2003 г. №8

Труды ФОРА

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗНОСТНЫМИ ЯДРАМИ

С.Н. Асхабов

Майкопский государственный технологический институт, г. Майкоп

В статье приводятся условия при которых операторы с ядрами типа потенциала и операторы типа свертки обладают свойствами положительности и потенциальности. Эти свойства используются для доказательства теорем существования и единственности решения соответствующих нелинейных интегральных уравнений в вещественных пространствах Лебега.

1. Основные обозначения и ограничения. Всюду в статье мы будем, в основном, придерживаться терминологии и обозначений принятых в книгах [1], [2]. Пусть Γ есть либо вся действительная числовая ось R^1, либо некоторая ее часть (полуось $R^1_+ = [0,\infty)$ или отрезок $[a,b]$), а $\rho(x)$ есть неотрицательная почти всюду конечная и почти всюду отличная от нуля измеримая по Лебегу на Γ функция. Обозначим через $L_p(\rho)$, $p \geq 1$, множество всех вещественных измеримых на Γ функций $u(x)$ с конечной нормой $||u||_{p,\rho} = \left(\int\limits_\Gamma \rho(x)\cdot|u(x)|^p dx\right)^{1/p}$, а через $L^+_p(\rho)$ - множество всех неотрицательных функций из $L_p(\rho)$. Известно [3], что $L_p(\rho)$ при $1 < p < \infty$ есть рефлексивное банахово пространство и $L^*_p(\rho) = L_{p'}(\rho^{1-p'})$, где $p' = p/(p-1)$. В случае $\rho(x) = 1$ будем писать L_p и $||\cdot||_p$. Обозначим через $C^\infty_0(\Gamma)$ множество всех бесконечно дифференцируемых финитных функций $u(x)$, т.е. имеющих на Γ производные всех порядков и таких, что $u(x) \equiv 0$ в окрестности концов промежутка Γ. Известно [4], что класс $C^\infty_0(\Gamma)$ плотен в пространствах $L_p(\Gamma)$ при $1 \leq p < \infty$.

2. О положительности операторов с ядрами типа потенциала. Напомним, что оператором типа потенциала (или риссовым потенциалом) называют оператор вида

$$(I^\alpha u)(x) = \int\limits_\Gamma \frac{u(s)\,ds}{|s-x|^{1-\alpha}}\,, \qquad 0 < \alpha < 1\,.$$

Важную роль в теории таких операторов играет следующая (см., например, [4]):

Теорема 1 (Харди-Литтлвуда). *Если $0 < \alpha < 1$ и $1 < p < 1/\alpha$, то оператор I^α действует ограниченно из $L_p(\Gamma)$ в $L_q(\Gamma)$, где $q = p/(1-\alpha\cdot p)$.*

Следствие 1. *Если $0 < \alpha < 1$, то оператор I^α действует ограниченно из пространства $L_{2/(1+\alpha)}(\Gamma)$ в сопряженное с ним пространство $L_{2/(1-\alpha)}(\Gamma)$, причем*

$$||I^\alpha u||_{2/(1-\alpha)} \leq n(\alpha)\cdot||u||_{2/(1+\alpha)} \qquad \forall u \in L_{2/(1+\alpha)}(\Gamma), \tag{1}$$

где $n(\alpha)$ - норма оператора $I^\alpha : L_{2/(1+\alpha)}(\Gamma) \to L_{2/(1-\alpha)}(\Gamma)$.

Следствие 2. *Если $1 < p < 2$, то оператор*

$$(I^{(2-p)/p}u)(x) = \int\limits_\Gamma \frac{u(s)\,ds}{|s-x|^{2(p-1)/p}}$$

действует ограниченно из $L_p(\Gamma)$ в $L_{p'}(\Gamma)$, $p' = p/(p-1)$.

Следствие 3. *Если $2 < p < \infty$, то оператор*

$$(I^{(p-2)/p}u)(x) = \int\limits_\Gamma \frac{u(s)\,ds}{|s-x|^{2/p}}$$

действует из $L_{p'}(\Gamma)$, $p' = p/(p-1)$, *в* $L_p(\Gamma)$ и непрерывен.

Рассмотрим теперь вопрос о положительности оператора I^α. Следующая теорема доказывается по той же схеме, что и теорема 1.3.1 из книги [5], где $\Gamma = [a, b]$.

Теорема 2. *Пусть* $0 < \alpha < 1$. *Тогда оператор* I^α *действует ограниченно из пространства* $L_{2/(1+\alpha)}(\Gamma)$ *в сопряженное с ним пространство* $L_{2/(1-\alpha)}(\Gamma)$ *и является симметрическим строго положительным оператором.*

Доказательство. То что оператор I^α действует из $L_{2/(1+\alpha)}(\Gamma)$ в $L_{2/(1-\alpha)}(\Gamma)$ и ограничен вытекает из следствия 1. Докажем его положительность. Пусть $\Gamma = (-\infty, \infty)$. Воспользуемся известной [5] формулой для гамма-функции Эйлера $\Gamma(z) \cdot \cos(\pi \cdot z/2) = \int\limits_0^\infty t^{z-1} \cos t\, dt$, $0 < Re\, z < 1$. Сделав подстановку $t = \xi \cdot \eta$, где ξ - любое число, получим

$$\Gamma(z) \cdot \cos \frac{\pi \cdot z}{2} = \xi^z \int\limits_0^\infty \eta^{z-1} \cos(\xi \cdot \eta)\, dt\,, \qquad 0 < Re\, z < 1\,. \tag{2}$$

Положим $\xi = |x - t|$ и $z = 1 - \alpha$. Тогда из (2) имеем

$$\Gamma(1-\alpha) \cdot \sin \frac{\pi \cdot \alpha}{2} \cdot |x - t|^{\alpha - 1} = \int\limits_0^\infty \eta^{-\alpha} \cos[\eta \cdot (x - t)]\, d\eta\,. \tag{3}$$

Пусть $u(x) \in C_0^\infty(R^1)$ есть произвольная функция. Тогда, в силу (3),

$$\Gamma(1-\alpha) \cdot \sin \frac{\pi \cdot \alpha}{2} \cdot \langle I^\alpha u, u \rangle = \Gamma(1-\alpha) \cdot \sin \frac{\pi \cdot \alpha}{2} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)\, dt}{|x - t|^{1-\alpha}} \right) u(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_0^\infty \eta^{-\alpha} cos[\eta\,(x - t)]\, d\eta \right] u(t)\, dt \right) u(x)\, dx =$$

(меняем порядок интегрирования - что возможно так как $u(x) \in C_0^\infty(R^1)$)

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_0^\infty \eta^{-\alpha} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t)\, \cos[\eta\,(x - t)]\, dt \right] d\eta \right) u(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty \eta^{-\alpha} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t)\, \cos[\eta\,(x - t)]\, dt \right] u(x)\, dx \right) d\eta =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t)\, \cos(\eta\, t)\, dt \right]^2 + \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t)\, \sin(\eta\, t)\, dt \right]^2 \right) \eta^{-\alpha} d\eta \geq 0\,. \tag{4}$$

Следовательно, с учетом, что $\Gamma(1-\alpha) \cdot \sin(\pi \cdot \alpha/2) > 0$ при $0 < \alpha < 1$, имеем

$$\langle I^\alpha u, u \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)\, dt}{|x - t|^{1-\alpha}} \right) u(x)\, dx \geq 0 \qquad \forall u \in C_0^\infty(R^1)\,. \tag{5}$$

Так как левая часть (5) представляет собой линейный непрерывный функционал, определенный на $L_{2/(1+\alpha)}(R^1)$, и класс $C_0^\infty(R^1)$ плотен в $L_{2/(1+\alpha)}(R^1)$ то, в силу теоремы Банаха, неравенство (5) справедливо и на всем пространстве $L_{2/(1+\alpha)}(R^1)$, т.е.

$$\langle I^\alpha u, u \rangle \geq 0 \qquad \forall u \in L_{2/(1+\alpha)}(R^1)\,. \tag{6}$$

Докажем, что I^α - строго положительный оператор, т.е. что знак равенства в (6) достигается лишь при $u=0$. Для этого, в силу плотности $C_0^\infty(R^1)$ в $L_{2/(1+\alpha)}(R^1)$, достаточно рассмотреть функции из $C_0^\infty(R^1)$. Итак, пусть $\langle I^\alpha u, u\rangle = 0$ и $u \in C_0^\infty(R^1)$. Тогда, в силу (4), имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\cdot\cos(\eta\, t)\, dt = 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\cdot\sin(\eta\, t)\, dt = 0 \qquad \forall \eta \geq 0\,. \tag{7}$$

Очевидно, что равенства (7) справедливы и при любом $\eta < 0$. Поэтому

$$\widehat{u}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\cdot e^{-i\,x\,t} dt = 0 \qquad \forall x \in (-\infty, \infty)\,.$$

Но тогда, в силу теоремы 1.15 из [6], для почти всех $x \in (-\infty,\infty)$, имеем

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{N} \left(1 - \frac{|t|}{N}\right) \widehat{u}(t)\, e^{i\,x\,t} dt = 0 \ \text{ – что и требовалось}\,.$$

Докажем, наконец, что I^α - симметрический оператор, т.е. что выполняется равенство: $\langle I^\alpha u, v\rangle = \langle u, I^\alpha v\rangle \quad \forall u, v \in L_{2/(1+\alpha)}(R^1)$. Так как левая и правые части этого равенства представляют собой линейные непрерывные функционалы, определенные на $L_{2/(1+\alpha)}(R^1)$, и, в силу теоремы Фубини, оно выполняется на плотном в $L_{2/(1+\alpha)}(R^1)$ множестве функций $C_0^\infty(R^1)$, то доказываемое утверждение вытекает из теоремы Банаха.

