

О ТРАЕКТОРИЯХ ОДНОРОДНОЙ КУБИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

Р.М. Тешев, Д.С. Ушхо.

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп.

Для дифференциальной системы $\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=3} A_{ij} x^i y^j$, $\frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=3} B_{ij} x^i y^j$, где A_{ij} , B_{ij} – вещественные числа, найдены формулы вычисления индекса Пуанкаре особой точки $(0,0)$. Доказано, что индекс принимает значения только из множества $\{-1, 1, -3, 3\}$. Решен вопрос о поведении траекторий в окрестности точки покоя $(0,0)$ при всех возможных значениях ее индекса, приведены примеры.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений.

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=3} A_{ij} x^i y^j \equiv P_3(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=3} B_{ij} x^i y^j \equiv Q_3(x, y) \quad (1)$$

в предположении, что правые части взаимно просты и вещественны, с целью установления поведения ее траекторий в окрестности единственной особой точки $(0,0)$.

Предварительно докажем некоторые утверждения, которые нам понадобятся при дальнейшем изложении результатов настоящей заметки.

Теорема 1. Свойство кривой L быть изоклиной автономной дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (2)$$

инвариантно относительно линейного невырожденного преобразования

$$x = \alpha \bar{x} + \beta \bar{y}, \quad y = \gamma \bar{x} + \delta \bar{y} \quad (3)$$

Доказательство. Пусть система (2) индуцирует на L направление m , т.е.

$$\frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = m, \quad \text{где } (x, y) \in L, \quad m \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

В силу (3) система (2) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{d\tau} &= \delta P(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}, \gamma \bar{x} + \delta \bar{y}) - \beta Q(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}, \gamma \bar{x} + \delta \bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{d\tau} &= -\gamma P(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}, \gamma \bar{x} + \delta \bar{y}) + \alpha Q(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}, \gamma \bar{x} + \delta \bar{y}), \end{aligned} \quad (5)$$

здесь $d\tau = \frac{dt}{\Delta}$, $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Пусть в результате преобразования (3) кривая L переходит в кривую \bar{L} . Тогда с учетом (4) и (5) имеем

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{-\gamma + \alpha m}{\delta - \beta m} = \bar{m} - const, \quad \text{где } (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{L} \quad (6)$$

Из (6) следует, что \bar{L} является изоклиной системы (5). Теорема доказана.

Теорема 2. Произвольную изоклину L системы (2) посредством невырожденного преобразования (3) можно перевести в любую из двух главных изоклин.

Справедливость данного утверждения следует из предыдущей теоремы при $\gamma = \alpha m$ (\bar{L} – изоклина нуля) и при $\delta = \beta m$ (\bar{L} – изоклина бесконечности).

Теорема 3. Если правые части системы (2) являются взаимно простыми однородными вещественными многочленами нечетной степени, то через начало координат (0,0) проходит по крайней мере одна прямая изоклина нуля и одна прямая изоклина бесконечности.

Доказательство. В силу взаимной простоты $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ рассмотрим следующие случаи:

$$a) P(o, y) \equiv 0, Q(o, y) \equiv 0;$$

$$б) P(o, y) \equiv 0, Q(o, y) \equiv 0,$$

$$в) P(o, y) \equiv 0, Q(o, y) \equiv 0.$$

В случае а), очевидно, $x = 0$ – изоклина бесконечности. Запишем дифференциальное уравнение траекторий системы (2) в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)}{\varphi_2\left(\frac{y}{x}\right)}, \quad (7)$$

где $\varphi_1(u)$ – многочлен нечетной степени, $\varphi_2(u)$ – многочлен степени k , где $0 \leq k \leq n-1$, если n – степень многочленов $P(x,y)$ и $Q(x,y)$. Следовательно, $\varphi_1(u)$ как многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень $u = u_0$, а значит прямая $y = u_0 x$ – изоклина нуля.

В случае б) $x = 0$ – изоклина нуля, а многочлен $\varphi_2(u)$ имеет по крайней мере один действительный корень $u = u_1$, что равносильно наличию у системы (2) по меньшей мере одной изоклины бесконечности $y = u_1 x$.

В случае в) оба многочлена $\varphi_1(u)$ и $\varphi_2(u)$ являются многочленами нечетной степени, и поэтому налицо существование хотя бы одной изоклины нуля и одной изоклины бесконечности у системы (2), проходящих через начало координат. *Теорема доказана.*

Теорема 4. Существует невырожденное линейное преобразование декартовых переменных x и y , переводящее систему (1) в систему, для которой прямые $y = k_1 x$ ($y = k_2 x$), где $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k_1 \neq k_2$, являются главными изоклинами (1).

Доказательство. Согласно предыдущей теореме существует хотя бы одна прямая изоклина нуля, проходящая через начало координат.

Пусть $y = kx$ – одна из таких прямых. Из (7) следует, что $\varphi_1(k) = 0$, $\varphi_2(k) \neq 0$. В силу непрерывности функции $\frac{\varphi_1(u)}{\varphi_2(u)}$ и нечетной кратности корня k этой функции существует достаточно

малое положительное число ε , такое, что $\frac{\varphi_1(k+\varepsilon)}{\varphi_2(k+\varepsilon)} \cdot \frac{\varphi_1(k-\varepsilon)}{\varphi_2(k-\varepsilon)} < 0$.

Пусть $\frac{\varphi_1(k+\varepsilon)}{\varphi_2(k+\varepsilon)} = m_1$, $\frac{\varphi_1(k-\varepsilon)}{\varphi_2(k-\varepsilon)} = m_2$. Если $\varepsilon > 0$ выбрать сколько угодно малым, то

$|m_1|$ и $|m_2|$ мало отличаются от нуля, т.е. касательные к траекториям системы (1) в точках изоклины

$y = (k + \varepsilon)x$ ($y = (k - \varepsilon)x$) параллельны прямой l_1 (l_2) в случае $m_1 < 0$, $m_2 > 0$ (рис.1) и прямой l_3 (l_4) в случае $m_1 > 0$, $m_2 < 0$ (рис.2).

