi(t)$ – винеровский процесс.

Детерминированный случай $\sigma = 0$ был рассмотрен Н.П.Еругиным [9] и И.Г.Малкиным [10] в случае, когда $g(y)$ – нелинейная функция.

В настоящей статье результаты работ [9-11] распространяются на стохастический случай.

Исследование устойчивости системы (1) будем проводить модифицированным методом функций Ляпунова [1,2].

3. Некоторые понятия и факты из стохастической теории устойчивости. Все приводимые ниже понятия и факты можно найти, например,в [1,2].

Определение 1. *Случайным процессом, определенным на промежутке $T \subset \mathbb{R}$ со значениями из $\mathbb{R}$, называется измеримая функция $x(t,\omega)$ такая, что при каждом фиксированном $t \in T$ $x(t,\omega)$ – случайная величина.* (Здесь t интерпретируется как время, а ω – как элементарное событие).

Определение 2. *Случайный процесс $x(t,\omega)$, $t \in T$ называется гауссовским, если его значения $x(t_1,\omega),\ldots,x(t_n,\omega)$ при любых $t_1,\ldots,$ $t_n \in T$ в совокупности являются гауссовскими (нормальными) случайными величинами.*

Определение 3. *Случайным процессом белого шума $x(t) = x(t,\omega)$, $t \in T$ называется гауссовский процесс, для которого*

$$\begin{aligned} &Mx(t,\omega) = 0 \quad \forall t \in T, \\ &M[x(s)x(t)] = \delta(t-s). \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь δ обозначает дельта-функцию Дирака, а M – знак математического ожидания.

Определение 4. *Винеровским случайным процессом $\xi(t) = \xi(t,\omega)$ называется случайный процесс, у которого*:

1) $\xi(0) = 0$;

2) *на любом интервале (s,t) приращение $\xi(t) - \xi(s)$ является гауссовским с нулевым средним и дисперсией, являющейся линейной функцией от $t-s$, причем величина $\xi(t)-\xi(s)$ имеет такое же распределение вероятностей, что и $\xi(t-s)$*;

3) *для любых $0 < t_1 < \ldots < t_n$ приращения $\xi(t_1)-\xi(0),\ldots,\xi(t_n)-\xi(t_n-1)$ являются независимыми.*

Далее, по заданному винеровскому процессу $\xi(t,\omega)$ определяется понятие *стохастического интеграла Ито* по стохастической мере, порожденной процессом $\xi(t,\omega)$ и понятие *стохастического дифференциала* в смысле Ито (см.[1,2])

Стохастическими дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, которые связывают стохастические дифференциалы искомых и заданных винеровских процессов.

Решение системы (2) определяется как решение соответствующей системы интегральных уравнений.

Через $(x(t,\omega;t_0,x_0),\ y(t,\omega;t_0,x_0))$ будем обозначать векторный случайный процесс, выходящий при $t=t_0$ из точки (x_0,y_0).

Определение 5. *Тривиальное решение системы (2) называется асимптотически устойчивым в целом, если*:

1) *для любых t_0 и $\varepsilon > 0$*

$$\lim P\{\sup_{t>t_0}[(x(t,\omega;t_0,x_0))^2 + (y(t,\omega;t_0,x_0))^2] > \varepsilon\} = 0$$

2) для всех t_0, x_0 и y_0

$$P\{\lim_{t\to+\infty} x(t,\omega;t_0,x_0,y_0) = 0\} = 1, \quad P\{\lim_{t\to+\infty} y(t,\omega;t_0,x_0,y_0) = 0\} = 1.$$

Здесь P обозначает вероятность.

Определение 6.*Решение $(x(t,\omega) \equiv 0, y(t,\omega) \equiv 0)$ системы (2) называется экспоненциально устойчивым в среднем квадратическом, если существуют такие положительные константы A и α, что*

$$M[(x(t,\omega))^2 + (y(t,\omega))^2] \le A(x_0^2+y_0^2)exp\{-\alpha(t-t_0)\}$$

Пусть L – производящий дифференциальный оператор процесса $(x(t,\omega),\ y(t,\omega))$, определяемого системой (2):

$$L = [f(x) + ay]\frac{\partial}{\partial x} + [bx + g(y)]\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}[\varphi(x)]^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

(В классе функций C^1 значение оператора L совпадает с соответствующим значением оператора "производной в силу системы (2)".)