В случае $\Gamma = [0,\infty)$ и $\Gamma = [a,b]$ доказательство аналогично, причем в последнем случае строгая положительность оператора устанавливается иначе (см. книгу [5, с. 44-45]).

Замечание 1. *Повторяя все рассуждения из доказательства теоремы 2 легко показать, что при условиях следствий 2 и 3 соответствующие операторы $I^{(2-p)/p}$ и $I^{(p-2)/p}$ также являются строго положительными и симметрическими.*

Рассмотрим теперь в пространстве $L_p(\rho)$ интегральный оператор B^α:

$$(B^\alpha u)\,(x) = b(x) \int_\Gamma \frac{b(t)\, u(t)\, dt}{|x-t|^{1-\alpha}}\,, \quad 0<\alpha<1\,, \quad b(x)\neq 0 \ \text{ почти всюду на } \Gamma\,.$$

Введем обозначения: $||\cdot||_{L_{p'}(\rho^{1-p'})} = ||\cdot||_{p',\sigma}\,,\ ||\cdot||_{L_{p\cdot r}(\rho^{-r})} = ||\cdot||_{p\cdot r,-r}\,.$ Известны

Лемма 1 [7]. *Пусть $2\leq p<\infty$, $r = 2/[p\,(1+\alpha)-2]$ и функция $b(x)\in L_{p\cdot r}(\rho^{-r})$. Тогда оператор B^α действует непрерывно из $L_p(\rho)$ в $L_{p'}(\rho^{1-p'})$, $p' = p/(p-1)$, и является строго положительным потенциальным оператором, причем $\forall u \in L_p(\rho)$*

$$||B^\alpha u||_{p',\sigma} \leq n(\alpha)\cdot ||b||^2_{p\cdot r,-r}\cdot ||u||_{p,\rho} \qquad \text{и} \qquad \langle B^\alpha u, u\rangle \geq 0\,, \tag{8}$$

где число $n(\alpha)$ определено в следствии 1.

Лемма 2 [8]. *Пусть $1<p\leq 2$ и $b(x)\in L_{p\cdot q}(\rho^q)$, где $q = 2/[2-p\,(1-\alpha)]$. Тогда оператор B^α действует из $L_{p'}(\rho^{1-p'})$ в $L_p(\rho)$, $p' = p/(p-1)$, и является непрерывным строго положительным потенциальным оператором, причем $\forall v \in L_{p'}(\rho^{1-p'})$*

$$||B^\alpha v||_{p,\rho} \leq n(\alpha)\cdot ||b||^2_{p\cdot q,\,q}\cdot ||v||_{p',\sigma} \qquad \text{и} \qquad \langle B^\alpha v, v\rangle \geq 0\,. \tag{9}$$

Положив в лемме 1 (или лемме 2) $p=2$ и $\rho(x)=1$ получим

Следствие 4. *Если функция $b(x)\in L_{2/\alpha}(\Gamma)$, то оператор B^α действует непрерывно из $L_2(\Gamma)$ в $L_2(\Gamma)$ и является строго положительным потенциальным оператором, причем*

$$||B^\alpha u||_2 \leq n(\alpha)\cdot ||b||^2_{2/\alpha}\cdot ||u||_2 \quad \text{и} \quad (B^\alpha u, u)\geq 0 \qquad \forall u\in L_2(\Gamma)\,. \tag{10}$$

Положив $b(x) = 1$ из леммы 1 получим следующее

Следствие 5. *Пусть* $2 \le p < \infty$, $0 < \alpha < 1$ *и вес* $\rho(x)$ *таков, что*

$$c(\rho) = \left(\int\limits_{\Gamma} [\rho(x)]^{-2/[p\,(1+\alpha)-2]} dx \right)^{[p\,(1+\alpha)-2]/2\,p} < \infty \,. \qquad (11)$$

Тогда оператор I^α *действует ограниченно из* $L_p(\rho)$ *в* $L_{p'}(\rho^{1-p'})$ *и является строго положительным потенциальным оператором, причем*

$$||I^\alpha u||_{p',\sigma} \le c^2(\rho) \cdot n(\alpha) \cdot ||u||_{p,\rho} \quad \text{и} \quad \langle I^\alpha u, u \rangle \ge 0 \qquad \forall u \in L_p(\rho) \,. \qquad (12)$$

3. Нелинейные интегральные уравнения с ядрами типа потенциала. При исследовании в $L_p(\rho)$ различных классов нелинейных сингулярных интегральных уравнений методом монотонных операторов (см. [3], [9]) условия на p и вес $\rho(x)$ подбирались таким образом, чтобы имели место непрерывные вложения $L_p(\rho) \subset L_2(\Gamma) \subset L_{p'}(\rho^{1-p'})$. В этой связи важно подчеркнуть, что из условия (11) непосредственно вытекает выполнимость непрерывных вложений (см. [10]):

$$L_p(\rho) \subset L_{2/(1+\alpha)}(\Gamma) \quad \text{и} \quad L_{2/(1-\alpha)}(\Gamma) \subset L_{p'}(\rho^{1-p'}) \,. \qquad (13)$$

Благодаря именно таким вложениям функционал $\langle I^\alpha u, u \rangle$ конечен, непрерывен и принимает положительные значения для любого $u(x) \ne 0$ из $L_p(\rho)$.

Всюду ниже предполагается, что функция $F(x,t)$, определяющая нелинейность рассматриваемых уравнений, определена при $x \in \Gamma$, $t \in (-\infty, \infty)$ и удовлетворяет условиям Каратеодори (см. [1]): она измерима по x почти при каждом фиксированном t и почти при всех x непрерывна по t. Обозначим через F оператор Немыцкого $Fu = F[x, u(x)]$, порожденный этой функцией $F(x,t)$.

Теорема 3. *Пусть* $p \ge 2$ *и* $b(x) \in L_{p \cdot r}(\rho^{-r})$, $r = 2/[p\,(1+\alpha) - 2]$. *Если*

1) $|F(x,t)| \le c(x) + d_1 \cdot \rho(x) \cdot |t|^{p-1}$, *где* $c(x) \in L^+_{p'}(\rho^{1-p'})$, $d_1 > 0$*;*

2) $F(x,t)$ *не убывает по* t *почти при каждом фиксированном* x*;*

3) $F(x,t) \cdot t \ge d_2 \cdot \rho(x) \cdot |t|^p - D(x)$, *где* $D(x) \in L^+_1(\Gamma)$, $d_2 > 0$*;*

то уравнение

$$F[x, u(x)] + b(x) \int\limits_{\Gamma} \frac{b(s)\,u(s)\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}} = f(x) \qquad (14)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(\rho)$ *при любом* $f(x) \in L_{p'}(\rho^{1-p'})$. *Кроме того, если условие 3) выполнено при* $D(x) = 0$, *то справедлива оценка:*

$$||u^*||_{p,\rho} \le \left(d_2^{-1} \, ||f||_{p',\sigma} \right)^{1/(p-1)} . \qquad (15)$$

Доказательство. Запишем (14) в операторном виде: $Au = f$, где $Au = Fu + B^\alpha u$. Из условий 1)-3) вытекает, что оператор суперпозиции $F : L_p(\rho) \to L_{p'}(\rho^{1-p'})$ непрерывен, монотонен и коэрцитивен. В силу леммы 1 оператор типа потенциала $B^\alpha : L_p(\rho) \to L_{p'}(\rho^{1-p'})$ непрерывен и строго положителен. Поэтому оператор $A : L_p(\rho) \to L_{p'}(\rho^{1-p'})$ непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Значит, по теореме Браудера-Минти [2], уравнение $Au = f$, а с ним и данное уравнение (14), имеет единственное решение $u^* \in L_p(\rho)$.

Осталось доказать оценку (15). Так как $Au^* = f$, то используя последовательно условие 3) при $D(x) = 0$, второе неравенство из (8) и неравенство Гельдера, имеем

$$d_2 \cdot ||u^*||^p_{p,\rho} \le \langle Fu^*, u^* \rangle \le \langle Fu^*, u^* \rangle + \langle B^\alpha u^*, u^* \rangle = \langle Au^*, u^* \rangle = \langle f, u^* \rangle \le ||f||_{p',\sigma} \cdot ||u^*||_{p,\rho} \,,$$

откуда легко получаем оценку (15).

