ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ ИТЕРАЦИОННОГО АЛГОРИТМА ПРОДОЛЬНО–ПОПЕРЕЧНЫХ ПРОГОНОК

О.Л. Крицкий

Томский политехнический университет, г. Томск

В работе рассматривается модификация неявного двумерного «α–β» итерационного процесса, примененного для численного решения анизотропного параболического уравнения с краевыми условиями третьего рода. В модификации учитываются новые факторы, появившиеся в исходной задаче, – нестационарность, наличие нормальной производной и диффузионной матрицы, что существенно изменяет структуру известного в литературе алгоритма. Для повышения эффективности сконструированного итерационного метода граничные условия аппроксимируются со вторым порядком по пространству. Алгоритм удается представить в матричном виде, что позволяет доказать его сходимость и устойчивость.

Введение

Решение систем алгебраических уравнений высокого порядка с разреженными матрицами специальной структуры, возникающими из сеточных аппроксимаций многомерных краевых задач, – классическая задача вычислительной математики. Она сохраняет свою актуальность на любом уровне развития информационных и компьютерных технологий, так как предъявляет особенно жесткие требования к быстродействию и оперативной памяти.

За последние десятилетия для решения таких ресурсоемких задач наиболее эффективным средством стали итерационные алгоритмы. Их главными достоинствами являются высокая практическая экономичность и широкие возможности конструирования адаптивных алгоритмов для разных классов уравнений.

В настоящее время наибольшее распространение получили методы неполной факторизации [1], имеющие достаточно высокую скорость сходимости. В первую очередь, это явный, неявный двух– и трехмерный метод Булеева (ЯМБ–2, ЯМБ–3, НМБ–2, НМБ–3), метод модифицированного разложения Холесского, параболических прогонок и другие. Основной идеей их построения является разложение предобуславливающего оператора канонической формы [2] $B \approx B_1 \circ B_2 \circ \ldots \circ B_p$, причем каждый оператор разложения имеет более простую, чем *B*, структуру. Для большинства построенных таким образом итерационных процессов справедливо следующее разложение: $B = (G-L)G^{-1}(G-U)$, где G, L, U – диагональная, нижне– и верхнетреугольная матрицы соответственно, *D* – диагональная матрица, $A = -L + D - U$. Матрица G является основополагающей и ее вид зависит от используемого алгоритма.

Отметим, что для эффективного применения вышеперечисленных алгоритмов требуется знать априорную информацию о спектре оператора *A*, а так же уметь определять его границы, что затруднительно. Более того, при решении плохо обусловленных систем эффективность методов неполной факторизации падает. Подобных недостатков лишен предлагаемый к рассмотрению в данной работе метод нелинейных итераций прогоночных коэффициентов (или модифицированный неявный нелинейный «α–β» процесс). Модификация заключалась в обобщении известных в литературе формул (см., например, [3]) ведения нелинейных итераций на нестационарный случай, в аппроксимации нормальных производных, заданных на границе, с повышенным порядком по пространству и в учете этих краевых условий при проведении итераций. Алгоритм записан в матричном виде, получены условия и доказана теорема о его сходимости и устойчивости к ошибкам начальных данных.

Основные положения

Рассмотрим двухслойную разностную схему для неоднородного двумерного уравнения параболического типа со смешанными производными, записанного в некоторой прямоугольной области G :

$$AU_{i-1,n-1}^{k}+BU_{i,n-1}^{k}+LU_{i+1,n-1}^{k}+KU_{i-1,n}^{k}-CU_{i,n}^{k}+$$

$$+EU_{i+1,n}^{k}+DU_{i-1,n+1}^{k}+VU_{i,n+1}^{k}+YU_{i+1,n+1}^{k}+F_{i,n}^{k-1}=0, \qquad (1)$$

$i=\overline{2,N-1},\ \ n=\overline{2,P-1},\ \ k=\overline{1,M_1}$, $A,\ B,\ L,\ K,\ C,\ E,\ D,\ V,\ Y,\ F$ – некоторые коэффициенты.

Заметим, что в (1) через k обозначен номер слоя по времени, а через $i,\ n$ – номера слоев по осям OX и OY соответственно.

