2003 г. №8
Т р у д ы Ф О Р А

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ В СПЕЦИАЛЬНОМ ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.Н. Чернышев

Славянский государственный педагогический институт, г. Славянск-на-Кубани

В статье изучаются вопросы полиномиальной аппроксимации целых функций в специальном весовом пространстве $\mathcal{P}_\psi$. Приведен важный пример, когда многочлены секвенциально плотны в $\mathcal{P}_\psi$.

Аппроксимация субгармонических функций. При изучении пространств голоморфных функций важную роль играют субгармонические функции. Это связано с тем, что если f - голоморфная функция в области G, то функция $\ln|f(z)|$ является субгармонической в этой области. Возникает задача о приближении произвольной субгармонической функции функциями вида $\ln|f(z)|$. В работах [1], [2] Р.С.Юлмухаметовым был получен результат по аппроксимации, неулучшаемый в классе всех субгармонических на плоскости функций.

Теорема 1. *Пусть u субгармонична на всей плоскости и имеет конечный порядок роста ρ. Тогда существует целая функция f такая, что для любого $\alpha > \rho$*

$$|\,u(z) - \ln|f(z)|\,| \le C_\alpha \ln|z|, \quad |z| \to \infty, \quad z \notin E_\alpha \tag{1}$$

причем исключительное множество E_α может быть покрыто кружками $\{z : |z - z_j| \le r_j\}$ так, что

$$\sum_{|z_j|>R} r_j = O(R^{\rho-\alpha}), \quad R \to \infty.$$

Полиномиальная аппроксимация целых функций. Одним из первых результатов для проблемы аппроксимации целых функций посредством полиномов в некоторых весовых пространствах является доказательство Б.А. Тейлора [4] возможности аппроксимации многочленами каждой функции $f \in H(\mathbb{C})$, удовлетворяющей условию

$$\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \exp[-2\psi(z)]d\sigma(z) < \infty,$$

где $\psi(z)$ - выпуклая функция с некоторыми ограничениями на рост снизу, в топологии пространства $L^2(\mathbb{C})$ с весом $\psi(z) + \ln(1 + |z|^2)$. Обобщив методику Б.А.Тейлора, Н.Сибони доказал следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $\psi(z) = \overline{\lim_{\eta\to z}} \sup_\alpha \psi_\alpha(\eta)$, $\quad z \in \mathbb{C}$, где ψ_α — семейство плюрисубгармонических функций, фильтрующееся по возрастанию, $\exp\psi_\alpha(z)$ имеет полиномиальный рост. Тогда каждую функцию $f \in H(\mathbb{C})$, удовлетворяющую условию*

$$\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \exp[-2\psi(z)]d\sigma(z) < \infty,$$

можно приблизить многочленами в топологии пространства $L^2(\mathbb{C})$ с весом $\psi(z)+\ln(1+|z|^2)$. Другими словами, найдется последовательность многочленов $p_k \in \mathbb{C}[z]$ такая, что

$$\left[\int_{\mathbb{C}} \left(\frac{|f(z) - p_k(z)|}{\exp\{\psi(z) + \ln(1 + |z|^2)\}}\right)^2 d\sigma(z)\right]^{1/2} \to 0, \; k \to \infty.$$

В работе [3] изучена возможность полиномиальной аппроксимации в проективных пределах пространств целых функций с ростом $\exp[\psi(z)+\varepsilon|z|]$, где ψ — положительная плюрисубгармоническая функция, удовлетворяющая условию Липшица.

Пусть $\psi(z)$ - неотрицательная субгармоническая на всей комплексной плоскости функция первого порядка и конечного типа: при некоторых $A, B > 0$ для любого $z \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство $\psi(z) \leq A|z| + B$. Выберем произвольную убывающую последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ положительных чисел. Предполагаем, что $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$. Положим $\psi_m(z) = \psi(z) + \varepsilon_m|z|, \quad m = 1, 2, \ldots$. Обозначим $P(\psi_m)$ семейство целых функций $\varphi \in H(\mathbb{C})$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{\exp\{\psi_m(z)\}} < \infty.$$

Легко убедиться, что пространство $P(\Psi_m)$ является банаховым с нормой

$$||\varphi||_m = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{\exp\{\psi_m(z)\}}.$$

При этом $P(\psi_1) \supset P(\psi_2) \supset \ldots \supset P(\psi_m) \supset \ldots$. Причем, вложения $P(\psi_{m+1}) \subset P(\psi_m), m \in \mathbb{N}$ вполне непрерывны.

