2003 г № 8
Труды ФОРА

О ПРЯМЫХ ИЗОКЛИНАХ КУБИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Д.С. Ушхо

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Доказано, что число прямых изоклин, проходящих через особую точку кубической дифференциальной системы, не более пяти. Дана оценка числа прямых изоклин указанной системы: оно не превосходит десяти. Приводится пример конкретной системы с десятью прямыми изоклинами. Проведена классификация прямых изоклин, проходящих через точку покоя кубической системы, когда их число равно четырём и пяти. Результаты исследования прямых изоклин автономной кубической системы позволили сделать вывод: в пучке кривых третьего порядка с девятью базисными точками не более трёх кривых, распадающихся на прямые. Если таких кривых в пучке ровно три, то разве что ещё одна кривая пучка распадается на прямую и кривую второго порядка. Знание числа прямых изоклин, проходящих через состояние равновесия кубической системы, позволяет оценить число её линейных частных интегралов.

Известно [1-3], что через любую особую точку квадратичной дифференциальной системы в конечной части фазовой плоскости проходит хотя бы одна прямая изоклина. С кубической системой дело обстоит иначе, так как существуют дифференциальные системы с кубическими правыми частями как обладающие, так и не обладающие прямыми изоклинами.

В настоящей заметке исследуется вопрос о существовании и числе прямых изоклин, проходящих через точку покоя $(0,0)$ системы

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{i+j=1}^{3}a_{ij}x^i y^j \equiv P_3(x,y), \frac{dy}{dt}=\sum_{i+j=1}^{3}b_{ij}x^i y^j \equiv Q_3(x,y) \tag{1}$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R, (P_3, Q_3)=1.$

Предварительно докажем одно утверждение, которое нам понадобится в дальнейшем и из которого следует результат [1-3] относительно прямых изоклин.

Пусть нам предложена система

$$\frac{dx}{dt}=P_n(x,y)+P_{n+1}(x,y)\equiv P(x,y), \frac{dy}{dt}=Q_n(x,y)+Q_{n+1}(x,y)\equiv Q(x,y) \tag{2}$$

где $|P_n|+|Q_n| \not\equiv 0$, $P_{n+1}Q_{n+1} \not\equiv 0$, $(P,Q)=1$, $P_k=\sum_{i+j=k}a_{ij}x^i y^j$, $Q_k=\sum_{i+j=k}b_{ij}x^i y^j$,

$k=n,n+1, \quad n\in N$.

<u>Теорема1.</u> Через особую точку $(0,0)$ системы (2) проходит не менее одной и не более $2n+1$ прямых изоклин.

Доказательство. Введем обозначения:

$f_n(k)=a_{n,0}+a_{n-1,1}k+...+a_{0,n}k^n$, $g_n(k)=b_{n,0}+b_{n-1,1}k+...+b_{0,n}k^n$, $f_{n+1}(k)=a_{n+1,0}+a_{n,1}k+...+a_{0,n+1}k^{n+1}$, $g_{n+1}(k)=b_{n+1,0}+b_{n,1}k+...+b_{0,n+1}k^{n+1}$.

Предположим, что $y=kx$ - прямая изоклина системы (2) , тогда справедливо тождество $g_n(k)+g_{n+1}(k)x\equiv m(f_n(k)+f_{n+1}(k)x)$, равносильное системе

$$g_n(k)=mf_n(k), g_{n+1}(k)=mf_{n+1}(k) \tag{3}$$

где m - const.

Пусть $f_n(k) \equiv 0$, тогда в силу неравенства $|P_n| + |Q_n| \not\equiv 0$ выполняется условие $g_n(k) \not\equiv 0$.

Рассмотрим два случая:

а) $n-$ чётное. Если $a_{0,n+1} \neq 0$, то уравнение $f_{n+1}(k) = 0$ имеет хотя бы один корень, т.е. имеем не менее одной прямой изоклины бесконечности, проходящей через точку $(0,0)$.

Если $a_{0,n+1} = 0$, то $P_{n+1}(0, y) \equiv 0$, т.е. $x = 0 -$ изоклина бесконечности.

б) $n-$нечётное. Если $b_{0,n} \neq 0$, то уравнение $g_n(k) = 0$ имеет не менее одного вещественного корня, которому соответствует прямая изоклина системы (2). Если же $b_{0,n}$=0, то $\frac{Q(0,y)}{P(0,y)} \equiv \frac{b_{0,n+1}}{a_{0,n+1}} - const$, т.е. имеем прямую изоклину $x = 0$.

Если $f_n(k) \not\equiv 0$, то из (3) получаем соотношения:

$$m = \frac{g_n(k)}{f_n(k)}, g_{n+1}(k) f_n(k) = g_n(k) f_{n+1}(k) \tag{4}$$

Уравнение (4), вообще говоря, является уравнением степени $2n+1$ относительно k:

$$(b_{0,n+1}a_{0,n} - b_{0,n}a_{0,n+1})k^{2n+1} + ... \ = 0 \tag{5}$$

Если $b_{0,n+1}a_{0,n} - b_{0,n}a_{0,n+1} \neq 0$. то уравнение (5), очевидно, имеет не менее одного вещественного корня, которому соответствует прямая изоклина системы (2), проходящая через состояние равновесия $(0,0)$.

Если $b_{0,n+1}a_{0,n} - b_{0,n}a_{0,n+1} = 0$ (6), то в силу взаимной простоты правых частей (2) имеет место неравенство $|b_{0,n}| + |b_{0,n+1}| + |a_{0,n}| + |a_{0,n+1}| > 0$. Для определенности положим $a_{0,n} \neq 0$. Тогда из (6) имеем

$$b_{0,n+1} = \frac{b_{0,n}a_{0,n+1}}{a_{0,n}}. \tag{7}$$

С учетом (7) легко убедиться в выполнении равенства $\frac{Q(0,y)}{P(0,y)} = \frac{b_{0,n}}{a_{0,n}} - const$, т.е. $x = 0 -$ изоклина системы. Тем самым доказано, что через особую точку (0,0) проходит не менее одной прямой изоклины системы (2). В то же время число таких прямых в силу уравнения (5) не превосходит $2n+1$. Теорема доказана.

Следствие 1. Через особую точку квадратичной системы с ненулевой линейной частью проходит от одной до трех прямых изоклин.

Замечание 1. Факт существования прямой изоклины, проходящей через особую точку квадратичной системы, в упомянутых выше работах [1,2] доказан другим способом, но в них не дана оценка числа таких прямых.

Для изучения прямых изоклин системы (1) введем обозначения:

$$f_s(k) = \sum_{i+j=s} a_{ij}k^j, g_s(k) = \sum_{i+j=s} b_{ij}k^j, s = 1,2,3; i, j \in \{0,1,2,3\}.$$

Всюду в дальнейшем считаем, что $f_3(k)g_3(k) \not\equiv 0$ и, кроме того,

$$|f_1(k)| + |f_2(k)| + |g_1(k)| + |g_2(k)| \not\equiv 0 \tag{8}$$

Если не выполнено (8), то система (1) превращается в однородную кубическую систему, которая имеет в качестве изоклины любую прямую $y = kx$..

