2003 г. **№8**

Т р у д ы   Ф О Р А

π–СИММЕТРИЧНЫЕ МНОЖЕСТВА И ФУНКЦИИ

А.Б. Шишкин

Армавирский государственный педагогический институт, г. Армавир

В статье вводится понятие π–симметричной функции, где π — фиксированное собственное голоморфное отображение. Изучена возможность разложения аналитической функции в конечную комбинацию степеней независимой переменной с π–симметричными коэффициентами.

1. Собственные отображения. Непрерывное отображение $\pi : X \to Y$ топологических пространств называется *собственным*, если прообраз всякого компакта $K \subset Y$ является компактом в X. Рассмотрим несколько используемых ниже свойств собственных отображений.

Свойство 1. *Непрерывное отображение $\pi : X \to Y$ локально компактных хаусдорфовых пространств является собственным тогда и только тогда, когда оно замкнуто (образ любого замкнутого множества замкнут) и компактно (прообразы одноточечных множеств компактны)* [1, Гл. III, 4.3, предложение 4.22].

Свойство 2. *Если $\pi : X \to Y$– собственное отображение локально компактных хаусдорфовых пространств, то для любого $A \subseteq Y$ сужение π на $\pi^{-1}(A)$ является собственным отображением $\pi^{-1}(A) \to A$* [6, предложение 3.7.4].

Свойство 3. *Пусть $X \overset{\pi_1}{\to} Y \overset{\pi_2}{\to} Z$– непрерывные отображения локально компактных хаусдорфовых пространств, причем $\pi = \pi_2 \circ \pi_1$ собственное. Тогда π_1 и $\pi_2|_{\pi_1(X)}$– тоже собственные отображения* [6, предложение 3.7.10].

Свойство 4. *Декартово произведение собственных отображений локально компактных хаусдорфовых пространств является собственным отображением* [6, теорема 3.7.7].

Пусть G — открытое множество в $\mathbb{C}^n$, G' — открытое множество в $\mathbb{C}^m$.

Свойство 5. *Собственное голоморфное отображение $\pi : G \to G'$ является конечным (прообразы одноточечных множеств конечны), а при $n = m$– открытым (образы открытых множеств открыты) и сюръективным* [4, 15.1.3, 15.1.6].

Свойство 6 (теорема Реммерта). *Образ аналитического множества $A \subseteq G$ при голоморфном собственном отображении $\pi : G \to G'$ является аналитическим множеством в G' той же размерности* [5, 5.8, теорема].

Пусть G, G' — открытые множества в $\mathbb{C}^n$. Упорядоченный набор (G, π, G') называется *аналитическим накрытием*, если выполнены следующие условия:

1) $\pi : G \to G'$ — собственное непрерывное отображение;

2) существует локально устранимое множество $\sigma \subset G'$, такое что $G \setminus \pi^{-1}(\sigma)$ связно и всюду плотно в G;

3) сужение π на $G \setminus \pi^{-1}(\sigma)$ является локально биголоморфным p–листным накрытием над $G' \setminus \sigma$.

Минимальное множество σ, с указанными свойствами, называется *критическим* множеством аналитического накрытия. Точки $\xi \in G' \setminus \sigma$ называются *обыкновенными*, а соответствующие π–слои – *простыми*. Простые π–слои состоят из p различных точек. *Упорядочением* простого слоя $\tilde{\xi} = \pi^{-1}(\xi)$ называется произвольное взаимно однозначное отображение $\{0, \dots, p-1\} \to \tilde{\xi}$. Упорядочение простого π–слоя удобно записывать в виде конечной последовательности $z^{(0)}, \dots, z^{(p-1)}$. Элементы этой последовательности зависят от точки $\xi = \pi(z^{(k)}) \in G' \setminus \sigma$. Причем отображения $z^{(k)}(\xi) = \pi^{-1}(\xi)$, $k = 0, .., p-1$, голоморфны в окрестности каждой обыкновенной точки ξ (и зависят от выбора этой точки).

Свойство 7. *Если $\pi : G \to G'$ - собственное голоморфное отображение, то набор (G, π, G') является аналитическим накрытием* [2, Гл. III, В, теорема 21].