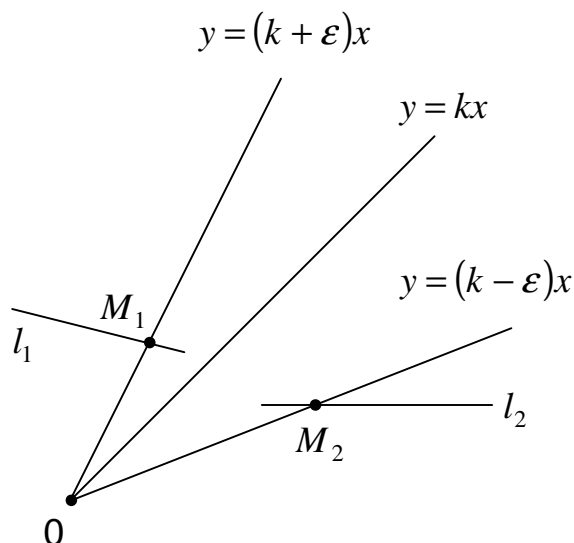


Рис. 1

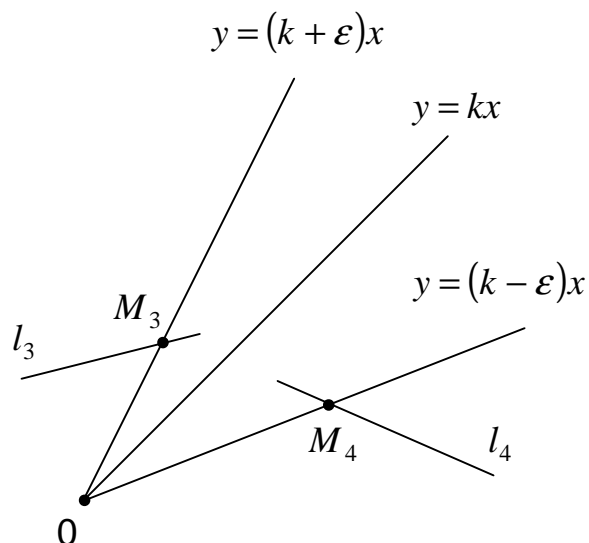


Рис. 2

Важно заметить, что при указанном предположении о малости ε : прямые l_1 и l_2 , l_3 и l_4 пересекаются в точке, расположенной внутри угла M_1OM_2 , M_3OM_4 , соответственно. Согласно теореме 2 существует преобразование, переводящее изоклины $y = (k + \varepsilon)x$ и $y = (k - \varepsilon)x$ в главные изоклины, например, преобразование

$$x = \bar{x} + \bar{y}, \quad y = m_1\bar{x} + m_2\bar{y} \quad (8)$$

Но (8) переводит прямую $y = m_2x$ ($y = m_1x$) в ось $o\bar{y}$ ($o\bar{x}$). Следовательно, линейным невырожденным преобразованием переменных x и y всегда можно добиться того, чтобы изоклины $y = (k + \varepsilon)x$ и ($y = (k - \varepsilon)x$) системы (1) стали главными изоклинами, заключенными в первом и третьем квадрантах.

Нами рассмотрен случай $k > 0$, но в любом из случаев: $k = 0$, $k < 0$, $k = \infty$ рассуждения остаются в силе. *Теорема доказана.*

Замечание 1. Очевидно, в точке $(0,0)$ не определено поле направлений однородного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (9),$$

и было бы справедливее вместо «интегральная прямая l дифференциального уравнения (9) проходит через начало координат» писать «две интегральные полупрямые примыкают к началу координат». Осознавая это, мы, тем не менее, в угоду краткости изложения, в дальнейшем будем придерживаться термина «интегральная прямая проходит через начало координат».

Лемма. Пусть C – простой замкнутый контур, окружающий точку $(0,0)$ системы (1), и точка $M(x, y)$ совершает полный оборот вдоль C против хода часовой стрелки.

Тогда, если при переходе через изоклину бесконечности $y = kx$ ($k \in \mathbb{R}$) функция $\frac{Q_3(x, y)}{P_3(x, y)}$

меняет свой знак, то только с минуса на плюс или с плюса на минус.

Доказательство. Так как Q_3 и P_3 – однородные многочлены третьей степени, то имеет место тождество

$$\frac{Q_3(x_1, ux)}{P_3(x_1, ux)} \equiv \frac{Q_3(1, u)}{P_3(1, u)}. \quad (x \neq 0) \quad (10)$$

В силу непрерывности $P_3(1, u)$ и нечетной кратности корня $u = k$ этой функции имеют место условия

$$\begin{aligned} \forall u \in (k, k + \varepsilon] / P_3(1, u) > 0 \quad (< 0) \\ \forall u \in (k - \varepsilon, k] / P_3(1, u) < 0 \quad (> 0) \end{aligned} \quad (11)$$

где ε – достаточно малое положительное число. Поскольку $(P_3, Q_3) = 1$, то $Q_3(1, k) \neq 0$. Следовательно, $\exists \varepsilon_1 > 0$ такое, что $\forall u \in (k - \varepsilon_1, k + \varepsilon_1) / Q_3(1, u) > 0 \quad (< 0)$. Пусть $\varepsilon_2 = \min(\varepsilon, \varepsilon_1)$. Тогда согласно (11) выполняются условия

$$\begin{aligned} \forall u \in (k, k + \varepsilon_2] / P_3(1, u) > 0 (< 0) \\ \forall u \in [k - \varepsilon_1, k] / P_3(1, u) < 0 (> 0) \end{aligned} \quad (12)$$

Принимая во внимание тождество (10) и условие (12), приходим к выводу, что при переходе через изоклину бесконечности $y = kx$, действительно, функция $\frac{Q_3(x, y)}{P_3(x, y)}$ меняет знак только с минуса на плюс или с плюса на минус.

Если $k = \infty$, то $P_3(0, 1) = 0$ и рассматриваем тождество $\frac{Q_3(Vy, y)}{P_3(Vy, y)} \equiv \frac{Q_3(Vy, 1)}{P_3(Vy, 1)}$, где $Q_3(0, 1) \neq 0$.

Далее применяем все выше приведенные рассуждения. *Лемма доказана.*

Теорема 5. Индекс особой точки $(0, 0)$ [1] системы (1) принимает значения только из множества $\{-1, 1, -3, 3\}$.

Доказательство. Уравнение $P_3(1, u) = 0$ имеет либо один трехкратный корень, либо один простой и один двукратный корень, либо три различных действительных корня (причем одним из корней может быть также ∞).

В случае одного простого корня согласно доказанной лемме функция $\frac{Q_3(x, y)}{P_3(x, y)}$ меняет свой знак два раза с плюса на минус или с минуса на плюс. Следовательно, либо $p=2$ либо $q=2$, и индекс точки $(0; 0)$, вычисляемый по формуле $J = \frac{p-q}{2}$, равен 1 или -1 , где $p(q)$ – число скачков, совершаемых функцией $\frac{Q_3(x, y)}{P_3(x, y)}$ при переходе через $P(x, y)=0$ от $+\infty$ до $-\infty$ (от $-\infty$ до $+\infty$).

Если уравнение $P_3(1, u) = 0$ имеет три различных корня, то возможны следующие сочетания значений p и q :

$$\text{а) } \begin{cases} p = 4, \\ q = 2, \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} p = 2, \\ q = 4, \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} p = 0, \\ q = 6, \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} p = 6, \\ q = 0. \end{cases}$$

в случае а) $J = 1$, в случае б) $J = -1$, в случае в) $J = -3$, в случае г) $J = 3$.

