ОПТИМИЗАЦИЯ ПОРТФЕЛЯ ИНВЕСТОРА С УЧЕТОМ КОЭФФИЦИЕНТА АСИММЕТРИИ

Д.Н. Жабин, Е.С. Холопова

Томский политехнический университет, Томск

Предлагается обобщение модели Марковица оптимальных портфелей на случай ненулевого коэффициента асимметрии. Сформулировано условие применимости развитой модели.

Введение

Как известно, в настоящее время компании, банки, инвестиционные фонды, частные предприниматели в ходе своей хозяйственной деятельности нередко выступают в качестве инвесторов. На этом этапе перед ними встает задача как правильно и наиболее выгодно распорядиться своими средствами, осуществляя инвестиции в различные финансовые активы: ценные бумаги (акции, облигации) и их производные финансовые инструменты (контракты типа опцион, фьючерс, своп). То есть инвестор формирует так называемый портфель ценных бумаг (фондовый портфель, финансовый портфель).

С целью гарантировать себе какой-то доход инвесторы, как правило, формируют диверсифицированные фондовые портфели. А именно покупают не одну ценную бумагу, а их набор, в виду непредсказуемости реальных доходностей активов в будующий момент времени. При этом держатели фондовых портфелей управляют своими инвестициями, руководствуясь определенными соображениями: с одной стороны, инвестор старается максимизировать доходность, а с другой стороны, он фиксирует предельно допустимый риск неэффективности своих инвестиций - риск убытков, выражаемый степенью колеблемости доходов по портфелю, как в меньшую, так и в большую сторону относительно некоторого ожидаемого значения.

В основном все портфельные теории основаны на таком финансовом показателе, как доходность активов. Но, как правило, на рынке инвесторы действуют в условиях неопределенности, т.к. доходность активов - это случайная величина и функция плотности распределения вероятности для нец остается, строго говоря, неизвестной. Следовательно, портфель оценивается по математическому ожиданию доходностей E и стандартному отклонению σ от среднего значения этой случайной величины. Естественно, что инвестор стремится составить эффективный портфель. При одной и той же ожидаемой доходности, портфели с меньшим стандартным отклонением привлекательнее, чем портфели с большим стандартным отклонением. На основе этого эффективным будем считать такой портфель, если из тех же ценных бумаг и при тех же ограничениях на их пропорции нельзя составить другой портфель, который имел бы такое же математическое ожидание доходности E и меньшее стандартное отклонение. Совокупность таких портфелей образует так называемое эффективное множество. Тогда можно сформулировать основную задачу портфельной теории как непосредственное долевое распределение капитала на покупку выбранных нами ценных бумаг, т.е. формирование эффективного портфеля.

Классической моделью управления фондовым портфелем, который составлен из ценных бумаг, является модель Марковица [1]. Данная теория эффективных портфелей направлена на решение практической задачи о рассредоточении капитала по различным видам ценных бумаг в условиях неопределенности. Говоря о недостатках модели, заметим, что модель не учитывает возможность наличия асимметрии в функциях плотностей распределения доходностей. Исследования [2, 3] показали, что доходности не являются гауссовскими величинами и, следовательно, могут иметь ненулевой коэффициент асимметрии, что приведет к иному долевому распределению активов в портфеле.

Модель Марковица

Рассмотрим основные характеристики модели Марковица [см. также 4]. Предположим, что на рынке имеется N типов ценных бумаг i ($i = 1, \dots ,N$). Каждая ценная бумага характеризуется: начальной ценой бумаги S_i, конечной ценой S_i', некоторым дополнительным доходом по этой бумаге P_i и доходностью r_i:

$$r_i = \frac{S_i' + P_i - S_i}{S_i}. \tag{1}$$

Перейдем теперь к портфелю ценных бумаг. Пусть мы купили ценных бумаг на сумму W_0 . В конце периода владения они будут стоить W_1 и, кроме того, за период владения мы получим по ним доход P. Основной характеристикой портфеля является его доходность:

$$r_p = \frac{W_1 + P - W_0}{W_0}. \tag{2}$$

При этом предполагается, что инвестор имеет n ценных бумаг номера i по цене S_i за одну бумагу. Тогда: $W_0 = \sum\limits_{i=1}^{N} (n_i S_i)$. Введем величины x_i: $x_i = \frac{n_i S_i}{W_0}$, их смысл - доля капитала W_0, потраченная на приобретение ценной бумаги i-того типа. Очевидно, что $x_i \geq 0$ для всех i =1, ..., N и