В следующей теореме $p < 2$ и α имеет специальный вид.

Теорема 4. *Пусть $1 < p < 2$ и нелинейность $F(x,t)$ удовлетворяет условиям 1)-3) теоремы 3 при $\rho(x) = 1$. Тогда уравнение*

$$F[x,u(x)] + \lambda \cdot \int\limits_{\Gamma} \frac{u(s)}{|s-x|^{2\,(p-1)/p}}\, ds = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(\Gamma)$ при любом $\lambda > 0$ и $f(x) \in L_{p'}(\Gamma)$. Кроме того, если условие 3) выполняется при $D(x) = 0$, то $||u^*||_p \leq \left(d_2^{-1} \cdot ||f||_{p'}\right)^{1/(p-1)}$.

Доказательство теоремы 4 проводится точно так же, как и доказательство теоремы 3, с использованием следствия 2 вместо леммы 1.

Положив $p = 4/3$ из теоремы 4 получим следующее

Следствие 6. *При любом $\lambda > 0$ и $f(x) \in L_4(\Gamma)$ уравнение*

$$\sqrt[3]{u(x)} + \lambda \cdot \int\limits_{\Gamma} \frac{u(s)}{\sqrt{|s-x|}}\, ds = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_{4/3}(\Gamma)$, причем $||u^*||_{4/3} \leq ||f||_4^3$.

Рассмотрим теперь другой класс нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала, соответствующий случаю когда нелинейность находится под знаком интеграла. В данном случае применить непосредственно теорему Браудера-Минти нельзя, поскольку произведение монотонных операторов не является, вообще говоря, монотонным оператором и поэтому требуется другой подход к исследованию таких классов уравнений.

Теорема 5. *Пусть $1 < p \leq 2$ и $b(x) \in L_{p\cdot q}(\rho^q)$, $q = 2/[2 - p(1-\alpha)]$. Если $F(x,t)$ удовлетворяет условиям 1), 3) теоремы 3 и строго возрастает по t, то уравнение*

$$u(x) + b(x) \int\limits_{\Gamma} \frac{b(s)\, F[s,u(s)]}{|x-s|^{1-\alpha}}\, ds = f(x) \tag{16}$$

имеет единственное решение $u^* \in L_p(\rho)$ при любом $f \in L_p(\rho)$. Кроме того, если условия 1) и 3) выполнены при $c(x) = D(x) = 0$, то справедлива оценка: $||u^*||_{p,\rho} \leq d_1 \cdot d_2^{-1} \cdot ||f||_{p,\rho}$.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что оператор F отображает $L_p(\rho)$ на $L_{p'}(\rho^{1-p'})$, непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Значит [2], существует обратный оператор F^{-1}, отображающий $L_{p'}(\rho^{1-p'})$ на $L_p(\rho)$, хеминепрерывный, строго монотонный и [9] коэрцитивный. Поэтому, с учетом леммы 2, имеем, что оператор $A = F^{-1} + B^\alpha$ удовлетворяет всем условиям теоремы Браудера-Минти. Следовательно, уравнение $F^{-1}v + B^\alpha v = f$ имеет единственное решение $v^* \in L_{p'}(\rho^{1-p'})$. Но тогда $u^* = F^{-1}v^* \in L_p(\rho)$ является решением уравнения $u + B^\alpha F u = f$, т.е. данного уравнения (16). В самом деле, так как $F^{-1}v^* + B^\alpha v^* = f$, то, в силу доказанного в [8] равенства $F\,F^{-1}\psi = \psi \quad \forall \psi \in L_{p'}(\rho^{1-p'})$, имеем

$$u^* + B^\alpha F u^* = F^{-1}v^* + B^\alpha F\, F^{-1} v^* = F^{-1}v^* + B^\alpha v^* = f\ . \tag{17}$$

Докажем единственность решения уравнения (16). В самом деле, если допустить противное, что уравнение (16) имеет два различных решения u_1 и u_2, т.е. $u_1 + B^\alpha F u_1 = f$ и $u_2 + B^\alpha F u_2 = f$, то придем к противоречию: $0 = \langle u_1 + B^\alpha F u_1 - u_2 - B^\alpha F u_2, F u_1 - F u_2 \rangle = \langle u_1 - u_2, F u_1 - F u_2 \rangle + \langle B^\alpha (F u_1 - F u_2), F u_1 - F u_2 \rangle > 0$, так как в силу строгого возрастания функции $F(x,t)$ по t и леммы 2, оба последних слагаемых строго положительны.

Осталось доказать оценку решения. Используя условия 1) и 3) (с учетом, что $c(x) = D(x) = 0$), второе неравенство из (9), равенство (17) и неравенство Гельдера, имеем

$$d_2 \cdot ||u^*||^p_{p,\rho} \le \langle u^*, Fu^* \rangle \le \langle u^*, Fu^* \rangle + \langle B^\alpha Fu^*, Fu^* \rangle = \langle f, Fu^* \rangle \le d_1 \cdot ||f||_{p,\rho} \cdot ||u^*||^{p-1}_{p,\rho} ,$$

откуда легко получаем доказываемую оценку.

В следующей теореме $p > 2$ и α имеет специальный вид.

Теорема 6. *Пусть $p \in (2, \infty)$, нелинейность $F(x,t)$ строго возрастает по t и удовлетворяет условиям 1) и 3) при $\rho(x) = 1$. Тогда уравнение*

$$u(x) + \lambda \cdot \int\limits_\Gamma \frac{F[s, u(s)]}{|s-x|^{2/p}}\, ds = f(x) \tag{18}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(\Gamma)$ при любом $\lambda > 0$ и $f(x) \in L_p(\Gamma)$. Кроме того, если условия 1) и 3) выполнены при $c(x) = D(x) = 0$, то $||u^*||_p \le d_1 \cdot d_2^{-1} \cdot ||f||_p$.

Доказательство теоремы 6 проводится точно так же как и доказательство теоремы 5 с использованием следствия 3 вместо леммы 2.

Положив $p = 4$ из теоремы 6 получим следующее

Следствие 7. *При любом $\lambda > 0$ и $f(x) \in L_4(\Gamma)$ уравнение*

$$u(x) + \lambda \cdot \int\limits_\Gamma \frac{u^3(s)\, ds}{\sqrt{|s-x|}} = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_4(\Gamma)$, причем $||u^*||_4 \le ||f||_4$.

Рассмотрим, наконец, случай когда интегральный оператор входит в уравнение нелинейно. Обратим внимание на то, что в этом случае ограничения на нелинейность подбираются таким образом, чтобы соответствующий оператор суперпозиции действовал непрерывно из $L_{p'}(\rho^{1-p'})$ в $L_p(\rho)$ и был строго монотонным и коэрцитивным.

Теорема 7. *Пусть $p \ge 2$ и $b(x) \in L_{p\cdot r}(\rho^{-r})$, $r = 2/[p\,(1+\alpha) - 2]$. Если*

4) $|F(x,t)| \le g(x) + d_3 \cdot \left(\rho^{-1}(x)\,|t|\right)^{1/(p-1)}$, *где $g(x) \in L_p^+(\rho)$, $d_3 > 0$;*

5) *$F(x,t)$ строго возрастает по t почти при каждом фиксированном x;*

6) $F(x,t) \cdot t \ge d_4 \cdot \left(\rho^{-1}(x)\,|t|\right)^{1/(p-1)} \cdot |t| - D(x)$, *где $D(x) \in L_1^+(\Gamma)$, $d_4 > 0$;*

то уравнение

$$u(x) + F\left[x, b(x) \int\limits_\Gamma \frac{b(s)\, u(s)\, ds}{|x-s|^{1-\alpha}}\right] = f(x) \tag{19}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(\rho)$ при любом $f(x) \in L_p(\rho)$. Кроме того, если в условиях 4) и 6) $g(x) = 0$ и $D(x) = 0$, то справедлива оценка:

$$||u^* - f||_{p,\rho} \le \left[d_3^p \cdot d_4^{-1} \cdot n(\alpha) \cdot ||b||^2_{p\cdot r, -r} \cdot ||f||_{p,\rho}\right]^{1/(p-1)} . \tag{20}$$

Доказательство. Из леммы 1 следует, что оператор $B^\alpha : L_p(\rho) \to L_{p'}(\rho^{1-p'})$ непрерывен и строго положителен. Из условий 4)-6) вытекает, что оператор $F : L_{p'}(\rho^{1-p'}) \to L_p(\rho)$ непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Значит [2], существует хеминепрерывный, строго монотонный и [9] коэрцитивный обратный оператор $F^{-1} : L_p(\rho) \to L_{p'}(\rho^{1-p'})$. Запишем уравнение (19) в операторном виде: $u + F\,B^\alpha u = f$. Полагая в нем $u = f - v$ и применяя затем к обеим частям получающегося уравнения оператор F^{-1}, приходим к уравнению:

$$\Phi v = 0\ , \quad \text{где}\ \ \Phi v \equiv F^{-1}v + B^\alpha v - B^\alpha f\ . \tag{21}$$