Теорема доказана.

В дальнейшем для исследования индекса особой точки $(0, 0)$ системы (1) согласно теореме 4 достаточно рассмотреть систему

$$\frac{dx}{dt} = (y - k_1 x)(a_{20} x^2 + a_{11} xy + a_{02} y^2) \equiv \bar{P}_3, \quad (13)$$

$$\frac{dy}{dt} = (y - k_2 x)(b_{20} x^2 + b_{11} xy + b_{02} y^2) \equiv \bar{Q}_3,$$

где $k_1 > 0, k_2 > 0, k_1 \neq k_2$.

Замечание 2. В заметке [2] изучен вопрос об индексе $(0,0)$ системы (1) в случае $A_{30} = 0, A_{03} \cdot A_{21} \neq 0$. Систему (13) можно привести к системе, рассмотренной в [2], посредством преобразования $\bar{x} = x, \bar{y} = y - k_1 x$, но (13) более удобна для установления топологической структуры состояния равновесия $(0,0)$.

В зависимости от дискриминанта $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02}$ квадратичная форма $a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$ либо распадается, либо не распадается на множители. Учитывая это положение и тот факт, что функция \bar{Q}_3 сохраняет свой знак (см. доказательство леммы) в достаточно малом секторе, примыкающем к точке $(0,0)$ и содержащем луч $y = kx$ ($x \neq 0$) или луч $x = 0$ ($y \neq 0$), где $\bar{P}_3(1, k) = 0, \bar{P}_3(0, y) \equiv 0$, довольно просто вычисляется индекс $(0,0)$. Поэтому без доказательства сформулируем в виде теорем коэффициентные условия, позволяющие вычислить индекс точки $(0,0)$.

Теорема 6. Если $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} < 0$, то индекс $(0,0)$ системы (13) вычисляется по формулам

$$I = \begin{cases} -1, & \text{если } a_{02}R > 0, \\ 1, & \text{если } a_{02}R < 0, \end{cases}$$

где $R = (k_1 - k_2)(b_{20} + b_{11}k_1 + b_{02}k_1^2)$.

Теорема 7. Если $a_{20} = a_{02} = 0, b_{20} > 0$, то индекс $(0,0)$ системы (13) вычисляется по формулам

$$I = \begin{cases} -1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{11} = \operatorname{sgn} b_{02} = \operatorname{sgn} R \text{ или } \operatorname{sgn} a_{11} = -\operatorname{sgn} b_{02} = -\operatorname{sgn} R, \\ 1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{11} = \operatorname{sgn} b_{02} = -\operatorname{sgn} R, \\ -3, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{11} = -\operatorname{sgn} b_{02} = \operatorname{sgn} R. \end{cases}$$

Теорема 8. Если $a_{20} = a_{02} = 0, b_{20} < 0$, то индекс $(0,0)$ системы (13) вычисляется по формулам

$$I = \begin{cases} -1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{11} = -\operatorname{sgn} b_{02} = \operatorname{sgn} R, \\ 1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{11} = \operatorname{sgn} b_{02} = \operatorname{sgn} R, \text{ или } \operatorname{sgn} a_{11} = -\operatorname{sgn} b_{02} = -\operatorname{sgn} R, \\ 3, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{11} = \operatorname{sgn} b_{02} = -\operatorname{sgn} R. \end{cases}$$

Теорема 9. Если $a_{20} = 0, k_1 = -\frac{a_{11}}{a_{02}}$, то индекс $(0,0)$ системы (13) вычисляется по формулам

$$I = \begin{cases} -1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = -\operatorname{sgn} b_{20}, \\ 1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = \operatorname{sgn} b_{20} \end{cases}$$

Теорема 10. Если $a_{20} = 0, a_{11}a_{02} > 0, a_{02}b_{20} > 0$, то индекс $(0,0)$ системы (13) вычисляется по формулам

$$I = \begin{cases} -1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = \operatorname{sgn} S = -\operatorname{sgn} R \text{ или } \operatorname{sgn} a_{02} = -\operatorname{sgn} S = \operatorname{sgn} R, \\ 1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = -\operatorname{sgn} S = -\operatorname{sgn} R, \\ -3, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = \operatorname{sgn} S = \operatorname{sgn} R. \end{cases}$$

где $S = -\left(\frac{a_{11}}{a_{02}} + k_2\right)\left(b_{20} - \frac{b_{11}a_{11}}{a_{02}} + \frac{b_{02}a_{11}^2}{a_{02}^2}\right)$.

Теорема 11. Если $a_{20} = 0, a_{11}a_{02} > 0, a_{02}b_{20} < 0$, то индекс $(0,0)$ системы (13) вычисляется по формулам

$$I = \begin{cases} -1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = \operatorname{sgn} S = \operatorname{sgn} R, \\ 1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = \operatorname{sgn} S = -\operatorname{sgn} R \text{ или } \operatorname{sgn} a_{02} = -\operatorname{sgn} S = \operatorname{sgn} R, \\ 3, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = -\operatorname{sgn} S = -\operatorname{sgn} R. \end{cases}$$

Теорема 12. Если $a_{20} = 0$, $0 < -\frac{a_{11}}{a_{02}} < k_1$, $a_{02}b_{20} > 0$, то индекс (0,0) системы (13) вычисляется по формулам

$$I = \begin{cases} -1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = -\operatorname{sgn} S = \operatorname{sgn} R, \\ 1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = \operatorname{sgn} S = \operatorname{sgn} R \text{ или } \operatorname{sgn} a_{02} = -\operatorname{sgn} S = -\operatorname{sgn} R, \\ 3, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = \operatorname{sgn} S = -\operatorname{sgn} R, \end{cases}$$

Теорема 13. Если $a_{20} = 0$, $0 < -\frac{a_{11}}{a_{02}} < k_1$, $a_{02}b_{20} < 0$, то индекс (0,0) системы (13) вычисляется по формулам

$$I = \begin{cases} -1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = \operatorname{sgn} S = \operatorname{sgn} R \text{ или } \operatorname{sgn} a_{02} = -\operatorname{sgn} S = -\operatorname{sgn} R, \\ 1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = \operatorname{sgn} S = -\operatorname{sgn} R, \\ -3, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = -\operatorname{sgn} S = \operatorname{sgn} R. \end{cases}$$

Теорема 14. Если $a_{20} = 0$, $k_1 < -\frac{a_{11}}{a_{02}}$, $a_{02}b_{20} > 0$, то индекс (0,0) системы (13) вычисляется по формулам

$$I = \begin{cases} -1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = \operatorname{sgn} S = -\operatorname{sgn} R, \\ 1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = \operatorname{sgn} S = \operatorname{sgn} R \text{ или } \operatorname{sgn} a_{02} = -\operatorname{sgn} S = -\operatorname{sgn} R, \\ 3, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = -\operatorname{sgn} S = \operatorname{sgn} R, \end{cases}$$