Обозначим P_ψ пересечение $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} P(\psi_m)$, наделеное топологией проективного предела банаховых пространств $P(\psi_m)$ относительно отображений вложения $P_\psi \to P(\psi_m)$ (см. [5, Глава V]). Последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\varphi_k \in P_\psi$, сходится в P_ψ, если она сходится равномерно на компактах из $\mathbb{C}$ и ограничена в каждом из пространств $P(\psi_m)$.

Теорема 3. *Пусть $\psi \geq 0$ — субгармоническая на $\mathbb{C}$ функция первого порядка и конечного типа в $\mathbb{C}$, такая, что*

$$|\psi(z) - \psi(\eta)| \leq C|z - \eta|, \quad z, \eta \in \mathbb{C}.$$

Тогда многочлены плотны в пространстве P_ψ.

Далее опишем некоторое усиление этого результата.

Функция $M^{-1}(|\lambda|)$. Предполагаем, что целая функция $\pi(\zeta)$ имеет минимальный тип при порядке $\rho = 1$ и $\pi(0) = 0$. Обозначим $M(r)$ максимум модуля функции π на круге $|\zeta| \leq r$. Функция $M(r)$ является непрерывной и возрастающей. Она отображает взаимно однозначно множество $\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$ на себя, стремится к бесконечности при $r \to \infty$ и $M(0) = 0$. Пусть $M^{-1}(r)$ — обратная к $M(r)$ функция. Непосредственно из определения вытекает, что функция $M^{-1}(r)$, наследуя свойства функции $M(r)$, является непрерывной и возрастающей. Она отображает взаимно однозначно множество $\mathbb{R}_+$ на себя. При этом $M^{-1}(r) \to \infty$ при $r \to \infty$ и $M^{-1}(0) = 0$. Приведем без доказательства основные свойства функции $M^{-1}(|\lambda|) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$.

Свойство 1. *Пусть ζ — произвольная точка, в которой реализуется максимум модуля функции π на круге радиуса r с центром в начале. Тогда $M(|\zeta|) = |\pi(\zeta)|, \quad M^{-1}(|\pi(\zeta)|) = |\zeta|$.*

Свойство 2. *Пусть ζ — наименьший по модулю элемент $\mathbb{C}$, для которого $|\pi(\zeta)| = r$. Тогда $M(|\zeta|) = r, \quad M^{-1}(r) = |\zeta|$.*

Свойство 3. *Если $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$ и $|\lambda| < |\lambda'|$, то $M^{-1}(|\lambda|) < M^{-1}(|\lambda'|)$.*

Свойство 4. *Для любых $q, Q > 0$ найдется константа $R > 0$ такая, что для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $|\lambda| \geq R$, выполняется неравенство $M^{-1}(|\lambda|) \geq Q \ln q|\lambda|$.*

Свойство 5. *Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{R}$. Если $q \geq 1$, то $M^{-1}(q|\lambda|) \leq qM^{-1}(|\lambda|)$.*

Свойство 6. *При некотором $s \geq 0$ для всех достаточно больших по модулю $\lambda \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство $M^{-1}(|\lambda|) \leq s|\lambda|$.*

Функция $\mu(|\lambda|)$. Функция $M^{-1}(|\lambda|)$, вообще говоря, не является субгармонической, так как функция $M^{-1}(r)$ не обязана быть выпуклой по переменной $\ln r$. Этот факт не дает возможности использовать свойства этой функции в полной мере. Выход из такого положения состоит в замене этой функции другой функцией, "близкой"к ней, но субгармонической.

Обозначим $\mu(r)$ произвольную выпуклую по переменной $\ln r$ неубывающую функцию $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такую, что для всех достаточно больших r, r' выполняются неравенства $d\mu(r) \leq M^{-1}(r) \leq D\mu(r)$ и $|\mu(r) - \mu(r')| \leq L|r - r'|$ при некоторых $d, D, L > 0$.

Понятно, что функция $\mu(|\lambda|)$ является субгармонической. Наличие выпуклой по переменной $\ln r$ функции $\mu(r)$, удовлетворяющей требуемым неравенствам, для любой функции π минимального типа при порядке $\rho = 1$ остается под вопросом. Удается доказать ее существование для целой функции вполне регулярного роста при уточненном порядке $\rho(r)$, удовлетворяющем условиям:

1) $\rho(r) \to \rho$, $0 < \rho \leq 1$;

2) $r^{\rho(r)}$ – вогнутая функция (это условие выполняется, если $\rho(r) \equiv \rho \leq 1$);

3) индикатор $h(\theta)$ функции π при уточненном порядке $\rho(r)$ всюду положителен.