Рассмотрим все возможные случаи выполнения неравенства (8).
Случай А. Правые части системы (1) содержат хотя бы один линейный член и хотя бы один квадратичный член, т.е. выполняются неравенства:

$$|f_1(k)|+|g_1(k)| \not\equiv 0\,,\ |f_2(k)|+|g_2(k)| \not\equiv 0$$

Не нарушая общности рассуждений, достаточно рассмотреть следующие пять подслучаев:

$$|f_1(k)|+|f_2(k)| \equiv 0, g_1(k)g_2(k) \not\equiv 0 \quad \text{(A1)}$$

$$f_1(k) \equiv 0, g_1(k)g_2(k)f_2(k) \not\equiv 0 \quad \text{(A2)}$$

$$|f_1(k)|+|g_2(k)| \equiv 0, g_1(k)f_2(k) \not\equiv 0 \quad \text{(A3)}$$

$$f_2(k) \equiv 0, f_1(k)g_1(k)g_2(k) \not\equiv 0 \quad \text{(A4)}$$

$$f_1(k)f_2(k)g_1(k)g_2(k) \not\equiv 0 \quad \text{(A5)}$$

Пусть выполнено условие (А1). Тогда система (1) имеет, по меньшей мере, одну прямую изоклину бесконечности, проходящую через точку (0,0), но число таких прямых не более трёх.

В самом деле, если $a_{03}=0,$ то $x=0-$ изоклина бесконечности, если $a_{03}\neq 0,$ то уравнение $f_3(k)=0$ имеет не менее одного и не более трех вещественных корней, которым соответствуют прямые изоклины бесконечности. Кроме трёх изоклин бесконечности система может иметь ещё одну прямую изоклину (нуля или другого направления), проходящую через точку (0,0). Таким образом, в случае (А1) система (1) может иметь от одной до четырёх прямых изоклин, проходящих через начало координат.

Пример 1. Дифференциальная система

$$\frac{dx}{dt}=xy^2+5x^2y-6x^3, \frac{dy}{dt}=x-2y+2x^2+4xy-16y^2+x^3+6x^2y+4xy^2+12y^3$$

имеет три изоклины бесконечности: $x=0, y=-6x, y=x$ и одну изоклину $y=\dfrac{1}{2}x$ наклона $m=-2.$

Пример 2. Дифференциальная система

$$\frac{dx}{dt}=xy^2+5x^2y-6x^3, \frac{dy}{dt}=x-2y+2x^2+4xy-16y^2+x^3+6x^2y+4xy^2-40y^3$$

имеет три изоклины бесконечности: $x=0, y=-6x, y=x$ и одну изоклину нуля $y=\dfrac{1}{2}x$.

Возможные направления прямых изоклин системы (1), проходящих через начало координат в случае (А2), удовлетворяют системе:

$$m=\frac{g_2(k)}{f_2(k)}, g_1(k)\not\equiv 0\,, g_2(k)f_3(k)-g_3(k)f_2(k)=0 \quad (9)$$

Из (9) следует, что система (1) имеет не более трёх прямых изоклин, проходящих через точку покоя (0,0).

Пример 3. Прямые: $y=-4x, y=x-$ изоклины бесконечности, а прямая $y=-x-$ изоклина нуля дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt}=3xy-4x^2+y^2-12x^3+5x^2y+6xy^2+y^3,$$

$$\frac{dy}{dt}=x+y+2x^2-3xy-5y^2+x^3-4x^2y+13xy^2+18y^3$$

Пример 4. Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = 3xy - 4x^2 + y^2 - 12x^3 + 5x^2 y + 6xy^2 + y^3,$$
$$\frac{dy}{dt} = 5x - y + 6xy - 8x^2 + 2y^2 + x^3 + 8x^2 y - 2xy^2 + \frac{117}{25} y^3$$

имеет две изоклины бесконечности: $y = -4x, y = x$ и одну изоклину $y = 5x$ направления $m = 2$.

В случае (А3) имеет место соотношение

$$\frac{Q_3(x,kx)}{P_3(x,kx)} = \frac{g_1(k) + g_3(k)x^2}{f_2(k)x + f_3(k)x^2} \tag{10}$$

Из (10) следует, что система (1) может иметь не более трёх прямых изоклин, проходящих через начало координат. При этом, если их число равно трём, то две из них изоклины бесконечности, а одна - изоклина нуля.

Пример 5. Прямые: $y = 6x, y = x -$ изоклины бесконечности, $y = 2x -$ изоклина нуля системы

$$\frac{dx}{dt} = 6x^2 - 7xy + y^2 - 24x^3 + 34x^2 y - 11xy^2 + y^3,$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x - y + 7x^3 - 3x^2 y + 2xy^2 - \frac{9}{8} y^3$$

Пример 6. Система

$$\frac{dx}{dt} = 2x^2 - 3xy + y^2 + 40x^3 - 22x^2 y - xy^2 + y^3, \frac{dy}{dt} = x - y + 2x^3 - x^2 y + 5xy^2 + 8y^3$$

имеет две прямые изоклины, проходящие через точку (0,0): $y = 2x -$ изоклина бесконечности, $y = x -$ изоклина наклона $m = \frac{7}{9}$.

Пример 7. Не существует ни одной прямой изоклины, проходящей через точку покоя (0,0) для системы

$$\frac{dx}{dt} = 2x^2 - 3xy + y^2 - 12x^3 - 13x^2 y + y^3, \frac{dy}{dt} = y - 3x + 240x^3 - 38x^2 y - 7xy^2 + y^3.$$

При выполнении условия (А4) система (1) может иметь не более одной изоклины бесконечности и не более одной изоклины нуля, и ещё одной изоклины, соответствующей корню уравнения $g_2(k) = 0$ и отличной от упомянутых двух изоклин, проходящих через начало координат

Пример 8. Для системы

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y - 8x^3 + 2x^2 y + 5xy^2 + y^3, \frac{dy}{dt} = 3x - y + 3x^2 - 4xy + y^2 + 15x^3 - 17x^2 y + xy^2 + y^3$$

$y = 3x -$ изоклина нуля, $y = -2x -$ изоклина бесконечности, $y = x -$ изоклина направления

$$m = \frac{2}{3}.$$

Пример 9. Прямые: $y = 3x -$ изоклина направления $m_1 = \frac{6}{5}$, $y = x -$ изоклина направления $m_2 = \frac{4}{3}$ системы

$$\frac{dx}{dt}=2x+y-12x^3+19x^2y-8xy^2+y^3, \frac{dy}{dt}=3x+y+3x^2-4xy+y^2+12x^3-13x^2y+y^3.$$