Теорема 15. Если $a_{20} = 0$, $k_1 < -\frac{a_{11}}{a_{02}}$, $a_{02}b_{20} < 0$, то индекс (0,0) системы (13) вычисляется по формулам

$$I = \begin{cases} -1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = \operatorname{sgn} S = \operatorname{sgn} R \text{ или } \operatorname{sgn} a_{02} = -\operatorname{sgn} S = -\operatorname{sgn} R, \\ 1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = -\operatorname{sgn} S = \operatorname{sgn} R, \\ -3, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = \operatorname{sgn} S = -\operatorname{sgn} R. \end{cases}$$

Теорема 16. Если $a_{02} = 0$, $k_1 = -\frac{a_{20}}{a_{11}}$, то индекс (0,0) системы (13) вычисляется по формулам

$$I = \begin{cases} -1, & \text{если } a_{11}b_{02} < 0, \\ 1, & \text{если } a_{11}b_{02} > 0 \end{cases}$$

Теорема 17. Если $a_{02} = 0$, $-\frac{a_{20}}{a_{11}} < k_1$, $a_{11}T > 0$, то индекс (0,0) системы (13) вычисляется по формулам

$$I = \begin{cases} -1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{11} = -\operatorname{sgn} b_{02} = \operatorname{sgn} R, \\ 1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{11} = \operatorname{sgn} b_{02} = \operatorname{sgn} R \text{ или } \operatorname{sgn} a_{11} = -\operatorname{sgn} b_{02} = -\operatorname{sgn} R, \\ 3, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{11} = \operatorname{sgn} b_{02} = -\operatorname{sgn} R, \end{cases}$$

где $T = -\left(\frac{a_{20}}{a_{11}} + k_2\right)\left(b_{20} - \frac{b_{11}a_{20}}{a_{11}} + \frac{b_{02}a_{20}^2}{a_{11}^2}\right)$.

Теорема 18. Если $a_{02} = 0$, $-\frac{a_{20}}{a_{11}} < k_1$, $a_{11}T < 0$, то индекс (0,0) системы (13) вычисляется по формулам

$$I = \begin{cases} -1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{11} = \operatorname{sgn} b_{02} = \operatorname{sgn} R \text{ или } \operatorname{sgn} a_{11} = -\operatorname{sgn} b_{02} = -\operatorname{sgn} R, \\ 1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{11} = \operatorname{sgn} b_{02} = -\operatorname{sgn} R, \\ -3, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{11} = -\operatorname{sgn} b_{02} = \operatorname{sgn} R. \end{cases}$$

Теорема 19. Если $a_{02} = 0$, $k_1 < -\frac{a_{20}}{a_{11}}$, $a_{11}T > 0$, то индекс (0,0) системы (13) вычисляется по формулам

$$I = \begin{cases} -1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{11} = -\operatorname{sgn} b_{02} = \operatorname{sgn} R \text{ или } \operatorname{sgn} a_{11} = \operatorname{sgn} b_{02} = -\operatorname{sgn} R, \\ 1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{11} = \operatorname{sgn} b_{02} = \operatorname{sgn} R, \\ -3, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{11} = -\operatorname{sgn} b_{02} = -\operatorname{sgn} R. \end{cases}$$

Теорема 20. Если $a_{02} = 0$, $k_1 < -\frac{a_{20}}{a_{11}}$, $a_{11}T < 0$, то индекс (0,0) системы (13) вычисляется по формулам

$$I = \begin{cases} -1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{11} = -\operatorname{sgn} b_{02} = -\operatorname{sgn} R, \\ 1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{11} = -\operatorname{sgn} b_{02} = \operatorname{sgn} R \text{ или } \operatorname{sgn} a_{11} = \operatorname{sgn} b_{02} = -\operatorname{sgn} R, \\ 3, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{11} = \operatorname{sgn} b_{02} = \operatorname{sgn} R. \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$M = \max\left\{\frac{-a_{11} \pm \sqrt{a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02}}}{2a_{02}}\right\}, \quad m = \min\left\{\frac{-a_{11} \pm \sqrt{a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02}}}{2a_{02}}\right\}$$

$$N = (M - k_2)(b_{20} + b_{11}M + b_{02}M^2), \quad n = (m - k_2)(b_{20} + b_{11}m + b_{02}m^2).$$

Теорема 21. Если $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} > 0$, $a_{20}a_{02} \neq 0$, $m < k_1 < M$, $a_{02}n > 0$ то индекс (0,0) системы (13) вычисляется по формулам

$$I = \begin{cases} -1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = \operatorname{sgn} N = \operatorname{sgn} R \text{ или } \operatorname{sgn} a_{02} = -\operatorname{sgn} N = -\operatorname{sgn} R, \\ 1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = -\operatorname{sgn} N = \operatorname{sgn} R, \\ -3, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = \operatorname{sgn} N = -\operatorname{sgn} R. \end{cases}$$

Теорема 22. Если $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} > 0$, $a_{20}a_{02} \neq 0$, $m < k_1 < M$, $a_{02}n < 0$, то индекс (0,0) системы (13) вычисляется по формулам

$$I = \begin{cases} -1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = \operatorname{sgn} N = -\operatorname{sgn} R, \\ 1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = \operatorname{sgn} N = \operatorname{sgn} R \text{ или } \operatorname{sgn} a_{02} = -\operatorname{sgn} N = -\operatorname{sgn} R, \\ 3, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = -\operatorname{sgn} N = \operatorname{sgn} R. \end{cases}$$

Теорема 23. Если $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} > 0$, $a_{20}a_{02} \neq 0$, $M < k_1$, $a_{02}n > 0$ то индекс (0,0) системы (13) вычисляется по формулам

$$I = \begin{cases} -1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = \operatorname{sgn} N = \operatorname{sgn} R \text{ или } \operatorname{sgn} a_{02} = -\operatorname{sgn} N = -\operatorname{sgn} R, \\ 1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = \operatorname{sgn} N = -\operatorname{sgn} R, \\ -3, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = -\operatorname{sgn} N = \operatorname{sgn} R. \end{cases}$$

Теорема 24. Если $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} > 0$, $a_{20}a_{02} \neq 0$, $M < k_1$, $a_{02}n < 0$ то индекс (0,0) системы (13) вычисляется по формулам

$$I = \begin{cases} -1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = -\operatorname{sgn} N = \operatorname{sgn} R, \\ 1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = \operatorname{sgn} N = \operatorname{sgn} R \text{ или } \operatorname{sgn} a_{02} = -\operatorname{sgn} N = -\operatorname{sgn} R, \\ 3, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = \operatorname{sgn} N = -\operatorname{sgn} R. \end{cases}$$

