2003 г. **№8**

Т р у д ы   Ф О Р А

О ВЫЧИСЛЕНИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПЛОТНОСТЬЮ, АНАЛИТИЧЕСКОЙ ВНУТРИ ОТРЕЗКА

А. А. Марданов

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

Для сингулярных интегралов с плотностью, аналитической во внутренних точках отрезка интегрирования, получены новые квадратурные формулы с оценкой остатка $O(e^{-a\sqrt{n}})$ (a – положительное число, близкое к единице, n – число узлов), не требующие хранения и вычисления массивов объема n^2.

1. В работе [3] построены квадратурные формулы для сингулярных интегралов с плотностью, аналитической внутри отрезка. Они основывались на формуле, построенной в [2] для обычных интегралов с весом Чебышева от функции, аналитической внутри отрезка, и имели те же узлы. Коэффициенты их зависят от параметра, причем зависимость не прослеживается явно, так что в частности, когда число значений параметра равно числу узлов, приходится вычислять и хранить n^2 значений коэффициентов. Более того, для расчета коэффициентов при одном значении параметра приходится решать линейную систему порядка n. В настоящей статье построены квадратурные формулы для сингулярных интегралов типа Коши с плотностью такого же рода, свободные от указанных недостатков. Это оказывается возможным, так как формула, построенная в [2], в определенном смысле может быть истолкована как формула прямоугольников для периодической функции. Выделяя полюс с помощью ядра Гильберта и применяя формулу Корнейчука [3], можно построить достаточно простые формулы с явными выражениями для квадратурных коэффициентов.

В статье [2] построена оптимальная в H_2 с чебышевским весом квадратурная формула для промежутка $[-a, a] \subset [-1, 1]$:

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx \;\approx\; \pi\lambda^{-1} \sum_{m=1}^{n} \sqrt{1 - k^2 s_m^2} f(a s_m), \tag{1}$$

$s_m = \mathrm{snu_m} = \mathrm{sn}(\frac{2m-n-1}{n}\mathrm{K}, \mathrm{k})$, $\quad \mathrm{k} = \mathrm{a}^2$. Здесь множитель λ выбран в соответствии с первым главным преобразованием n-й степени для эллиптических функций : $\lambda K = nL$, $\quad \lambda K' = L'$, $\quad$ где $K = K(k)$ — полный эллиптический интеграл, $\quad L = K(l)$, $\quad L' = K(l')$, $\quad l' = \sqrt{1 - l^2}$ — сопряженный модуль. Формула (1) точна для правильных дробей с полюсами в точках, обратных к узлам (полюсы не выше второго порядка). Обозначим $h = \exp(-\pi K'/K)$, $\quad q = \exp(-\pi L'/L)$ — параметры тета-функций для модулей k, l. Для класса функций, аналитических внутри единичного круга и удовлетворяющих оценкам

$$|f(x)| \le N|1 \pm x|^{\alpha - 1},$$

$$\int\limits_{|z|=1-0} |z^2 - a^2|^{-\frac{1}{2}} |f(z)\, dz| \le M_1, \tag{2}$$

в статье [2] получена оценка остатка

$$|R| \le C_n M_1 \exp\Bigl(-\frac{n\pi K'}{2K}\Bigr), \tag{3}$$

где

$$C_n = \Bigl(1 - 0.5\exp\Bigl(-\frac{n\pi K'}{2K}\Bigr)\Bigr)^{-1} \to 1.$$

Пусть $w=u+iv$, $\xi=\theta+i\eta$, $w=\frac{2K}{\pi}\xi$. После замены $x=a\,\mathrm{snu}=\mathrm{a}\,\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\theta$ формула (1) принимает вид

$$I_1=\frac{2K}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}F_1(\theta)\,d\theta=\frac{K}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}F_1(\theta)\,d\theta\approx\frac{\pi K}{nL}\sum_{m=1}^{n}F_1\Big(\frac{\pi(2m-n-1)}{2n}\Big), \tag{4}$$

так как $F_1(\theta)=f(a\,\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\theta)\mathrm{dn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\theta$ — периодическая функция, четная относительно точки $\frac{\pi}{2}$. Формула средних прямоугольников для того же интеграла имеет следующий вид :

$$I_1\approx\frac{K}{n}\sum_{m=0}^{2n-1}F_1\Big(\frac{\pi(2m-n-1)}{2n}\Big).$$

Используя симметрию узлов, ее можно записать в виде

$$I_1\approx\frac{2K}{n}\sum_{m=1}^{n}F_1\Big(\frac{\pi(2m-n-1)}{2n}\Big). \tag{5}$$

Множители перед суммами в формулах (4) и (5) связаны соотношением

$$\frac{\pi K}{nL}=\frac{\pi}{2L}\frac{2K}{n}.$$

Отсюда получаем выражение для остатка формулы (5) [2]:

$$R=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\Big(\frac{\pi}{\sqrt{z^2-a^2}}-\frac{2L}{\pi}y(z)\Big)f(z)\,dz,\ y(z)=-\frac{a^{-1}\pi l'\mathrm{sn}(\lambda(\mathrm{z+K}),\mathrm{l})}{\mathrm{cn}(\mathrm{z,k})\mathrm{cn}(\lambda(\mathrm{z+K}),\mathrm{l})}.$$