Для построения итерационного алгоритма факторизацию системы алгебраических уравнений (1) проведем с помощью соотношений правой и левой прогонок:

$$U_{i,n}^{k}=\alpha_{i+1,n}U_{i+1,n}^{k}+\beta_{i+1,n,k},\ U_{i,n}^{k}=\overline{\alpha}_{i,n+1}U_{i,n+1}^{k}+\overline{\beta}_{i,n+1,k}\ ; \qquad (2)$$

$$U_{i,n}^{k}=\gamma_{i-1,n}U_{i-1,n}^{k}+d_{i-1,n,k},\ U_{i,n}^{k}=\overline{\gamma}_{i,n-1}U_{i,n-1}^{k}+\overline{d}_{i,n-1,k}\,. \qquad (3)$$

Применяя (2) – (3) к (1) в предположении независимости коэффициента $F_{i,n}^{k-1}$ от разностной функции $U_{i,n}^{k-1}$ (условие эллиптичности исходной задачи) и дополняя (1) граничными условиями третьего рода, записанными для изотропной среды и аппроксимированными с первым порядком по пространству, вида

$$U_{1,n}^{k}=\varphi_{2,n}U_{2,n}^{k}+\xi_{2,n},\ U_{i,1}^{k}=\varphi_{i,2}U_{i,2}^{k}+\xi_{i,2},$$

$$U_{N,n}^{k}=\varphi_{N-1,n}U_{N-1,n}^{k}+\xi_{N-1,n},\ U_{i,P}^{k}=\varphi_{i,P-1}U_{i,P-1}^{k}+\xi_{i,P-1},$$

получаем известные формулы неявного нелинейного «α–β» процесса [3]. Будем использовать их при построении предлагаемой к рассмотрению модификации. При этом в силу нестационарности (1) начальные приближения в конструируемом методе нелинейных итераций прогоночных коэффициентов выберем следующим образом:

$$\beta_{i,n,k}^{(0)}=\begin{cases}u_0(x_i,y_n), & k=1\\ \beta_{i,n,k-1}, & k\ge 2\end{cases},\ \overline{\beta}_{i,n,k}^{(0)}=\begin{cases}u_0(x_i,y_n), & k=1\\ \overline{\beta}_{i,n,k-1}, & k\ge 2\end{cases},$$

$$d_{i,n,k}^{(0)}=\begin{cases}u_0(x_i,y_n), & k=1\\ d_{i,n,k-1}, & k\ge 2\end{cases},\ \overline{d}_{i,n,k}^{(0)}=\begin{cases}u_0(x_i,y_n), & k=1\\ \overline{d}_{i,n,k-1}, & k\ge 2\end{cases},$$

где $u_0(x,y)$ –начальное условие исходного параболического уравнения, $\beta_{i,n,k-1},\overline{\beta}_{i,n,k-1}$, $d_{i,n,k-1},\overline{d}_{i,n,k-1}$ – коэффициенты, найденные на $(k-1)$-м слое по времени. $i=\overline{1,N},\ n=\overline{1,P}$.

В отличие от [3] дополним (1) граничными условиями третьего рода, аппроксимированными со вторым порядком по пространству. При этом полагаем, что граничные условия определены с помощью нормальной производной вида

$$\left(-\mathbf{Л}\cdot\operatorname{grad}U,\mathbf{n}\right)=\alpha(U-U_e), \qquad (4)$$

где $\mathbf{Л}$ – диффузионная матрица, удовлетворяющая условию параболичности, $\mathbf{n}$ – нормаль, U – искомая функция, U_e – внешнее условие, α – коэффициент отдачи среды.

Для получения повышенного порядка аппроксимации введем фиктивный слой по пространству. Затем, предполагая, что (1) удовлетворятся и на границе, запишем (4) в виде

$$-\overline{A}_nU_{s,n-1}^{k}+\overline{C}_nU_{s,n}^{k}-\overline{B}_nU_{s,n+1}^{k}=-\overline{F}_n^{k-1}, \qquad (5)$$

$$-\overline{A}_iU_{i-1,m}^{k}+\overline{C}_iU_{i,m}^{k}-\overline{B}_iU_{i+1,m}^{k}=-\overline{F}_i^{k-1}, \qquad (6)$$

причем на нижней, верхней, левой и правой границе области $m=0$, $m=P$, $s=0$, $s=N$ соответственно, $\overline{A}_i,\ \overline{B}_i,\ \overline{C}_i,\ \overline{F}_i^{k-1},\ \overline{A}_n,\ \overline{B}_n,\ \overline{C}_n,\ \overline{F}_n^{k-1}$ – коэффициенты, значение которых зависит от выбранного в (4) условия, $i=\overline{2,N-1}$, $n=\overline{2,P-1}$, $k>0$. Например, если для верхней границы $(m=P)$ выбрать разностную схему

$$k_{12}\cdot\left(U^k_{i+1,P}-U^k_{i-1,P}\right)/2h_1+k_{22}\cdot\left(U^k_{i,P+1}-U^k_{i,P-1}\right)/2h_2=\alpha\left(U_e-U^k_{i,P}\right),$$