Поскольку оператор Φ удовлетворяет всем требованиям теоремы Браудера-Минти, то уравнение (21) имеет единственное решение $v^* \in L_p(\rho)$. Но тогда данное уравнение (19) имеет решение $u^* = f - v^* \in L_p(\rho)$. Покажем, что это решение единственно. Допустим противное, что уравнение (19) имеет два разных решения u_1 и u_2, т.е. $u_1 + FB^\alpha u_1 = f$ и $u_2 + FB^\alpha u_2 = f$. Тогда приходим к противоречию: $0 = \langle u_1 + F\,B^\alpha u_1 - u_2 - F\,B^\alpha u_2, B^\alpha u_1 - B^\alpha u_2\rangle = \langle u_1 - u_2, B^\alpha(u_1 - u_2)\rangle + \langle F\,B^\alpha u_1 - F\,B^\alpha u_2), B^\alpha u_1 - B^\alpha u_2\rangle > 0$, так как в силу леммы 1 и строгого возрастания функции $F(x,t)$ по t, оба последних слагаемых строго положительны (заметим, что $B^\alpha(u_1 - u_2) \neq 0$, так как если предположить противное, то получим противоречие: $0 = \langle B^\alpha(u_1 - u_2), u_1 - u_2\rangle > 0$, в силу леммы 1).

Осталось доказать оценку (20). Воспользуемся доказанными равенствами $u^* + F\,B^\alpha u^* = f$ и $\Phi\,v^* = 0$, т.е. $F^{-1}v^* + B^\alpha v^* = B^\alpha f$, где $u^* = f - v^*$. Положим $\psi = F^{-1}v^*$. Тогда $F\psi = v^*$. Используя условия 4) и 6) (с учетом, что $g(x) = D(x) = 0$), оба неравенства из (8) и неравенство Гельдера, имеем

$$d_4 \cdot ||\psi||^{p'}_{p',\sigma} \le \langle F\psi, \psi\rangle = \langle v^*, F^{-1}v^*\rangle \le \langle v^*, F^{-1}v^*\rangle + \langle v^*, B^\alpha v^*\rangle = \langle v^*, B^\alpha f\rangle \le$$

$$\le ||v^*||_{p,\rho} \cdot ||B^\alpha f||_{p',\sigma} \le ||v^*||_{p,\rho} \cdot n(\alpha) \cdot ||b||^2_{p\cdot r,-r} \cdot ||f||_{p,\rho} =$$

$$= n(\alpha) \cdot ||b||^2_{p\cdot r,-r} \cdot ||f||_{p,\rho} \cdot ||F\psi||_{p,\rho} \le n(\alpha) \cdot ||b||^2_{p\cdot r,-r} \cdot ||f||_{p,\rho} \cdot d_3 \cdot ||\psi||^{p'-1}_{p',\sigma}\ ,$$

откуда

$$||\psi||_{p',\sigma} \le d_3 \cdot d_4^{-1} \cdot n(\alpha) \cdot ||b||^2_{p\cdot r,-r} \cdot ||f||_{p,\rho}\ . \tag{22}$$

Так как $||f - u^*||_{p,\rho} = ||v^*||_{p,\rho} = ||F\psi||_{p,\rho} \le d_3 \cdot ||\psi||^{p'-1}_{p',\sigma}$, то, используя оценку (22) с учетом, что $p' - 1 = 1/(p-1)$, получаем $||u^* - f||_{p,\rho} \le d_3 \cdot \left[d_3 \cdot d_4^{-1} \cdot n(\alpha) \cdot ||b||^2_{p\cdot r,-r} \cdot ||f||_{p,\rho}\right]^{1/(p-1)}$.

Если вместо леммы 1 использовать следствие 2, то так же как и теорема 7 доказывается следующая теорема, относящаяся к случаю, когда $p < 2$ и α имеет специальный вид.

Теорема 8. *Пусть $1 < p < 2$ и нелинейность $F(x,t)$ удовлетворяет условиям 4)-6) при $\rho(x) = 1$. Тогда при любом $\lambda > 0$ и $f(x) \in L_p(\Gamma)$ уравнение*

$$u(x) + \lambda \cdot F\left[x, \int\limits_\Gamma \frac{u(s)}{|x-s|^{2\,(p-1)/p}}\,ds\right] = f(x) \tag{23}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(\Gamma)$. Кроме того, если в условиях 4) и 6) $g(x) = D(x) = 0$ и $\rho(x) = 1$, то справедлива оценка $||u^* - f||_p \le \lambda \cdot \left[d_3^p \cdot d_4^{-1} \cdot n(\alpha) \cdot ||f||_p\right]^{1/(p-1)}$.

Положив $p = 4/3$ из теоремы 8 получим

Следствие 8. *При любом $\lambda > 0$ и $f(x) \in L_{4/3}(\Gamma)$ уравнение*

$$u(x) + \lambda \cdot \left(\int\limits_\Gamma \frac{u(s)\,ds}{\sqrt{|s-x|}}\right)^3 = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_{4/3}(\Gamma)$, причем $||u^* - f||_{4/3} \le \lambda \cdot \left(n(\alpha) \cdot ||f||_{4/3}\right)^3$.

Отметим, что при дополнительных ограничениях на p и $F(x,t)$ решения в теоремах 3-8 можно найти методом последовательных приближений пикаровского типа и методом наискорейшего спуска (см. [7], [8]). При $b(x) = 1$ аналоги теорем 3, 5 и 7 были доказаны в [10].

4. О положительности и потенциальности операторов свертки. Рассмотрим в пространстве $L_p(R^1)$ оператор свертки $(Hu)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)\cdot u(t)\,dt$. В отличие от операторов с ядрами типа потенциала I^α и B^α оператор свертки H не является, вообще говоря, ни положительным, ни симметрическим, ни потенциальным. В связи с этим возникает задача найти условия на ядро $h(x)$ при которых оператор свертки H обладает указанными свойствами.

Лемма 3 [11]. *Пусть* $1 < p \le 2$, *ядро* $h(x) \in L_1(R^1) \cap L_{p/[2(p-1)]}(R^1)$ *и*

$$\widehat{h}_c(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t)\cdot\cos(x\cdot t)\,dt \ge 0 \qquad \text{при} \quad x \in [0,\infty)\,. \tag{24}$$

Тогда оператор свертки H *действует непрерывно из* $L_p(R^1)$ *в* $L_{p'}(R^1)$, $p' = p/(p-1)$, *и положителен. Если же* $\widehat{h}_c(x) > 0$, *то оператор* H *является строго положительным.*

Замечание 1. Заметим [12], что условие (24) не только достаточно, но и необходимо для того, чтобы оператор свертки H был положительным в пространстве $L_p(R^1)$ при $1 < p \le 2$. В случае пространства $C[0,T]$ этот результат хорошо известен (см., например, [13]-[15]).

Замечание 2. Интересно отметить, что многие функции $h(x)$, представляющие собой *плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины* X и, значит, обладающие свойствами: $h(x) \ge 0$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx = 1$, удовлетворяют условию (24) - необходимому и достаточному условию положительности оператора свертки H в пространствах $L_p(R^1)$. Например [16], такими функциями $h(x)$ являются следующие функции [в квадратных скобках указаны их косинус-преобразования Фурье $\widehat{h}_c(x) = \widehat{h}(x)$, в силу четности $h(x)$]:

$$\textbf{a)}.\ \textit{Нормальное распределение}\ \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \qquad \left[\frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}\right];$$

$$\textbf{b)}.\ \frac{1-\cos ax}{\pi a x^2},\ a>0 \qquad \left[\begin{cases} (1-|x|/a)/\sqrt{2\pi}, & \text{если } x \in [-a;a] \\ 0 & \text{если } x \notin [-a;a] \end{cases}\right]$$

$$\textbf{c)}.\ \textit{Треугольное распределение} \begin{cases} (a-|x|)/a^2, & \text{если } x \in [-a;a] \\ 0 & \text{если } x \notin [-a;a] \end{cases} \qquad \left[\frac{\sqrt{2}\,(1-\cos(a\,x))}{\sqrt{\pi}\,a^2x^2}\right]$$

$$\textbf{d)}.\ \textit{Двустороннее показательное распределение}\ \frac{\exp(-|x|)}{2} \qquad \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(1+x^2)}\right];$$

$$\textbf{e)}.\ \textit{Распределение Коши}\ \frac{1}{\pi\,(x^2+a^2)} \qquad \left[\frac{\exp(-a\,|x|)}{\sqrt{2\pi}}\right].$$

Преобразование Фурье функции распределения вероятностей называют *характеристической* функцией. Характеристические функции играют важную роль в теории вероятностей.

Для выяснения вопроса о том при каких условиях оператор свертки H является потенциальным в пространстве $L_p(R^1)$, рассмотрим отдельно случаи, когда его ядро $h(x)$ является либо четной, либо нечетной функцией.