В этом случае в качестве функции $\mu(r)$ можно взять обратную к функции $e^{r^{\rho(r)}}$, то есть композицию обратной к функции $r^{\rho(r)}$ и функции $\ln r$. Для многочлена степени q, очевидно, роль функции $\mu(r)$ может выполнить функция $r^{\frac{1}{q}}$.

Пространство $\mathcal{P}_\psi$. Пусть $\psi(z)$ - неотрицательная субгармоническая на всей комплексной плоскости функция такая, что при некоторых $A, B > 0$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство $\psi(\lambda) \leq A\mu(|\lambda|) + B$.

Выберем произвольную убывающую последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ положительных чисел. Предполагаем, что $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$. Положим $\psi_m(\lambda) = \psi(\lambda) + \varepsilon_m\, \mu(|\lambda|)$, $\quad m = 1, 2, \ldots$. Обозначим $P(\psi_m)$ семейство целых функций $\varphi \in H(\mathbb{C})$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \frac{|\,\varphi(\lambda)\,|}{\exp\{\psi_m(\lambda)\}} < \infty.$$

Легко убедиться, что пространство $P(\psi_m)$ является банаховым с нормой

$$||\varphi||_m = \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \frac{|\,\varphi(\lambda)\,|}{\exp\{\psi_m(\lambda)\}}.$$

При этом $P(\psi_1) \supset P(\psi_2) \supset \ldots \supset P(\psi_m) \supset \ldots$.

Предложение 1. *Вложения $P(\psi_{m+1}) \subset P(\psi_m)$, $m \in \mathbb{N}$ вполне непрерывны.*

Обозначим $\mathcal{P}_\psi$ пересечение $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} P(\psi_m)$, наделенное топологией проективного предела банаховых пространств $P(\psi_m)$ относительно отображений вложения $v_m : \mathcal{P}_\psi \to P(\psi_m)$ (см. [5, Глава V]). Если $\mathcal{V}_m$ — базис абсолютно выпуклых окрестностей в $P(\psi_m)$, то конечные пересечения вида $v_{m_1}^{-1}(V_1) \cap \ldots \cap v_{m_k}^{-1}(V_k)$, $\quad V_1 \in \mathcal{V}_{m_1}, \ldots, V_k \in \mathcal{V}_{m_k}$, образуют базис $\mathcal{V}$ абсолютно выпуклых окрестностей топологии в $\mathcal{P}_\psi$ (см. [5, Глава V, предложение 11]). Используя данное описание базиса $\mathcal{V}$ абсолютно выпуклых окрестностей топологии в $\mathcal{P}_\psi$ легко получить следующее описание секвенциальной сходимости в пространстве $\mathcal{P}_\psi$

Предложение 2. *Последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\varphi_k \in \mathcal{P}_\psi$, сходится в $\mathcal{P}_\psi$, если она сходится равномерно на компактах из $\mathbb{C}$ и ограничена в каждом из пространств $P(\psi_m)$.*

Полиномиальная аппроксимация. Рассмотрим вопрос аппроксимации элементов пространства $\mathcal{P}_\psi$ полиномами.

Лемма 1. *Пусть $\varphi \in H(\mathbb{C})$ и $|\varphi(\lambda)| \leq C\exp\{\varepsilon\mu(|\lambda|)\}$. Тогда последовательность частичных сумм ряда Тейлора функции $\varphi(\lambda)$ сходится к φ в пространстве $P(\varepsilon'\mu(|\lambda|))$ для каждого $\varepsilon' > \varepsilon$.*

Доказательство теоремы 3 из [3] опирается на следующее утверждение (см. [3, Лемма 12.2]).

Пусть $\varphi \in P(\psi(z) + \varepsilon|z|)$ представляется в виде $\varphi = \prod\limits_{j=1}^{p} \tilde{\varphi}_j$, $\quad \tilde{\varphi}_j \in P\left(\frac{\psi(z)+\varepsilon|z|}{p}\right)$ и $\frac{\psi(z)+\varepsilon|z}{p} \leq C + \varepsilon|z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Тогда существует последовательность многочленов $\varphi_m \in \mathbb{C}[z]$ сходящаяся к φ в пространстве $P(\psi(z) + 4\varepsilon|z|)$.