то коэффициенты в (6) будут определены следующим образом:

$$\bar{A}_i=-\left(A\alpha^{s+1/2}_{i-1,P}+K+V\cdot r_1\right),\ \bar{B}_i=A\alpha^{s+1/2}_{i-1,P}-K+V\cdot r_1,$$

$$\bar{C}_i=2B\alpha^{s+1/2}_{i,P}+D\left(\gamma^{s+1}_{i-1,P}-\gamma^{s+1}_{i+1,P}\right)-C-V\cdot r_2,$$

$$\bar{F}^{k-1}_i=2B\beta^{s+1/2}_{i,P,k}+A\left(\beta^{s+1/2}_{i-1,P,k}-\beta^{s+1/2}_{i+1,P,k}\right)+D\left(\bar{d}^{s+1}_{i-1,P,k}-\bar{d}^{s+1}_{i+1,P,k}\right)+VU_e r_2+F^{k-1}_{i,P},$$

где k_{ij} – элементы диффузионной матрицы, $i,j=1,2$, h_1,h_2 – шаги сетки по оси OX,OY соответственно, $\bar{\alpha}^s_{i,j}$, $\bar{\gamma}^s_{i,j}$, $\bar{\beta}^s_{i,j}$, $\bar{d}^s_{i,j}$ – коэффициенты «α–β» процесса, $r_1=k_{12}h_2/(k_{22}h_1)$, $r_2=2h_2\alpha/k_{22}$.

Таким образом, для того чтобы сохранить второй порядок аппроксимации во всей расчетной области, необходимо на каждом слое по времени проводить дополнительную прогонку по границе.

Как и в случае «α–β» процесса имеет место особенность, связанная с вычислением прогоночных коэффициентов вблизи границы. Однако теперь для получения модифицированного уравнения необходимо использовать граничные условия, аппроксимированные разностными схемами повышенного порядка. Покажем это более подробно на примере определения коэффициентов $\bar{\alpha}_{i,P},\bar{\beta}_{i,P,k}$ на верхней границе. Дополнительно потребуется разностная схема второго порядка вида

$$U^k_{i,P}=U^k_{i,P-2}-r_1\cdot\left(U^k_{i+1,P-1}-U^k_{i-1,P-1}\right)-r_2\cdot\left(U_e-U^k_{i,P-1}\right).$$

Используя ее в выражении (1), записанном при $n=P-1$, имеем:

$$\tilde{A}U^k_{i-1,P-2}+\tilde{B}U^k_{i,P-2}+\tilde{L}U^k_{i+1,P-2}+\tilde{K}U^k_{i-1,P-1}-\tilde{C}U^k_{i,P-1}+\tilde{E}U^k_{i+1,P-1}+\tilde{F}^{k-1}_{i,P-1}=0,$$

где $\tilde{A}=A+D;\ \tilde{B}=B+V;\ \tilde{K}=K+Vr_1+Dr_2;\ \tilde{C}=C-(Y-D)r_1-Vr_2;\ \tilde{E}=E-Vr_1+Yr_2;$

$$\tilde{L}=L+Y;\ \tilde{F}^{k-1}_{i,P-1}=F^{k-1}_{i,P-1}-r_1\left(YU^k_{i+2,P-1}-DU^k_{i-2,P-1}\right)-r_2U_e(V+Y+D).$$

Таким образом, в приграничных узлах $n=P-1$ получили модифицированное разностное уравнение (1), не содержащее $U^k_{i-1,P},\ U^k_{i,P},U^k_{i+1,P}$. Это позволяет вычислять $\bar{\alpha}_{i,P},\bar{\beta}_{i,P,k}$ обычным способом, не привлекая неизвестные коэффициенты $\alpha_{i,P},\beta_{i,P},\ \gamma_{i,P},d_{i,P}$.

Преобразования для остальных краевых условий (4) получаются аналогичным образом.

Условия окончания итераций

Для завершения конструирования модифицированного метода нелинейных итераций прогоночных коэффициентов выберем условие окончания итераций. Этот выбор очень важен, так как зачастую от него зависит величина скорости сходимости итерационного алгоритма. Обычно выбирают следующие критерии:

1) $\left\|z^s\right\|_D\equiv\left\|u^s-u\right\|_D\le\varepsilon$, где $\left\|u\right\|_D=(Du,u)$, u – точное решение.