Лемма 4. *Пусть* $1 < p \le 2$ *и* $h(x) \in L_{p/[2\,(p-1)]}(R^1)$ *является четной на* R^1 *функцией. Тогда оператор свертки* H *является симметрическим потенциальным оператором в пространстве* $L_p(R^1)$.

Доказательство. В силу неравенств Гельдера и Юнга, имеем

$$\Big|\langle Hu, v\rangle\Big| \le ||Hu||_{p'} \cdot ||v||_p \le ||h||_{p/[2\,(p-1)]} \cdot ||u||_p \cdot ||v||_p \qquad \forall u, v \in L_p(R^1)\ , \tag{25}$$

т.е. $\langle Hu, v\rangle$ есть непрерывный функционал в пространстве $L_p(R^1)$.

Далее, для любых $u(x), v(x) \in C_0^\infty(R^1)$ на основании теоремы Фубини, учитывая четность функции $h(x)$, имеем $\langle Hu, v\rangle = \langle u, Hv\rangle$. Так как множество $C_0^\infty(R^1)$ плотно в $L_p(R^1)$ при $1 < p \le 2$ и $\langle Hu, v\rangle$ есть непрерывный в $L_p(R^1)$ функционал, то доказанное для любых $u(x), v(x) \in C_0^\infty(R^1)$ равенство $\langle Hu, v\rangle = \langle u, Hv\rangle$ справедливо и для любых $u(x), v(x) \in L_p(R^1)$. Следовательно, оператор свертки H является симметрическим и, значит [1], потенциальным оператором в $L_p(R^1)$.

Лемма 5 [11], [12]. *Пусть $1 < p \le 2$, $h(x) \in L_{p/[2\,(p-1)]}(R^1)$ и является нечетной на R^1 функцией. Тогда оператор свертки H действует непрерывно из $L_p(R^1)$ в $L_{p'}(R^1)$ и является положительным, причем*

$$||Hu||_{p'} \le ||h||_{p/[2\,(p-1)]} \cdot ||u||_p \quad \text{и} \quad \langle Hu, u\rangle = 0 \qquad \forall u(x) \in L_p(R^1)\ . \tag{26}$$

В замечании 2 приведены примеры ядер $h(x)$ для которых выполняется центральное условие этого пункта - условие (24). Поскольку проверка выполнимости этого условия для каждого конкретного ядра $h(x)$ всякий раз вызывает определенные трудности, то желательно иметь простые признаки, по которым можно выделить достаточно широкие классы таких ядер. Докажем, в связи с этим, сначала следующую простую лемму.

Лемма 6. *Пусть $1 \le p \le \infty$ и функция $g(x) \in L_1(R^1) \cap L_p(R^1)$. Тогда функция $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x+t) \cdot g(t)\, dt \in L_1(R^1) \cap L_p(R^1)$ и является четной функцией, причем*

$$||h||_p \le ||g||_1 \cdot ||g||_p\ . \tag{27}$$

Доказательство. Пусть $p = \infty$. Так как, в силу обобщенного неравенства Минковского,

$$||h||_1 \le ||g||_1^2 \qquad \text{и} \qquad |h(x)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |g(x+t)| \cdot |g(t)|\, dt \le ||g||_\infty \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt\ ,$$

то $h(x) \in L_1(R^1) \cap L_\infty(R^1)$ и $||h||_\infty \le ||g||_\infty \cdot ||g||_1$, т.е. выполнено неравенство (27).

Пусть $1 \le p < \infty$. Тогда, применяя обобщенное неравенство Минковского, имеем

$$||h||_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(x+t)\, g(t)\, dt \right|^p dx \right)^{1/p} \le \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x+t)|^p\, |g(t)|^p\, dx \right)^{1/p} dt = ||g||_1 \cdot ||g||_p\ ,$$

т.е. справедливо неравенство (27) и, значит, $h(x) \in L_1(R^1) \cap L_p(R^1)$.

Осталось доказать, что $h(x)$ четная функция. В самом деле,

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot g(x+t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(x+t-x) \cdot g(x+t)\, d\,(x+t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(s-x) \cdot g(s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x) \cdot g(t)\, dt = h(-x)\ .$$

Некоторые утверждения следующей теоремы можно доказать используя леммы 3 и 4. Докажем эту теорему другим способом, представляющим самостоятельный интерес.

Теорема 9. *Пусть* $1 < p \le 2$ *и ядро* $h(x)$ *представимо в виде*

$$h(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x+t)\cdot g(t)\,dt\,, \quad \text{где} \quad g(x) \in L_1(R^1) \cap L_{p/[2(p-1)]}(R^1)\ . \tag{28}$$

Тогда оператор свертки $(Hu)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)\cdot u(t)\,dt$ *действует непрерывно из* $L_p(R^1)$ *в* $L_{p'}(R^1)$, *положителен и потенциален, причем*

$$||Hu||_{p'} \le ||g||_1 \cdot ||g||_{p/[2(p-1)]} \cdot ||u||_p \quad \text{и} \quad \langle Hu, u\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x+t)\cdot u(t)\,dt\right]^2 dx\ . \tag{29}$$

Доказательство. В силу леммы 6, ядро $h(x) \in L_1(R^1) \cap L_{p/[2(p-1)]}(R^1)$, $||h||_1 \le ||g||_1^2$ и $||h||_{p/[2(p-1)]} \le ||g||_1 \cdot ||g||_{p/[2(p-1)]}$. Поэтому, используя неравенство Юнга для сверток, имеем $||Hu||_{p'} \le ||h||_{p/[2(p-1)]} \cdot ||u||_p \le ||g||_1 \cdot ||g||_{p/[2(p-1)]} \cdot ||u||_p$, т.е. выполняется неравенство из (29) и, значит, оператор свертки H действует непрерывно из $L_p(R^1)$ в $L_{p'}(R^1)$.

Докажем положительность оператора H. Пусть $u(x) \in C_0^\infty(R^1)$ - произвольная финитная бесконечно дифференцируемая функция. Тогда, меняя порядок интегрирования, получим

$$\langle Hu, u\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x-t+s)\cdot g(s)\,ds\right]\cdot u(t)\,dt\right)\cdot u(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x+y)\cdot g(y+t)\,dy\right]\cdot u(t)\,dt\right)\cdot u(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x+y)\cdot g(y+t)\cdot u(t)\cdot u(x)\,dx\right] dt\right) dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x+y)\cdot u(x)\,dx\right]\cdot\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y+t)\cdot u(t)\,dt\right) dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y+t)\cdot u(t)\,dt\right]^2 dy\,,$$

т.е. справедливо равенство из (29). Из этого равенства вытекает, что

$$\langle Hu, u\rangle \ge 0 \qquad \forall u(x) \in C_0^\infty(R^1)\ . \tag{30}$$

Поскольку множество $C_0^\infty(R^1)$ плотно в $L_p(R^1)$ при $1 < p \le 2$ и левая часть неравенства (30) представляет собой линейный непрерывный в $L_p(R^1)$ функционал, то неравенство (30) справедливо и для любого $u(x) \in L_p(R^1)$, т.е. оператор свертки H является положительным.

Осталось доказать потенциальность оператора H. Так как ядро $h(x)$, в силу леммы 6, представляет собой четную функцию, то, согласно лемме 4, оператор свертки H является симметрическим потенциальным оператором в пространстве $L_p(R^1)$.

Замечание 3. В замечании 1 отмечено, что условие $\widehat{h}_c(x) \ge 0$ не только достаточно, но и необходимо для положительности оператора свертки H. Значит, согласно теореме 9, всякое ядро вида (28) должно удовлетворять этому условию. В самом деле, используя представление (28) и меняя порядок интегрирования, имеем

$$\widehat{h}_c(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t+s)\cdot g(s)\,ds\right)\cdot \cos(x\cdot t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t+s) \cdot \cos(x \cdot t)\, dt \right) \cdot g(s)\, ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y) \cdot \cos\left(x \cdot (y-s)\right) dy \right) \cdot g(s)\, ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y) \cdot \cos(x\,y) \cdot \cos(x\,s)\, dy \right) \cdot g(s)\, ds +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y) \cdot \sin(x\,y) \cdot \sin(x\,s)\, dy \right) \cdot g(s)\, ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y) \cdot \cos(x\,y)\, dy \right]^2 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y) \cdot \sin(x\,y)\, dy \right]^2 \geq 0\,.$$

В следующей лемме, в отличие от лемм 3-5, предполагается, что $p \geq 2$.