Адаптируя доказательство этого утверждения к рассматриваемой ситуации, получаем доказательство следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть $\varphi \in P(\psi(\lambda) + \varepsilon\mu(|\lambda|))$ представляется в виде*

$$\varphi = \prod_{j=1}^{p} \tilde{\varphi}_j, \quad \tilde{\varphi}_j \in P\left(\frac{\psi(\lambda) + \varepsilon\mu(|\lambda|)}{p}\right)$$

и

$$\frac{\psi(\lambda)+\varepsilon\mu(|\lambda|)}{p}\le C+\varepsilon\mu(|\lambda|)\quad \forall\lambda\in\mathbb{C}.$$

Тогда существует последовательность многочленов $\varphi_m\in\mathbb{C}[\lambda]$ *сходящаяся к* φ *в пространстве* $P(\psi(\lambda)+4\varepsilon\mu(|\lambda|))$.

Далее сформулируем и докажем основную теорему о полиномиальной аппроксимации целых функций.

Теорема 4. *Пусть* $\psi\ge 0$ *— субгармоническая на* $\mathbb{C}$ *функция, удовлетворяющая условиям:*

$$\psi(\lambda)\le A\,\mu(|\lambda|)+B\quad \forall\lambda\in\mathbb{C},$$

$$|\psi(\lambda)-\psi(\lambda')|\le C\mu(|\lambda|+|\lambda-\lambda'|)|\lambda-\lambda'|\quad \forall\lambda,\lambda'\in\mathbb{C}$$

при некоторых $A,B,C>0$. *Тогда многочлены секвенциально плотны в пространстве* $\mathcal{P}_\psi$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ и $p\in\mathbb{N}$ такое, что

$$\frac{\psi(\lambda)+2\varepsilon\mu(|\lambda|)}{p}\le \varepsilon\mu(|\lambda|)+C_1\quad \forall\lambda\in\mathbb{C}. \tag{2}$$

По свойству 6 функции $M^{-1}(r)$ сумма $\frac{1}{p}\psi(\lambda)+\frac{\varepsilon}{p}\mu(|\lambda|)$ является субгармонической функцией на всей комплексной плоскости порядка $\rho\le 1$. По теореме 1 для любого $\alpha>1$ существует целая функция $\varphi(\lambda)$ такая, что

$$\left|\frac{\psi(\lambda)+\varepsilon\mu(|\lambda|)}{p}-\ln|\varphi(\lambda)|\right|\le C_\alpha\ln|\lambda|,\quad \lambda\notin E_\alpha, \tag{3}$$

причем исключительное множество E_α может быть покрыто кружками $B_j=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-\lambda_j|\le r_j\}$, $j=1,2,\ldots$, так, что

$$\sum_{|\lambda_j|>R} r_j=O(R^{1-\alpha}),\quad R\to\infty. \tag{4}$$

При этом для всех $\lambda\in\mathbb{C}$, $\lambda\notin E_\alpha$, верна оценка

$$\ln|\varphi(\lambda)|\le\frac{\psi(\lambda)+\varepsilon\mu(|\lambda|)}{p}+C_\alpha\ln|\lambda|.$$

Если $\lambda\in E_\alpha$, то

$$\ln|\varphi(\lambda)|\le\ln|\varphi(\lambda')|\le\frac{\psi(\lambda')+\varepsilon\mu(|\lambda'|)}{p}+C_\alpha\ln|\lambda'|\le$$
$$\le\frac{\psi(\lambda)+\varepsilon\mu(|\lambda|)}{p}+C_\alpha\ln|\lambda|+$$
$$+\frac{|\psi(\lambda')-\psi(\lambda)|+\varepsilon|\mu(|\lambda'|)-\mu(|\lambda|)|}{p}+C_\alpha|\ln|\lambda'|-\ln|\lambda||,$$

где λ' — точка, в которой достигается максимум модуля функции φ на связной компоненте B_λ множества $\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j$, содержащей λ. Пусть $r_\lambda=\sup\{|\xi-\lambda|:\xi\in B_\lambda\}$. Из (4) вытекает, что $|\lambda-\lambda'|\le r_\lambda\to 0$ при $|\lambda|\to\infty$. Значит, для всех $\lambda\in\mathbb{C}$, для которых $|\lambda|>R$, имеет место оценка

$$\ln|\varphi(\lambda)|\le\frac{\psi(\lambda)+2\varepsilon\mu(|\lambda|)}{p}+C_2\ln|\lambda|, \tag{5}$$

