ИССЛЕДОВАНИЕ КУБИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА, КОГДА ЕЕ ЧАСТНЫМ ИНТЕГРАЛОМ ЯВЛЯЕТСЯ ЛИНИЯ КАССИНИ

Е.А. Титаренко

Майкопский государственный технологический институт, г. Майкоп

Найдены условия, при которых линия Кассини является частным интегралом кубической дифференциальной системы.

Рассмотрим кубическую дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt}= p_{00}+p_{10}x+p_{01}y+p_{20}x^2+p_{11}xy+p_{02}y^2+p_{30}x^3+p_{21}x^2y+p_{12}xy^2+p_{03}y^3\equiv \mathrm{P},$$

$$\frac{dy}{dt}=q_{00}+q_{10}x+q_{01}y+q_{20}x^2+q_{11}xy+q_{02}y^2+q_{30}x^3+q_{21}x^2y+q_{12}xy^2+q_{03}y^3\equiv \mathrm{Q}.$$

Поставим задачу нахождения условий, при которых линия Кассини

$$(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)-(a^4-c^4)=0$$

будет являться частным интегралом данной системы (особенности формы линии Кассини описаны в [4]).

Пусть $F(x, y) = A_{00} + A_{10}x + A_{01}y + A_{20}x^2 + A_{11}xy + A_{02}y^2$, тогда с учетом равенства

$$\omega_x' \mathrm{P}+\omega_y' \mathrm{Q}=\omega\cdot \mathrm{F}(x,y),$$

были получены две группы условий, накладываемых на коэффициенты. Причем справедлива теорема.

Теорема. *Для того чтобы линия Кассини являлась частным интегралом кубической дифференциальной системы, необходимо и достаточно, чтобы она представляла собой лемнискату Бернулли или две изолированные точки, которые называются фокусами кривой.*

В случае, когда система обладает лемнискатой, она имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=-2c^2p_{30}x+1/2c^2(p_{03}-q_{30})y+p_{30}x^3-(p_{03}+2q_{30})x^2y-3p_{30}xy^2+p_{03}y^3\equiv \mathrm{P}(x,y),$$

$$\frac{dy}{dt}=1/2c^2(p_{03}-q_{30})x-2c^2p_{30}y+q_{30}x^3+3p_{30}x^2y-(2p_{03}+q_{30})xy^2-p_{30}y^3\equiv \mathrm{Q}(x,y).$$

В силу того, что $P(-x, -y) = -P(x, y)$ и $Q(-x, -y) = -Q(x, y)$ можно сделать вывод о симметричности системы относительно начала координат. Кроме того, при $p_{30}=0$ проведено ее полное качественное исследование (таблица 1).

Таблица 1.

	O	X_1	X_2	Y_1	Y_2	M_1	M_2	M_3	M_4	U_1	U_2
$0=p_{03}<q_{30}$	седло	центр	центр							слож. особая точка	
$0<p_{03}<q_{30}$	седло	центр	центр	центр	центр					седло	седло
$p_{03}=q_{30}>0$	роза									седло	седло
$0<q_{30}<p_{03}$	седло					узел гр. уст.	узел гр. неуст.	узел гр. неуст.	узел гр. уст.	седло	седло
$0=q_{30}<p_{03}$	седло					узел гр. уст.	узел гр. неуст.	узел гр. неуст.	узел гр. уст.	шестисепарат. седло	
$0<-3q_{30}<p_{03}$	седло	седло	седло			узел гр. уст.	узел гр. неуст.	узел гр. неуст.	узел гр. уст.		

Построим фазовый портрет для каждого из приведенных случаев.

Первоначально (при $0=p_{03}<q_{30}$) дифференциальная система имеет три особые точки в конечной части плоскости и две – на бесконечности. При этом начало координат является

грубым четырехсепаратрисным седлом, на оси абсцисс симметрично друг другу расположены два центра; концам оси ординат соответствуют две сложные особые точки, имеющие две эллиптические и четыре гиперболические области (рис. 1).

После чего ($0<p_{03}<q_{30}$) из каждой особой точки на бесконечности образуется один центр, который по оси ординат переходит в конечную часть плоскости, и два грубых седла, расположенных на бесконечности (рис. 2).

Далее ($p_{03}=q_{30}>0$) оба центра на оси ординат сливаются в начале координат. Центры, расположенные на оси абсцисс, тоже сливаются. При этом в начале координат образуется сложная особая точка с индексом 3, которая получила название **четырехлипестковой розы** (рис. 3). При этом прямые $y = x$ и $y = -x$ являются интегральными.