Лемма 7. *Пусть $p \in [2, \infty)$, ядро $h(x) \in L_1(R^1)$ и удовлетворяет условию (24), а функция $b(x) \neq 0$ почти всюду на R^1 и удовлетворяет условию:*

$$b(x) \in L_{2p/(p-2)}(R^1) \ \text{ при } p > 2 \qquad \text{и} \qquad b(x) \in L_\infty(R^1) \ \text{ при } p = 2\,. \tag{31}$$

Тогда оператор свертки $(Nu)(x) = b(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} b(t)\, h(x-t)\, u(t)\, dt$ действует непрерывно из $L_p(R^1)$ в $L_{p'}(R^1)$ и положителен, причем

$$||Nu||_{p'} \leq ||b||^2_{2p/(p-2)} \cdot ||h||_1 \cdot ||u||_p \qquad \text{и} \qquad \langle Nu, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in L_p(R^1)\,. \tag{32}$$

Кроме того, оператор N является потенциальным, если $h(x)$ является четной функцией и строго положительным, если $\widehat{h}_c(x) > 0$.

Доказательство. Пусть $p > 2$ и $u(x) \in L_p(R^1)$ - произвольная функция (при $p = 2$ доказательство аналогично и проще). Так как $||b \cdot u||_2 \leq ||b||_{2p/(p-2)} \cdot ||u||_p$, то

$$H(b \cdot u) \in L_2(R^1) \qquad \text{и} \qquad ||H(b \cdot u)||_2 \leq ||h||_1 \cdot ||b \cdot u||_2 \leq ||h||_1 \cdot ||b||_{2p/(p-2)} \cdot ||u||_p\,.$$

Применяя неравенство Гельдера и используя последнюю оценку, имеем

$$||Nu||_{p'} = ||b \cdot H(b\,u)||_{p'} \leq ||b||_{2p/(p-2)} \cdot ||H(b\,u)||_2 \leq ||b||^2_{2p/(p-2)} \cdot ||h||_1 \cdot ||u||_p\,,$$

т.е. оператор $N : L_p(R^1) \to L_{p'}(R^1)$ непрерывен и выполняется первое неравенство из (32).

Докажем второе неравенство из (32). Учитывая, что $b \cdot u \in L_2(R^1)$ и $H(b\,u) \in L_2(R^1)$, имеем $\langle Nu, u \rangle = \langle b \cdot H(b\,u), u \rangle = \Big(H(b\,u), b\,u\Big)$. Значит, в силу леммы 3, оператор N положителен, если $\widehat{h}_c(x) \geq 0$ и строго положителен, если $\widehat{h}_c(x) > 0$.

Осталось доказать, что N потенциальный оператор, если $h(x)$ четная функция. В самом деле, поскольку в этом случае (см. доказательство леммы 4) для любых $\varphi, \psi \in L_2(R^1)$ справедливо равенство $(H\varphi, \psi) = (\varphi, H\psi)$, то с учетом, что $b \cdot u, b \cdot v \in L_2(R^1)$, имеем

$$\langle Nu, v \rangle = \langle b \cdot H(b\,u), v \rangle = \Big(H(b\,u), b\,v\Big) = \Big(b\,u, H(b\,v)\Big) = \langle u, b \cdot H(b\,v) \rangle = \langle u, Nv \rangle\,,$$

т.е. оператор N является симметрическим, а значит [1] и потенциальным оператором.

Рассмотрим теперь оператор свертки H в весовом пространстве Лебега $L_p(\rho)$.

Лемма 8. *Пусть $p \in [2, \infty)$, ядро $h(x) \in L_1(R^1)$ и удовлетворяет условию (24), а вес $\rho(x)$ - условию:*

$$c(\rho) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \Big[\rho(x)\Big]^{-2/(p-2)} dx \right)^{(p-2)/(2p)} < \infty \tag{33}$$

(при $p = 2$ под $c(\rho)$ понимается $||\rho^{-1/2}||_\infty$). Тогда оператор свертки H действует непрерывно из $L_p(\rho)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(\rho^{1-p'})$ и положителен, причем

$$||Hu||_{p',\sigma} \le c^2(\rho) \cdot ||h||_1 \cdot ||u||_{p,\rho} \qquad \text{и} \qquad \langle Hu, u\rangle \ge 0 \quad \forall u \in L_p(\rho)\ . \tag{34}$$

Кроме того, если $h(x)$ является четной функцией, то H является потенциальным оператором, а если в условии (24) $\widehat{h}_c(x) > 0$, то H является строго положительным оператором.

Доказательство. Пусть $p > 2$, $h(x) \in L_1(R^1)$ и $u(x) \in L_p(\rho)$ - произвольная функция (при $p = 2$ доказательство аналогично и проще). В силу неравенства Гельдера,

$$||u||_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} [\rho(x)]^{-2/p} [\rho(x)]^{2/p} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \le c(\rho) \cdot ||u||_{p,\rho}\ . \tag{35}$$

Аналогично, для любого $\psi(x) \in L_2(R^1)$, имеем

$$||\psi||_{p',\sigma} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} [\rho(x)]^{1-p'} |\psi(x)|^{p'} dx \right)^{1/p'} \le c(\rho) \cdot ||\psi||_2\ . \tag{36}$$

Из неравенств (35) и (36) вытекает, что имеют место следующие непрерывные вложения:

$$L_p(\rho) \to L_2(R^1) \to L_{p'}(\rho^{1-p'})\ . \tag{37}$$

Так как $||Hu||_2 \le ||h||_1 \cdot ||u||_2$, то используя оценки (35) и (36), получаем

$$||Hu||_{p',\sigma} \le c(\rho) \cdot ||Hu||_2 \le c(\rho) \cdot ||h||_1 \cdot ||u||_2 \le c^2(\rho) \cdot ||h||_1 \cdot ||u||_{p,\rho}\ ,$$

т.е. справедливо первое неравенство из (34).

Докажем второе неравенство из (34), т.е. положительность оператора H. Учитывая вложения (37), имеем $\langle Hu, u\rangle = (Hu, u) \quad \forall u(x) \in L_p(\rho)$. Используя лемму 3, из последнего равенства получим, что H положителен, если $\widehat{h}_c(x) \ge 0$ и строго положителен, если $\widehat{h}_c(x) > 0$.

Осталось доказать потенциальность оператора H. Для любых $u(x), v(x) \in L_p(\rho)$, учитывая вложения (37) и лемму 4, из которой вытекает симметричность оператора H в $L_2(R^1)$, имеем $\langle Hu, v\rangle = (Hu, v) = (u, Hv) = \langle u, Hv\rangle$, т.е. H является симметрическим, а значит [1] и потенциальным оператором в пространстве $L_p(\rho)$.

Рассмотрим теперь оператор типа свертки $\mathcal{H}$ в пространствах 2π-периодических функций $L_p(-\pi, \pi)$ и $L_p(\rho)$ с общим весом $\rho(x)$ (см. пункт 1, где следует взять $\Gamma = (-\pi, \pi)$):

$$(\mathcal{H}u)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\, u(t)\, dt\ ,$$

где ядро $h(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ есть функция 2π-периодически продолженная на отрезок $[-2\pi, 2\pi]$.

Для выяснения вопроса о том при каких условиях на ядро $h(x)$ оператор свертки $\mathcal{H}$ является положительным и потенциальным в пространстве $L_p(-\pi, \pi)$ нам понадобятся следующие два равенства (см. [17, с. 233] и [18, с. 158], соответственно):

$$\textbf{формула свертки изображений :} \quad \int_{-\pi}^{\pi} a(x-t)\, b(t)\, dt = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, b_k\, e^{ikx}, \tag{38}$$

$$\textbf{обобщенное равенство Парсеваля :} \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} a(x)\,\overline{b(x)}\,dx = 2\,\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,\overline{b_k}\,, \tag{39}$$

где $a_k = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} a(x)\,e^{-i\,k\,x}dx \quad , \quad b_k = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} b(x)\,e^{-i\,k\,x}dx.$

Лемма 9 [19]. *Пусть $1 < p \le 2$, ядро $h(x) \in L_{p/[2\,(p-1)]}(-\pi,\pi)$ и удовлетворяет условию:*

$$h_c(k) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(t)\,cos(k\cdot t)\,dt \ge 0 \qquad \text{при} \quad k = 0,1,2,3,\dots\,. \tag{40}$$

Тогда оператор свертки $\mathcal{H}$ действует из $L_p(-\pi,\pi)$ в $L_{p'}(-\pi,\pi)$, где $p' = p/(p-1)$, и является положительным. Если же $h_c(k) > 0$, то оператор $\mathcal{H}$ является строго положительным.