Приведем два общих утверждения из стохастической теории устойчивости, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма 1[2]. *Пусть в области D, содержащей начало координат $\{x = 0,\ y = 0\}$, существует положительно - определенная непрерывно дифференцируемая функция $V(x, y)$, удовлетворяющая при $x \neq 0,\ y \neq 0$ условию $LV(x, y) \leq 0$. Тогда тривиальное решение $\{x(t, \omega) \equiv 0,\ y(t, \omega) \equiv 0\}$ системы (2) устойчиво по вероятности.*

Лемма 2[2]. *Для того чтобы тривиальное решение $\{x(t, \omega) \equiv 0,\ y(t, \omega) \equiv 0\}$ системы (2) было асимптотически устойчивым в целом, достаточно чтобы существовала положительно-определенная дважды непрерывно дифференцируемая функция $V(x, y)$ такая, что функция $LV(x, y)$ отрицательно определена, причем*

$$V(x, y) = +\infty, \text{ при } x^2 + y^2 \to +\infty$$

Заметим, что это утверждение обобщает хорошо известную теорему Барбашина-Красовского (в ее частном виде) на стохастические системы.

4. Формулировка результатов и доказательство теорем об устойчивости системы (1).

Основными результатами настоящей статьи являются следующие теоремы.

Теорема 1.*Предположим, что существуют константы $\delta_0 > 0, \delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 > 0, \sigma_0 > 0$ и Δ такие, что в некоторой окрестности D начала координат выполнены условия:*

$$\begin{aligned}
&1)\ c_1\tfrac{f(x)}{x} - ab > \delta_0 \quad (x \neq 0),,\\
&2)\ c_1 + \tfrac{f(x)}{x} < -\delta_1 \quad (x \neq 0),\\
&3)\ c_2\tfrac{g(y)}{y} - ab > \delta_2 \quad (y \neq 0),\\
&4)\ c_2 + \tfrac{g(y)}{y} < -\delta_3 \quad (y \neq 0),\\
&5)\ c_1 f'(x) - ab < \Delta,\\
&6)\ 0 < \tfrac{\varphi(x)}{x} < \sigma_0 \quad (x \neq 0),\\
&7)\ (\tfrac{f(x)}{x} + c_1)(c_1\tfrac{f(x)}{x} - ab) \leq -\tfrac{\sigma_0^2}{2}(c_1^2 + \Delta) \quad (x \neq 0),
\end{aligned}$$

где константы c_1 и c_2 выбраны так, что $c_1 c_2 = ab$.

Тогда тривиальное решение системы (1) устойчиво по вероятности.

Теорема 2.*Пусть для системы (1) выполнены условия 1)-6) теоремы 1. Пусть, далее, выполнено условие:*

$7)\frac{\sigma_0^2}{2}(\Delta + c_1^2) < \delta_0\delta_1$.

Тогда тривиальное решение системы (1) асимптотически устойчиво в целом.

Если, кроме условий 1)-7), имеют место неравенства

$$\begin{aligned}
&8)\ c_1\tfrac{f(x)}{x} - ab < \delta_4 \quad (x \neq 0),\\
&9)\ c_2\tfrac{g(y)}{y} - ab < \delta_5 \quad (y \neq 0),
\end{aligned}$$

где δ_4 и δ_5 - некоторые положительные константы, то тривиальное решение системы (1) экспоненциально устойчиво в среднем квадратическом.

Доказательство теоремы 1. Введем в рассмотрение функцию Ляпунова

$$V(x, y) = (c_1^2 - ab)x^2 + (a^2 - \gamma ab)y^2 + 2c_1\int_0^x f(\xi)d\xi + 2\gamma c_2\int_0^y g(\eta)d\eta - 2ac_1xy,$$

где $\gamma = a^2/c_1^2, \quad c_1 c_2 = ab$. Вычислим LV. После некоторых элементарных преобразований с учетом того, что $\gamma = a^2/c_1^2$ и $c_1 c_2 = ab$, получим

$$\frac{1}{2}LV = [(c_1 + \frac{f(x)}{x})(c_1\frac{f(x)}{x} - ab) + \frac{1}{2}\frac{\varphi(x)^2}{x^2}(c_1^2 + c_1 f'(x) - ab)]x^2 + [\frac{a^2}{c_2^2}(c_2 + \frac{g(y)}{y})(c_2\frac{g(y)}{y} - ab)]y^2.$$

Оценим LV сверху. С учетом условий 3)-7) теоремы 1 имеем

$LV(x,y) \leq 0 \quad \forall (x,y) \in D$. Установим теперь положительную определенность функции $V(x,y)$. Для этого преобразуем выражение в правой части равенства (3) к виду

$$V = (c_1 x - ay)^2 + 2\int_0^x [c_1 f(x) - abx]dx + 2\gamma\int_0^y [c_2 g(y) - aby]dy.$$

С учетом условий 1) и 3) теоремы 1 из равенства (5) получаем следующую оценку снизу для V:

$$V(x,y) \geq 2\int_0^x [c_1\frac{f(x)}{x} - ab]xdx + 2\gamma\int_0^y [c_2\frac{g(y)}{y} - ab]ydy \geq \delta_0 x^2 + \gamma\delta_2 y^2 \geq \alpha(x^2 + y^2),$$

где $\alpha = \min\{\delta_0, \gamma\delta_2\}, \quad \alpha > 0$.