Пусть $f(z)$ удовлетворяет оценкам (2). Тогда

$$|R|\le\frac{M_1}{2\pi}\max_{z=1}\Big|\frac{2L}{\pi}y(z)-\frac{\pi}{\sqrt{z^2-a^2}}\Big|\,|z^2-a^2|^{\frac{1}{2}}=\pi\Big|\frac{l'}{\sqrt{1-l\theta^{-2}}}\theta_3^2-1\Big|,\quad |\theta|=1,$$

поскольку

$$L=\frac{\pi}{2}\theta_3^2=\frac{\pi}{2}\Big(1+2\sum_{k=1}^{\infty}q^{k^2}\Big)^2.$$

Полагая

$$\frac{l'}{\sqrt{1-l\theta^{-2}}}=\omega,$$

$$\pi\Big|\frac{l'}{\sqrt{1-l\theta^{-2}}}\theta_3^2-1\Big|=\pi|\sqrt{1+\omega}\theta_3^2-1|\le$$

$$\le\pi\Big|1-\sqrt{1-l}+\frac{4q\sqrt{1+l}}{(1-q)^2}\Big|=\pi\Big|\frac{l}{1+\sqrt{1-l}}+\frac{4q\sqrt{1+l}}{(1-q)^2}\Big|,$$

$$|R|\le\overline{C}_nM_1\exp\Big(-\frac{n\pi K'}{2K}\Big),$$

имеем

$$|\overline{C}_n|\le 2\Big(\Big(1-0.5\exp\Big(-\frac{n\pi K'}{2K}\Big)\Big)^{-1}+\sqrt{1+4\exp\Big(-\frac{n\pi K'}{2K}\Big)}\times$$

$$\times\exp\Big(-\frac{n\pi K'}{2K}\Big)\Big(1-\exp\Big(-\frac{n\pi K'}{K}\Big)\Big)^{-2}\Big)\to 2.$$

2. Для интеграла I_1 естественно рассмотреть формулу трапеций с узлами $\frac{\pi(2m-n)}{2n}$, которая также точна для тригонометрического полинома $n-1$-го порядка :

$$I_1 \approx \frac{K}{n} \sum_{m=0}^{2n-1} F_1\Big(\frac{\pi(2m-n)}{2n}\Big). \tag{6}$$

Ее можно привести к виду

$$I_1 \approx \frac{2K}{n} \quad \sum_{m=0}^{n}{}'' F_1\Big(\frac{\pi(2m-n)}{2n}\Big),$$

где "$''$"означает, что крайние слагаемые дополнительно снабжаются множителем "$\frac{1}{2}$".

Для интеграла I формула трапеций порождает формулу

$$I \approx \frac{K}{n} \sum_{m=0}^{n} \sqrt{1-k^2\overline{s}_m^2} f(a\overline{s}_m),$$

где $\overline{s}_m = \mathrm{sn}\overline{\mathrm{u}}_\mathrm{m} = \mathrm{sn}(\frac{2\mathrm{m}-\mathrm{n}}{\mathrm{n}}\mathrm{K}, \mathrm{k})$.

Погрешность формулы трапеций для периодической функции с n узлами

$$R = \int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta - h\sum_{m=0}^{n-1} f(mh), \quad h = \frac{2\pi}{n},$$

как хорошо известно, выражается следующим образом:

$$R = 2\pi \sum_{p\in Z} c_{np},$$

$$|R| \le 2\pi \sum_{p\in Z} |c_{np}|,$$

где c_k — коэффициенты Фурье функции $f(\theta)$. Понятно, что такая же оценка верна и для формулы средних прямоугольников.

В предположении абсолютной сходимости ряда

$$F_1(\theta) = \sum_{k\in Z} \tilde{c}_k \exp(ik\theta)$$

для (6) получаем оценку остатка

$$|R| \le 4K \sum_{|k|=1}^{\infty} |\tilde{c}_{2nk}|. \tag{7}$$

Функция $F_1(\xi)$ регулярна внутри полосы $|\mathrm{Im}\,\xi| \le \frac{\pi K'}{4K}$, поэтому

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_1(\theta+i\eta)\exp(ik(\theta+i\eta))\,d\theta,$$

откуда

$$|\tilde{c}_k| \le \frac{\exp(-|k|\eta)}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F_1(\theta+i\eta)|\,d\theta.$$

Устремим теперь η к $\pm\frac{\pi}{4}\frac{K'}{K}$ и заметим, что

$$\lim_{\eta\to\frac{\pi K'}{4K}} \int_0^{2\pi} |F_1(\theta+i\eta)|\,d\theta \le M_1.$$

Тогда видим, что

$$|\tilde{c}_k| \leq \frac{M_1}{2\pi} \exp\Big(-|k|\frac{\pi K'}{4K}\Big), \tag{8}$$

откуда

$$|R| \leq \frac{2M_1 K}{\pi\Big(1-\exp\Big(-\frac{n\pi K'}{2K}\Big)\Big)} \exp\Big(-\frac{n\pi K'}{2K}\Big). \tag{9}$$