Пусть G, G' — открытые множества в $\mathbb{C}$, $\pi : G \to G'$ — собственное голоморфное отображение, σ — критическое множество аналитического накрытия (G, π, G'), p — число элементов в простых π–слоях, $\Phi = \Phi(z_0, \ldots, z_{p-1})$ — произвольная функция от p переменных $z_0, ..., z_{p-1}$, голоморфная по каждой из этих переменных в G и симметричная по совокупности переменных $z_0, \ldots, z_{p-1}$. Определим функцию f на множестве $G \setminus \pi^{-1}(\sigma)$ по следующему правилу:

$$f(z) = \Phi(z_0, \ldots, z_{p-1}),$$

где $z_0, \ldots, z_{p-1}$ — произвольное упорядочение простого π–слоя, содержащего z. Симметричность функции Φ означает, что определение корректно.

Предложение 1. *Функция f, определенная с помощью соотношения $f(z) = \Phi(z_0, \ldots, z_{p-1})$, допускает однозначное продолжение до функции голоморфной в G и представляется в G в виде*

$$f = F \circ \pi, \tag{1}$$

где F — некоторая функция, голоморфная в G'.

Доказательство. Обозначим $z_0(\xi), \ldots, z_{p-1}(\xi)$ элементы простого π–слоя $\pi^{-1}(\xi)$, содержащего z, и определим функцию $F : G' \backslash \sigma \to \mathbb{C}$ по следующему правилу $F(\xi) = \Phi(z_0(\xi), \ldots, z_{p-1}(\xi))$. Пусть ξ_0 — обыкновенная точка аналитического накрытия (G, π, G'). Отображения $z_0(\xi), \ldots, z_{p-1}(\xi)$ голоморфны в окрестности точки ξ_0. Это означает, что функция $F(\xi)$ голоморфна в окрестности каждой обыкновенной точки. Таким образом, функция $F(\xi)$ голоморфна на множестве $G' \setminus \sigma$. Убедимся, что функция F допускает однозначное продолжение до функции, голоморфной в G'. Пусть $\xi_0 \in \sigma$, $d \subset G'$ — компактная окрестность точки ξ_0. Окрестность d выбираем так, чтобы выполнялось включение $\xi_0 \in \operatorname{int} d$. Так как отображение π собственное, то множество$K = \pi^{-1}(d)$ — компакт в G. При $\xi \in (\operatorname{int} d) \setminus \sigma$ выполняется включение $(z_0(\xi), \ldots, z_{p-1}(\xi)) \in K^p$. По теореме Хартогса функция $\Phi(z_0, \ldots, z_{p-1})$ непрерывна наG^p по переменной $(z_0, \ldots, z_{p-1}) \in G^p$ и, следовательно, ограничена на K^p. Это означает, в частности, что функция F ограничена на множестве $(\operatorname{int} d) \setminus \sigma$. Таким образом, функция F локально ограничена на G'. Множество σ является устранимым. Следовательно, F допускает однозначное продолжение до функции, голоморфной в G'. Осталось заметить, что$f(z) = F(\pi(z))$ на $G \setminus \pi^{-1}(\sigma)$. Значит, в силу непрерывностиF имеем $f = F \circ \pi$ на G. Предложение доказано.

Пусть $G = G_1 \times \ldots \times G_n$, $G' = G'_1 \times \ldots \times G'_n$, G_i, G'_i — открытые множества в $\mathbb{C}$; $\pi : G \to G'$ — декартово произведение собственных голоморфных отображений $\pi_i : G_i \to G'_i$, $i = 1, \ldots, n$. По свойству 4 собственных отображений, отображение $\pi : G \to G'$ является собственным. Следовательно, (G, π, G') — аналитическое накрытие. π–слой $\pi^{-1}(\pi(z_1, \ldots, z_n))$ представляет собой декартово произведение π_i–слоев $\pi_1^{-1}(\pi_1(z_1)), \ldots, \pi_n^{-1}(\pi_n(z_n))$. Число элементов p в простых слоях этого накрытия равно произведению $p_1 \cdots p_n$, где p_i — число элементов в простых слоях аналитического накрытия (G_i, π_i, G'_i).

