ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА

А.И. Куев, С.К. Куижева, Л.Ж. Паланджянц

Майкопский государственный технологический институт, г. Майкоп

Решается краевая задача для уравнения Аллера.

Рассмотрим уравнение Аллера

$$u_t=(au+bu_t)_{xx} \tag{1}$$

где $a=a(t,x)$, $b=b(t,x)$ заданные непрерывные функции в $\Omega=\{(t,x)\colon 0\le x\le 1,\ 0\le t\le T\}$.

В работе [1] А.М.Нахушев поставил ряд краевых задач для этого уравнения.

В данной статье излагается способ решения одной из краевых задач для уравнения Аллера при некоторых дополнительных ограничениях на функции a и b.

Представим уравнение (1) в виде следующей системы уравнений:

$$u_t=v_{xx},$$
$$v=au+bu_t.$$

Отсюда следует, что $u=\dfrac{v-bv_{xx}}{a}$. Следовательно, $\left(\dfrac{v-bv_{xx}}{a}\right)_t=v_{xx}$. После упрощения, получаем уравнение

$$v_{xxt}+\left(\frac{b_t}{b}-\frac{a_t}{a}+\frac{a}{b}\right)v_{xx}-\frac{1}{b}v_t+\frac{a_t}{ab}v=0. \tag{2}$$

Введем обозначения $A=\left(\dfrac{b_t}{b}-\dfrac{a_t}{a}+\dfrac{a}{b}\right)$, $B=-\dfrac{1}{b}$, $C=\dfrac{a_t}{ab}$. Тогда уравнение (2) примет вид:

$$v_{xxt}+Av_{xx}+Bv_t+Cv=0. \tag{3}$$

Из очевидных равенств

$$(wv_{xx})_t=w_tv_{xx}+wv_{xxt},$$
$$(w_tv_x)_x=w_tv_{xx}+w_{xt}v_x,$$
$$(wv)_x=vw_{xxt}+v_xw_{xt},$$

получаем

$$wv_{xxt}=-(w_tv_x)_t+(w_{xt}v)_x+(wv_{xx})_t-vw_{xxt} \tag{4}$$

Кроме того, справедливы равенства:

$$w(Av_{xx})=(wAv_x)_x-((wA)_xv)_x+v(wA)_{xx} \tag{5}$$

$$w(Bv_t)=(wBv)_t-v(wB)_t \tag{6}$$

$$wCv=vCw \tag{7}$$

Складывая почленно равенства (4)–(7), получаем

$$w(v_{xxt}+Av_{xx}+Bv_t+Cv)=-v(w_{xxt}-(wA)_{xx}+(wB)_t-Cw)+$$
$$+(-w_tv_x+w_{xt}v+wAv_x-(wA)_xv)_x+(wv_{xx}+wBv)_t \tag{8}$$

Введем обозначения:

$$L[v]=v_{xxt}+Av_{xx}+Bv_t+Cv,$$
$$M[w]=-(w_{xxt}-(wA)_{xx}+(wB)_t-Cw),$$
$$\frac{\partial H}{\partial x}=(-w_tv_x+w_{xt}v+wAv_x-(wA)_xv)_x,$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} = (wv_{xx} + wBv)_t \,.$$

Тогда равенство (8) перепишется в виде:

$$wL[v] - vM[w] = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial t} \tag{9}$$

Интегрируя равенство (9) по области G, где G – прямоугольник $OPMQ$, получаем

$$\iint_G (wL[v] - vM[w])dtdx = \iint_G (\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial t})dtdx$$

С учетом очевидных равенств

$$\iint_G \frac{\partial K}{\partial t} dtdx = \int_G Kdx \;, \qquad \iint_G \frac{\partial H}{\partial x} dtdx = -\int_G Hdt$$

получаем формулу Грина:

$$\iint_G (wL[v] - vM[w])dtdx = \int_G Kdx - Hdt$$

Вычислим криволинейный интеграл вдоль прямоугольника G.

На отрезке OQ $dx=0$.

$$\int_O^Q Kdx - Hdt = -\int_O^Q H(t,0)dt \,,$$

где $H(t,0)=v_x(t,0)(wA-w_t)+v(t,0)(w_{xt}-(wA)_{xx}$.

