О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛЕЖАНДРА

Л.Ж. Паланджянц

Майкопский государственный технологический институт, г. Майкоп

В статье рассматривается аналог преобразования Лежандра в случаи вариации криволинейного мультипликативного интеграла.

Прежде чем перейти к установлению аналога преобразования Лежандра, рассмотрим утверждение, справедливое для взаимно обратных функций [1].

Пусть y=f(x), x=g(y) – взаимно обратные функции. Пусть F(x), G(y) – соответственно первообразные функций f(x), g(y). Тогда сумма первообразных взаимно обратных функций равна произведению этих функций:

$$F(x)+G(y)=f(x)g(y) \tag{1}$$

Доказательство следует из дифференцирования по переменной x левой и правой частей равенства (1).

В частности, из равенства (1) следует равенство

$$F(x)+G(y)=x\,f(x) \tag{2}$$

Заметим также, что из равенства (1) следует известная формула интегрирования по частям:

$$\int xf'(x)dx = xf(x) - \int f(x)dx$$

Покажем, что равенство

$$H+L=vp, \tag{3}$$

задающее преобразование Лежандра в обычном случае [2], также укладывается в утверждение о взаимно обратных функциях. В самом деле,

$$\frac{\partial H}{\partial p}+\frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p}=v+p\frac{\partial v}{\partial p}.$$

Учитывая, что $p=\frac{\partial L}{\partial v}$, $v=\dot{x}$, получаем, что $\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}$.

Аналогично, $\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=p\frac{\partial v}{\partial x}$, следовательно, $\frac{\partial H}{\partial x}=-\frac{\partial L}{\partial x}$.

Откуда с учетом уравнения Эйлера-Лагранжа, имеем: $\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x}$.

Интегрируя равенства $\dot{x}dp=\frac{\partial H}{\partial p}dp, pdv=\frac{\partial L}{\partial x}dv,$ получаем

$$H=\int vdp,\ \ L=\int pdv.$$

Таким образом, равенство (3) можно записать в виде равенства (1):

$\int vdp+\int pdv=vp$, что и требовалось показать.

Перейдем к установлению аналога преобразования Лежандра в случае мультипликативного интеграла. Пусть $P_\alpha=\left(p^i_{j\alpha}\right)$ – некоторый набор матриц («матричный импульс»), α=1,2,...,n. Предположим, что равенство $\dfrac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^{\alpha}} = P_{\alpha}$ можно однозначно решить в виде $\dot{x}^{\alpha} = v^{\alpha}(x, P_{\alpha})$. Положим

$$H+L=v^{\alpha}P_{\alpha}, \tag{4}$$

где H – аналог гамильтониана («матричный гамильтониан»). Обозначим через $E^{i}_{j\alpha}$ матрицу, у которой элемент на i-ой строке и j-ом столбце равен единице, а остальные элементы равны нулю. Тогда дифференцируя равенство (4) по переменным $p^{i}_{j\alpha}$, получаем:

$$\frac{\partial H}{\partial p^{i}_{j\alpha}} + \frac{\partial L}{\partial v^{\alpha}}\frac{\partial v^{\alpha}}{\partial p^{i}_{j\alpha}} = v^{\alpha}E^{i}_{j\alpha} + P_{\alpha}\frac{\partial v^{\alpha}}{\partial p^{i}_{j\alpha}}$$

откуда следует, что $\dot{x}^{\alpha}E^{i}_{j\alpha} = \dfrac{\partial H}{\partial p^{i}_{j\alpha}}$. Далее дифференцируя равенство (4) по переменной x, получаем: $\dfrac{\partial H}{\partial x} + \dfrac{\partial L}{\partial x} + \dfrac{\partial L}{\partial v^{\alpha}}\dfrac{\partial v^{\alpha}}{\partial x} = P_{\alpha}\dfrac{\partial v^{\alpha}}{\partial x}$, откуда с учетом аналога уравнения Эйлера-Лагранжа [3} $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} - [\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}, L]$, имеем: $\dot{P}_{\alpha} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} + [L, P_{\alpha}]$. Учитывая, что $L= v^{\alpha}P_{\alpha} - H$, получаем $\dot{P}_{\alpha} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} + [H, P_{\alpha}] + [v^{\alpha}P_{\alpha}, P_{\alpha}]$. Таким образом, получаем аналог уравнений Гамильтона в случае переменных x и P_{α}:

$$\dot{x}^{\alpha}E^{i}_{j\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p^{i}_{j\alpha}},\ \dot{P}_{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial x} + [H, P_{\alpha}] + [v^{\alpha}P_{\alpha}, P_{\alpha}].$$

Отметим, что интегрируя равенства $\dot{x}^{\alpha}E^{i}_{j\alpha}dp^{i}_{j\alpha} = \dfrac{\partial H}{\partial p^{i}_{j\alpha}}dp^{i}_{j\alpha}$ и $\dfrac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^{\alpha}}dv^{\alpha} = P_{\alpha}dv^{\alpha}$, получаем

$$H = \int v^{\alpha}E^{i}_{j\alpha}dp^{i}_{j\alpha},\ \ L = \int P_{\alpha}dv^{\alpha}.$$

Таким образом, равенство (4) можно записать в виде равенства (1):
$\int v^{\alpha}E^{i}_{j\alpha}dp^{i}_{j\alpha} + \int P_{\alpha}dv^{\alpha} = v^{\alpha}P_{\alpha}$, что и требовалось показать.

Свойства лагранжиана

Отметим некоторые свойства энергии и импульса лагранжиана.

Первое свойство. («сохранение энергии»). Φ – «полная энергия».
Полная мультипликативная производная энергии равна нулю,т.е., DΦ=0.

Доказательство. $E = \int\limits_{c} E + \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}dx + Ldt = \int\limits_{c} E + D_{x}\Phi dx + D_{t}\Phi dt = \int\limits_{c} E + D\Phi$,

Откуда следует, что $D\Phi=0$.

Второе свойство. («сохранение импульса»). $P = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ – «импульс».

Пусть $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 0$. *Тогда* $P=\Phi^{-1}C_0\Phi$, *где* C_0 *– постоянная матрица.*

Доказательство. Из аналога уравнения Эйлера-Лагранжа имеем:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}L - L\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

Разрешая это уравнение относительно $P = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}$, получаем $P=\Phi^{-1}C_0\Phi$, где C_0 – постоянная матрица.

Литература

1. *Иванюк Н.Н.* Об интегрируемости методом обратной функции.//Сб. науч.-метод. статей по математике. – М.: 1985, № 12. С. 86-99.
2. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия.– М.: Наука, 1979.
3. *Паланджянц Л.Ж.* Вариация мультипликативного интеграла. // Труды ФОРА, 1998, № 3. С. 91–95.

On Legendre transformations

L.Zh. Palandzhyanz

In this article analogous of Legendre transformations for variations of a product integral is considered.