Замечание. Предложение 1 сохраняет свою силу и по отношению к функции f, определяемой по правилу

$$f(z_1, ..., z_n) = \Phi(z_1^{(1)}, \ldots, z_1^{(p_1)}, \ldots, z_n^{(1)}, \ldots, z_n^{(p_n)}),$$

где $z_i^{(1)}, \ldots, z_i^{(p_i)}$ — произвольное упорядочение π_i–слоя $\pi^{-1}(\pi(z_i))$, Φ — произвольная голоморфная на множестве $G_1^{p_1} \times \ldots \times G_n^{p_n}$ функция, симметричная по совокупностям переменных $z_i^{(1)}, \ldots, z_i^{(p_i)}$, $\quad i = 1, \ldots, n$.

Действительно, по предложению 1 имеем $f(z_1, ..., z_n) = F(\pi_1(z_1), ..., \pi_n(z_n)) = (F \circ \pi)(z_1, ..., z_n)$, где F — некоторая голоморфная на полиобласти G' функция. Таким образом, определенная нами функция $f(z_1, ..., z_n)$ представляется в полиобласти G в виде (1).

2. π–симметричные множества. Пусть G — открытое множество в $\mathbb{C}$, G' — открытое множество в$\mathbb{C}^q$, $\pi : G \to G'$ — собственное голоморфное отображение. Множество $U \subseteq G$ будем называть *π–симметричным*, если найдется $U' \subseteq G'$ такое, что $U = \pi^{-1}(U')$. π–симметричные множества можно охарактеризовать и как подмножества G, для которых выполняется соотношение $U = \pi^{-1}(\pi(U))$.

Наделим множество $\Lambda = \pi(G)$ топологией индуцированной из $\mathbb{C}^q$ и рассмотрим некоторые простые, но часто используемые в дальнейшем, свойства π–симметричных множеств.

Свойство 1. *Для любого открытого в G множества g, включающего отдельный π–слой $\tilde{\lambda} = \pi^{-1}(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, и любого открытого в G' множества $g' \ni \lambda$ найдутся открытое множество*

$V \subseteq \Lambda$ *и открытое π–симметричное множество* $U \subseteq G$ *такие, что*

$$U = \pi^{-1}(V), \quad V = \pi(U), \quad \tilde{\lambda} \subset U \subseteq g, \quad \lambda \in V \subset g' \cap \Lambda.$$

Доказательство. По свойству 1 собственных отображений отображение $\pi : G \to \Lambda$ является замкнутым отображением. Значит, множество $\pi(G \setminus g)$ замкнуто в Λ, а множество $V = (\Lambda \setminus \pi(G \setminus g)) \cap g'$ открыто в Λ. Отсюда вытекает, что $U = (\pi)^{-1}(V)$ — открытое π–симметричное множество. При этом $V = \pi(U)$.Так как π–слой$\tilde{\lambda}$ лежит в g, то $\pi(\tilde{\lambda}) \in V$, значит, $\tilde{\lambda} \subset U$. Кроме того, $U \subseteq U'$. Действительно, если $z \in U$, то $\pi(z) \in V$. Следовательно, $\pi(z) \notin \pi(G \setminus g)$, то есть $z \notin G \setminus g$. Значит, $z \in g$. Свойство доказано.

Свойство 2. *Для любого открытого π–симметричного множества $U \subseteq G$ найдется открытое в Λ множество V такое, что*

$$U = \pi^{-1}(V), \quad V = \pi(U).$$

Доказательство. Множество U является π–симметричным, значит, вместе с каждой точкой z оно включает π–слой $\tilde{\lambda} = \pi^{-1}(\pi(z))$. Из свойства 1 π–симметричных множеств вытекает, что множество U можно представить в виде $U = \bigcup\limits_{\tilde{\lambda} \subset U} U_{\tilde{\lambda}}$, где $U_{\tilde{\lambda}} = \pi^{-1}(V_{\tilde{\lambda}})$, $V_{\tilde{\lambda}} = \pi(U_{\tilde{\lambda}})$ — открыты в Λ. Значит,

$$U = \bigcup_{\tilde{\lambda} \subset U} \pi^{-1}(V_{\tilde{\lambda}}) = \pi^{-1}\left(\bigcup_{\tilde{\lambda} \subset U} V_{\tilde{\lambda}}\right) = \pi^{-1}(V).$$

При этом множество

$$V = \bigcup_{\tilde{\lambda} \subset U} V_{\tilde{\lambda}} = \bigcup_{\tilde{\lambda} \subset U} \pi(U_{\tilde{\lambda}}) = \pi\left(\bigcup_{\tilde{\lambda} \subset U} U_{\tilde{\lambda}}\right) = \pi(U)$$

открыто в Λ. Свойство доказано.