где $C_2>C_\alpha$, R — достаточно большое положительное число. Действительно, при достаточно большом R для всех $\lambda\in\mathbb{C}$, для которых $|\lambda|\ge R$, имеем

$$\frac{\varepsilon}{p}|\mu(|\lambda|)-\mu(|\lambda'|)|\le\frac{\varepsilon}{p}L|\lambda-\lambda'|\le\frac{\varepsilon}{p}Lr_\lambda\le\frac{C_2-C_\alpha}{2}\ln|\lambda|,$$

$$\frac{1}{p}|\psi(\lambda)-\psi(\lambda')| \leq \frac{1}{p}C\mu(|\lambda|+|\lambda-\lambda'|)|\lambda-\lambda'| \leq \frac{1}{p}C\mu(|\lambda|+r_\lambda)r_\lambda \leq \varepsilon\mu(|\lambda|),$$

$$C_\alpha|\ln|\lambda'|-\ln|\lambda|| \leq \frac{C_\alpha}{|\lambda|-r_\lambda}\, r_\lambda \leq \frac{C_2-C_\alpha}{2}\ln|\lambda|.$$

Из оценки (5) вытекает, что для всех λ, для которых $|\lambda|\geq R$, имеет место оценка $\ln|\varphi(\lambda)|^p \leq \psi(\lambda)+2\varepsilon\mu(|\lambda|)+pC_2\ln|\lambda|$. По свойству 4 функции $M^{-1}(r)$ для всех $\lambda\in\mathbb{C}$, для которых $|\lambda|\geq R$, имеем

$$\mu(|\lambda|) \geq \frac{1}{D}M^{-1}(|\lambda|) \geq \frac{pC_2}{\varepsilon}\ln|\lambda|$$

и, значит, $\ln|\varphi(\lambda)|^p \leq \psi(\lambda)+3\varepsilon\,\mu(|\lambda|)$. Отсюда вытекает, что

$$\varphi^p \in P(\psi(\lambda)+3\varepsilon\mu(|\lambda|)), \quad \varphi \in P\left(\frac{\psi(\lambda)+3\varepsilon\mu(|\lambda|)}{p}\right).$$

Учитывая 2, по лемме 2 для некоторого $q>0$ найдем последовательность полиномов $\{p_j(\lambda)\}_{j=1}^\infty$ такую, что

$$|p_j(\lambda)| \leq q\exp\{\psi(\lambda)+12\varepsilon\mu(|\lambda|)\},$$

$$|\varphi^p(\lambda)-p_j(\lambda)| \leq \varepsilon_j\exp\{\psi(\lambda)+12\varepsilon\mu(|\lambda|)\}, \tag{6}$$

где $\varepsilon_j\to 0$, $\varepsilon_j>\varepsilon_{j+1}>0$, $\lambda\in\mathbb{C}$.

Положим

$$u(\lambda) = \overline{\lim_{\xi\to\lambda}}\sup\{\beta(\xi) : \beta - \text{субгармоническая на } \mathbb{C}, \exists k,$$

$$\forall\xi\in\mathbb{C}, \exp\{\beta(\xi)\} \leq \min[q\exp\{\psi(\xi)+12\varepsilon\mu(|\xi|)\};\ \mathrm{const}(1+|\xi|)^k]\}.$$

Функция $u(\lambda)$ является субгармонической на $\mathbb{C}$. Из (3) и (6) вытекает, что для всех $\lambda\notin E_\alpha$ имеем

$$\exp\{\psi(\lambda)+\varepsilon\mu(|\lambda|)\} \leq \exp\{p\ln|\varphi(\lambda)|+pC_\alpha\ln|\lambda|\} \leq$$

$$\leq \exp\{u(\lambda)+pC_\alpha\ln|\lambda|\}.$$

По свойству 4 функции $M^{-1}(r)$ для всех достаточно больших $|\lambda|$ имеем

$$\mu(|\lambda|) \geq \frac{1}{D}M^{-1}(|\lambda|) \geq \frac{2pC_\alpha}{\varepsilon}\ln|\lambda|.$$

Отсюда вытекает, что для всех достаточно больших по модулю $\lambda\notin E_\alpha$ выполняется неравенство

$$\exp\{\psi(\lambda)-u(\lambda)\} \leq C_3\exp\left\{-\frac{\varepsilon}{2}\mu(|\lambda|)\right\}. \tag{7}$$