3. Формулы (5) и (6) могут быть использованы для вычисления интеграла по промежутку $[-1,1]$ от функции, являющейся аналитической внутри $[-1,1]$ и имеющей особенности на его концах. Для этого возьмем a близким к единице и заменим

$$\overline{I} = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \overline{I}_a = \int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{a} \frac{F(x)}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx,$$

$$F(x) = \sqrt{a^2-x^2} f(x),$$

в интеграле $\overline{I}_a$ сделаем замену $x = a\,\mathrm{snu}$ и вычислим его после этого по построенным формулам:

$$\overline{I}_a \approx \frac{2K}{n}\sum_{m=1}^{n} F(as_m)\mathrm{dn\,s_m},$$

$$\overline{I}_a \approx \frac{2K}{n}\quad{\sum_{m=0}^{n}}'' F(a\overline{s}_m)\mathrm{dn\,\overline{s}_m}.$$

Остаточные члены этих формул имеют вид

$$R^{(i)} = \Delta_1^{(i)} + \Delta_2^{(i)},\ i=1,2,$$

где

$$\Delta_1^{(1)} = \Delta_1^{(2)} = \int\limits_{-1}^{-a} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{1} f(x)\,dx,$$

$\Delta_2^{(1)}, \Delta_2^{(2)}$ — остаточные члены формул, полученных в пп. 1 и 2. Оценим $\Delta_1^{(i)}$ в предположении, что $f(x)$ удовлетворяет неравенствам (2). Если $0<\alpha<1$, то, положив $1-\alpha=\beta$, имеем

$$\Big|\int\limits_{a}^{1} f(x)\,dx\Big| \leq N\int\limits_{a}^{1}(1-x)^{-\beta}\,dx = \frac{N(1-a)^{1-\beta}}{1-\beta}.$$

Интеграл по промежутку $[-a,-1]$ оценивается аналогично, и

$$|\Delta_1^{(i)}| \leq \frac{2N(1-a)^{1-\beta}}{1-\beta}.$$

Для случая $\alpha>1$ положим $\alpha-1=\beta$, тогда

$$|\Delta_1^{(i)}| \leq \frac{2N(1-a)^{1+\beta}}{1+\beta}$$

и для $\alpha>0$ имеем

$$|\Delta_1^{(i)}| \leq \frac{2N(1-a)^{\alpha}}{\alpha},\quad i=1,2.$$

Отсюда

$$|R^{(i)}| \leq \overline{C}_n M_1 \exp\Big(-\frac{n\pi K'}{2K}\Big) + \frac{2N(1-a)^{\alpha}}{\alpha}.$$

Принимая во внимание, что

$$1-a=4h'\frac{1+(h')^8+(h')^{24}+\dots}{1+2h'+2(h')^4+\dots}<4\exp\Bigl(-\frac{\pi K}{K'}\Bigr),$$

выберем a так, чтобы показатели были равны: $-\alpha\pi K/K' = -n\pi K'/(2K)$, откуда $K/K' = \sqrt{n/(2\alpha)}$ и окончательно

$$|R^{(1)}|\le \exp\Bigl(-\pi\sqrt{\frac{n\alpha}{2}}\Bigr)\Bigl(\overline{C}_n M_1+2N\alpha^{-1}\Bigr).$$

Рассуждая аналогично, получаем

$$|R^{(2)}|\le 2\exp\Bigl(-\pi\sqrt{\frac{n\alpha}{2}}\Bigr)\Bigl(\frac{M_1K}{\pi}\Bigl(1-\exp\Bigl(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2\alpha}{n}}\Bigr)\Bigr)^{-1}+N\alpha^{-1}\Bigr).$$

4. Основной целью настоящей статьи является построение квадратурных формул для сингулярных интегралов. В работе [3] построена квадратурная формула для вычисления сингулярного интеграла с ядром Гильберта с узлами формулы трапеций:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\operatorname{ctg}\frac{x-t}{2}\,dx \approx \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{2n-1} S\left(\frac{\pi m}{n}-t\right) f\left(\frac{\pi m}{n}\right), \tag{10}$$

$$S(x)=\sin\frac{n-1}{2}\,x\sin\frac{n}{2}\,x\operatorname{cosec}\frac{x}{2},$$

точная, когда $f(x)$– тригонометрический полином $n-1$-го порядка. В предположении абсолютной сходимости ряда Фурье функции $f(x)$ получена оценка остатка

$$|R|\le 4\sum_{k=n}^{\infty}|c_k|. \tag{11}$$

Можно построить аналогичную формулу с узлами формулы средних прямоугольников. Рассмотрим такие формулы, сдвинув начало отсчета узлов:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\operatorname{ctg}\frac{x-t}{2}\,dx \approx \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{2n-1} S\Bigl(\frac{\pi(2m-n-1)}{2n}-t\Bigr) f\Bigl(\frac{\pi(2m-n-1)}{2n}\Bigr), \tag{12}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\operatorname{ctg}\frac{x-t}{2}\,dx \approx \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{2n-1} S\Bigl(\frac{\pi(2m-n)}{2n}-t\Bigr) f\Bigl(\frac{\pi(2m-n)}{2n}\Bigr). \tag{13}$$