Свойство 3. *Открытые π–симметричные множества в G образуют топологию.*

Доказательство. Из свойства 2 открытых π–симметричных множеств вытекает, что эти множества можно охарактеризовать как π–прообразы открытых в Λ множеств. Все остальное следует из общих свойств отображений:

$$\pi^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} V_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha} \pi^{-1}(V_{\alpha}), \quad \pi^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} V_{\alpha}\right) = \bigcap_{\alpha} \pi^{-1}(V_{\alpha}).$$

Свойство доказано.

Пусть $z \in G$, $\lambda = \pi(z)$, $\tilde{\lambda} = \pi^{-1}(\lambda)$. Зафиксируем произвольную функцию $R : G' \to \mathbb{C}$, голоморфную в окрестности точки λ, и рассмотрим композицию $r = R \circ \pi$. Функция r голоморфна в окрестности π–слоя $\tilde{\lambda}$. При этом r–слой$r^{-1}(r(z))$ включает π–слой $\tilde{\lambda}$ и не зависит от выбора точки $z \in \tilde{\lambda}$.

Свойство 4. *Пусть $\lambda \in \Lambda, z \in \tilde{\lambda}$. Для любого открытого в G множества U', включающего r–слой $r^{-1}(r(z))$, найдется открытое относительно компактное π–симметричное множество $U \subseteq U'$такое, что $U \cap r^{-1}(r(z)) = \tilde{\lambda}$и сужение r на Uявляется собственным отображением в некоторый открытый круг $W \subset \mathbb{C}$.*

Доказательство. r–слой $r^{-1}(r(z))$ конечен. Подберем открытое относительно компактное U'' так, чтобы выполнялись соотношения:

$$U'' \subseteq U', \quad U'' \cap r^{-1}(r(z)) = \tilde{\lambda}, \quad \partial U'' \cap r^{-1}(r(z)) = \emptyset.$$

По свойству 1 найдется такое относительно компактное открытое π–симметричное множество $U_{\lambda} \supset \tilde{\lambda}$, что

$$U_{\lambda} \subseteq U'' \subseteq U', U_{\lambda} \cap r^{-1}(r(z)) = \tilde{\lambda}, \partial U_{\lambda} \cap r^{-1}(r(z)) = \emptyset.$$

Граница ∂U_λ компактна и $r(z) \notin r(\partial U_\lambda)$, значит, существует такой открытый круг $W \subset \mathbb{C}$, с центром в точке $r(z)$, что $r(\partial U_\lambda) \cap W = \emptyset$. Следовательно, $\partial U_\lambda \cap r^{-1}(W) = \emptyset$. Рассмотрим множество $U = U_\lambda \cap r^{-1}(W)$. Если множество $d \subset W$ компактно, то множество $U \cap r^{-1}(d) = \overline{U} \cap r^{-1}(d)$ также компактно; таким образом, отображение$r : U \to W$ собственное. При этом множество $r^{-1}(W) = \pi^{-1}(R^{-1}(W))$ является открытым π–симметричным множеством, значит, таковым является и множество U.

3. π–симметричные функции. Функцию φ голоморфную на открытом π–симметричном множестве $U \subseteq G$ будем называть *π–симметричной*, если найдется локально голоморфная на $\pi(U)$ функция Φ такая, что φ представляется в виде $\Phi \circ \pi$. Это определение носит локальный характер. Другими словами, функция φ голоморфная на открытом π–симметричном множестве $U \subseteq G$ — π–симметрична, если для любой точки $z \in U$ существует открытая π–симметричная окрестность $V \subseteq U$ этой точки, такая, что сужение φ на V представляется в виде $\Phi \circ \pi$, где Φ — голоморфная в некоторой окрестности множества $\pi(V)$ функция.