Возможные направления прямых изоклин, проходящих через точку покоя (0,0) системы (1) в случае (A5) удовлетворяют системе: $\frac{g_1(k)}{f_1(k)}=m,$

$$(a_{01}b_{02}-a_{02}b_{01})k^3+(a_{10}b_{02}+a_{01}b_{11}-a_{02}b_{10}-a_{11}b_{01})k^2+(a_{10}b_{11}+a_{01}b_{20}-a_{20}b_{01}- -a_{11}b_{10})k+a_{10}b_{20}-a_{20}b_{10}=0 \tag{11}$$

$$(a_{01}b_{03}-a_{03}b_{01})k^4+(a_{10}b_{03}+a_{01}b_{12}-a_{03}b_{10}-a_{12}b_{01})k^3+(a_{10}b_{12}+a_{01}b_{21}-a_{12}b_{10}- -a_{21}b_{01})k^2+(a_{10}b_{21}+a_{01}b_{30}-a_{21}b_{10}-a_{30}b_{01})k+a_{10}b_{30}-a_{30}b_{10}=0 \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует, что система (1) в рассматриваемом случае может иметь не более трёх прямых изоклин, проходящих через начало координат.

Подводя итог исследованию, проведённому в случае (A) , можно сформулировать следующие утверждения.

Лемма 1. Если система (1) удовлетворяет условию (A1), то через начало координат (0,0) проходит не менее одной и не более четырёх прямых изоклин.

Лемма 2. Если система (1) удовлетворяет хотя бы одному из условий (A2) – (A5), то через начало координат (0,0) проходит не более трёх прямых изоклин.

Случай B. Правые части системы (1) содержат хотя бы один линейный член, но не содержат квадратичных членов.

Здесь достаточно рассмотреть подслучаи:

$$|f_1(k)|+|f_2(k)|+|g_2(k)|\equiv 0,\ \ g_1(k)\not\equiv 0 \tag{B1}$$

$$f_1(k)g_1(k)\not\equiv 0,\ |f_2(k)|+|g_2(k)|\equiv 0 \tag{B2}$$

Пусть выполнено условие (B1). Тогда имеет место соотношение

$$\frac{Q_3(x,kx)}{P_3(x,kx)}=\frac{g_1(k)+g_3(k)x^2}{f_3(k)x^2} \tag{13}$$

Из (13) следует, что система (1) имеет не менее одной и не более трёх прямых изоклин бесконечности и не более одной прямой изоклины (нуля или другого направления), проходящих через точку покоя (0,0).

Пример 10. Система

$\frac{dx}{dt}=2x^2y-3xy^2+y^3,\ \ \frac{dy}{dt}=7x+y-12x^3-11x^2y+2xy^2+y^3$ имеет три изоклины бесконечности: $y=0,\ \ y=x,\ \ y=2x$ и одну изоклину $y=-7x$ наклона $m=\frac{15}{42}$.

При выполнении условия (B2) возможные направления прямых изоклин системы (1), проходящих через точку (0,0) , удовлетворяют системе:

$m=\frac{g_1(k)}{f_1(k)}$, (12). Таким образом, число прямых изоклин (1), проходящих через начало координат, не превосходит четырёх, и имеет место

Лемма 3. Если система (1) удовлетворяет хотя бы одному из условий (B1) и (B2), то она имеет не более четырёх прямых изоклин, проходящих через точку покоя (0,0), причём, если выполнено (B1), то число таких прямых не менее одного.

Случай C. Правые части системы (1) содержат хотя бы один квадратичный член и не содержат линейных членов.

Рассмотрим два подслучая:

$$g_2(k) \not\equiv 0\,, \left|f_1(k)\right| + \left|f_2(k)\right| + \left|g_1(k)\right| \equiv 0 \tag{C1}$$

$$f_2(k)g_2(k) \not\equiv 0\,,\ \left|f_1(k)\right| + \left|g_1(k)\right| \equiv 0 \tag{C2}$$

которые вполне характеризуют число прямых изоклин, проходящих через точку (0,0).

При выполнении условия (C1) имеем:

$$\frac{Q_3(x,kx)}{P_3(x,kx)} = \frac{g_2(k) + g_3(k)x}{f_3(k)x} \tag{14}$$

Согласно (14) система (1) имеет не менее одной и не более трёх прямых изоклин бесконечности и, кроме того, не более двух изоклин (нуля или другого направления), проходящих через начало координат.

Пример 11. Кроме изоклин бесконечности: $y = x,\ \ y = 2x,\quad y = -3x,$ система $\dfrac{dx}{dt} = (y-x)(y-2x)(y+3x),\ \ \dfrac{dy}{dt} = 2x^2 + 3xy + y^2 - 120x^3 - 34x^2y + 3xy^2 + y^3$ имеет ещё две изоклины: $y = -x$ направления $m_1 = -7,\ \ y = -2x$ - направления $m_2 = -4.$

При выполнении условия (C2) возможные направления прямых изоклин системы (1), проходящих через точку (0,0), удовлетворяют системе:

$$m = \frac{g_2(k)}{f_2(k)},$$

$$\begin{gathered}(a_{02}b_{03} - a_{03}b_{02})k^5 + (a_{11}b_{03} + a_{02}b_{12} - a_{03}b_{11} - a_{12}b_{02})k^4 + (a_{20}b_{03} + a_{11}b_{12} + a_{02}b_{21} - a_{03}b_{20} - \\ - a_{12}b_{11} - a_{21}b_{02})k^3 + (a_{20}b_{12} + a_{11}b_{21} + a_{02}b_{30} - a_{12}b_{20} - a_{21}b_{11} - a_{30}b_{02})k^2 + (a_{20}b_{21} + a_{11}b_{30} - \\ - a_{21}b_{20} - a_{30}b_{11})k + a_{20}b_{30} - a_{30}b_{20} = 0.\end{gathered} \tag{15}$$

Из (15) и, впрочем, из теоремы 1 следует, что система (1) обладает не менее одной и не более чем пятью прямыми изоклинами, проходящими через точку (0,0), т. е. имеет место

Лемма 4. Если система (1) удовлетворяет хотя бы одному из условий (C1) и (C2), то через точку покоя (0,0) проходит не мене одной и не более пяти прямых изоклин.

Пример 12. Система

$$\frac{dx}{dt} = y^2 + 10x^2y + 5xy^2 + y^3,\ \ \frac{dy}{dt} = -8x^2 + xy + 3y^2 + 16x^3 - 12x^2y + 12xy^2 + 4y^3$$

обладает пятью прямыми изоклинами: $y = 0, y = -x, y = 2x, y = -5x, y = 8x,$ соответствующими корням уравнения

$$k(k^4 - 4k^3 - 39k^2 + 46k + 80) = 0$$

Можно показать, что на указанных прямых направления поля данной системы попарно различны.