Нетрудно убедиться, что эти формулы также точны для тригонометрического полинома $n-1$–й степени. Рассмотрим сингулярный интеграл

$$J(t)=\int\limits_{-a}^{a}\frac{f(x)}{(t-x)\sqrt{a^2-x^2}}\,dx,\quad t\in(-a,a).$$

Построим для него формулу, аналогичную (10). После замены $x=a\,\mathrm{snu}=\mathrm{a\,sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\theta,\quad \mathrm{t}=\mathrm{a\,sn}\varphi=\mathrm{a\,sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\psi$ получаем

$$J(\psi)=\frac{K}{a\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(a\,\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\theta)\mathrm{dn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\theta}{\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\psi-\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\theta}\,d\theta.$$

Функция

$$D(\theta,\psi)=\frac{\mathrm{dn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\theta}{\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\psi-\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\theta}$$

имеет простые полюсы в точках $\theta=\psi,\theta=\pi-\psi$. Вычеты в этих полюсах равны соответственно $-R$, R, $R=\pi/(2K\mathrm{cn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\psi)$. Чтобы воспользоваться формулой (10), выделим эти полюсы с помощью ядра Гильберта мультипликативным способом, т. е. представим $D(\theta,\psi)$ в виде

$$\frac{dn\frac{2K}{\pi}\theta}{\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\psi-\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\theta}=\frac{1}{\sin\psi-\sin\theta}\times\frac{\sin\psi-\sin\theta}{\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\psi-\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\theta}\mathrm{dn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\theta.$$

Далее, имеем

$$\frac{1}{\sin\psi-\sin\theta}=\frac{1}{2\cos\psi}\Big(\mathrm{ctg}\,\frac{\theta-\pi+\psi}{2}-\mathrm{ctg}\,\frac{\theta-\psi}{2}\Big).$$

Разбивая $J(\psi)$ на два интеграла и применяя формулу (10), получаем квадратурную формулу

$$J(\psi)\approx\frac{K}{an\cos\psi}\sum_{m=0}^{2n-1}P_1(\alpha_m,\psi)(S(\alpha_m-\pi+\psi)-S(\alpha_m-\psi))f(\alpha_m),\tag{14}$$

где

$$P_1(\theta,\psi)=\frac{\sin\psi-\sin\theta}{\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\psi-\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\theta}\,\mathrm{dn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\theta$$

– периодическая функция, не имеющая особенностей на $[0,2\pi]$, $\alpha_m=\frac{\pi m}{n}$.
Полагая в (14) $\psi=\alpha_l, l=\overline{0,2n-1}$, после некоторых преобразований получаем для $n=2p-1$:

$$J(\alpha_l)\approx\frac{1}{an}\Big(-\pi\frac{\mathrm{tg}\,\alpha_l}{\mathrm{cn}\frac{2\mathrm{Kl}}{\mathrm{n}}}f\Big(a\,\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{Kl}}{\mathrm{n}}\Big)+$$

$$+K\sum_{m=0,m\neq l,n-l}^{2n-1}\frac{\mathrm{dn}\frac{2\mathrm{Km}}{\mathrm{n}}}{\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{Kl}}{\mathrm{n}}-\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{Km}}{\mathrm{n}}}\Big(1-(-1)^{m+l}\frac{\cos\alpha_m}{\cos\alpha_l}\Big)f\Big(a\,\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{Km}}{\mathrm{n}}\Big)\Big),\tag{15}$$

Особенно простой вид она принимает для $n=2p$:

$$J(\alpha_l)\approx\frac{K}{an}\sum_{m=0}^{2n-1}\frac{\mathrm{dn}\frac{2\mathrm{Km}}{\mathrm{n}}}{\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{Kl}}{\mathrm{n}}-\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{Km}}{\mathrm{n}}}(1-(-1)^{m+l})f\Big(a\,\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{Km}}{\mathrm{n}}\Big).\tag{16}$$

Можно также выделить полюсы функции $D(\theta,\psi)$ аддитивным способом, т. е. вычесть и добавить слагаемое

$$B\Big(\mathrm{ctg}\,\frac{\theta-\pi+\psi}{2}-\mathrm{ctg}\,\frac{\theta-\psi}{2}\Big)=\frac{2B\cos\psi}{\sin\psi-\sin\theta},$$

где B — постоянная. У функции

$$\frac{2\cos\psi}{\sin\psi-\sin\theta}$$

те же полюсы, а вычеты равны -2, 2. Таким образом, при надлежащем выборе B имеем представление

$$\frac{\mathrm{dn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\theta}{\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\psi-\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\theta}=B\Big(\mathrm{ctg}\,\frac{\theta-\pi+\psi}{2}-\mathrm{ctg}\,\frac{\theta-\psi}{2}\Big)+G(\theta,\psi),\tag{17}$$