При дальнейшем изменении коэффициентов ($0<q_{30}<p_{03}$) из четырехлипестковой розы выделяются четыре узла. Они располагаются на лемнискате Бернулли симметрично относительно координатных осей. Начало координат становится грубым седлом. Характер особых точек на бесконечности не меняется (рис. 4).

Далее особые точки на бесконечности приближаются к оси абсцисс и (при $0=q_{30}<p_{03}$) сливаются в две сложные особые точки, соответствующие концам оси Ox (рис. 5).

Перемещаясь по оси абсцисс в конечную часть плоскости ($0<-3q_{30}<p_{03}$), сложные особые точки переходят в грубые четырехсепаратрисные седла (рис. 6).

Замечание. При последовательности условий $q_{30} < p_{03} = 0 \to \to q_{30} < p_{03} < 0 \to p_{03} = q_{30} < 0 \to p_{03} < q_{30} < 0 \to p_{03} < q_{30} = 0 \to \to p_{03} < -3q_{30} < 0$ направления на траекториях меняется на противоположные.

Случай $p_{30}\neq 0$ в данной работе не рассматривается.

В случае, когда система обладает двумя изолированными точками (овалы Кассини вырождаются), она является несимметричной и имеет вид:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -c^2p_{20}-c^2p_{30}x+c^2p_{03}y+p_{20}x^2-2q_{20}xy-p_{20}y^2+p_{30}x^3-(p_{03}+2q_{30})x^2y+ \\
&\quad +(2q_{03}-p_{30})xy^2+p_{03}y^3 \\
\frac{dy}{dt} &= -c^2q_{20}-c^2q_{30}x+c^2q_{03}y+q_{20}x^2+2p_{20}xy-q_{20}y^2+q_{30}x^3+(2p_{30}-q_{03})x^2y- \\
&\quad -(q_{30}+2p_{03})xy^2+q_{03}y^3.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

В данном случае проведено ее полное качественное исследование и доказана лемма.

Лемма. *Особые точки кривой, являющейся частным интегралом системы (1), являются особыми точками этой системы.*

Учитывая условия, накладываемые на коэффициенты p_{03} и q_{30}, составим таблицы, полностью характеризующую качественную картину (таблицы 2 и 3).

Таблица 2.

$p_{20}=q_{20}=0$ $p_{30}=q_{30}=0$	$O(0, 0)$	$F_1(1, 0)$	$F_2(-1, 0)$	U_1	U_2	Рис.
$p_{03}>0,\ q_{30}>0$	центр	центр	центр	седло	седло	7
$p_{03}>0,\ q_{30}<0$	седло	центр	центр			8

Замечание. При $p_{03}<0,\ q_{30}<0$ и $p_{03}<0,\ q_{30}>0$ имеем противоположное направление на траекториях.

Таблица 3.

$p_{20}=q_{20}=0$ $p_{03}=q_{30}=0$	$O(0, 0)$	$F_1(1, 0)$	$F_2(-1, 0)$	U_1	U_2	Рис.
$q_{03}>p_{30}$ $p_{30}>0$	седло	вырожд. неуст. узел	вырожд. неуст. узел	грубый устойч. узел	седло	9
$p_{30}>q_{03}$ $q_{03}>0$	седло	вырожд. неуст. узел	вырожд. неуст. узел	седло	грубый устойч. узел	10
$p_{30}>0$ $q_{03}<0$	грубый устойч. узел	вырожд. неуст. узел	вырожд. неуст. узел	седло	седло	11

Замечание. При $q_{03}<p_{30}<0;\ p_{30}<q_{03}<0$ или $p_{30}<0,\ q_{03}>0$ имеем противоположное направление на траекториях.