Из доказанных выше лемм 1-4 вытекает

<u>Теорема 2.</u> Пусть правые части системы (1) являются взаимно простыми вещественными многочленами третьей степени, причём хотя бы один из этих многочленов не является однородным. Тогда через точку покоя (0,0) проходит не более пяти прямых изоклин.

Далее рассмотрим вопрос о каноническом представлении системы (1) в связи с её прямыми изоклинами.

Под канонической формой записи системы (1) будем понимать такую форму её записи, при которой правая часть хотя бы одного из двух уравнений этой системы содержит в качестве множителя не менее одной линейной формы, отличной от постоянной.

<u>Теорема 3.</u> Пусть прямой $l: y = kx + b$ принадлежат n особых точек $(x_i, y_i), i = \overline{1,n}$ дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = P_n(x,y),\ \frac{dy}{dt} = Q_n(x,y) \tag{16}$$

где $P_n(x,y),\ Q_n(x,y) -$ взаимно простые действительные многочлены $n-$ой степени. Тогда l-изоклина системы (16).

В самом деле,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{y=kx+b} = \frac{Q_n(x,kx+b)}{P_n(x,kx+b)} = \frac{\alpha(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}{\beta(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)} = \frac{\alpha}{\beta} - \ const\,.$$

Замечание 2. Если $Q_n(x,kx+b) \equiv 0 \quad (P_n(x,kx+b) \equiv 0)$, то $l-$изоклина нуля (бесконечности). Одновременно оба этих тождества не могут быть выполнены так как $(P_{n,}Q_n) = 1$.

Следствие 2. Прямая, проходящая через три особые точки системы (1), является её изоклиной.

Для удобства изложения будем говорить, что дифференциальная система

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y),\ \frac{dy}{dt} = Q(x,y) \tag{17}$$

индуцирует на кривой L направление m, если угловой коэффициент касательных к траекториям системы (17) в точках их пересечения (или, быть может, касания) с L равен m.

<u>Теорема 4.</u> Свойство кривой L быть изоклиной системы (17) инвариантно относительно линейного неособенного преобразования

$$x = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y},\ y = \gamma\bar{x} + \delta\bar{y} \tag{18}$$

Доказательство. Пусть система (17) индуцирует на кривой L направление m, т.е.

$$\left(\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}\right)_{(x,y)\in L} = m \tag{19}$$

В силу (18) система (17) примет вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{x}}{d\tau} &= \delta P(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y},\gamma\bar{x}+\delta\bar{y}) - \beta Q(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y},\gamma\bar{x}+\delta\bar{y}),\\ \frac{d\bar{y}}{d\tau} &= -\gamma P(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y},\gamma\bar{x}+\delta\bar{y}) + \alpha Q(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y},\gamma\bar{x}+\delta\bar{y})\end{aligned} \tag{20}$$

где $d\tau = \frac{dt}{\Delta}, \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Пусть в результате применения преобразования (18) к системе (17) кривая L перешла в кривую $\bar{L}$. Тогда согласно (19) и (20) имеет место равенство

$\left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}\right)_{(\bar{x},\bar{y})\in\bar{L}} = \frac{-\gamma+\alpha m}{\delta-\beta m} = \bar{m} - const.$ Отсюда следует, что $\bar{L}$- изоклина системы (20). Теорема доказана.

<u>Теорема 5.</u> Произвольную изоклину системы (17) можно перевести в любую из двух главных изоклин.

Справедливость данного утверждения следует непосредственно из предыдущей теоремы при $\gamma = \alpha m$ ($\bar{L}-$изоклина нуля) и $\delta = \beta m$ ($\bar{L}-$изоклина бесконечности).

Теорема 6. Для того, чтобы точка $M(x_0, y_0)$ была особой точкой системы (17) необходимо и достаточно существования, по крайней мере, двух изоклин L_1 и L_2, проходящих через M, и на которых система (17) индуцирует различные направления.

Доказательство. Если $M -$ точка покоя системы (17), то по определению особой точки через неё проходят главные изоклины этой системы. Пусть теперь через М проходят две изоклины L_1 и L_2, на которых система (17) индуцирует направления m_1 и m_2, соответственно ($m_1 \neq m_2$). По теореме 5 $L_1(L_2)$ можно перевести в изоклину нуля (бесконечности) или бесконечности(нуля) посредством невырожденного преобразования (18). В результате образ точки $M -$ точка $\overline{M}$ будет общей для двух главных изоклин системы (20), а значит её точкой покоя. Теорема доказана.

Теорема 7. Пусть (0,0) – особая точка системы (17), где $P(x,y) \equiv P_n(x,y) + \varphi(x,y)$, $Q(x,y) \equiv Q_n(x,y) + \psi(x,y)$, $|P_n| + |Q_n| \not\equiv 0$, $P_n, Q_n -$ однородные многочлены степени n, φ и $\psi -$ аналитические функции, разложения которых не содержат членов степени меньше чем $n+1$. Тогда правая часть хотя бы одного из уравнений системы (20) содержит многочлен $n -$ой степени.

Доказательство. Рассмотрим укороченную систему (20):

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau} = \delta\overline{P_n}(\overline{x},\overline{y}) - \beta\overline{Q_n}(\overline{x},\overline{y}), \frac{d\overline{y}}{d\tau} = -\gamma\overline{P_n}(\overline{x},\overline{y}) + \alpha\overline{Q_n}(\overline{x},\overline{y}) \tag{21}$$

где

$$\overline{P_n}(\overline{x},\overline{y}) \equiv P_n(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}, \gamma\overline{x} + \delta\overline{y}), \overline{Q_n}(\overline{x},\overline{y}) \equiv Q_n(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}, \gamma\overline{x} + \delta\overline{y}) \tag{22}$$

Пусть вопреки утверждению теоремы

$$\delta\overline{P_n}(\overline{x},\overline{y}) - \beta\overline{Q_n}(\overline{x},\overline{y}) \equiv 0, \ -\gamma\overline{P_n}(\overline{x},\overline{y}) + \alpha\overline{Q_n}(\overline{x},\overline{y}) \equiv 0 \tag{23}$$

В силу неравенства $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ система (23) равносильна равенству $|P_n| + |Q_n| \equiv 0$. Но это противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Теорема 8. Если дифференциальная система (1) имеет не менее четырёх прямых изоклин, то, по крайней мере, на двух из них эта система индуцирует различные направления.

Действительно, допуская противное, согласно теореме 5 можно перевести в одну из главных изоклин не менее четырёх прямых. Так как линейное преобразование переводит прямые в прямые, то результатом применения (18) к системе (1) будет система, правая часть одного из уравнений которой представляет собой произведение не менее чем четырёх линейных множителей. Пришли к противоречию с тем, что аффинное преобразование не меняет порядка алгебраической кривой.