Топологию в G, образованную открытыми π–симметричными множествами обозначим τ_π. Пусть $U \in \tau_\pi$; $O(U)$ — кольцо голоморфных на U функций; $O_\pi(U)$ — множество всех π–симметричных на U функций. Очевидно, что $O_\pi(U)$ — подкольцо $O(U)$. Рассматриваем $O(U)$ как модуль над кольцом $O_\pi(U)$.

Совокупность $\{O_\pi(U)\}$, $U \in \tau_\pi$, вместе с гомоморфизмами сужения $\rho_{U,U'} : O_\pi(U') \to O_\pi(U)$, $U \subseteq U'$, образует предпучок колец над (G, τ_π). Аналогично, совокупность $\{O(U)\}$, $U \in \tau_\pi$, вместе с гомоморфизмами сужения $\sigma_{U,U'} : O(U') \to O(U)$, $U \subseteq U'$, образует предпучок абелевых групп над (G, τ_π) [2, Гл. IV, A]. Легко убедиться, что отображение $\sigma_{U,U'}$, $U \subseteq U'$, является гомоморфизмом $O_\pi(U')$–модуля $O(U')$ в $O_\pi(U)$–модуль $O(U)$, следовательно, предпучок абелевых групп $\{O(U)\}$, $U \in \tau_\pi$, является предпучком модулей над предпучком колец $\{O_\pi(U)\}$, $U \in \tau_\pi$.

Выберем $\lambda \in \Lambda$. Пусть $\tilde\lambda = \pi^{-1}(\lambda)$. Слой предпучка $\{O(U)\}$, $U \in \tau_\pi$, ассоциированный с π–слоем $\tilde\lambda$ (– индуктивный предел групп $O(U)$, $\tilde\lambda \subset U \in \tau_\pi$, относительно гомоморфизмов $\sigma_{U,U'}$, $U \subseteq U'$), обозначим символом $O(\tilde\lambda)$. Аналогично, слой предпучка $\{O_\pi(U)\}$, $U \in \tau_\pi$, ассоциированный сπ–слоем $\tilde\lambda$ (– индуктивный предел колец $O_\pi(U)$, $\tilde\lambda \subset U \in \tau_\pi$, относительно гомоморфизмов $\rho_{U,U'}$, $U \subseteq U'$), обозначим символом $O_\pi(\tilde\lambda)$. Слой$O_\pi(\tilde\lambda)$ обладает структурой кольца, а слой$O(\tilde\lambda)$ — структурой модуля над этим кольцом. Элементы $O(\tilde\lambda)$ называются ростками функций, голоморфных в π–симметричных окрестностях $\tilde\lambda$, а элементы $O_\pi(\tilde\lambda)$ — ростками π–симметричных функций, голоморфных в π–симметричных окрестностях $\tilde\lambda$.

Выделение класса π–симметричных функций связано со специальными представлениями функций, голоморфных в комплексных областях. Эти представления играют ключевую роль в ряде вопросов, связанных со спектральным синтезом в комплексной плоскости и локальным описанием аналитических функций.

4. Представление аналитических функций. Предположим, что $q = 1$. Другими словами, пусть G, G'– открытые множества в $\mathbb{C}$, $\pi : G \to G'$ — некоторое собственное голоморфное отображение. Выберем $\varphi_0, \ldots, \varphi_{p-1} \in O(G)$ и рассмотрим выражение $\Phi = \frac{F}{\Delta}$, где

$$F = \begin{vmatrix} \varphi_0(z_0) & \ldots & \varphi_{p-1}(z_0) \\ . & . & . \\ \varphi_0(z_{p-1}) & \ldots & \varphi_{p-1}(z_{p-1}) \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & z_0 & \ldots & z_0^{p-1} \\ . & . & . & . \\ 1 & z_{p-1} & \ldots & z_{p-1}^{p-1} \end{vmatrix}.$$