Теорема 25. Если $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} > 0$, $a_{20}a_{02} \neq 0$, $k_1 = M$, то индекс (0,0) системы (13) вычисляется по формулам

$$I = \begin{cases} -1, & \text{если } a_{02}n > 0 \\ 1, & \text{если } a_{02}n < 0 \end{cases}$$

Теорема 26. Если $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} > 0$, $a_{20}a_{02} \neq 0$, $k_1 = m$, то индекс (0,0) системы (13) вычисляется по формулам

$$I = \begin{cases} -1, & \text{если } a_{02}N > 0 \\ 1, & \text{если } a_{02}N < 0 \end{cases}$$

Теорема 27. Если $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} > 0$, $a_{20}a_{02} \neq 0$, $k_1 < m$, $a_{02}n > 0$, то индекс (0,0) системы (13) вычисляется по формулам

$$I = \begin{cases} -1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = \operatorname{sgn} N = \operatorname{sgn} R, \\ 1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = \operatorname{sgn} N = -\operatorname{sgn} R \text{ или } \operatorname{sgn} a_{02} = -\operatorname{sgn} N = \operatorname{sgn} R, \\ 3, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = -\operatorname{sgn} N = -\operatorname{sgn} R. \end{cases}$$

Теорема 28. Если $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} > 0$, $a_{20}a_{02} \neq 0$, $k_1 < m$, $a_{02}n < 0$, то индекс (0,0) системы (13) вычисляется по формулам

$$I = \begin{cases} -1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = \operatorname{sgn} N = -\operatorname{sgn} R \text{ или } \operatorname{sgn} a_{02} = -\operatorname{sgn} N = \operatorname{sgn} R, \\ 1, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = -\operatorname{sgn} N = -\operatorname{sgn} R, \\ -3, & \text{если } \operatorname{sgn} a_{02} = \operatorname{sgn} N = \operatorname{sgn} R. \end{cases}$$

Далее рассмотрим вопрос о поведении траектории системы (1) в окрестности точки покоя (0,0).

Теорема 29. Число эллиптических секторов, примыкающих к точке покоя (0,0) системы (1), не более четырех.

Доказательство. В силу симметрии векторного поля системы (1) относительно начала координат число e – эллиптических секторов (если они есть), примыкающих к нему, четно. Допустим, что $e = 6$. Тогда к точке (0,0) примыкают еще по крайней мере два гиперболических сектора, т.е. $h \geq 2$.

В противном случае согласно формуле Бендиксона [1] $J = 1 + \frac{e-h}{2}$ индекс (0,0) равен 4, что проти-

воречит теореме 5 настоящей заметки. Согласно монографии [1, с. 349-351] смежными с эллиптическим сектором, примыкающим к особой точке, могут быть один ω – параболический и один α – параболический секторы. Границу канонической окрестности особой точки (0,0), следуя [1], будем называть канонической кривой. Согласно лемме 3 [1,с.351], если положительное направление обхода канонической кривой E индуцирует на эллиптической дуге направление совпадающее с направлением по t (или противоположное направлению по t), то направление положительного обхода петель, принадлежащих канонической окрестности точки (0,0), также совпадает с направлением по t (противоположно направлению по t). Отсюда следует, что между двумя соседними эллиптическими секторами

расположен, по крайней мере, один гиперболический сектор (вообще говоря, нечетное число таких секторов).

Учитывая центрально-подобный характер расположения траекторий системы (1) относительно начала координат [3], приходим к необходимости существования в окрестности точки (0;0) наряду с шестью эллиптическими секторами, по меньшей мере, шести гиперболических секторов. Поскольку каждая пара таких секторов ограничена парой пересекающихся в начале координат интегральных прямых дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q_3(x, y)}{P_3(x, y)}, \quad (14)$$

то уравнение (14) имеет не менее 6 интегральных прямых $y = k_i x$, $i = \overline{1, n}$, $n \geq 6$, где k_i – корни уравнения.

$$Q_3(1, u) - uP_3(1, u) = 0. \quad (15)$$

Но уравнение (15) является алгебраическим уравнением степени не выше четвертой и может иметь не более четырех вещественных корней (в том числе $u = \infty$, соответствующий прямой $x=0$). Таким образом, пришли к противоречию. *Теорема доказана.*

Следствие 1. Если индекс (0;0) системы (1) равен 3, то окрестность (0;0) состоит из четырех эллиптических секторов. При этом направления по t на петлях двух смежных эллиптических секторов взаимно противоположны.

Следствие 2. Если индекс (0;0) системы (1) равен -3 , то окрестность точки (0;0) состоит из восьми гиперболических секторов, ограниченных четырьмя пересекающимися в начале координат интегральными прямыми уравнения (14). При этом не существует ни одного эллиптического и параболического сектора, примыкающего к точке (0;0). Такую сложную особую точку называют восьми-сепаратрисным седлом.

Пример 1. Система

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (y - 2x)(3y^2 - 2xy - 49x^2) \\ \frac{dy}{dt} &= 4(y - 3x)(y^2 - 9xy + 2x^2) \end{aligned} \quad (16)$$

имеет в точке (0;0) сложную особую точку с индексом, равным 3. Из траекторий системы состоят прямые $y = 4x$ и $y = x$. Окрестность (0;0) состоит из четырех эллиптических и четырех параболических секторов. (см. рис.3).

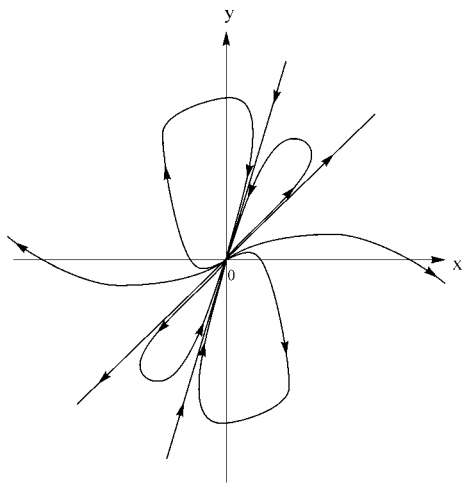


Рис. 3

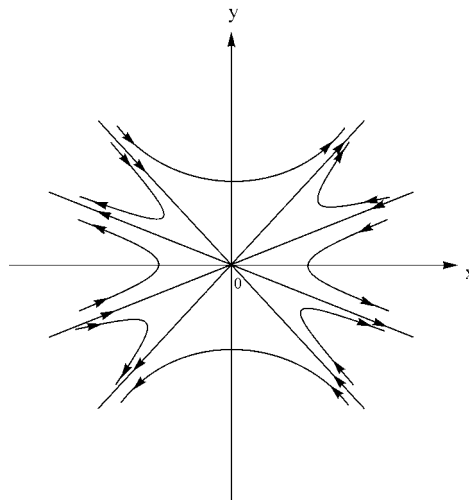


Рис. 4

Пример 2. Четыре прямые $y = \pm \frac{1}{4}x$, $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$ состоят из траекторий системы

$$\frac{dx}{dt} = 16y(y^2 - x^2), \quad \frac{dy}{dx} = 5x \left(y^2 - \frac{1}{4}x^2 \right) \quad (17)$$

Индекс точки покоя (0,0) системы (17) равен -3, следовательно, (0,0) – восьмисепаратрисное седло (см. рис. 4)

Теорема 30. Если индекс точки (0,0) системы (1) равен 1, то она является либо топологическим узлом, либо фокусом, либо центром, либо особой точкой, к которой примыкают два эллиптических и два гиперболических сектора.