Тот факт, что система (1) индуцирует на прямой l_i направление m_j, будем обозначать символом $l_i^{m_j}$, где $i, j \in N$. Условимся все прямые с одним и тем же верхним индексом m_j считать элементами одного и того же множества, а прямые с различными нижними индексами – несовпадающими. Таким образом, множество всех прямых изоклин системы (1) можно разбить на непересекающиеся подмножества.

Теорема 9. Пусть в случае B через точку (0,0) проходят четыре прямые изоклины системы (1). Тогда множество M этих прямых может быть разбито на непересекающиеся подмножества лишь двумя способами:

а) $M = \{l_1^{m_1}, l_2^{m_1}, l_3^{m_1}\} \cup \{l_4^{m_2}\}$, б) $M = \bigcup_{i=1}^{4} \{l_i^{m_i}\}$

Доказательство. Согласно теореме 8 все четыре прямые не могут быть отнесены к одному и тому же множеству. Поэтому логически могут представиться, кроме а) и б) другие способы разбиения множества M на подмножества, а именно:

в) $M = \{l_1^{m_1}, l_2^{m_1}\} \bigcup \{l_3^{m_2}\} \bigcup \{l_4^{m_3}\}$, г) $M = \{l_1^{m_1}, l_2^{m_1}\} \bigcup \{l_3^{m_2}, l_4^{m_2}\}$.

Покажем, что случаи в) и г) не реализуются. Если имеет место разбиение г), то согласно теореме 5 систему (1) можно привести к виду:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = (A_1\bar{x} + B_1\bar{y})(A_2\bar{x} + B_2\bar{y})(A_3\bar{x} + B_3\bar{y} + C_3),$$
$$\frac{d\bar{y}}{dt} = (A_4\bar{x} + B_4\bar{y})(A_5\bar{x} + B_5\bar{y})(A_6\bar{x} + B_6\bar{y} + C_6) \qquad (24)$$

где $C_3C_6 \neq 0.$

Нетрудно видеть, что в правых частях (24) отсутствуют линейные члены, а это противоречит теореме 7.

В случае разбиения в) по теореме 5 системе (1) можно придать вид:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = (A_1\bar{x} + B_1\bar{y})(A_2\bar{x} + B_2\bar{y})(A_3\bar{x} + B_3\bar{y} + C_3),\ \frac{d\bar{y}}{dt} = (A_4\bar{x} + B_4\bar{y})Q_2(\bar{x},\bar{y}) \qquad (25)$$

где $C_3 \neq 0$ (при $C_3 = 0$ мы имели бы случай а)).

Поскольку система (25), кроме трёх прямых : $A_1\bar{x} + B_1\bar{y} = 0, A_2\bar{x} + B_2\bar{y} = 0, A_4\bar{x} + B_4\bar{y} = 0,$ имеет ещё четвёртую изоклину $l_5 : A_5\bar{x} + B_5\bar{y} = 0,$ то $\left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}\right)_{(\bar{x},\bar{y})\in l_5} = m_5 - const.$ Последнее равенство возможно только при $Q_2(0,0) = 0$, что противоречит теореме 7.

Способ а) разбиения множества прямых изоклин, проходящих через точку (0,0), иллюстрируется системой дифференциальных уравнений, приведённой в примере 10, а также системой

$$\frac{dx}{dt} = -3x + y + 2x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3,\ \frac{dy}{dt} = -9x + 3y - 2x^3 + x^2y + 2xy^2 - y^3 \qquad (26)$$

Система (26) индуцирует на прямой $y = 3x$ направление $m_1 = -1$, а на трёх остальных изоклинах: $y = x, y = -x, y = 2x-$ направление $m_2 = 3.$

Приведём пример, иллюстрирующий способ б) разбиения множества прямых изоклин.

Пример 13. Дифференциальная система

$\frac{dx}{dt} = -3x + 2x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3,\ \frac{dy}{dt} = -y - 2x^3 + x^2y + 2xy^2 - y^3$ индуцирует на прямых: $y = x, y = -x, y = 2x, y = -3x$ направления: $m_1 = -\frac{1}{3}, m_2 = \frac{1}{3}, m_3 = -\frac{2}{3}, m_4 = -1,$ соответственно, т.е. имеет место разбиение б). Теорема доказана.

<u>Теорема 10.</u> Пусть в условиях леммы 4 через точку (0,0) проходят пять прямых изоклин. Тогда множество M всех этих прямых можно разбить на непересекающиеся подмножества следующими способами:

а) $M = \{l_1^{m_1}, l_2^{m_1}, l_3^{m_1}\} \bigcup \{l_4^{m_2}, l_5^{m_2}\}$, б) $M = \{l_1^{m_1}, l_2^{m_1}\} \bigcup \{l_3^{m_2}, l_4^{m_2}\} \bigcup \{l_5^{m_3}\}$, в) $M = \bigcup_{i=1}^{5} \{l_i^{m_i}\}$,
г) $M = \{l_1^{m_1}, l_2^{m_1}, l_3^{m_1}\} \bigcup \{l_4^{m_2}\} \bigcup \{l_5^{m_3}\}$, д) $M = \{l_1^{m_1}, l_2^{m_1}\} \bigcup \{l_3^{m_2}\} \bigcup \{l_4^{m_3}\} \bigcup \{l_5^{m_4}\}$

Доказательство. В силу теоремы 8 логически возможными способами разбиения множества M на непересекающиеся подмножества являются способы а) - д), и только они.

Прежде всего отметим, что система, приведённая в примере 12 , соответствует случаю в). Приведём примеры, иллюстрирующие остальные способы разбиения множества M , тем самым будет доказана теорема.

Пример 14. Дифференциальная система

$$\frac{dx}{dt} = 90x^2 - 930xy + 2340y^2 + 483x^3 - 4444x^2y + 13739xy^2 - 14278y^3,$$
$$\frac{dy}{dt} = 90x^2 - 930xy + 2340y^2 - 357x^3 + 2776x^2y - 6681xy^2 + 4762y^3$$

индуцирует на прямых: $3x - 8y = 0,\ 2x - 7y = 0,\ 7x - 17y = 0$ направление $m_1 = 1$, а на прямых: $3x - 13y = 0,\ \ x - 6y = 0 -$ направление $m_2 = -1$, т.е. имеет место разбиение а).

Пример 15. Для дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = (y - 5x)(y + 13x)(y - 2x + 8),\ \frac{dy}{dt} = (y + 20x)(y - 30x)(2y + 3x + 23)$$

прямая $y = 10x -$ изоклина наклона $m = -15$. Очевидно, данная система имеет две прямые изоклины нуля и столько же изоклин бесконечности, проходящих через начало координат. Следовательно, имеет место разбиение б).