где $G(\theta,\psi)$ — функция, не имеющая полюсов и, следовательно, регулярная на вещественной оси. Полагая в (17) $\theta=\psi$, находим $B=\pi/(4K\mathrm{cn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\psi)$. Учитывая вышесказанное, получаем представление

$$J(\psi)=\frac{K}{a\pi}(J_1(\psi)+J_2(\psi)+J_3(\psi)),$$

где

$$J_1(\psi)=\int\limits_0^{2\pi} P_2(\theta,\psi) f\Big(a\,\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\theta\Big)\,\mathrm{d}\theta,$$

$$J_2(\psi)=-B\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{ctg}\,\frac{\theta-\psi}{2} f\Big(a\,\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\theta\Big)\,\mathrm{d}\theta,$$

$$J_3(\psi)=B\int_0^{2\pi} \mathrm{ctg}\,\frac{\theta-\pi+\psi}{2} f\Big(a\,\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\theta\Big)\,\mathrm{d}\theta,$$

$$P_2(\theta,\psi)=\frac{\mathrm{dn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\theta}{\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\psi-\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\theta}-B\Big(\mathrm{ctg}\,\frac{\theta-\pi+\psi}{2}-\mathrm{ctg}\,\frac{\theta-\psi}{2}\Big)$$

— периодическая функция, не имеющая особенностей на $[0,2\pi]$.

Вычисляя $J_1(\psi)$ по формуле (5), $J_2(\psi)$ и $J_3(\psi)$ — по формуле (12) , после некоторых преобразований получаем формулу

$$J(\psi)\approx P_n=\frac{1}{an}\sum_{m=1}^{n}\Big(2KP_2(\beta_m,\psi)+\frac{\pi}{\mathrm{cn}\frac{2\mathrm{K}\psi}{\pi}}(S(\beta_m-\pi+\psi)-S(\beta_m-\psi))\Big)f(\beta_m), \qquad (18)$$

$$\beta_m=\frac{\pi(2m-n-1)}{2n}.$$

Ее можно привести к виду для $n=2p-1$:

$$J(\psi)\approx P_n^{(1)}=\frac{1}{an}\sum_{m=1}^{n}\Big(\frac{2K\mathrm{dn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\beta_\mathrm{m}}{\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\psi-\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\beta_\mathrm{m}}+(-1)^{m-p}\frac{\pi\cos\beta_m\cos n\psi}{\mathrm{cn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\psi(\sin\beta_\mathrm{m}-\sin\psi)}\Big)f(\beta_m),$$

для $n=2p$:

$$J(\psi)\approx P_n^{(2)}=\frac{1}{an}\sum_{m=1}^{n}\Big(\frac{2K\mathrm{dn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\beta_\mathrm{m}}{\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\psi-\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\beta_\mathrm{m}}+(-1)^{m-p+1}\frac{\pi\cos\beta_m\sin n\psi}{\mathrm{cn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\psi(\sin\beta_\mathrm{m}-\sin\psi)}\Big)f(\beta_m).$$

Вычисляя $J_1(\psi)$ по формуле (6), $J_2(\psi)$ и $J_3(\psi)$ — по формуле (13), получаем формулу

$$J(\psi)\approx T_n=\frac{1}{an}\sum_{m=0}^{2n-1}(KP_2(\gamma_m,\psi)+\,+\frac{\pi}{2\mathrm{cn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\psi}(S(\gamma_m-\pi+\psi)-S(\gamma_m-\psi)))f(\gamma_m), \qquad (19)$$

$$\gamma_m=\frac{\pi(2m-n)}{2n}.$$

Ее можно привести к виду для $n=2p-1$:

$$J(\psi)\approx T_n^{(1)}=\frac{2}{an}\sum_{m=0}^{n}\Big(\frac{K\mathrm{dn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\gamma_\mathrm{m}}{\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\psi-\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\gamma_\mathrm{m}}+(-1)^{m-p}\frac{\pi(\sin(n-1)\psi-\cos n\psi\sin\gamma_m)}{2\mathrm{cn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\psi(\sin\gamma_\mathrm{m}-\sin\psi)}\Big)f(\gamma_m),$$

для $n=2p$:

$$J(\psi)\approx T_n^{(2)}=\frac{2}{an}\sum_{m=0}^{n}\Big(\frac{K\mathrm{dn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\gamma_\mathrm{m}}{\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\psi-\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\gamma_\mathrm{m}}+(-1)^{m-p}\frac{\pi(\cos(n-1)\psi+\sin n\psi\sin\gamma_m)}{2\mathrm{cn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\psi(\sin\gamma_\mathrm{m}-\sin\psi)}\Big)f(\gamma_m).$$

5. Для погрешности формулы (14) согласно (11) имеем оценку

$$|R(\psi)|\le\frac{8K}{a\cos\psi}\sum_{k=n}^{\infty}|c_k|,$$

где c_k — коэффициенты Фурье функции $P_1(\xi,\psi)f(a\,\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\xi)$. Тогда, как и в (8),

$$|c_k| \le M\exp\Big(-|k|\frac{\pi K'}{4K}\Big),$$

$$M = \frac{M_1}{2\pi}\max_{\xi\in[-\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi K'}{4K},\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi K'}{4K}]}\Big|\frac{\sin\psi-\sin\xi}{\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\psi-\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\xi}\Big|.$$