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1, \tag{3}$$

С учетом этого доходность портфеля запишется:

$$r_p = \sum_{i=1}^{N} r_i x_i. \tag{4}$$

Так как r_i - случайная величина, то и r_p - случайная величина. Следовательно, еҷ математическое ожидание:

$$M\{r_p\} = E_p = \sum_{i=1}^{N} M\{r_i\} x_i, \tag{5}$$

и стандартное отклонение:

$$\sigma = \sqrt{D\{r_p\}}, \tag{6}$$

где

$$D\{r_p\} = \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j cov(r_i, r_j), \tag{7}$$

$$c_{ij} = cov(r_i, r_j) = M\{(r_i - \mu_i)(r_j - \mu_j)\}. \tag{8}$$

Формулы (3) - (6) являются основными формулами, характеризующие портфель.

Следующим ключевым моментом портфельной теории является функция полезности инвестора. В оригинальной модели Марковица это функция вида:

$$U(E_p, \sigma_p) = E_p - \frac{\sigma_p^2}{\tau}, \tag{9}$$

где τ - толерантность (константа, характеризующая расположенность инвестора к риску).

Если задать значение функции полезности $U_0 = Const$, то функция полезности становится выпуклой функцией. Это справедливо, поскольку ковариационная матрица предполагается строго положительно определенной и, следовательно, функция вида $f(\vec{x}) = \vec{x}^T C \vec{x} > 0$ строго выпукла, т. е. выполняется условие выпуклости в виде $f(\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y}) < \alpha f(\vec{x}) + (1-\alpha) f(\vec{x})$, если $0 < \alpha < 1$ и $\vec{x} \neq \vec{y}$. Тогда найденные нами оптимальные портфели будут соответствовать точкам правой нижней границы области (E_p, σ_p), являющейся эффективным множеством.

Учет коэффициента асимметрии

Практические исследования доходностей активов и характера их функций плотности распределения показывают, что доходности не являются нормальными (гауссовскими) величинами. Большинство временных рядов, соответствующих котировкам ценных бумаг, носит персистентный характер, и функции плотности распределения доходностей активов имеют асимметричную форму. Для величин подчиненных нормальному закону характерна симметричная форма функций плотности распределения и, следовательно, их коэффициент асимметрии равен нулю. Если же он отличен от нуля, то это изменяет поведение доходности. При $\varepsilon > 0$ вероятность благоприятного поведения курса акций больше, чем вероятность неблагоприятного исхода. При $\varepsilon < 0$ картина меняется на противоположную.

Этот момент является немаловажным, т.к. использование при анализе только двух параметров - математического ожидания доходностей и их стандартного отклонения может привести к неверным результатам. Поэтому предлагается модификация модели Марковица учетом в ней взвешенного коэффициента асимметрии для распределения доходностей ε_p. Тогда функция полезности, задаваемая формулой (9) примет вид:

$$U(E_p, \sigma_p, \varepsilon_p) = E_p - \frac{\sigma_p^2}{\tau} + \omega\varepsilon_p, \tag{10}$$

где ω - весовой коэффициент, показывающий насколько важен для инвестора коэффициент асимметрии. Если для инвестора учет асимметрии не важен, то положив $\omega = 0$ он вернется к модели Марковица в изначальной форме. А в случае нормального распределения сам коэффициент асимметрии равен нулю. Запишем выражение для определения этого коэффициента:

$$\varepsilon_p = \sum_{i,j,k=1}^{N} \varepsilon_{ijk} x_i x_j x_k, \tag{11}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \frac{\sum\limits_{m=1}^{N} (r_i^m - \bar{x}_i)(r_j^m - \bar{x}_i)(r_k^m - \bar{x}_i)}{\sqrt{D(r_i)D(r_j)D(r_k)}}, \tag{12}$$

где r_i^m - доходность i-того актива в момент времени $m, m = 1, ..., n$. $\bar{r}_i = \frac{\sum_{m=1}^{N} r_i^m}{n}$ - среднее значение доходности актива i-того вида.