В силу леммы 1 (см. выше) тривиальное решение $\{x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0\}$ системы (1) устойчиво по вероятности. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. В качестве функции Ляпунова возьмем функцию $V(x,y)$, определяемую равенством (3).

Оценим LV. В силу условий 1)-7) теоремы 2 из равенства (4) получаем следующую оценку

$$\frac{1}{2}LV \leq -\varkappa(x^2 + y^2) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

где

$$\varkappa = \min\{\delta_0\delta_1 - \frac{\sigma_0^2}{2}(\Delta + c_1^2), \frac{\delta_2\delta_3 a^2}{c_1^2}\} > 0.$$

Таким образом, $LV(x,y)$ отрицательно определена.

Далее, из оценки (6) следует положительная определенность функции $V(x,y)$. Из (6) также следует, что $V(x,y) \to +\infty$ при $x^2 + y^2 \to \infty$.

Итак, выполнены все условия леммы 2(см. выше). Следовательно, решение $(x(t,\omega) \equiv 0, y(t,\omega) \equiv 0)$ системы (1) асимптотически устойчиво в целом.

Для доказательства второй части утверждения теоремы 2 достаточно заметить, что в силу условий 8) и 9) функция V допускает также следующую оценку сверху

$$V(x,y) \leq (c_1 x - ay)^2 + \delta_4 x^2 + \gamma\delta_5 y^2 \leq \beta(x^2 + y^2), \tag{4}$$

где $\beta > 0$ – некоторая константа.

Остается сослаться на общую теорему из [2], об экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом (аналогичную вышеприведенной лемме 2) . Это завершает полное доказательство теоремы 2. Теорема 2 доказана.

Замечание. Для детерминированного ($\sigma = 0$) линейного случая $f(x) = cx, \ g(y) = dy$ условия доказанной теоремы превращаются в необходимые и достаточные условия Рауса-Гурвица.

Литература

1. *Кушнер Г.Дж.* Стохастическая устойчивость и управление. – М.: Мир, 1969. – 199 с.

2. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 367 с.

3. *Kushner H.J.* On the construction of stochastic Lyapunov function //IEEE Trans. Automat. Control. – 1965. – B.10. – є4. – P. 477-478.

4. *Шумафов М.М.* О построении функций Ляпунова для некоторых нелинейных стохастических дифференциальных уравнений второго порядка и вопросы устойчивости//Дифф. уравн. 1981. – Т.17. – N6. – С. 1143-1145.

5. *Шумафов М.М.* Функции Ляпунова для двумерных линейных стохастических систем// Труды Физ. Общ. Респ. Адыгея (ФОРА). – 1997. – N2. – С.1-26.

6. *Shumafov M.M.* On the stochastic stability of a nonlinear system perturbed by a "white"noise random process// Trudy Fiz. Obsh. Resp. Adygheya. – 1999. – N4. – P. 118-124.

7. *Shumafov M.M.* On the stability of a second-order nonlinear stochastic system// Trudy Fizitch. Obsh. Resp. Adygheya. – 2002. – N7. – P. 98-102.

8. *Шумафов М.М.* Об асимптотической устойчивости двумерной нелинейной динамической системы, возмущенной "белым"шумом //Труды Физич. Общ. Респ. Адыгея. – 2004. – N9. – С. 106-109.

9. *Еругин Н.П.* О некоторых вопросах теории устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений// Прикл. матем. и мех. – 1950. – Т.14. – Вып.5. – С.459-512.

10. *Малкин И.Г.* Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования// Прикл. матем. и мех. – 1952. – Т.16. – Вып.3. – С.365-368.

11. *Красовский Н.Н.* Об устойчивости решений системы двух дифференциальных уравнений// Прикл. матем. и мех. – 1953. – Т.27. – Вып.6. – С.651-672.

On the Stochastic stability of a Two-dimensional Nonlinear Dynamical System (англ.)

M.M. Shumafov

In present paper sufficient conditions for stability and asymptotic stability of a two-dimensional nonlinear stochastic dynamical system are given.

КъеIолIэн (адыг.)

Мы тхылъым къытетэIуатэ, сыд фэдэ икъоу кондициехэр ищыкIагъа шэпхъитIу зиIэ мылинейнэ стохастикэ динамикэ системыр стабиль шIыпIэ ихьаным пае уахътэр кIуатэ къэс.