Поскольку $\xi=\frac{\pi}{2K}(u+iv)$, имеем

$$M = \frac{M_1}{2\pi}\max_{w\in[-K+i\frac{K'}{2},K+i\frac{K'}{2}]}\Big|\frac{\sin\frac{\pi}{2K}\varphi-\sin\frac{\pi}{2K}w}{\mathrm{sn}\varphi-\mathrm{snw}}\Big|.$$

Далее,

$$\Big|\sin\frac{\pi}{2K}\varphi-\sin\frac{\pi}{2K}w\Big|\le 2+\exp\Big(\frac{\pi K'}{2K}\Big),\ \ |\mathrm{sn}\varphi-\mathrm{snw}|\ge \mathrm{a}^{-1}-|\mathrm{sn}\varphi|,$$

поскольку

$$|\mathrm{snw}|=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{k}}},\ \mathrm{Im\,w}=(\mathrm{p}+0.5)\mathrm{K}',\quad \mathrm{p}\in\mathrm{Z},$$

$$|M|\le\frac{M_1}{2\pi}\Big(\frac{2+\exp(\pi K'/(2K))}{1-a|\mathrm{sn}\varphi|}\Big),$$

$$|c_k|\le\frac{M_1}{2\pi}\Big(\frac{2+\exp(\pi K'/(2K))}{1-a|\mathrm{sn}\varphi|}\Big)\frac{\exp(-n\pi K'/(4K))}{1-\exp(-\pi K'/(4K))}.$$

Теперь

$$\frac{1}{1-\exp(-\pi K'/(4K))}=\frac{\exp(\pi K'/(8K))}{2\,\mathrm{sh}(\pi K'/(8K))}\le\frac{4K}{\pi K'}\exp(\pi K'/(8K)).$$

Положим $v=K-\varphi$, тогда

$$\cos\psi=\sin\frac{\pi}{2K}vK^{-1}v\ge K^{-1}\mathrm{snv}=\mathrm{K}^{-1}\sqrt{1-(\mathrm{t/a})^2}/\sqrt{1-\mathrm{k}^2(\mathrm{t/a})^2},$$

так как

$$\mathrm{snv}=\mathrm{sn}(\mathrm{K}-\varphi)=\frac{\mathrm{cn}\varphi}{\mathrm{dn}\varphi}=\sqrt{\frac{1-\mathrm{sn}^2\varphi}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\varphi}},$$

и

$$|R(t)|\le\frac{16M_1K^3(2+\exp(\pi K'/(2K)))\exp(\pi K'/(8K))}{a\pi^2K'(1-|t|)}\sqrt{\frac{1-a^2t^2}{1-a^{-2}t^2}}\exp(-n\pi K'/(4K)).$$

Для оценки погрешностей формул (18) и (19) представим их соответственно в виде

$$R^{(i)}(\psi)=\frac{K}{a\pi}\Big(R_1^{(i)}(\psi)+R_2^{(i)}(\psi)+R_3^{(i)}(\psi)\Big),\ i=1,2.$$

Здесь $R_1^{(i)}(\psi)$ — погрешности вычисления интеграла $J_1(\psi)$ по формулам (5) и (6), $R_2^{(i)}(\psi)$, $R_3^{(i)}(\psi)$ — погрешности вычисления интегралов $J_2(\psi)$, $J_3(\psi)$ по формулам (12) и (13). Пусть $f(x)$ удовлетворяет оценкам

$$\int\limits_{|z|=1-0}|f(z)dz|\le M_2,\quad |f(x)|\le N|1\pm x|^{\alpha-1}.$$

Согласно (7) имеем

$$R_1^{(i)}(\psi)\le 4\pi\sum_{|k|=1}^{\infty}|\hat c_{2nk}|,$$

$\hat c_k$ — коэффициенты Фурье функции $P_2(\xi,\psi)f\Big(a\,sn\frac{2K}{\pi}\xi\Big)$. Снова используя (8), получаем

$$|\hat c_k|\le M\exp\Big(-|k|\frac{\pi K'}{4K}\Big)$$

в полосе

$$|\operatorname{Im}\xi| \le \frac{\pi K'}{4K},\ M = M_2 \max_{w\in[-K+i\frac{K'}{2},K+i\frac{K'}{2}]}\Big|\frac{dnw}{sn\varphi - snw} - \frac{\pi\cos\frac{\pi}{2K}\varphi}{2Kcn\varphi(\sin\frac{\pi}{2K}\varphi - \sin\frac{\pi}{2K}w)}\Big|.$$

Оценим второй знаменатель. Для этого представим его в виде

$$\Big|\sin\frac{\pi}{2K}\varphi - \sin\frac{\pi}{2K}w\Big| = 2\Big|\sin\frac{\pi}{4K}(\varphi - w)\cos\frac{\pi}{4K}(\varphi + w)\Big|,$$