При этом для функции полезности должны выполняться следующие условия:

$$\frac{\partial U}{\partial E_p} > 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma_p} < 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_p} < 0 \tag{15}$$

Эти условия отражают ситуацию на рынке, т.к. доход будет возрастать с увеличением доходности и будет уменьшаться при увеличении риска. Отклонения от среднего значения доходности в большую сторону также дадут увеличение получаемого нами дохода.

Приоритетной задачей для инвестора является все же минимизация риска, т.к. отклонение может быть как в сторону выигрыша, так и в сторону проигрыша. И данную задачу можно рассматривать как задачу целевого программирования [5], решаемую методом неопределенных множителей Лагранжа, где множитель 2 перед неопределенными множителями λ и λ_E выбран из удобства:

$$L(x_i,\lambda) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j + 2\lambda(\sum_{i=1}^{N} x_i - 1) - 2\lambda_E(\sum_{i=1}^{N} x_i\mu_i - E) - \omega \sum_{i,j,k=1}^{N} \varepsilon_{ijk}x_i x_j x_k \qquad (16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_m} = 2\lambda - 2\lambda_E + 2\sum_{j=1}^{N} c_{ij}x_j - \omega\{3\varepsilon_{mmm}x_m^2 + \qquad (17)$$

$$+ \sum_{j,k=1}^{N}(\varepsilon_{mjk}+\varepsilon_{jkm}+\varepsilon_{jmk})x_j x_k + 2\sum_{k=1}^{N}(\varepsilon_{mmk}+\varepsilon_{mkm}+\varepsilon_{kmm})x_m x_k\} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2\sum_{m=1}^{N} x_m - 2 = 0 \longrightarrow \sum_{m=1}^{N} x_m = 1 \qquad (18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_E} = -2\sum_{m=1}^{N} x_m\mu_m + 2E = 0 \longrightarrow \sum_{m=1}^{N} x_m\mu_m = E \qquad (19)$$

Решая систему (17)-(19) относительно величин $(x_1, x_2, ..., x_N, \lambda, \lambda_E)$, получаем оптимальные решения в виде набора векторов $\vec{x_i}$, являющихся решением системы. Чтобы из этих решений выбрать оптимальное, подставим векторы в функцию полезности U. Среди полученных U_i выбираем максимальное значение. Тот вектор $\vec{x_i^*}$, при котором получается это максимальное значение, будем считать искомым оптимальным решением.

Анализ выпуклости функции полезности инвестора

Внесение коэффициента асимметрии в функцию полезности изменяет еҷ характер. Поэтому мы должны убедиться, что новая функция полезности является выпуклой функцией. Только тогда при заданном значении функции полезности будет существовать эффективное множество и, следовательно, соответствующие ему оптимальные портфели. Зададим значение функции полезности U и представим еҷ как сумму функций U_0 [см. формулу (9)] и ε_p. Тогда U будет выпуклой функцией как результат суперпозиции, если U_0 и ε_p будут выпуклыми функциями.

Пусть мы имеем N активов. Рассмотрим два портфеля $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_N^{(1)})$ и $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_N^{(2)})$. Пусть E_i - доходность актива i-того вида, σ_i^2 - его дисперсия и ε_i - коэффициент асимметрии. Составим из них выпуклую комбинацию, т. е. портфель вида:

$$x_i = \alpha x_i^{(1)} + (1-\alpha)x_i^{(2)}, \qquad (20)$$

где $i = 1, ..., N$, $\alpha \in [0, 1]$. Найдем для этого портфеля его E_p, σ_p и ε_p, которые можно формально представить в виде:

$$E_p = \alpha E_{p1} + (1-\alpha)E_{p2} \qquad (21)$$

$$\sigma_p^2 = \alpha_2\sigma_{p2}^2 + 2\alpha(1-\alpha)V_{12} + (1-\alpha)^2\sigma_{p2}^2 \qquad (22)$$

$$\varepsilon_p = \alpha_3\varepsilon_{p1} + (1-\varepsilon)^3\varepsilon_{p2} + \alpha^2(1-\alpha)\varepsilon_{p12} + \alpha(1-\alpha)^2\varepsilon_{p12} \qquad (23)$$