Далее убедимся, что путем замены константы C_3 на большую константу можно добиться того, что неравенство (7) будет выполняться для всех $\lambda\in\mathbb{C}$. Для этого рассмотрим функцию $\varphi_\zeta(\lambda) := \varphi(\lambda+\zeta)$, где ζ выбрано из круга $B(0,r_0)$, а $r_0>0$ выбрано из условия $4C(Lr_0+1)r_0\leq\varepsilon$. Во-первых, в силу (3) для любого $\lambda\notin E_\alpha-\zeta$ выполняются оценки

$$\left|\frac{\psi(\lambda)+\varepsilon\mu(|\lambda|)}{p} - \ln|\varphi_\zeta(\lambda)|\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{\psi(\lambda+\zeta)+\varepsilon\mu(|\lambda+\zeta|)}{p} - \ln|\varphi(\lambda+\zeta)|\right| +$$

$$+\frac{|\psi(\lambda)-\psi(\lambda+\zeta)|+\varepsilon|\mu(|\lambda|)-\mu(|\lambda+\zeta|)|}{p} \leq$$

$$\leq C_\alpha\ln|\lambda| + \frac{|\psi(\lambda)-\psi(\lambda+\zeta)|+\varepsilon|\mu(|\lambda|)-\mu(|\lambda+\zeta|)|}{p} +$$

$$+C_\alpha|\ln|\lambda+\zeta|-\ln|\lambda||.$$

Во-вторых, в силу (5) для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, для которого $|\lambda| \geq R$, выполняются оценки

$$\ln|\varphi_\zeta(\lambda)| \leq \frac{\psi(\lambda+\zeta)+2\varepsilon\mu(|\lambda+\zeta|)}{p} + C_2\ln|\lambda+\zeta| =$$

$$= \frac{\psi(\lambda)+2\varepsilon\mu(|\lambda|)}{p} + C_2\ln|\lambda| +$$

$$+ \frac{(\psi(\lambda+\zeta)-\psi(\lambda))+2\varepsilon(\mu(|\lambda+\zeta|)-\mu(|\lambda|))}{p} +$$

$$+C_2(\ln|\lambda+\zeta| - \ln|\lambda|).$$

Значит, для всех $\lambda \notin E_\alpha^{(\zeta)} := (E_\alpha - \zeta)\bigcup B(0,R)$ выполняется оценка

$$\left|\frac{\psi(\lambda)+\varepsilon\mu(|\lambda|)}{p} - \ln|\varphi_\zeta(\lambda)|\right| \leq \frac{\varepsilon}{4}\mu(|\lambda|) + C_4\ln|\lambda|, \tag{8}$$

а для всех $\lambda \notin B(0,R)$ выполняется оценка

$$\ln|\varphi(\lambda)| \leq \frac{\psi(\lambda)+\frac{5}{2}\varepsilon\mu(|\lambda|)}{p} + C_4\ln|\lambda|. \tag{9}$$

где $C_4 \geq C_2 \geq C_\alpha$, R не зависит от $a \in B(0,1)$. В самом деле, для всех $\lambda \notin B(0,R)$ при достаточно большом R выполняются неравенства

$$\frac{\varepsilon}{p}|\mu(|\lambda|) - \mu(|\lambda+\zeta|)| \leq \frac{\varepsilon}{p}Lr_0 \leq \frac{C_4-C_2}{2}\ln|\lambda|,$$

$$\frac{1}{p}|\psi(\lambda)-\psi(\lambda+\zeta)| \leq \frac{C}{p}\mu(|\lambda|+r_0)r_0 \leq$$

$$\leq \frac{C}{p}\frac{\mu(|\lambda|+r_0)}{\mu(|\lambda|)}r_0\mu(|\lambda|) \leq \frac{C}{p}(Lr_0+1)r_0\mu(|\lambda|) \leq \frac{\varepsilon}{4p}\mu(|\lambda|),$$

$$C_\alpha|\ln|\lambda+\zeta| - \ln|\lambda|| \leq \frac{C_\alpha}{|\lambda|-r_0}r_0 \leq \frac{C_4-C_2}{2}\ln|\lambda|.$$

Опираясь на неравенства (8) и (9) и лемму 2, повторяем рассуждения, но уже по отношению к функции φ_ζ. В результате приходим к выводу, что неравенство (7) выполняется для всех $\lambda \notin E_\alpha^{(\zeta)} := (E_\alpha - \zeta)\bigcup B(0,R)$, где R не зависит от выбора $\zeta \in B(0,r_0)$. Отсюда вытекает, что неравенство (7) выполняется для всех $\lambda \notin \bigcap_{\zeta\in B(0,r_0)} E_\alpha^{(\zeta)}$. На основании (4), заключаем, что $\bigcap_{\zeta\in B(0,r_0)} E_\alpha^{(\zeta)} = B(0,R)$, значит, неравенство (7) выполняется для всех $\lambda \notin B(0,R)$ при достаточно большом R. Таким образом, увеличивая константу C_3, можно добиться его выполнения для всех $\lambda \in \mathbb{C}$.