Это выражение имеет смысл для любой системы попарно различных точек $z_0, ..., z_{p-1} \in G$, так как определитель Вандермонда Δ для таких систем отличен от нуля. Пусть $G^p = G \times \ldots \times G$ — декартово произведение p копий G. Очевидно, что функция $\Phi = \Phi(z_0, \ldots, z_{p-1})$ голоморфна на открытом подмножестве G^p, состоящем из всех точек $(z_0, \ldots, z_{p-1}) \in G^p$, с попарно различными координатами. Более того, в работе [3, предложение 2.1] доказано следующее предложение

Предложение 2. *Функция $\Phi = \Phi(z_0, \ldots, z_{p-1})$ допускает однозначное продолжение до функции голоморфной в G^p.*

По свойству 7 собственных отображений набор (G, π, G') является аналитическим накрытием. Пусть σ — критическое множество этого накрытия, $G_* = G \setminus \pi^{-1}(\sigma)$, $\lambda \in G' \setminus \sigma$. Выберем произвольное упорядочение $z_0, \ldots, z_{p-1}$ простого π–слоя $\pi^{-1}(\pi(z))$ и определим функцию

$f : G_* \to \mathbb{C}$, полагая

$$f(z) = \Phi(z_0, \dots, z_{p-1}).$$

Из предложений 1 и 2 вытекает, что функция f, определяемая этим соотношением, допускает однозначное продолжение до π–симметричной наG функции. Это позволяет считать, что f принадлежит $O_\pi(G)$.

Далее сформулируем и докажем основное утверждение настоящего параграфа.

Предложение 3. *Если $\pi : G \to G'$ — собственное голоморфное отображение, то любая функция $f \in O(G)$ единственным образом представляется в виде*

$$f = \sum_{k=0}^{p-1} z^k f_k, f_k \in O_\pi(G). \tag{2}$$

При этом сужение f_k на G_* представляется в виде $\Delta_k(f)/\,\Delta$, где *$\Delta_k(f)$ — определитель, полученный заменой k–го столбца в определителе Δ на столбец из $f(z_0), \dots, f(z_{p-1}), z_0, \dots, z_{p-1}$– произвольное упорядочение простого π–слоя $\tilde{\lambda}$, содержащего z.*

Доказательство. Согласно известным свойствам определителей для любого $z \in G$ имеет место векторное равенство

$$\tilde{f}\Delta = \sum_{k=0}^{p-1} \tilde{z}^k \Delta_k(f),$$

где $\tilde{f} = (f(z_0), .., f(z_{p-1}))$, $\tilde{z}^k = (z_0^k, \dots, z_{p-1}^k)$. Определитель Δ отличен от нуля при $z \in G_*$. Поэтому при $z \in G_*$ справедливо равенство

$$\tilde{f} = \sum_{k=0}^{p-1} \tilde{z}^k f_k, \tag{3}$$

где $f_k = \Delta_k(f)/\,\Delta$. При этом $f_k \in O_\pi(G)$, $k = 0, \dots, p-1$. Очевидно, что соотношения 2 и 3 равносильны. Единственность представления 2 связана с тем, что из векторного соотношения 3

$$\begin{array}{ccccccccc}
f(z_0) & = & f_0(z_0) & + & z_0 f_1(z_0) & + & \dots & + & z_0^{p-1} f_{p-1}(z_0) \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
f(z_{p-1}) & = & f_0(z_{p-1}) & + & z_{p-1} f_1(z_{p-1}) & + & \dots & + & z_{p-1}^{p-1} f_{p-1}(z_{p-1})
\end{array}$$

элементы f_k, $k = 0, \dots, p-1$, определяются по правилу Крамера. Таким образом, предложение доказано.

Из доказанного предложения вытекает, что множество одночленов $1, z, \dots, z^p$ порождает $O_\pi(G)$–модуль $O(G)$. Покажем далее, что локальные$O_\pi(\tilde{\lambda})$–модули $O(\tilde{\lambda})$ обладают аналогичным свойством.