Пример 16. Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = (2x - 3y)(x + 5y)(3x - y),\ \ \frac{dy}{dt} = (x + 7y)(3x - 3y + 2x^2 + xy + 3y^2)$$

индуцирует на прямой $y = x$ направление $m = -4$, кроме того, эта система имеет три прямые изоклины бесконечности и одну прямую изоклину нуля, проходящие через точку покоя (0,0). Таким образом, возможность разбиения г) налицо.

Пример 17. На прямых: $y = -4x$, $y = 5x$ система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = (x + y)(2x - y)(2x + y - 2),\ \frac{dy}{dt} = 3(y - 8x)(3x + y + 7x^2 - 2xy - y^2)$$

индуцирует направления: $m_1 = 1,\ m_2 = -2$, соответственно, т.е. разбиение д) возможно. Теорема доказана.

В работе [4] доказано, что дифференциальное уравнение траекторий системы (1) с взаимно простыми правыми частями может иметь любое число интегральных прямых от одного до восьми. Знание числа прямых изоклин, проходящих через данную особую точку кубической системы, может послужить в некоторых случаях основанием для оценки сверху числа частных линейных интегралов этой системы.

<u>Теорема 11.</u> Пусть в условиях теоремы 10 множество прямых изоклин, проходящих через точку (0,0), разбито на непересекающиеся подмножества способом в). Тогда система (1) не имеет других прямых изоклин, а число её линейных частных интегралов не более четырёх.

Доказательство. По условию $M = \bigcup_{i=1}^{5} \{ l_i^{m_i} \}$. Предположим, что система (1) имеет ещё шестую прямую изоклину $l_j^{m_6}$, $j \neq i$. В силу теоремы 2 прямая $l_j^{m_6}$ не проходит через начало координат, а, следовательно, пересекает не менее четырёх прямых изоклин из множества M . Согласно теореме 6 это означает наличие не менее чем четырёх особых точек системы (1) на прямой $l_j^{m_6}$, что невозможно для кубической системы.

Поскольку линейный частный интеграл является прямой изоклиной, то их число согласно [4] не превосходит четырёх (дифференциальное уравнение траекторий кубической системы имеет интегральные прямые не более четырёх различных направлений).
Теорема доказана.

Пример 18. Через начало координат (0,0) проходят пять изоклин: $y=0$, $y=x$, $y=-x$, $y=2x$, $y=-2x$ дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt}=6x^2+3xy+4x^3+4x^2y-xy^2+y^3,\ \frac{dy}{dt}=6xy+3y^2+2x^2y+5xy^2+y^3 \qquad (27)$$

На прямой $y=-2x$ система (27) индуцирует направление $m=-\frac{1}{2}$, а все остальные изоклины состоят из траекторий этой системы.

Теорема 12. Пусть в условиях теоремы 10 множество прямых изоклин, проходящих через точку (0,0), разбито на непересекающиеся подмножества способом а). Тогда система (1) имеет ровно шесть прямых изоклин, а число её линейных частных интегралов не более трёх.

Доказательство. Согласно теореме 5 системе (1) можно придать вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{x}}{dt}&=(A_1\bar{x}+B_1\bar{y})(A_2\bar{x}+B_2\bar{y})(A_3\bar{x}+B_3\bar{y})\\ \frac{d\bar{y}}{dt}&=(A_4\bar{x}+B_4\bar{y})(A_5\bar{x}+B_5\bar{y})(A_6\bar{x}+B_6\bar{y}+C_6)\end{aligned}, \qquad (28)$$

где $C_6\neq 0$. Из вида правых частей системы (28) следует, что она имеет шесть прямых изоклин. Предположим, что система имеет седьмую прямую изоклину l. В силу теоремы 8 прямая l не может быть главной изоклиной системы (28) , а значит пересечёт, по крайней мере, четыре прямые изоклины, проходящие через начало координат. Тогда по теореме 6 на l имеется не меньше четырёх состояний равновесия. Это противоречит свойству кубической системы иметь на одной прямой не больше трёх точек покоя.

Из вида правых частей системы (28) следует, что прямая $A_6\bar{x}+B_6\bar{y}+C_6=0$ пересекает хотя бы одну из прямых: $A_4\bar{x}+B_4\bar{y}=0$, $A_5\bar{x}+B_5\bar{y}=0$. Следовательно, в качестве линейных частных интегралов системы (28) могут быть разве что одна изоклина бесконечности и две изоклины нуля, причём последние обязательно параллельны.

Пример 19. Дифференциальная система $\frac{dx}{dt}=x(y-3x)(y+5x)$, $\frac{dy}{dt}=y(y+4)(y+x)$ имеет всего шесть прямых изоклин, из которых пять проходят через точку (0,0). Интегральными прямыми дифференциального уравнения траекторий данной системы являются прямые: $x=0$, $y=0$, $y=-4$.

Теорема 13. Пусть в условиях теоремы 10 множество прямых изоклин, проходящих через точку (0,0), разбито на непересекающиеся подмножества способом г). Тогда система (1) имеет ровно пять прямых изоклин, а число её линейных частных интегралов не более трёх.

Доказательство. В силу теоремы 5 системе (1) придадим вид:

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=(A_1\bar{x}+B_1\bar{y})(A_2\bar{x}+B_2\bar{y})(A_3\bar{x}+B_3\bar{y}),\ \frac{d\bar{y}}{dt}=(A_4\bar{x}+B_4\bar{y})Q_2(\bar{x},\bar{y}) \qquad (29)$$

где $Q_2(0,0)=0$. Кроме прямых $l_i: A_i\bar{x}+B_i\bar{y}=0,\ i=\overline{1,4}$ система (29) имеет ещё одну прямую изоклину l_5, проходящую через (0,0). Поэтому любая другая прямая изоклина этой системы не может проходить через начало координат согласно теореме 2.

Предположим, что система (29) имеет шестую прямую изоклину l_6. Тогда l_6 не параллельна ни одной из трёх изоклин бесконечности: l_1, l_2, l_3 и пересекает, по крайней мере, одну из изоклин l_4 и l_5. Здесь могут представиться два случая: 1) l_6 пересекает l_4 и l_5;

2) l_6 пересекает только одну из прямых l_4 и l_5.

В случае 1) на прямой l_6 система имеет не менее четырёх состояний равновесия. В случае 2) l_6 параллельна одной из двух изоклин l_4 и l_5. На параллельных прямых изоклинах система не может индуцировать различные направления, ибо в противном случае путём преобразования (18) систему (29) можно привести к виду, где правые части не взаимно просты. Таким образом, в случае 2) либо на прямой l_6 четыре состояния равновесия, либо на ней три состояния равновесия, но на прямых: l_4, l_5, l_6 системой (29) индуцировано одно и то же направление. Последнее противоречит условию теоремы относительно разбиения множества M на непересекающиеся подмножества. Тем самым доказано, что система (1) имеет только пять прямых изоклин, проходящих через начало координат.