На отрезке QM $dt=0$.

$$\int_Q^M Kdx - Hdt = \int_Q^M K(t,x)dx = \int_Q^M w(v_{xx} + Bv)dx$$

Учитывая, что $wv_{xx}=(wv_x)_x - (w_xv)_x + w_{xx}v$ получим

$$\int_Q^M w(v_{xx} + Bv)dx = \int_Q^M ((wv_x - w_xv)_x + v(w_{xx} + Bw))dx = (wv_x - w_xv)\Big|_Q^M + \int_Q^M v(w_{xx} + Bw)dx$$

На отрезке MP $dx=0$.

$$\int_M^P Kdx - Hdt = -\int_M^P H(t,x)dt = -\int_M^P (v_x(wA - w_t) + v(w_{xt} - (wA)_{xx})dt$$

На отрезке PO $dt=0$.

$$\int_P^O Kdx - Hdt = \int_P^O K(0,x)dx = \int_P^O w(0,x)(v_{xx} + Bv)dx = (wv_x - w_xv)\Big|_P^O + \int_P^O v(0,x)(w_{xx} + Bw)dx \,.$$

Таким образом,

$$\int_G Kdx - Hdt = -\int_O^Q (v(t,0)(wA - w_t) + v(t,0)(w_{xt} - (wA)_{xx})dt +$$

$$+ (wv_x - w_xv)\Big|_Q^M + \int_Q^M v(w_{xx} + Bw)dx - \int_M^P (v_x(t,x)(wA - w_t) + v(t,x)(w_{xt} - (wA)_{xx})dt +$$

$$+ (wv_x - w_xv)\Big|_Q^O + \int_Q^M v(0,x)(w_{xx} + Bw)dx.$$

Пусть функция w удовлетворяет условиям: $M[w]=0$, w_t-$Aw=0$ на отрезках MP и OQ, w_{xx}-$Bw=0$ на отрезках QM и PO, значения функции $w(O),w(P),w(Q)$, $w_x(O),w_x(P),w_x(Q)$ – известны.

Пусть v – решение уравнения (3) с соответствующими начальными и краевыми условиями на функцию v: $v=au+bu_t$, где значения u и u_t на границе прямоугольника $OPMQ$ предполагаются известными.

Следовательно, получаем для нахождения функции $v(M)$ уравнение:

$$\begin{aligned} w(M)v_x(M) - w_x(M)v(M) = \int_O^Q (v(t,0)(w_{xt} - (wA)_{xx}(0,t))dt + \\ + w(Q)v_x(Q) - w_x(Q)v(Q) + \int_M^P (v(t,x)(w_{xt} - (wA)_{xx})(t,x))dt - \\ - w(O)v_x(O)) - w_x(O))v(O) + w(P)v_x(P) - w_x(P)v(P). \end{aligned} \tag{10}$$

Отметим, что в уравнении (10) все функции в правой части известны.

Интегрируя уравнение (10), получаем:

$$\begin{aligned} v(M) = w(M)(v(0,t) + \int_0^x w^{-2}(\int_O^Q (v(t,0)(w_{xt} - (wA)_{xx}(0,t))dt + \\ + w(Q)v_x(Q) - w_x(Q)v(Q) + \int_M^P (v(t,x)(w_{xt} - (wA)_{xx})(t,x))dt - \\ - w(O)v_x(O)) - w_x(O))v(O) + w(P)v_x(P) - w_x(P)v(P))dx. \end{aligned} \tag{11}$$

Уравнение (11) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра. Можно показать, что оно имеет единственное решение.

Возвращаясь к уравнению (1), получаем

$$u(t,x) = \exp(-\int_0^t \frac{a}{b}dt)(u(0,x) + \int_0^t \frac{v(\tau,x)}{b}\exp(\int_0^\tau \frac{a}{b}d\tau)dt).$$

Литература

1. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии: Учеб. пособие для университетов.– М.: Высш. шк., 1995.– 301 с.

On boundary value problem for Aller equation

A.I. Kuev, S.K. Kuigeva, L.Zh. Palandzhyants

The boundary value problem for Aller equation is solved.