и так как φ вещественно, а $|\operatorname{Im} w| = \frac{K'}{2}$, то

$$\Big|\sin\frac{\pi}{4K}(\varphi - w)\Big| \ge \operatorname{sh}\Big(\frac{\pi K'}{8K}\Big),\quad \Big|\cos\frac{\pi}{4K}(\varphi - w)\Big| \ge \operatorname{sh}\Big(\frac{\pi K'}{8K}\Big),\quad \Big|\sin\frac{\pi}{2K}\varphi - \sin\frac{\pi}{2K}w\Big| \ge 2\operatorname{sh}^2\Big(\frac{\pi K'}{8K}\Big).$$

Как и выше,

$$|\mathrm{sn}\varphi - \mathrm{snw}| \ge \mathrm{a}^{-1} - |\mathrm{sn}\varphi|,\ |\mathrm{dnw}| = \sqrt{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\mathrm{w}} \le \sqrt{1+\mathrm{k}},$$

и получаем

$$M \le \frac{M_2}{2\pi}\Big(\frac{2}{1-a|\mathrm{sn}\varphi|} + \frac{\pi}{4K\mathrm{cn}\varphi\,\mathrm{sh}^2(\pi\mathrm{K}'/(8\mathrm{K}))}\Big),$$

$$|R_1^{(i)}(t)| \le \frac{M_2\exp(-n\pi K'/(2K))}{1-\exp(-n\pi K'/(2K))}\Big(\frac{4}{1-|t|} + \frac{\pi}{2K\sqrt{a^2-t^2}\,\mathrm{sh}^2(\pi K'/(8K))}\Big).$$

Используя (11), имеем

$$|R_2^{(i)}(\psi)| \le \frac{2\pi^2}{K\mathrm{cn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\psi}\sum_{k=n}^{\infty}|\check{c}_k|,$$

$\check{c}_k$ — коэффициенты Фурье функции $f(a\,\mathrm{sn}\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\xi)$. Так как согласно (8),

$$|\check{c}_k| \le \frac{M_2}{2\pi}\exp\Big(-|k|\frac{\pi K'}{4K}\Big),$$

то

$$|R_2^{(i)}(t)| \le \frac{4M_2\exp(\pi K'/(8K))}{K'\sqrt{a^2-t^2}}\exp(-n\pi K'/(4K)).$$

Оценка для $R_3^{(i)}(t)$ получается аналогично. Складывая оценки, окончательно имеем

$$|R^{(i)}(t)| \le \frac{M_2}{a}\exp(-n\pi K'/(4K))\Big(\frac{\exp(-n\pi K'/(4K))}{1-\exp(-n\pi K'/(2K))}\times$$

$$\times\Big(\frac{4K}{\pi(1-|t|)} + \frac{1}{2\sqrt{a^2-t^2}\,\mathrm{sh}^2(\pi K'/(8K))}\Big) + \frac{8K\exp(\pi K'/(8K))}{\pi K'\sqrt{a^2-t^2}}\Big).$$

6. Формулы (14), (18) и (19) могут быть использованы для вычисления интеграла

$$\tilde{I}(t) = \int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{t-x}\,dx.$$

Взяв a близким к единице, заменим приближенно

$$\tilde{I}(t) \approx I_a(t) = \int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{t-x} = \int_{-a}^{a}\frac{F(x)}{(t-x)\sqrt{a^2-x^2}}\,dx,$$

$$F(x) = \sqrt{a^2-x^2}f(x),$$

а интеграл $\tilde{I}_a(t)$ вычислим по построенным формулам. Для оценки погрешностей полученных формул представим их соответственно в виде

$$\bar{R}^{(i)}(t) = \bar{R}_1^{(i)}(t) + \bar{R}_2^{(i)}(t),\ i = 1, 2, 3.$$

Здесь

$$\bar{R}_1^{(1)}(t) = \bar{R}_1^{(2)}(t) = \bar{R}_1^{(3)}(t) = \int\limits_{-1}^{-a} \frac{f(x)}{t-x}\,dx + \int\limits_{a}^{1} \frac{f(x)}{t-x}\,dx,$$

$\bar{R}_2^{(1)}(t)$, $\bar{R}_2^{(2)}(t)$, $\bar{R}_2^{(3)}(t)$ — остаточные члены построенных формул, оцененные в предыдущем пункте.

В работе [1] дана оценка

$$|\bar{R}_1^{(i)}(t)| \le \frac{2N(1-a)^\alpha}{1-|t|}\Big(\frac{1}{\alpha} + \ln\frac{1-t^2}{a^2-t^2}\Big).$$

Принимая во внимание, что $1-a < 4\exp(-\pi K/K')$ и выбирая a из условия $\alpha\pi K/K' = n\pi K'/(4K)$, получаем $K'/K = 2\sqrt{\alpha/n}$. В предположении, что $\alpha \le 1,\ n \ge 4$ из этого неравенства вытекает, что $K'/K \le 1$, а в этом случае $K' \le 1.854$.