Из вида правых частей системы (29) следует, что она может иметь в качестве частного линейного интеграла одну изоклину бесконечности, одну изоклину нуля и, быть может, одну прямую, проходящую через начало координат.

Пример 20. Дифференциальная система

$$\frac{dx}{dt} = x(3x-y)(5x+y)\,,\ \frac{dy}{dt} = y(x-y+5x^2+6xy+y^2)$$

удовлетворяет условиям теоремы 13 и имеет пять изоклин: $x=0$, $y=3x$, $y=-5x$, $y=0$, $y=x$, из которых три: $x=0$, $y=0$, $y=x$ - частные интегралы.

Аналогичными рассуждениями можно доказать справедливость следующих двух утверждений.

<u>Теорема 14.</u> Пусть в условиях теоремы 10 множество прямых изоклин, проходящих через точку (0,0), разбито способом д). Тогда система (1) имеет ровно шесть прямых изоклин, и число её линейных частных интегралов не превосходит четырёх.

Пример 21. Через начало координат системы

$$\frac{dx}{dt} = x(x+1)(x+y)\,,\ \frac{dy}{dt} = y(x+y+7x^2-2xy-3y^2)$$

проходят пять прямых изоклин: $x=0$, $y+x=0$, $y=0$, $y-x=0$, $y+2x=0$, эта система имеет четыре частных интеграла: $x=0$, $x+1=0$, $y=0$, $y-x=0$, $y+2x=0$.

<u>Теорема 15.</u> Пусть в условиях теоремы 10 множество прямых изоклин, проходящих через точку (0,0), разбито на непересекающиеся подмножества способом б). Тогда система (1) имеет семь прямых изоклин, и число её линейных частных интегралов не превосходит пяти.

Пример 22. Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x(x+1)(y+x)\,,\ \frac{dy}{dt} = y(y+1)(5x-3y)$$

имеет семь прямых изоклин: $x=0$, $y+x=0$, $y=0$, $5x-3y=0$, $y-x=0$, $x+1=0$, $y+1=0$, в числе которых пять: $x=0$, $y=0$, $x+1=0$, $y+1=0, y-x=0$ - состоят из траекторий данной системы.

Естественно возникает вопрос о наибольшем числе прямых изоклин системы дифференциальных уравнений (1). В силу упомянутой работы [4] существуют кубические дифференциальные системы с восемью прямыми изоклинами. Покажем, что их число не более десяти.

<u>Теорема 16.</u> Если на двух прямых l_1 и l_2 расположены шесть состояний равновесия системы (1), то эта система индуцирует на указанных прямых одно и то же направление.

Доказательство. Так как кривая третьего порядка пересекает прямую не более чем в трёх точках, то каждая прямая l_1 и l_2 проходит через три особые точки системы (1), а, следовательно, является её изоклиной. Допустим, что

$$\left(\frac{Q_3(x,y)}{P_3(x,y)}\right)_{(x,y)\in l_1}=m_1,\ \left(\frac{Q_3(x,y)}{P_3(x,y)}\right)_{(x,y)\in l_2}=m_2,\text{ где } m_1\neq m_2.$$

Тогда согласно теореме 5 прямую $l_1\,(l_2)$ можно перевести в изоклину нуля (бесконечности) или бесконечности (нуля), а значит системе (1) можно придать вид:

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=(A_1\bar{x}+B_1\bar{y}+C_1)P_2(\bar{x},\bar{y}),\ \frac{d\bar{y}}{dt}=(A_2\bar{x}+B_2\bar{y}+C_2)Q_2(\bar{x},\bar{y}) \tag{30}$$

Пусть образ прямой $l_1\,(l_2)$ в преобразовании (18) есть прямая: $\bar{l}_1$: $A_1\bar{x}+B_1\bar{y}+C_1=0$ ($\bar{l}_2$: $A_2\bar{x}+B_2\bar{y}+C_2=0$). Так как $m_1\neq m_2$, то прямые l_1 и l_2 не пересекаются в особой точке (в противном случае число состояний равновесия на этих прямых было бы не больше пяти). Следовательно, $\bar{l}_1$ и $\bar{l}_2$ тоже не пересекаются в особой точке, и число состояний равновесия системы (30) на прямых $\bar{l}_1$ и $\bar{l}_2$ не превосходит четырёх. Пришли к противоречию с тем, что сумма особых точек на обеих прямых равна шести. Теорема доказана.

Теорема 17. Если система (1) имеет девять состояний равновесия, то любая её прямая изоклина проходит через три состояния равновесия.

Доказательство. Пусть система (1) имеет девять состояний равновесия, и $l-$ её прямая изоклина. Тогда согласно теореме 5 преобразуем (1) к виду:

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=(A\bar{x}+B\bar{y}+C)\overline{P_2}(\bar{x},\bar{y}),\ \frac{d\bar{y}}{dt}=\overline{Q}_3(\bar{x},\bar{y}) \tag{31}$$

Пусть $\bar{l}-$ образ l в преобразовании (18), и $\bar{l}$ задаётся уравнением $A\bar{x}+B\bar{y}+C=0$. На прямой $\bar{l}$ система (31) имеет не более трёх особых точек ($\overline{Q}_3$ - многочлен третьей степени). Вместе с тем на $\bar{l}$ не менее трёх особых точек системы (31), так как в противном случае кривая второго порядка $\overline{P}_2=0$ и третьего порядка $\overline{Q}_3=0$ пересекались бы не менее чем в семи точках, чего быть не может в силу взаимной простоты правых частей (31).
Теорема доказана.

Если система (1), не являясь однородной, имеет хотя бы одну особую точку, то, очевидно, она обладает наибольшим числом прямых изоклин при наличии максимального числа особых точек этой системы.

Следует заметить, что система (1) при условии отсутствия у неё особых точек может иметь бесконечное множество прямых изоклин.

Пример 23. Система дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt}=f_3(x),\ \frac{dy}{dt}=q_3(x)$ с взаимно простыми вещественными многочленами третьей степени в правых частях имеет в качестве изоклины любую прямую $x=c,\ c\in R$.

Теорема 18. Если система (1) имеет девять состояний равновесия и не менее девяти прямых изоклин, то множество M всех этих прямых может быть разбито на непересекающиеся непустые подмножества только одним из двух способов:

а) $M=\bigcup\limits_{i=1}^{3}M_i$, б) $M=\bigcup\limits_{i=1}^{4}M_i$, где $M_1=\{l_1^{m_1},l_2^{m_1},l_3^{m_1}\}$, $M_2=\{l_4^{m_2},l_5^{m_2},l_6^{m_2}\}$, $M_3=\{l_7^{m_3},l_8^{m_3},l_9^{m_3}\}$, m_1,m_2,m_3- попарно различные числа, обозначающие направления, индуцированные системой (1) на прямых из множеств M_1,M_2,M_3, соответственно.