В самом деле, согласно предыдущей теореме в случае $I = 1$ к особой точке (0,0) либо примыкают два эллиптических сектора, либо их вовсе нет. Согласно формуле Бендиксона [1] числа эллиптических и гиперболических секторов равны. Следовательно, если к (0,0) примыкают два эллиптических сектора, то непременно примыкают и два гиперболических сектора. Если отсутствуют эллиптические секторы в окрестностях точки (0,0), то нет и гиперболических секторов [1], и особая точка либо фокус, либо топологический узел, либо центр.

Пример 3. Четыре прямые $y = \pm 4x$, $y = \pm 2x$ состоят из траекторий системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (y-3x)^2 \left(y + \frac{41}{4}x \right) \\ \frac{dy}{dt} &= (y-x) \left(64x^2 - \frac{113}{4}xy + \frac{17}{4}y^2 \right) \end{aligned} \quad (18)$$

К точке покоя (0;0) примыкают восемь α – параболических секторов, т.е. она является неустойчивым топологическим узлом (рис.5).

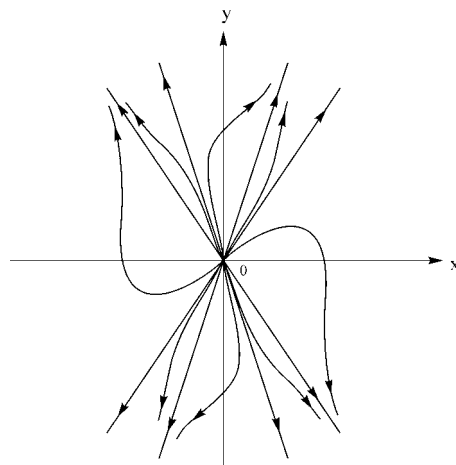


Рис. 5

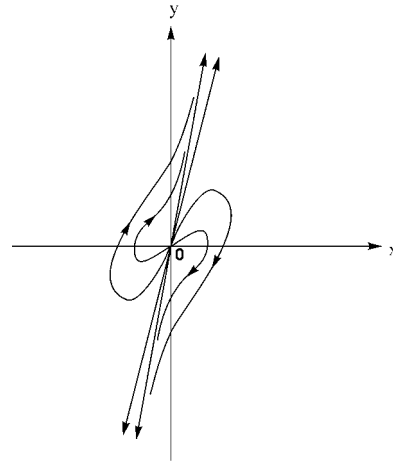


Рис. 6

Пример 4. Из траекторий системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (y-2x)(25x^2 - 8xy + 3y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= (y-3x)(40x^2 + 32xy + 10y^2) \end{aligned} \quad (19)$$

состоят прямые $y = 5x$ и $y = 4x$. Начало координат системы является неустойчивым топологическим узлом, к которому примыкают четыре α – параболических сектора (рис.6).

Пример 5. Начало координат системы

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (y-2x)(32x^2 - xy + 3y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= (y-3x)(50x^2 + 43xy + 20y^2)\end{aligned}\quad (20)$$

является неустойчивым топологическим узлом, к которому примыкают два α -параболических сектора, и через него проходит единственная прямая $y = 5x$, состоящая из траектории системы (20) (рис.7).

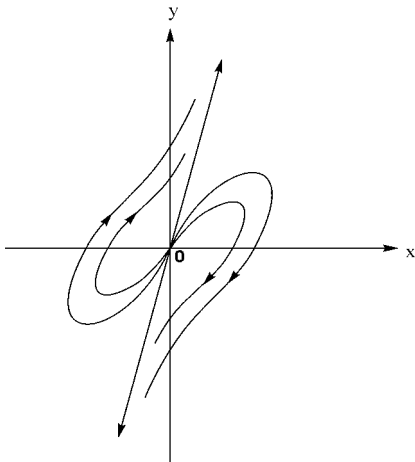


Рис. 7

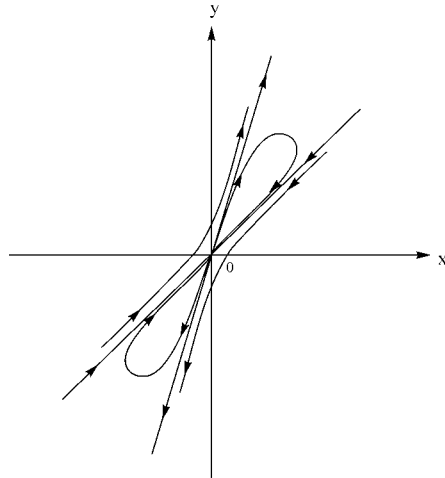


Рис. 8

Пример 6. Две прямые $y = 4x$ и $y = x$ состоят из траекторий системы

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (y-2x)(40x^2 - 21xy + 3y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= (y-3x)(16x^2 - 8xy + 3y^2).\end{aligned}\quad (21)$$

К началу координат примыкают два эллиптических и два гиперболических сектора (рис. 8)

Пример 7. Окрестность точки покоя (0,0) системы

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (y-2x)(50,5x^2 - 22,5xy + 3y^2) \\ \frac{dy}{dt} &= (y-3x)(10x^2 + 2,5xy + 3y^2)\end{aligned}\quad (22)$$

состоит из двух эллиптических, двух гиперболических, четырех параболических секторов (рис. 9). Прямые $y = x$, $y = 0,5x$, $y = 4x$, $y = 5x$ состоят из траекторий системы (22).

Пример 8. Топологическая структура состояния равновесия (0,0) системы

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (y-2x)(y^2 - 2xy + 35x^2), \\ \frac{dy}{dt} &= -24x(y-x)^2\end{aligned}\quad (23)$$

такая же, как у предыдущей системы с той лишь разницей, что из траекторий данной системы состоят прямые $y = -x$, $y = -2x$, $y = 3x$, $y = 4x$ (рис. 10).