Доказательство. Пусть $u(x) \in L_p(-\pi,\pi)$ - произвольная функция. Тогда, так как $h(x) \in L_{p/[2\,(p-1)]}(-\pi,\pi)$, то из неравенства Юнга (см. [20, теорема 1.15, с. 67]) непосредственно вытекает, что $||\mathcal{H}u||_{p'} \le 2\,\pi\,||h||_{p/[2\,(p-1)]}||u||_p$. Значит, оператор $\mathcal{H} : L_p(-\pi,\pi) \to L_{p'}(-\pi,\pi)$ и непрерывен. Докажем положительность оператора $\mathcal{H}$. В силу формулы (38)

$$(\mathcal{H}u)(x) = 2\,\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k\cdot u_k\cdot e^{i\,k\,x}, \quad \text{где } h_k = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(x)\cdot e^{-i\,k\,x}dx\,,\ u_k = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u(x)\cdot e^{-i\,k\,x}dx\,.$$

Поэтому, используя равенство (39), с учетом вещественности функции $u(x)$, имеем

$$\langle \mathcal{H}u, u\rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\mathcal{H}u)(x)\cdot\overline{u(x)}\,dx = 2\,\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\,\pi\cdot h_k\cdot u_k\cdot\overline{u_k} = (2\,\pi)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k\cdot|u_k|^2 =$$

$$= (2\,\pi)^2\cdot\left(h_0\cdot|u_0|^2 + \sum_{k=-\infty}^{-1} h_k\cdot|u_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} h_k\cdot|u_k|^2\right) =$$

$$= (2\,\pi)^2\cdot\left(h_0\cdot|u_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[h_{-k}\cdot|u_{-k}|^2 + h_k\cdot|u_k|^2\Big]\right)\,. \tag{41}$$

Замечая теперь, что

$$|u_{-k}|^2 = u_{-k}\cdot\overline{u_{-k}} = \left(\frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u(t)\cdot e^{i\,k\,t}dt\right)\cdot\left(\frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u(t)\cdot e^{-i\,k\,t}dt\right) = \overline{u_k}\cdot u_k = |u_k|^2\,,$$

$$h_k + h_{-k} = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(t)\cdot\left[e^{i\,k\,t} + e^{-i\,k\,t}\right]\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(t)\cdot\cos\left(k\cdot t\right)dt = \frac{1}{\pi}\,h_c(k)\,,$$

из равенства (41) получаем

$$\langle \mathcal{H}u, u\rangle = (2\,\pi)^2\left(\frac{1}{2\,\pi}\,h_c(0)\,|u_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\,h_c(k)\,|u_k|^2\right) = 2\,\pi\,h_c(0)\,|u_0|^2 + 4\,\pi\sum_{k=1}^{\infty} h_c(k)\,|u_k|^2\,. \tag{42}$$

Из формулы (42) видно, что оператор $\mathcal{H}$ является положительным, если $h_c(k) \ge 0$, т.е. если выполнено условие (40), и строго положительным, если $h_c(k) > 0$.

Следующие леммы доказываются по той же схеме, что и соответствующие им леммы 4-8.

Лемма 10. *Пусть $1 < p \le 2$ и $h(x) \in L_{p/[2\,(p-1)]}(-\pi,\pi)$ является четной на $[-\pi,\pi]$ функцией. Тогда оператор $\mathcal{H}$ является потенциальным оператором в пространстве $L_p(-\pi,\pi)$.*

Лемма 11. *Пусть* $1 < p \le 2$, $h(x) \in L_{p/[2\,(p-1)]}(-\pi,\pi)$ *и является нечетной на* $[-\pi,\pi]$ *функцией. Тогда оператор* H *является положительным в пространстве* $L_p(-\pi,\pi)$, *причем* $\langle \mathcal{H}u, u\rangle = 0 \quad \forall u(x) \in L_p(-\pi,\pi)$.

Лемма 12. *Пусть* $p \in [2,\infty)$, *ядро* $h(x) \in L_1(-\pi,\pi)$ *и удовлетворяет условию (40), а* 2π*-периодическая на отрезке* $[-\pi,\pi]$ *функция* $b(x) \neq 0$ *почти всюду и удовлетворяет условию:* $b(x) \in L_{2p/(p-2)}(-\pi,\pi)$ *при* $p > 2$, $b(x) \in L_\infty(-\pi,\pi)$ *при* $p = 2$. *Тогда оператор свертки* $(\mathcal{N}u)(x) = b(x)\int\limits_{-\pi}^{\pi} b(t)\,h(x-t)\,u(t)\,dt$ *действует из* $L_p(-\pi,\pi)$ *в* $L_{p'}(-\pi,\pi)$, *непрерывен и положителен, причем выполняются неравенства:*

$$||\mathcal{N}u||_{p'} \le ||b||^2_{2p/(p-2)} \cdot ||h||_1 \cdot ||u||_p \quad \text{и} \quad \langle \mathcal{N}u, u\rangle \ge 0 \qquad \forall u(x) \in L_p(-\pi,\pi)\ .$$

Кроме того, оператор $\mathcal{N}$ *является потенциальным, если* $h(x)$ *является четной функцией и является строго положительным, если в условии (40)* $h_c(k) > 0$.

Лемма 13. *Пусть* $p \in [2,\infty)$, *ядро* $h(x) \in L_1(-\pi,\pi)$ *и удовлетворяет условию (40), а вес* $\rho(x)$ *- условию:*

$$c(\rho) = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big[\rho(x)\Big]^{2/(2-p)} dx\right)^{(p-2)/(2p)} < \infty$$

$\Big($*при* $p = 2$ *под* $c(\rho)$ *понимается* $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{-\pi<x<\pi} \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\Big)$. *Тогда оператор свертки* $\mathcal{H}$ *действует непрерывно из* $L_p(\rho)$ *в сопряженное пространство* $L_{p'}(\sigma)$, $p' = p/(p-1)$, $\sigma = \rho^{1-p'}$, *и положителен, причем* $||\mathcal{H}u||_{p',\sigma} \le c^2(\rho) \cdot ||h||_1 \cdot ||u||_{p,\,\rho}$ *и* $\langle \mathcal{H}u, u\rangle \ge 0 \quad \forall u \in L_p(\rho)$. *Кроме того, если* $h(x)$ *является четной функцией, то* $\mathcal{H}$ *является потенциальным оператором, а если в условии (40)* $h_c(k) > 0$, *то* $\mathcal{H}$ *является строго положительным оператором.*

Замечание 4. В книге [18] рассмотрен вопрос о положительности оператора $\mathcal{H}$ лишь в пространстве непрерывных функций $C[-\pi,\pi]$. В частности, показано, что для положительности оператора $\mathcal{H}$ с непрерывным ядром $h(x)$ в пространстве $C[-\pi,\pi]$ необходимо и достаточно, чтобы оно было представимо в виде $h(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x+t)\cdot g(t)\,dt$, где $g(x) \in L_2(-\pi,\pi)$.

Следующие теоремы являются аналогами теорем 4, 6 и 8, соответственно. В этих теоремах предполагается, что нелинейность $F(x,t)$ является 2π-периодической по x.

Теорема 10. *Пусть* $1 < p \le 2$, $h(x) \in L_{p/[2(p-1)]}(-\pi,\pi)$ *и удовлетворяет условию (40), а* $F(x,t)$ *для почти всех* $x \in [-\pi,\pi]$ *и всех* $t \in R^1$ *удовлетворяет условиям:*

7) $|F(x,t)| \le c(x) + d_1 \cdot |t|^{p-1}$, *где* $c(x) \in L^+_{p'}(-\pi,\pi)$, $d_1 > 0$;

8) $F(x,t)$ *не убывает по* t *почти при каждом фиксированном* x;

9) $F(x,t)\cdot t \ge d_2 \cdot |t|^p - D(x)$, *где* $D(x) \in L^+_1(-\pi,\pi)$, $d_2 > 0$.

Тогда при любом $\lambda > 0$ *и любом* $f(x) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$ *уравнение*

$$\lambda \cdot F[x,u(x)] + \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\,u(t)\,dt = f(x)$$

имеет решение $u^* \in L_p(-\pi,\pi)$. *Это решение единственно, если в условии 8) функция* $F(x,t)$ *строго возрастает по* t *или если в условии (40)* $h_c(k) > 0$. *Кроме того, если условие 9) выполнено при* $D(x) = 0$, *то справедлива оценка:* $||u^*||_p \le \left(\lambda^{-1}\cdot d_2^{-1}\,||f||_{p'}\right)^{1/(p-1)}$.

Теорема 11. *Пусть* $p \in [2,\infty)$, *ядро* $h(x) \in L_{p/2}(-\pi,\pi)$ *и удовлетворяет условию (40). Если нелинейность* $F(x,t)$ *удовлетворяет условиям 7)-9) теоремы 10 со строгим возрастанием* *по t, то при любом $\lambda > 0$ и любом $f(x) \in L_p(-\pi,\pi)$ уравнение*

$$u(x) + \lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\, F[t, u(t)]\, dt = f(x)$$

имеет единственное решение $u^* \in L_p(-\pi,\pi)$. Кроме того, если условия 7) и 9) выполнены при $c(x) = D(x) = 0$, то: $||u^*||_p \le d_1 \cdot d_2^{-1} \cdot ||f||_p$.

Теорема 12. *Пусть $1 < p \le 2$, $h(x) \in L_{p/[2(p-1)]}(-\pi,\pi)$ и удовлетворяет условию (40), а $F(x,t)$ для почти всех $x \in [-\pi,\pi]$ и всех $t \in R^1$ удовлетворяет условиям:*

10) $|F(x,t)| \le g(x) + d_3 \cdot |t|^{1/(p-1)}$, *где* $g(x) \in L_p^+(-\pi,\pi)$, $d_3 > 0$;

11) *$F(x,t)$ строго возрастает по t почти при каждом x;*

12) $F(x,t) \cdot t \ge d_4 \cdot |t|^{p/(p-1)} - D(x)$, *где* $D(x) \in L_1^+(-\pi,\pi)$, $d_4 > 0$.