2) $\left\|u^s-u\right\|_D\le\varepsilon\cdot\left\|u^{(0)}-u\right\|_D$, $u^{(0)}$ – начальное приближение.

Эти критерии хорошо зарекомендовали себя на практике [1,4], так как если положить $D=A^*A$, $A-$ самосопряженный оператор исходной задачи $Au=f$, то

$$\left\|z^s\right\|_D\equiv\left\|u^s-u\right\|_D=\left(A\left(u^s-u\right),A\left(u^s-u\right)\right)=\left\|Au^s-f\right\|^2\equiv\left\|r^s\right\|^2,$$

где $r^s=\left(Au^s-f\right)-$ вектор невязки, $z^s=\left(u^s-u\right)$ – погрешность решения.

Очевидно, что $\left\|z^s\right\|\le\left\|A^{-1}\right\|\cdot\left\|r^s\right\|$, поэтому контроль за величиной невязки, осуществляемый в соответствии с критериями 1) – 2), позволяет гарантировать необходимую точность итерационного решения. Если же норма обратного оператора $\left\| A^{-1} \right\|$ неизвестна или оценивается слишком грубо, а так же если точное решение исходной задачи неизвестно, то используют следующие критерии сходимости [3]:

$$\max_{i,n}\left|\frac{U_{i,n}^{s+1}-U_{i,n}^{s}}{U_{i,n}^{s}}\right|<\varepsilon,\ \left\|U^{s+1}-U^{s}\right\|<\varepsilon .$$

Чтобы понять их надежность, рассмотрим сходящийся итерационный процесс, записанный в матричном виде: $U^s = B\cdot U^{s-1}+g$. Так как $\left\|U^{s+1}-U^{s}\right\| \le \left\|B\right\|\cdot\left\|U^{s}-U^{s-1}\right\|$ или $\left\|z^{s}\right\| \le \rho \left\|z^{s-1}\right\|$, где $\left\|B\right\| = \rho$ – радиус сходимости итерационного метода, то:

$$\left\|U-U^{s}\right\| = \left\|U-U^{s}+U^{s+1}-U^{s+1}+\ldots+U^{s+k}-U^{s+k}+\ldots\right\| \le \left\|U^{s+1}-U^{s}\right\|+\ldots+\left\|U^{s+k+1}-U^{s+k}\right\|+$$
$$+\ldots \le \left\|U^{s+1}-U^{s}\right\|\cdot\left(1+\rho+\rho^{2}+\ldots\right) \le \frac{\varepsilon}{1-\rho}.$$

Последнее означает, что если итерационный алгоритм сходится медленно $(\rho \approx 1)$, то использование неравенств $\max_{i,n}\left|\frac{U_{i,n}^{s+1}-U_{i,n}^{s}}{U_{i,n}^{s}}\right|<\varepsilon$, $\left\|U^{s+1}-U^{s}\right\|<\varepsilon$ в качестве критериев прекращения итерационного процесса приводит к необходимости проводить в $(1-\rho)^{-1}$ раз больше итераций, чем при применении неравенств $\left\|u^{s}-u\right\|_{D} \le \varepsilon,\ \left\|u^{s}-u\right\|_{D} \le \varepsilon\cdot\left\|u^{(0)}-u\right\|_{D}$. Как следствие, они будут менее универсальны, чем норма невязки, так как имеет место зависимость от скорости сходимости алгоритма: для двух различных процессов с фиксированным ε реально достигнутая точность будет выше у того метода, который сходится быстрее (ρ меньше). В то же время, с помощью этих критериев можно получить апостериорную оценку погрешности решения и повысить точность итерационного приближения (ускорение Люстерника и Ричардсона).

В соответствии с изложенным выше будем считать α–процесс сходящимся, если выполнено неравенство:

$$\max_{i,n}\left|\frac{\alpha_{i,n}^{s+1}-\alpha_{i,n}^{s}}{\alpha_{i,n}^{s}}\right|<\varepsilon .$$

Будем считать β–процесс сходящимся, если на каждом слое по времени k выполнено неравенство:

$$\max_{i,n}\left|\frac{\beta_{i,n,k}^{s+1}-\beta_{i,n,k}^{s}}{\beta_{i,n,k}^{s}}\right|<\varepsilon,$$

где ε – необходимая точность вычислений, $k \ge 1$.