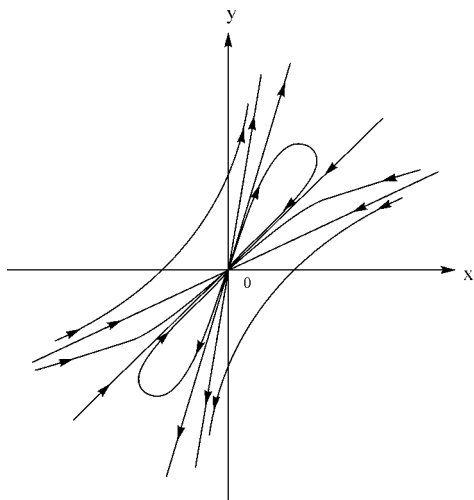


Рис. 9

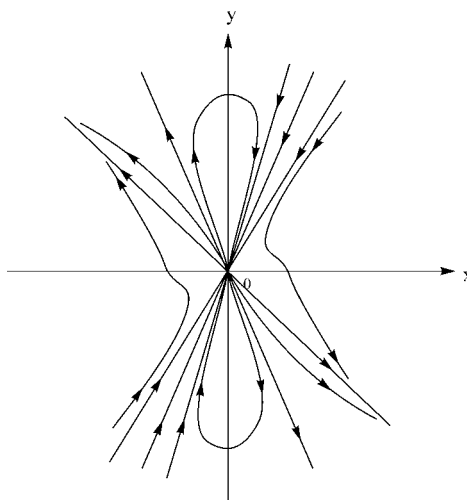


Рис. 10

Пример 9. Начало координат системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\left(y - \frac{1}{2}x\right)(42470x^2 + 12548xy + 4050y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= (y - 5x)^2(1627y + 324x) \end{aligned} \tag{24}$$

является неустойчивым фокусом (рис. 11)

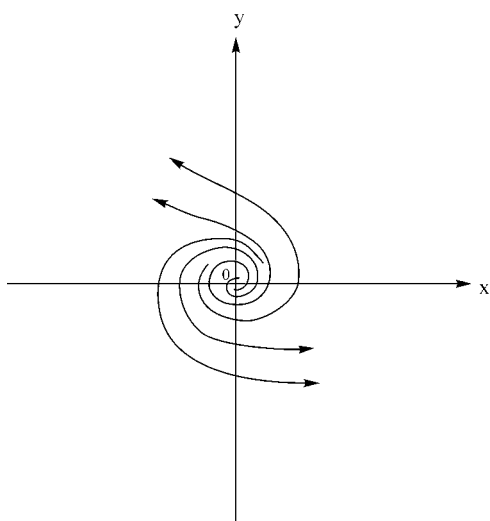


Рис. 11

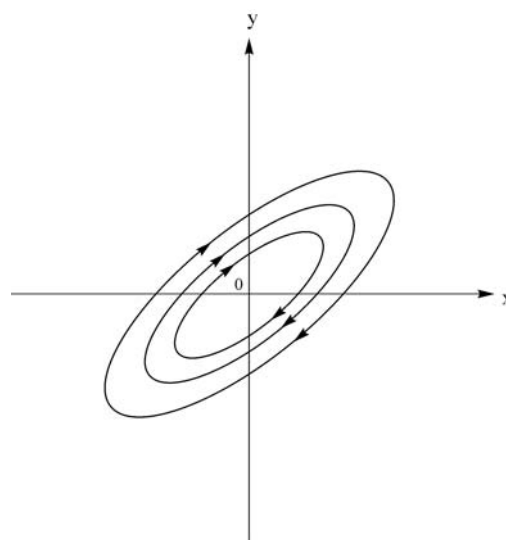


Рис. 12

Пример 10. Начало координат системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (y - x)(2x^2 + xy + 4y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= (y - 2x)(8x^2 + xy + y^2) \end{aligned} \tag{25}$$

является центром (рис. 12).

Теорема 31. Если индекс начала координат системы (1) равен -1 , то к нему примыкают, по крайней мере, четыре гиперболических сектора.

Доказательство. Так как (14) является однородным дифференциальным уравнением, то согласно формуле Бендиксона [1] $I = 1 + \frac{l-h}{2}$, числа e и h – четные, причем h может принимать значения 4 и 6, но не более. Ведь при доказательстве теоремы 29 мы исключили возможность сосуществования четырех эллиптических секторов и гиперболических секторов в окрестности $(0;0)$. Следовательно, либо $e = 0, h = 4$, либо $e = 2, h = 6$.

Теорема доказана.

Теорема 32. Каноническая окрестность начала координат системы (1) не может состоять из двух эллиптических и шести гиперболических секторов.

Доказательство. Прежде всего, покажем, что если эллиптический сектор пересекает хотя бы одна из осей координат, то число гиперболических секторов, примыкающих к особой точке $(0,0)$, не может быть равно шести.

Предположение о наличии в канонической окрестности точки $(0,0)$ двух эллиптических и шести гиперболических секторов по необходимости допускает существование у уравнения (14) максимального числа интегральных прямых, проходящих через начало координат, а именно, четырех прямых. Одна из этих прямых, вообще говоря, может совпадать с одной из осей координат. Мы рассмотрим случай, когда ось Oy пересекает эллиптические секторы, но ось Ox не является интегральной прямой уравнения (14). Если ось Ox является интегральной прямой, в проводимых нами рассуждениях ничего не изменится.

Итак, пусть эллиптические секторы расположены как на рис. 13 (направление по t на траекториях может быть другим, все интегральные прямые могут принадлежать только первому и третьему квадрантам, либо второму и четвертому квадрантам). Из рис. 13 видно, что внутри угла M_1ON_1 расположены две прямые изоклины ∞ , проходящие через начало координат и пересекающие все петли эллиптического сектора, расположенного внутри указанного угла. Вместе с тем в каждом из углов $M_1OM_2, M_2OM_3, M_3OM_4$, содержится не менее одной прямой изоклины ∞ , исходящей из начала координат. Таким образом, предположение о наличии в канонической окрестности точки $(0,0)$ системы (1) двух эллиптических секторов, пересекаемых осью Oy , и шести гиперболических секторов, приводит к необходимости существования у системы (1) по меньшей мере пяти прямых изоклин бесконечности. Но это невозможно, в силу того, что правые части системы (1) взаимно простые однородные многочлены третьей степени.