Учитывая вышесказанное, для формулы (14) получаем

$$|\bar{R}^{(1)}(t)| \le \frac{8\exp(-\pi\sqrt{n\alpha}/2)}{1-|t|}\Big(\frac{M_1}{a\pi^2}\Big(\frac{n}{\alpha}\Big)^{3/2}(2+\exp(\pi\sqrt{\alpha/n}))\times$$

$$\times\exp(\pi\sqrt{\alpha/n}/4)\sqrt{\frac{1-a^2t^2}{1-a^{-2}t^2}} + N\Big(\frac{1}{\alpha} + \ln\frac{1-t^2}{a^2-t^2}\Big)\Big).$$

В силу неравенства

$$\frac{1}{1-\exp(-x)} \le 1 + \frac{1}{x}$$

имеем

$$\frac{1}{1-\exp(-\pi\sqrt{n\alpha})} \le 1 + (\pi\sqrt{n\alpha})^{-1}.$$

Кроме того, из неравенства $\operatorname{sh} x \ge x$ следует, что

$$\frac{1}{\operatorname{sh}^2(\pi\sqrt{\alpha/n}/4)} \le \frac{16n}{\pi^2\alpha}.$$

С учетом этого для $i = 2, 3$, т. е. для формул (18) и (19) получаем

$$|\bar{R}^{(i)}(t)| \le 4\exp(-\pi\sqrt{n\alpha}/2)\Big(\frac{M_2}{a\pi}\sqrt{\frac{n}{\alpha}}\Big(\exp(-\pi\sqrt{n\alpha}/2)\times$$

$$\times(1+(\pi\sqrt{n\alpha})^{-1})\Big(\frac{1}{1-|t|} + \frac{2}{\pi\sqrt{a^2-t^2}}\sqrt{\frac{n}{\alpha}}\Big)+$$

$$+\frac{\exp(\pi\sqrt{\alpha/n}/4)}{\sqrt{a^2-t^2}}\Big) + \frac{2N}{1-|t|}\Big(\frac{1}{\alpha} + \ln\frac{1-t^2}{a^2-t^2}\Big)\Big).$$

7. Для проведения численных экспериментов по формуле (15) были рассмотрены следующие интегралы:

1. $\tilde{I}(t) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x\sqrt{1-x^2}}{t-x} dx = \pi(t^2 - 0.5), \quad F(x) = x\sqrt{1-x^2}\sqrt{a^2-x^2}.$

Таблица 1. $a)\, n = 25, \alpha = 1.2$

l	Узел	Точное значение	Погрешность
1	0.3847	-1.105	0.003
2	0.6702	-0.159	0.018
4	0.9250	1.116	0.027
8	0.9970	1.551	0.020
9	0.9986	1.562	0.010

Таблица 2. $b)\, n = 49, \alpha = 1.2$

l	Узел	Точное значение	Погрешность
1	0.2819	-1.321	0.001
2	0.5222	-0.714	0.004
4	0.8206	0.544	0.008
9	0.9892	1.503	0.006
14	0.9994	1.567	0.003

2. $\tilde{I}(t) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{t-x} dx = \pi t, \quad F(x) = \sqrt{a^2-x^2}.$

Таблица 3. $a)\, n = 35, \alpha = 1.2$

l	Узел	Точное значение	Погрешность
1	0.3300	1.036	0.008
2	0.5951	1.869	0.013
3	0.7732	2.429	0.016
7	0.9837	3.090	0.012
11	0.9989	3.138	0.006

Таблица 4. $b)\, n = 45, \alpha = 1.2$

l	Узел	Точное значение	Погрешность
1	0.2934	0.921	0.005
2	0.5403	1.697	0.008
3	0.7196	2.260	0.010
8	0.9843	3.092	0.008
11	0.9992	3.139	0.004

При вычислении интеграла $\tilde{I}(t)$ можно также делать замену $y = t/a$, или сжимать интервал. Если, например, в интеграле Коши присутствует множитель $\sqrt{1-x^2}$, то поскольку интеграл не имеет особенностей на концах отрезка, можно ожидать хороших результатов вплоть до концов, что и наблюдается во втором примере.

Приведенные примеры не являются хорошими для построенных нами формул, поскольку к этим интегралам применимы предыдущие формулы (см., например,[3]).

Автор считает своим долгом выразить искреннюю благодарность доценту Б. А. Самокишу за постановку задачи, а также ряд ценных советов и замечаний по содержанию и оформлению рукописи. При проведении численных экспериментов большую помощь оказал А.Г. Лепкольнит.

Литература

1. *Марданов А. А.* Об одной квадратурной формуле для интегралов типа Коши с плотностью, аналитической внутри отрезка. // Методы вычислений. Вып. 17. – 1995. – С. 131–144.

2. *Самокиш Б. А.* Квадратурные формулы для интегралов от функций, аналитических внутри отрезка. // Вестн. Ленингр.ун–та. – 1990. – No 1. – С. 42–49.

3. *Корнейчук А. А.* Квадратурные формулы для сингулярных интегралов. // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. – 1964. – С. 64–74.

On the calculation of singular integrals with density analytical in the interior of the segment of integration

A.A. Mardanov

The new quadrature formulas are obtained for singular integrals with density analytical in the interior of the segment of integration. They haven the errors $O(e^{-a\sqrt{n}})$, where $a > 0$ and $a \sim 1$, n is the quantity of nodes. The formulas are free from calculation of data file n^2 dimension and data storage.