Доказательство. Предположим, что множество M разбито менее чем на три непересекающихся подмножества. Тогда в каждом из таких подмножеств будет не меньше четырёх прямых изоклин, что противоречит теореме 8.

Покажем, что число подмножеств множества M не более четырёх. Пусть вопреки утверждению теоремы множество M разбито на пять непересекающихся подмножеств, т.е. $M=\bigcup_{i=1}^{5}M_i$. Рассмотрим произвольную прямую $l_s^{m_5}\in M_5$, $m_s\neq m_j$, $j=\overline{1,4}$, m_j – направления, индуцированные системой (1) на прямых из множеств M_j. Заметим, что $l_s^{m_5}$ не параллельна ни одной из прямых, принадлежащих множеству $\bigcup_{j=1}^{4}M_j$, так как в противном случае согласно теоремам 16 и 17 изоклина $l_s^{m_5}$ принадлежала бы одному из множеств M_j, $j\in\{1,2,3,4\}$. Это невозможно в силу того, что подмножества множества M не пересекаются. Отсюда по теореме 6 на прямой $l_s^{m_5}$ система (1) имеет не менее четырёх состояний равновесия, чего быть не может для кубической дифференциальной системы. Тем самым доказано, что множество M может быть разбито либо на три, либо на четыре непересекающихся подмножества. Отсюда в случае, когда система (1) имеет ровно девять прямых изоклин, то логически могут представиться следующие возможности:

1) M разбито на три подмножества, в каждом из которых три прямые;

2) M разбито на четыре подмножества, в том числе два трёхэлементных, одно двухэлементное и одно одноэлементное множество;

3) M разбито на четыре подмножества, в том числе одно трёхэлементное и три двухэлементных множества.

Случаи 2) и 3) не реализуются, так как в каждом из них по теореме 5 систему (1) можно привести к виду:

$$\frac{d\overline{x}}{dt}=\prod_{i=1}^{3}(A_i\overline{x}+B_i\overline{y}+C_i),\ \frac{d\overline{y}}{dt}=(A_4\overline{x}+B_4\overline{y}+C_4)(A_5\overline{x}+B_5\overline{y}+C_5)^2 \qquad (32)$$

Но система (32) имеет не более шести особых точек, что противоречит условию теоремы.
Если же число прямых изоклин не менее десяти, то среди непересекающихся подмножеств множества M имеются три трёхэлементных подмножества, ибо в противном случае мы обязательно имели бы либо не менее одного двухэлементного подмножества, либо число подмножеств было бы больше четырёх. И в том, и в другом случае приходим к противоречию с доказанным выше. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы непосредственно следует

<u>Теорема 19.</u> Если система (1) имеет девять состояний равновесия и десять прямых изоклин, то множество M этих изоклин может быть разбито на непересекающиеся подмножества способом б) предыдущей теоремы, где M_4 - одноэлементное множество.

<u>Теорема 20.</u> Дифференциальная система (1) имеет не более десяти прямых изоклин.

Доказательство. Предположим, что число прямых изоклин системы (1) более десяти. Тогда в силу теоремы 18 эта система имеет двенадцать прямых изоклин. Множество M всех этих изоклин при этом разбито на четыре трёхэлементных непересекающихся подмножества. Поэтому через каждую особую точку системы проходят четыре прямые изоклины по одной из каждого множества M_i, $i=\overline{1,4}$. Пусть $A-$ точка покоя системы (1), через которую проходят три прямые: $l_f^{m_1}, l_g^{m_2}, l_h^{m_3}$, принадлежащие множествам: M_1, M_2, M_3, соответственно. Пусть эти прямые пересекают прямую $l_d^{m_4}\in M_4$ в трёх точках B,C,D, соответственно. Определённости ради считаем, что C расположена между B и D. Так как через каждую точку покоя системы проходят четыре прямые изоклины, то через вершину $B(D)$ треугольника ABD проходят ещё две прямые изоклины (по одной из множеств M_2 и M_3 (M_1 и M_2)). Некоторая прямая $l_k^{m_4}\in M_4$ проходит также через точку A и непременно пересекает указанные четыре изоклины, проходящие через B и D. Таким образом, на прямой $l_k^{m_4}$ система (1) имеет, по меньшей мере, пять особых точек, что невозможно для кубической системы. Теорема доказана.

Пример 24. Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x(x+2y-3)(2x-y-2), \quad \frac{dy}{dt} = (y+x-1)(2x+3y-6)(y-x)$$

имеет девять прямых изоклин, в том числе шесть главных изоклин, а также прямые: $y=0$, $y=1$, $y=2$, на которых эта система индуцирует направление $m=-1$. Кроме того, система имеет девять состояний равновесия, через каждую из которых проходят три прямые изоклины.

Пример 25. На прямых: $y=0$, $y=1$, $y=2$ система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = (y-x)(y-x-2)(x+2y-2), \quad \frac{dy}{dt} = (y+x)(y+x-2)(x-2y+2) \qquad (33)$$

индуцирует направление $m_1=1$, а на прямой $x=0-$ направление $m_2=-1$. Кроме того, система (33) имеет шесть главных изоклин и является примером кубической дифференциальной системы с десятью прямыми изоклинами.

Из теорем 18 и 20 и двух последних примеров следует важное для теории кривых третьего порядка утверждение.

Теорема 21. В пучке кривых третьего порядка с девятью базисными точками число кривых, распадающихся на три прямые, не более трёх. Если таких кривых в пучке три, то разве что ещё одна кривая пучка распадается на прямую и кривую второго порядка.

Литература

1. *Шахова Л.В.* О прямых изоклинах // Труды Самаркандского гос. ун-та им. Алишера Навои.- Самарканд: Изд-во гос. ун-та,1961.-Вып. №144. - С.93-105.

2. *Тун-Цзинь-Чжу*. Расположение предельных циклов системы $\frac{dx}{dt} = X_2(x,y), \frac{dy}{dt} = Y_2(x,y)$ // Периодический сборник переводов иностранных статей: Математика.-1962.- Т.6; №6.- С.150-168.

3. *Горних М.И., Ушхо Д.С.* Прямые изоклины и канонические формы квадратичных дифференциальных систем на плоскости // Труды ФОРА.- Майкоп: Изд-во Адыгейского гос. ун-та, 2002.-№7.- С.70-80.

4. *Любимова Р.А.* Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми // Дифференциальные и интегральные уравнения. - Горький: Изд-во гос. ун-та, 1977.- Вып. 1.- С. 19-22.

On straight isoclinal lines of cubic differential system

D.S. Ushkho

The paper proves that there can be not more than 5 straight isoclinal lines passing through a singular point of the cubic differential system. The general number of straight isoclinal lines is inferior or equal to then. The knowledge of the number of straight isoclinal lines passing through a singular point of the cubic differential system allows to state the value of the number its linear partial integrals. An example of concrete systems with ten straight isoclinal lines is considered.