Выберем произвольную точку $\lambda \in G'$. По свойству 1 открытыхπ–симметричных множеств найдется фундаментальная система открытых π–симметричных окрестностей U_j π–слоя $\tilde{\lambda}$, такая что система открытых множеств $V_j = \pi(U_j)$ образует фундаментальную систему окрестностей точки λ. При этом $U_j = \pi(V_j)$. По свойству 2 собственных отображений все сужения $\pi|_{U_j}$ являются собственными голоморфными отображениями. Значит, наборы $(U_j, \pi|_{U_j}, V_j)$ являются аналитическими накрытиями и для них справедлив аналог предложения 3. Это дает возможность сформулировать его в локальной форме.

Предложение 4. *Любой элемент $u \in O(\tilde{\lambda})$ единственным образом представляется в виде:*

$$u = \sum_{k=0}^{p-1} z^k u_k, \quad u_k \in O_\pi(\tilde{\lambda}).$$

Если при этом $\lambda \notin \sigma$, то росток u_k порожден отношением $\Delta_k(f)/\,\Delta$, где *$f \in u$, если же $\lambda \in \sigma$, то росток u_k порожден голоморфным продолжением этого отношения в точки слоя $\tilde{\lambda}$.*

Зафиксируем произвольную функцию $R : \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}$, голоморфную в окрестности точки $\lambda \in \Lambda$, и рассмотрим композицию $r = R \circ \pi$. Функция r голоморфна в окрестности множества

$\tilde{\lambda} = \pi^{-1}(\lambda)$. Поэтому существует окрестность g множества $\tilde{\lambda}$ и окрестность W точки $R(\lambda)$ такие, что $r : g \to W$ — собственное отображение, более того, по свойству 7 собственных голоморфных отображений тройка (g, r, W) является аналитическим накрытием. Пусть m — число точек в простых r–слоях. Для накрытия (g, r, W) справедлив аналог предложения 3.

Предложение 5. *Любая функция $f \in O(g)$ единственным образом представляется в виде*

$$f = \sum_{k=0}^{m-1} z^k f_k, \quad f_k \in O_r(g).$$

При этом сужение f_k на g_* представляется в виде $\Delta_k(f)/\,\Delta$, где *$\Delta_k(f)$ — определитель, полученный заменой k–го столбца в определителе*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & z_0 & \ldots & z_0^{m-1} \\ . & . & . & . \\ 1 & z_{m-1} & \ldots & z_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix}$$

на столбец из $f(z_0), \ldots, f(z_{m-1}), z_0, \ldots, z_{m-1}$ — произвольное упорядочение простого r–слоя, содержащего z.

Совокупность $\{U\}$ всех открытых r–симметричных множеств в g образует топологию τ_r в g, а совокупность $\{O_r(U)\}$ вместе с гомоморфизмами сужения образует предпучок колец над (g, τ_r). Слой этого предпучка в точке $z \in \tilde{\lambda} \subset g$ обозначим $O_r(\tilde{\lambda})$ и сформулируем локальный вариант предложения 5.

Предложение 6. *Любой элемент $u \in O(\tilde{\lambda})$ единственным образом представляется в виде:*

$$u = \sum_{k=0}^{p-1} z^k u_k, \quad u_k \in O_r(\tilde{\lambda}).$$

Если при этом, если λ — обыкновенная точка накрытия (g, r, W), то росток u_k порожден отношением $\Delta_k(f)/\,\Delta$, где *$f \in u$, если же λ — критическая точка накрытия (g, r, W),* то росток *u_k порожден голоморфным продолжением этого отношения в точки слоя $\tilde{\lambda}$.*

Список литературы

1. *Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А.* Общая топология. – М. : Высшая школа, 1979.

2. *Ганнинг Р., Росси Х.* Аналитические функции многих комплексных переменных. – М. : Мир, 1969.

3. *Красичков–Терновский И.Ф.* Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. I. Теорема двойственности // Матем. сб. 1991. – Т. 182, No 11. – С. 1559 - 1588.

4. *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. – М. : Мир, 1984.

5. *Чирка Е.М.* Комплексные аналитические множества. – М. : Наука, 1985.

6. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М. : Мир, 1986. – 751 с.

π-symmetric sets and functions

A.B. Shishkin

The conception of the π-symmetric function is introduced in this article. The π is the fixed holomorphic eigen representation. The decompositions of analytic function in the final combination of degrees independent argument with π- symmetric coefficients are studied.