Тогда при любом $\lambda > 0$ и любом $f(x) \in L_p(-\pi,\pi)$ уравнение

$$u(x) + \lambda \cdot F\left[x, \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\, u(t)\, dt\right] = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(-\pi,\pi)$. Кроме того, если в условиях 10) и 12) $g(x) = D(x) = 0$, то: $||u^* - f||_p \le \lambda \cdot \left[d_3^p \cdot d_4^{-1} \cdot ||h||_{p/[2(p-1)]} \cdot ||f||_p\right]^{1/(p-1)}$.

Примерами ядер $h(x)$, удовлетворяющих условию (40), играющему важную роль при доказательстве теорем 10-12, являются функции $|x|$, x^2, $\cos x$, $\sin x$ и другие. Более интересен и содержателен следующий пример (ср. [21, с. 46]).

Пример 1. *Если функция $h(x)$* **выпукла** *в промежутке $(-\pi,\pi)$ и $\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(t)\, dt \ge 0$, то $h_c(k) \ge 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, т.е. выполняется условие (40).*

Так как в примере 1 функция $h(x)$ является 2π- периодической, то промежуток $(-\pi,\pi)$ можно заменить произвольным интервалом $(\xi, \xi + 2\pi)$. В данном случае, в качестве основного интервала удобнее взять $(0, 2\pi)$. Итак, нужно доказать, что

$$h_c(n) = \int\limits_{0}^{2\pi} h(t) \cdot \cos n\, t\, dt \ge 0 \qquad \forall n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{43}$$

если функция $h(x)$ выпукла в интервале $(0, 2\pi)$ и $\int\limits_{0}^{2\pi} h(t)\, dt \ge 0$. При $n = 0$ неравенство (43) выполняется по условию. Поэтому считаем далее n натуральным числом. Заметим, что

$$h_c(n) = \int\limits_{0}^{2\pi} h(t) \cdot \cos n\, t\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{2k\pi/n}^{2(k+1)\pi/n} h(t) \cdot \cos n\, t\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int\limits_{2k\pi/n}^{(2k+1)\pi/n} h(t) \cdot \cos n\, t\, dt + \int\limits_{(2k+1)\pi/n}^{2(k+1)\pi/n} h(t) \cdot \cos n\, t\, dt \right) =$$

(в первом интеграле сделаем замену: $t = \frac{2k\pi}{n} + s$, а во втором интеграле: $t = \frac{(2k+1)\pi}{n} + s$)

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int\limits_0^{\pi/n} h\left(\frac{2k\pi}{n}+s\right)\cdot\cos n\,s\,ds - \int\limits_0^{\pi/n} h\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}+s\right)\cdot\cos n\,s\,ds\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)}\left[h\left(\frac{2k\pi}{n}+t\right)-h\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}+t\right)\right]\cdot\cos n\,t\,dt +\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\pi/(2n)}^{\pi/n}\left[h\left(\frac{2k\pi}{n}+t\right)-h\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}+t\right)\right]\cdot\cos n\,t\,dt\right) =$$

(во втором интеграле сделаем замену $t = \pi/n - s$)

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)}\left[h\left(\frac{2k\pi}{n}+t\right)-h\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}+t\right)\right]\cdot\cos n\,t\,dt +\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\pi/(2n)}^{0}\left[h\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}-s\right)-h\left(\frac{2(k+1)\pi}{n}-s\right)\right]\cdot\cos n\,s\,ds\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\left(\left[h\left(\frac{2(k+1)\pi}{n}-t\right)-h\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}+t\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\left[h\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}-t\right)-h\left(\frac{2k\pi}{n}+t\right)\right]\right)\cdot\cos n\,t\,dt.$$

Следовательно, так как $\cos nt \geq 0$ при $t \in \left[0, \frac{\pi}{2n}\right]$, то достаточно показать, что

$$h\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}-t\right)-h\left(\frac{2k\pi}{n}+t\right) \leq h\left(\frac{2(k+1)\pi}{n}-t\right)-h\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}+t\right) \quad \forall t\in\left(0,\frac{\pi}{2n}\right). \quad (44)$$

Так как [22, с. 13] любая выпуклая функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству:

$$\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\ , \quad \text{если } x_1 < x_3 < x_2\ , \quad (45)$$

и

$$\frac{2k\pi}{n}+t < \frac{(2k+1)\pi}{n}-t < \frac{(2k+1)\pi}{n}+t < \frac{2(k+1)\pi}{n}-t \qquad \forall t\in\left(0,\frac{\pi}{2n}\right)\ ,$$

то выбрав сначала

$$x_1 = \frac{2k\pi}{n}+t\ , \quad x_3 = \frac{(2k+1)\pi}{n}-t\ , \quad x_2 = \frac{(2k+1)\pi}{n}+t\ ,$$

в силу (45), имеем

$$\frac{h\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}-t\right)-h\left(\frac{2k\pi}{n}+t\right)}{\frac{\pi}{n}-2t} \leq \frac{h\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}+t\right)-h\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}-t\right)}{2t}\ , \quad (46)$$

а затем выбрав

$$x_1 = \frac{(2k+1)\pi}{n}-t\ , \quad x_3 = \frac{(2k+1)\pi}{n}+t\ , \quad x_2 = \frac{2(k+1)\pi}{n}-t\ ,$$

из (45) получим:

$$\frac{h\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}+t\right)-h\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}-t\right)}{2t}\leq\frac{h\left(\frac{2(k+1)\pi}{n}-t\right)-h\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}+t\right)}{\frac{\pi}{n}-2t}. \tag{47}$$

Из (46) и (47), поскольку $\frac{\pi}{n}-2t>0\quad\forall t\in\left(0,\frac{\pi}{2n}\right)$, непосредственно вытекает (44).

В заключение отметим, что результаты работы [23] позволяют доказать существование и единственность решения уравнения (16) без условия 3), но не позволяют получить оценку нормы решения. В вольтерровском случае уравнения вида (16) изучались в [24], [25].

Литература

1. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1972. – 416 с.
2. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
3. *Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш.* Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1980. – 416 с.
4. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
5. *Нахушев А.М.* Элементы дробного исчисления и их применение. – Нальчик: изд. КБНЦ РАН, 2000. – 299 с.
6. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. - 672 с.
7. *Асхабов С.Н.* / Материалы пятой научно-практ. конф. Майкопского гос. технологического института (Экономика, менеджмент, финансы и кредит). Майкоп: МГТИ, 2001. С. 53-60.
8. *Асхабов С.Н.* / Доклады четвертой Всерос. научно-практ. конф. студ., аспир., докторантов и молодых ученых "Наука - XXI веку"(первая сессия). Майкоп: МГТИ, 2003. С. 98-111.
9. *Askhabov S.N.* // Z. Anal. Anwend. 1992. Vol. 11, N1. P. 77-84.
10. *Асхабов С.Н.* // Труды Физ. общ-ва респ. Адыгея. 2000, N5. С. 72-76.
11. *Асхабов С.Н.* // Известия ВУЗов. Математика. 1981, N9. С. 64-66.
12. *Askhabov S.N.* // Colloq. Math. 1991. Vol. 62, N1. P. 49-65.
13. *Nohel J.A., Shea D.F.* // Bollettino U.M.I. 1975. Vol. 11 (4), N3. P. 498-510.
14. *Nohel J.A., Shea D.F.* // Advanc. in Math. 1976. Vol. 22. P. 278-304.
15. *Staffans O.J.* // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. Vol. 51, N1. P. 103-108.
16. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 2000. – 695 с.
17. *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
18. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. Том 1. – М.: Мир, 1985. – 264 с.
19. *Асхабов С.Н.* Применение метода монотонных операторов к решению нелинейных сингулярных интегральных уравнений и их систем. Ростов. гос. ун-т. Автореф. дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Ростов-на-Дону: РГУ, 1982. – 20 с.
20. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Том 1. – М.: Мир, 1965. – 616 с.
21. *Харди Г.Х., Рогозинский В.В.* Ряды Фурье. – М.: Физматгиз, 1959. – 156 с.
22. *Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. – М.: Физматгиз, 1958. – 272 с.
23. *Brezis H., Browder F.E.* // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 80, N3. P. 567-572.
24. *Gorenflo R., Vesella S. Abel* integral equations. Analysis and Applications. – Springer-Verlag. Berlin. 1991. – 215 p.
25. *Zabrejko P., Rogosin S.* // J. Electrotechn. Math. 1997. N1. P. 53-65.

Nonlinear integral equations with difference kernels

S.N. Askhabov

By methods of monotone operators theory, existence and uniqueness theorems are proved for some classes of nonlinear integral equations with potential and convolution type kernels in real Lebesgue spaces.