Выражая α через E_p получим:

$$\alpha = \frac{E_p - E_{p2}}{E_{p1} - E_{p2}}. \qquad (24)$$

Используя (24) можно представить σ_p^2 как функцию от E_p: $\sigma_p^2(E_p) = A(\vec{x})E_p^2 + B(\vec{x})E + p + C(\vec{x})$.

σ_p^2 является выпуклой вниз функцией, поскольку можно показать, что $A(\vec{x}) > 0$ для $\forall\vec{x}$, где $\vec{x} = (x_1, ..., x_N)$- некоторый портфель. Аналогично можно представить и ε_p как функцию от E_p:

$$\varepsilon_p(E_p) = a(\vec{x})E_p^3 + b(\vec{x})E_p^2 + c(\vec{x})E_p + d(\vec{x}) \qquad (25)$$

Найдем условие, при котором $\varepsilon_p(E_p)$ будет выпуклой функцией. Запишем достаточное условие выпуклости: $\varepsilon_p''(E_p) = 6a(\vec{x})E_p + 2b(\vec{x}) > 0$, где ε_p'' - вторая производная по E_p. Откуда получим: $a(\vec{x}) > -\frac{b(\vec{x})}{3E_p}$. Так как $E_p \in [E_{min}, E_{max}]$, то можно записать нижнюю оценку для значения a в виде:

$$a^* = -\frac{b^*}{3E_{min}}, \tag{26}$$

где $b^* = max\{b(x_i| \sum_{i=1}^{N} x_i = 1)\}$.

Тогда область определения a задается на интервале: $a(\vec{x}) \in (a^*, \infty)$. Если условие $a(\vec{x}) > a^*$ выполняется для $\forall \vec{x}$, то $\varepsilon_p(E_p)$ будет выпуклой. Следовательно, как излагалось выше, и функция полезности тоже будет выпуклой.

Выводы

На финансовом рынке пред инвесторами стоит задача формирования эффективного диверсифицированного портфеля ценных бумаг. Большинство портфельных теорий, направленных на решение данной задачи, основываются на таком финансовом показателе как доходность активов. Но т.к. доходность зачастую не является нормально распределенной величиной и ећ функция плотности распределения вероятностей имеет асимметричную форму, то это окажет влияние на долевое распределение активов в портфеле. Поэтому в выбранной для рассмотрения модели Марковица предлагается вариант ећ развития путем учета в модели взвешенного ненулевого коэффициента асимметрии для получения более верных результатов. Внесение коэффициента асимметрии в свою очередь окажет влияние на характер функции полезности инвестора. В оригинальной модели Марковица функция полезности являлась выпуклой функцией, для которой может быть найдено эффективное множество. Поэтому от новой функции полезности логично потребовать выполнение условия выпуклости. В результате чего возникает ограничение: $a(\vec{x}) > a^*$, где $a^* = -\frac{b^*}{3E_{min}}$ - оценка нижней границы области определения $a(\vec{x})$. Если условие выполняется, значит функция полезности является выпуклой и оптимальное решение может быть найдено.

Литература

1. *Markowitz H.* Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. – New York: Wiley, 1959.

2. *Петерс Эдгар.* Хаос и порядок на рынках капитала. – М.: Мир, 2000.

3. *Peters Edgar E.* Fractal market analysis. – New York: Wiley, 1994.

4. *Шведов А.С.* Теория эффективных портфелей ценных бумаг. – М.: ГУ ВШЭ, 1999.

5. *Хедли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование. – М.: Мир, 1978.

A optimization of investor's portfolio with nonzero asymmetry coefficient

E. S. Kholopova, D. N. Zhabin

A generalization of Markowitz optimal portfolios model in case of skewness of yield distribution is proposed. A condition for application of the developed model for practical analysis is given.