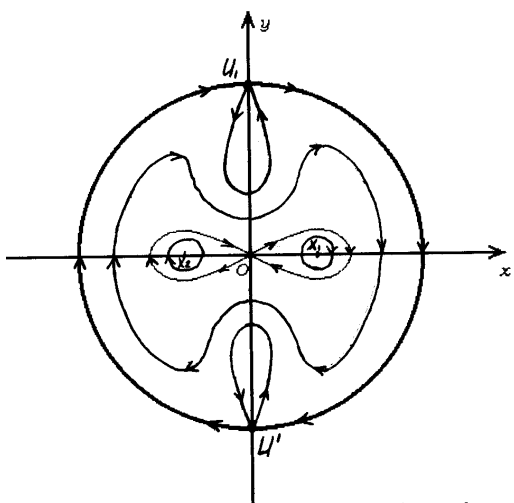

Рис. 1

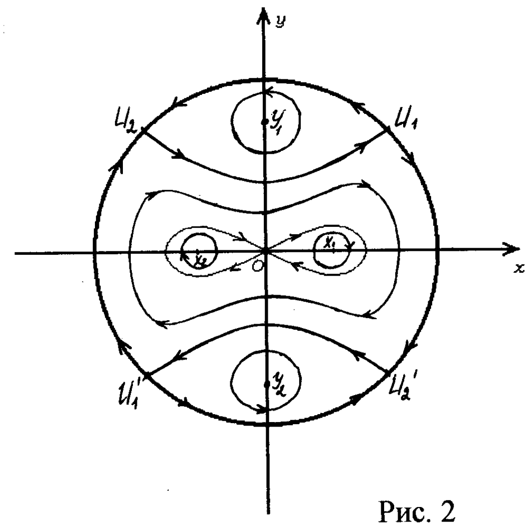

Рис. 2

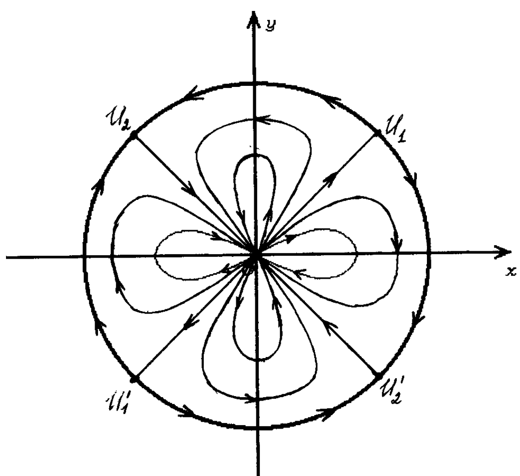

Рис. 3

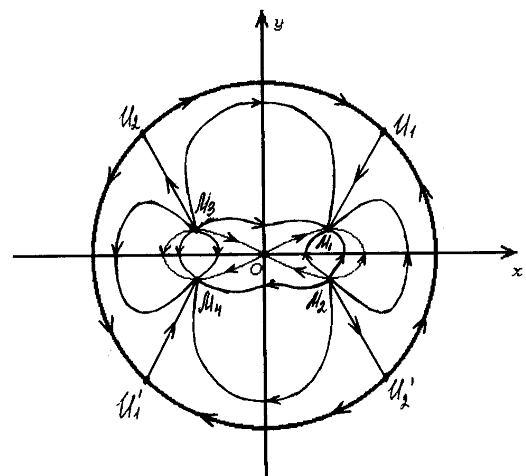

Рис. 4

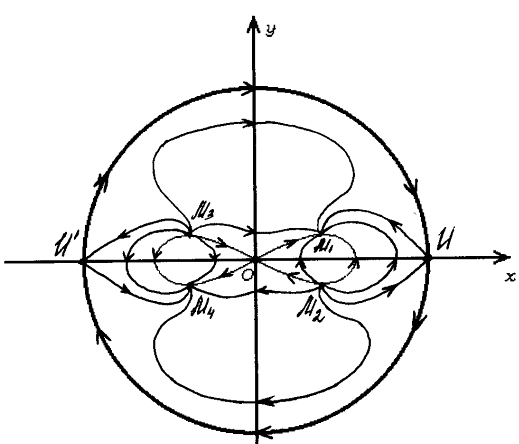

Рис. 5

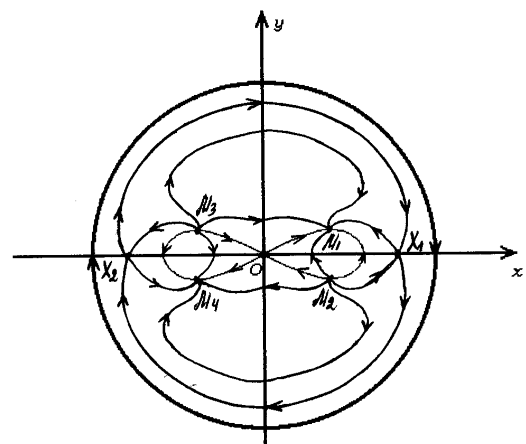

Рис. 6

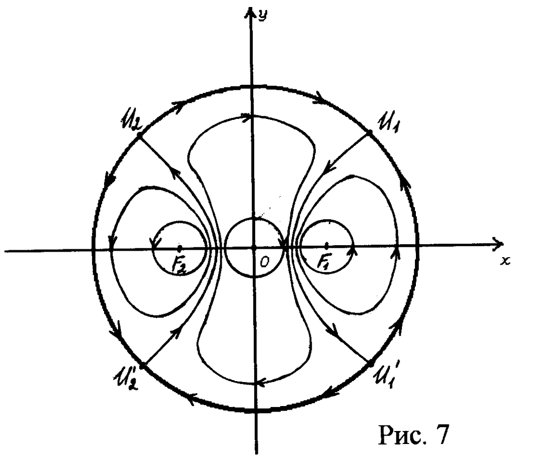

Рис. 7

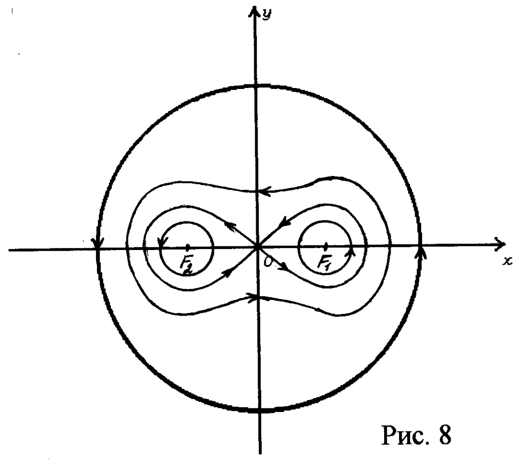

Рис. 8

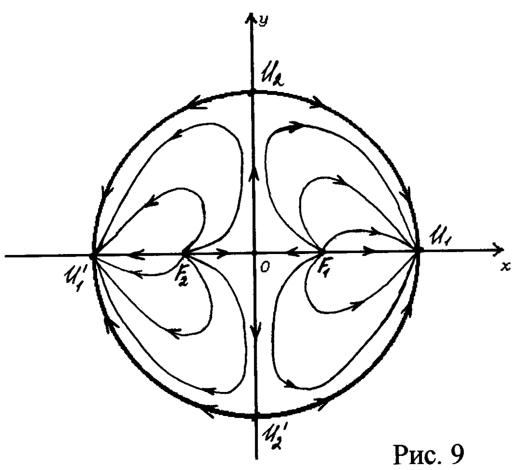

Рис. 9

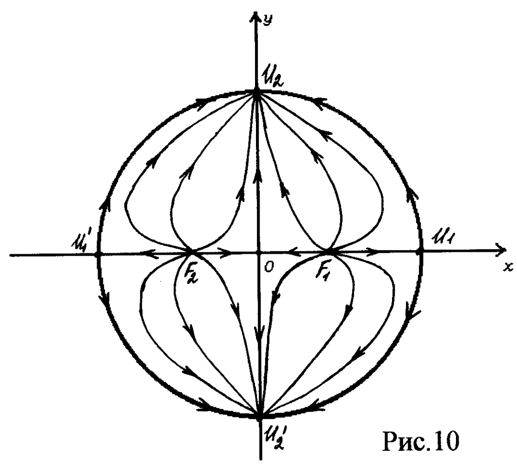

Рис.10

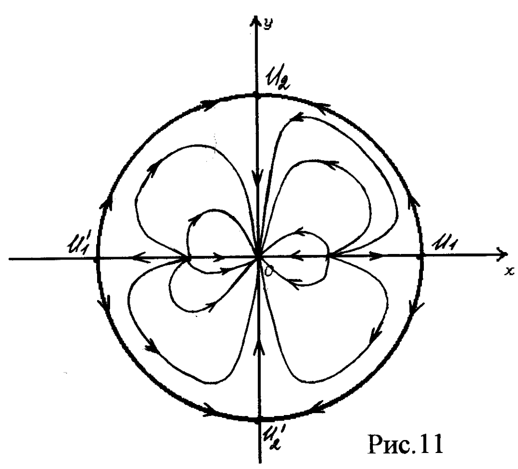

Рис.11

Литература

1. *Ушхо Д.С.* О числе особых точек второй группы кубической системы.// Дифференциальные уравнения. 1993.Т.29, №2. С.240–245.

2. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Мн.: Наука и техника, 1970.

3. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959.

4. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике. – М.: Наука. 1973.

5. *Андронов А.А. и др.* Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука, 1966.

6. *Амелькин В.В. и др.* Нелинейные колебания в системах второго порядка. – Мн.: Изд-во БГУ, 1982.

7. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М. – Л.: Гостехиздат, 1947.

8. *Лизоркин П.И.* Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. – М.: Наука, 1984. – 384 с.

Study of cubical two-order differential system, with its particular integral being the Cassini line

E.A. Titarenko

The conditions when the Cassini line is a particular integral of the cubic differential system are obtained.