Пусть $f \in \mathcal{P}_\psi$. Для любого $m \in \mathbb{N}$ справедливо включение $f \in P(\psi_m)$. Значит, для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ имеет место оценка

$$|f(\lambda)| \leq ||f||_m \exp\{\psi(\lambda)+\varepsilon_m\mu(|\lambda|)\}.$$

Согласно (7) для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ имеем

$$\frac{|f(\lambda)|}{\exp u(\lambda)} \leq ||f||_m C_3 \exp\left\{\left(\varepsilon_m - \frac{\varepsilon}{2}\right)\mu(|\lambda|)\right\}.$$

Следовательно, для любого $R > 0$

$$\int_{\mathbb{C}\setminus B(0,R)} |f(\lambda)|^2 \exp[-2u(\lambda)]d\sigma(\lambda) \leq$$

$$\leq ||f||_m^2 C_3^2 \int_{\mathbb{C}\setminus B(0,R)} \exp\{(2\varepsilon_m - \varepsilon)\mu(|\lambda|)\} d\sigma(\lambda).$$

Последовательность ε_m убывает и стремится к 0 при $m \to \infty$. Выберем m так, чтобы выполнялось неравенство $2\varepsilon_m - \varepsilon < 0$. По свойству 4 функции $M^{-1}(r)$ для всех достаточно больших $|\lambda|$ имеем

$$\mu(|\lambda|) \geq \frac{3}{\varepsilon - 2\varepsilon_m} \ln|\lambda|.$$

Тогда при достаточно большом $R > 0$

$$\int_{\mathbb{C}\setminus B(0,R)} |f(\lambda)|^2 \exp[-2u(\lambda)] d\sigma(\lambda) \leq$$

$$\leq ||f||_m^2 C_3^2 \int_{\mathbb{C}\setminus B(0,R)} \exp\left\{(2\varepsilon_m - \varepsilon) \ln|\lambda|^{\frac{3}{\varepsilon - 2\varepsilon_m}}\right\} d\sigma(\lambda) \leq$$

$$\leq ||f||_m^2 C_3^2 \int_{\mathbb{C}\setminus B(0,R)} \frac{1}{|\lambda|^3} d\sigma(\lambda) < \infty.$$

По теореме 2 найдется последовательность многочленов $\tilde{p}_k(\lambda)$, удовлетворяющая условию

$$\left[\int_{\mathbb{C}} |f(\lambda) - \tilde{p}_k(\lambda)|^2 \frac{\exp[-2u(\lambda)]}{(1+|\lambda|^2)^2} d\sigma(\lambda)\right]^{1/2} \to 0, \ k \to \infty.$$

По определению функции $u(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ выполняется оценка

$$\exp\left\{u(\lambda) + \ln(1+|\lambda|^2)^2\right\} \leq q \exp\left\{\psi(\lambda) + 12\varepsilon\mu(|\lambda|) + \ln(1+|\lambda|^2)^2\right\}.$$

Значит, при некотором $C_5 > 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ имеем

$$\exp\left\{u(\lambda) + \ln(1+|\lambda|^2)^2\right\} \leq C_5 \exp\left\{\psi(\lambda) + 13\varepsilon\mu(|\lambda|)\right\}.$$

Отсюда находим, что

$$\left[\int_{\mathbb{C}} |f(\lambda) - \tilde{p}_k(\lambda)|^2 \exp[-2\psi(\lambda) - 26\,\varepsilon\,\mu(|\lambda|)] d\sigma(\lambda)\right]^{1/2} \to 0 \tag{10}$$

при $k \to \infty$. В силу субгармоничности функции $|f - \tilde{p}|^2$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнено неравенство

$$|f(\lambda) - \tilde{p}_k(\lambda)|^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{B(\lambda, r_1)} |f(\xi) - \tilde{p}_k(\xi)|^2 d\sigma(\xi),$$

где $r_1 > 0$ выбрано с соблюдением условий $52Lr_1 \leq 1$, $4C(Lr_1 + 1)r_1 \leq \varepsilon$. Значит,

$$\frac{|f(\lambda) - \tilde{p}_k(\lambda)|^2}{\sup\limits_{\xi \in B(\lambda, r_1)} \exp\{2\psi(\xi) + 26\varepsilon\mu(|\xi|)\}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_{B(\lambda, r_1)} |f(\xi) - \tilde{p}_k(\xi)|^2 \exp[-2\psi(\xi) - 26\varepsilon\,\mu(|\xi|)] d\sigma(\xi) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{C}} |f(\xi) - \tilde{p}_k(\xi)|^2 \exp[-2\psi(\xi) - 26\varepsilon\,\mu(|\xi|)] d\sigma(\xi).$$