Сходимость и устойчивость итерационного алгоритма

Сходимость α–процесса для случая эллиптической краевой задачи первого рода $(A = L = D = Y = 0,\ \varphi = 0)$ получена в [3]. Там же приведена эмпирическая оценка скорости сходимости β–процесса. Полное теоретическое доказательство сходимости «α–β» алгоритма в литературе отсутствует.

Приведем модифицированный выше α– и β–процесс к каноническому виду:

$$B_s\frac{\hat{U}_{\alpha}^{s+1}-\hat{U}_{\alpha}^{s+1/2}}{\tau_s}+A_s\hat{U}_{\alpha}^{s+1/2}=F_s,\ B_s\frac{\hat{U}_{\beta}^{s+1}-\hat{U}_{\beta}^{s+1/2}}{\tau_s}+A_s\hat{U}_{\beta}^{s+1/2}=F_s,$$

с начальными условиями

$$\hat{U}_{\alpha}^{(0)}=0,\ \hat{U}_{\beta,k}^{(0)}=\begin{cases}U_0, & k=1\\ U_{\beta,k-1}, & k\ge 2\end{cases},$$

где $A_s, B_s, \hat{U}_{\beta}^{s}, \hat{U}_{\alpha}^{s}, F_s$ – некоторые матрицы, определенные в [5], τ_s – итерационный параметр, $s \ge 0$.

Теорема. Пусть матрица системы (1) обладает свойством диагонального преобладания и выполнено неравенство $C \ge V + K + E + B$, причем $V \ge 0, C \ge 0, K \ge 0, \; E \ge 0, B \ge 0, A \ge 0$. Пусть $A = Y = -L = -D$ и для любого $s \ge 0$ $\left|\alpha_{2,n}^{(s)}\right| \le 1$, $\left|\gamma_{N-1,n}^{(s)}\right| \le 1$, $\left|\alpha_{i,2}^{(s+1/2)}\right| \le 1$, $\left|\gamma_{i,N-1}^{(s)}\right| \le 1$, $\left|\varphi_{2,n}\right| \le 1$, $\left|\varphi_{N-1,n}\right| \le 1$, $\left|\varphi_{i,2}\right| \le 1$, $\left|\varphi_{i,N-1}\right| \le 1$, $\left|\xi_{2,n}\right| \le U_e$, $\left|\xi_{N-1,n}\right| \le U_e$, $\left|\xi_{i,2}\right| \le U_e$, $\left|\xi_{i,N-1}\right| \le U_e$, где $U_e = const > 0$. Пусть правая часть исходного параболического уравнения $f(x,y,t)$ ограничена в области задания G при любом фиксированном значении t. Тогда модифицированный «α–β» процесс сходится, причем α–процесс будет устойчивым по начальному приближению.

Выводы

Предложен модифицированный алгоритм «α–β» итераций, примененный для решения двумерного параболического анизотропного уравнения с краевыми условиями вида (4). Алгоритм учитывает нестационарность исходной задачи, ее зависимость от коэффициентов диффузионной матрицы и от нормальной производной на границе, причем для повышения эффективности метода и для сохранения второго порядка аппроксимации по пространству последняя представляется в виде (5) – (6). Произведен анализ условий окончания итерационного процесса. Модифицированный алгоритм записывается в каноническом виде, доказывается теорема о сходимости и устойчивости.

Литература

1. *Ильин В.П.* Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. – М.: Физматлит, 1995, 288 с.
2. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983, 616 с.
3. *Четверушкин Б.Н.* Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. – М.: Наука, 1985, 216 с.
4. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978, 591 с.
5. *Крицкий О.Л.* Численные методы решения нестационарных краевых задач анизотропной теплопроводности. – Томск, ТГУ, 2001, диссертация кандидата физ.–мат. наук.

ON MODIFICATION OF ITERATIVE LONGITUDINAL–TRANSVERSE RUNNING ALGORITHM

O.L. Kritski

In this paper a modification of implicit 2D «α–β» iterative algorithm is considered. This method is applied to numerical solving of anisotropic parabolic equation with boundary conditions of third kind. Thanks to the author’s modification of this method new factors such as time dependence, normal derivative and diffusive matrix are taken into account. These factors significantly change the structure of the well known algorithm. To improve the performance of the constructed iterative method boundary conditions are approximated by the second order finite differential space scheme. The algorithm was written in a matrix form. The convergence and stability of this iterative process are proved.