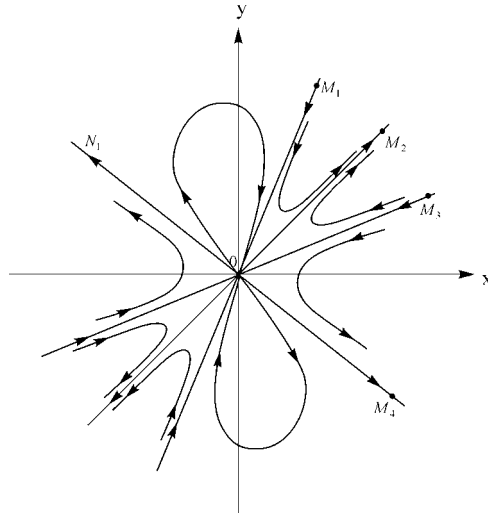


Рис. 13.

Допустим теперь, что в канонической окрестности особой точки $(0,0)$ два эллиптических и шесть гиперболических секторов, причем, эллиптические секторы не пересекаются ни с одной из двух осей координат.

Тогда поворотом осей координат всегда можно добиться, чтобы ось Oy пересекала эллиптические секторы, и мы оказываемся в условиях выше проведенных рассуждений.

Если допустить, что эллиптические секторы пересекаются осью Ox , то рассуждениями, аналогичными проведенным выше, приходим к тому, что через начало координат проходят по крайней мере пять прямых изоклин нуля, что невозможно. *Теорема доказана.*

Из двух предыдущих теорем следует

Теорема 33. Если индекс начала координат системы (1) равен -1 , то к нему примыкают ровно четыре гиперболических сектора. Эллиптических секторов в окрестности $(0,0)$ нет.

Теорема 34. Если индекс начала координат системы (1) равен -1 , то к нему, кроме гиперболических секторов, примыкают разве что параболические секторы.

В самом деле, по предыдущей теореме в окрестности начала координат отсутствуют эллиптические секторы. Следовательно, кроме четырех гиперболических секторов окрестность $(0,0)$ может содержать либо два, либо четыре параболических сектора.

Замечание 3. Мы считаем, что параболический сектор заключен между двумя интегральными прямыми.

Пример 11. Прямые $y = x$, $y = 4x$, $y = 5x$, $y = 8x$ состоят из траекторий системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (y - 3x)(34x^2 - 10xy + y^2) \\ \frac{dy}{dt} &= (y - 2x)(80x^2 - 35xy + 5y^2) \end{aligned} \quad (26)$$

Окрестность начала координат состоит из четырех гиперболических и четырех α -параболических секторов (рис. 14).

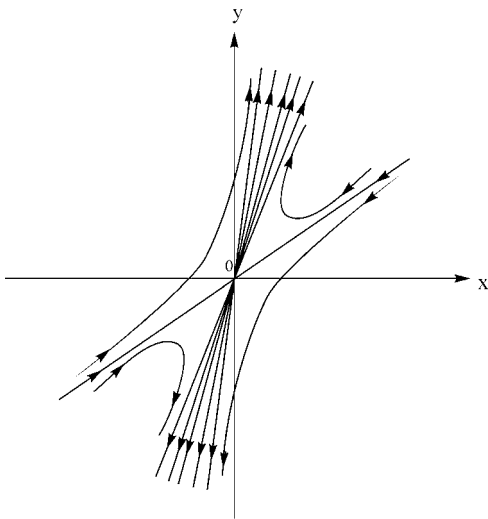


Рис. 14

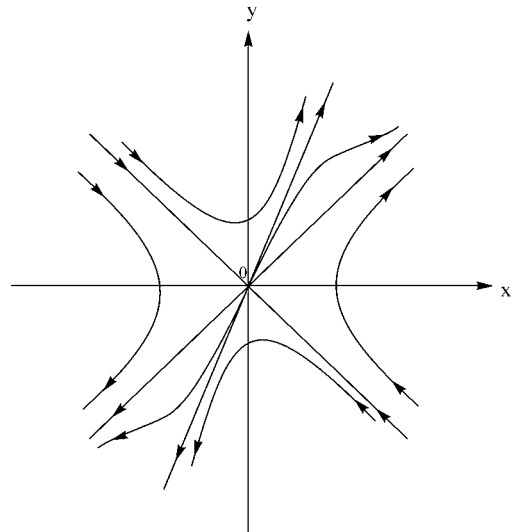


Рис. 15

Пример 12. Прямые $y = \pm x$, $y = 2x$ состоят из траекторий системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y(6x^2 - 4xy + y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= x(4x^2 - 4xy + 3y^2). \end{aligned} \quad (27)$$

Окрестность начала координат состоит из четырех гиперболических и двух α -параболических секторов (рис. 15).

Пример 13. Прямые $y = \pm x$, состоят из траекторий системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y(5x^2 - 2xy + y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= x(x^2 - 2xy + 5y^2). \end{aligned} \quad (28)$$

К началу координат примыкают четыре гиперболических сектора (рис. 16).

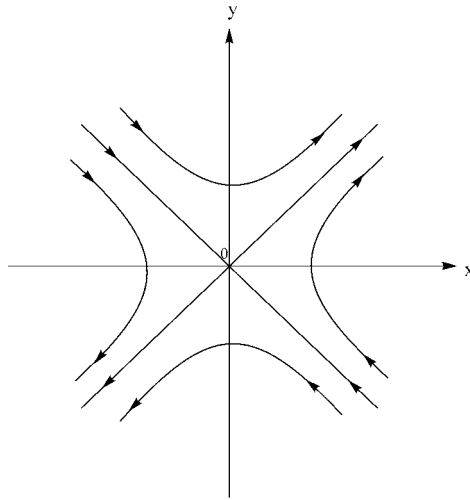


Рис. 16.

Замечание 4. α -сепаратрисы седла O системы (28) образованы в результате слияния трех α -сепаратрис (трехкратные сепаратрисы), α -сепаратрисы седла O системы (27), составляющих прямую $y = 2x$, образованы в результате слияния двух α -сепаратрис (двукратные сепаратрисы), все сепаратрисы седла O системы (26) являются простыми (однократными).

Таким образом, особая точка $(0,0)$ системы (1) в случае индекса, равного -1 , является либо седлом, но с кратной сепаратрисой, либо седлоузлом.

Литература

1. Андронов А.А. и др. Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука, 1966.
2. Черевичный П.Т. Формулы для вычисления индекса особой точки уравнения $y' = \frac{P_3(x,y)}{Q_3(x,y)}$ по коэффициентам // Дифференциальные уравнения, 1970. Т VI., №7, с. 1318 – 1319.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во МГУ, 1984.

Trajectories of homogeneous cubic differential system on the plane

R.M. Teshev, D.S. Ushkho

For differential system $\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=3} A_{ij} x^i y^j$, $\frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=3} B_{ij} x^i y^j$, the formulas of calculation of the Poincaré index of singular point $(0, 0)$ are obtained. The Poincaré index lies in the set $(-1, 1, -3, 3)$. The problem of behavior of trajectories at the rest point $(0, 0)$ for every possible values of the Poincaré index is considered. A few examples are given.