В силу (10) равномерно по $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\frac{|f(\lambda) - \tilde{p}_k(\lambda)|^2}{\sup\limits_{\xi \in B(\lambda, r_1)} \exp\{2\psi(\xi) + 26\varepsilon\mu(|\xi|)\}} \to 0, \ k \to \infty. \tag{11}$$

С другой стороны, учитывая условие

$$|\psi(\lambda) - \psi(\lambda')| \le C\mu(|\lambda| + |\lambda - \lambda'|)|\lambda - \lambda'| \quad \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{C},$$

получаем

$$\frac{\sup\limits_{\zeta \in B(\lambda, r_1)} \exp\{2\psi(\zeta) + 26\varepsilon\mu(|\zeta|)\}}{\exp\{2\psi(\lambda) + 28\varepsilon\mu(|\lambda|)\}} \le$$
$$\le \exp\{2\psi(\lambda') + 26\varepsilon\mu(|\lambda'|) - 2\psi(\lambda) - 28\varepsilon\mu(|\lambda|)\} \le$$
$$\le \exp\{2C\mu(|\lambda| + r_1)r_1 + 26\varepsilon|\mu(|\lambda|) - \mu(|\lambda'|)| - 2\varepsilon\mu(|\lambda|)\},$$

где $\lambda' \in B(\lambda, r_1)$. Используя условия на выбор r_1 и свойства функции $\mu(|\lambda|)$, легко убедиться, что для всех λ, превосходящих по модулю достаточно большое $R > 0$, будут выполняться неравенства

$$\frac{\sup\limits_{\xi \in B(\lambda, r_1)} \exp\{2\psi(\xi) + 26\varepsilon\mu(|\xi|)\}}{\exp\{2\psi(\lambda) + 28\varepsilon\mu(|\lambda|)\}} \le \exp\{-\varepsilon\mu(|\lambda|)\} \le 1$$

Значит, для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ будет выполняться оценка

$$\frac{\sup\limits_{\xi \in B(\lambda, r_1)} \exp\{2\psi(\xi) + 26\varepsilon\mu(|\xi|)\}}{\exp\{2\psi(\lambda) + 28\varepsilon\mu(|\lambda|)\}} \le$$
$$\le \max\left\{ \sup_{\lambda \in B(0,R)} \frac{\sup\limits_{\xi \in B(\lambda, r_1)} \exp\{2\psi(\xi) + 26\varepsilon\mu(|\xi|)\}}{\exp\{2\psi(\lambda) + 28\varepsilon\mu(|\lambda|)\}}; 1 \right\} < \infty.$$

Следовательно, согласно (11)

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \frac{|f(\lambda) - \tilde{p}_k(\lambda)|}{\exp[\psi(\lambda) + 14\varepsilon\,\mu(\lambda)]} \to 0, \; k \to \infty.$$

Так как $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольно, то $\tilde{p}_k \to f$ равномерно на компактах в $\mathbb{C}$ и при этом последовательность ограничена по норме пространства $P(\psi_m)$ для любого $m \in \mathbb{N}$. По предложению 2 это означает, что $\tilde{p}_k \to f$ в топологии пространства $\mathcal{P}_\psi$. Таким образом, полиномы секвенциально плотны в $\mathcal{P}_\psi$. Теорема доказана.

Список литературы

1. *Юлмухаметов Р.С.* Асимптотическая аппроксимация субгармонических функций // ДАН СССР, 1982.– Т. 264. С. 839 - 841.

2. *Юлмухаметов Р.С.* Аппроксимация субгармонических функций // Anal. Math. 1985. – Т. 11. – No 3. – С. 257 - 282.

3. *Кривошеев А.С., Напалков В.В.* Комплексный анализ и операторы свертки // УМН. – 1992. – Т.47, No 6(288). – С. 3 – 58.

4. *Taylor B.A.* On weighted polynomial approximation of entire function // Pacific J. Math. – 1971. – V.36. – P. 523-539.

5. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. М. : Мир, 1967.

Polynomial approximation of integer functions in special weight space

A.N. Chernishev

The problems of polynomial approximation of integer functions are considered in the special weight space P_ψ. The convincing example is given of multinomials being sequentially in P_ψ.

