

# О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ДВИЖЕНИЯ НАГРЕТЫХ ТВЕРДЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ В ВЯЗКИХ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ГАЗООБРАЗНЫХ СРЕДАХ

Н.В. Малай\*, Н.Н. Миронова†, А.В. Глушак‡

*Белгородский государственный университет, г. Белгород*

Разработан математический метод решения линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса с учетом зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. Используя найденное решение, рассмотрена задача о влиянии нагрева поверхности частицы на силу и скорость ее гравитационного движения. При рассмотрении движения предполагалось, что средняя температура поверхности частицы может существенно отличаться от температуры окружающей ее среды. Численные оценки показали, что нагрев поверхности частицы существенно влияет на силу сопротивления и скорость гравитационного падения. Проведено сравнение с известными данными эксперимента, которое показало расхождение не более 10%, что указывает на правомерность разработанного математического метода.

## I. РЕШЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО ПО СКОРОСТИ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА С УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПЕРЕНОСА ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

**Введение.** Вследствие общей нелинейной природы получить точные решения уравнений гидродинамики не представляется возможным [1–3]. До настоящего времени не увенчались успехом усилия, направленные на разрешение принципиальных вопросов, таких как, например, имеют ли уравнения гидродинамики при дополнительных граничных и начальных условиях единственное решение, насколько удовлетворительно описывают решения этих уравнений реальные течения и др.

Как показано в [1–3], богатейший теоретический и экспериментальный материал накопленный в гидродинамике, по-видимому, недостаточен для строгого математического анализа происходящих в жидкости и газе явлений. Многочисленные парадоксы гидродинамики указывают на то, что до окончательной теории здесь еще далеко. Поэтому исследование линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса позволяет найти пути решения общего уравнения движения вязкой неизотермической газообразной среды.

При рассмотрении многих прикладных задач, связанных с описанием движения отдельных частиц в вязких неизотермических газообразных средах возникает, как правило, вопрос о нахождении полей скорости, температуры, давления и т.д., которые определяются путем решения общего уравнения движения вязкой неизотермической среды. Эти поля необходимы для нахождения действующих на частицы сил, скоростей их упорядоченного движения, определения элементов тепло- и массопереноса.

В произвольной ортогональной криволинейной системе координат  $(x^1, x^2, x^3)$  общая система гидродинамических уравнений для квазистационарного случая включает в себя [3–6]:

— уравнение Навье-Стокса ( $i = 1, 2, 3$ )

$$\rho \left\{ \sum_{k=1}^3 \frac{U_{x^k}}{H_k} \frac{\partial U_{x^i}}{\partial x^k} - \sum_{k=1}^3 \frac{U_{x^k}^2}{H_i H_k} \frac{\partial H_k}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^3 \frac{U_{x^k} U_{x^i}}{H_i H_k} \frac{\partial H_i}{\partial x^k} \right\} =$$

\*Работа выполнена при финансовой поддержке внутренних грантов БелГУ

†Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП ГК № П29

‡Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (контракт № 02.740.11.0613)

$$= \rho F_{x^i} - \frac{1}{H_i} \frac{\partial P}{\partial x^i} + \frac{1}{H_i} \sum_{k=1}^3 \left\{ \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{H_1 H_2 H_3 H_i}{H_k} \sigma_{ik} \right) - \frac{\sigma_{kk}}{H_k} \frac{\partial H_k}{\partial x^i} \right\}, \quad (1.1)$$

— уравнение непрерывности

$$\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{H_1 H_2 H_3}{H_i} \rho U_{x^i} \right) = 0, \quad (1.2)$$

— уравнение конвективной теплопроводности ( $i = 1, 2, 3$ )

$$\rho c_p \left( \sum_{k=1}^3 U_{x^k} \right) \frac{\partial T}{\partial x^i} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{H_1 H_2 H_3}{H_i} \lambda(\rho, T) \frac{\partial T}{\partial x^i} \right), \quad (1.3)$$

где через  $U_{x^i}$ ,  $F_{x^i}$  и  $\sigma_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) обозначены физические составляющие массовой скорости  $\mathbf{U}$ , внешней силы  $\mathbf{F}$  и тензора полных напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} = \mu & \left\{ \frac{1}{H_k} \frac{\partial U_{x^i}}{\partial x^k} + \frac{1}{H_i} \frac{\partial U_{x^k}}{\partial x^i} - \frac{1}{H_i H_k} \left( U_{x^i} \frac{\partial H_i}{\partial x^k} + U_{x^k} \frac{\partial H_k}{\partial x^i} \right) + \right. \\ & \left. + 2\delta_k^i \sum_{n=1}^3 \frac{U_{x^n}}{H_n H_i} \frac{\partial H_i}{\partial x^n} - \frac{2}{3} \delta_k^i \sum_{n=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^n} \left( \frac{H_1 H_2 H_3}{H_n} U_{x^n} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$H_i(x)$  — коэффициенты Ламэ,  $P$ ,  $T$ ,  $\rho$  — давление, температура и плотность вязкой среды,  $c_p$ ,  $n$ ,  $m$ ,  $\mu$  и  $\lambda$  — соответственно, удельная теплоемкость при постоянном давлении, концентрация, масса, коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности газообразной среды.

Уравнения (1.1) – (1.3) вместе с зависимостью коэффициента теплопроводности  $\lambda = \lambda(\rho, T)$ , плотности  $\rho = \rho(T)$  и динамической вязкости  $\mu = \mu(\rho, T)$  от температуры, а также, определяемые конкретной задачей граничными условиями, полностью позволяют описать состояние вязкой неизотермической среды (газа или жидкости). Здесь и далее индексы  $k$  и  $k'$  будем относить к газообразной среде и частице. Индексом  $kS$  будем обозначать значения физических величин, взятых при средней относительной температуре частицы равной  $T_{iS}$ , а индексом  $k\infty$  — значения физических величин, характеризующих газообразную среду вдали от частицы.

Как отмечалось выше, вследствие общей нелинейной природы получить точные решения системы гидродинамических уравнений не представляется возможным, т.е. общего метода построения решений для вязкой неизотермической среды не существует. В гидродинамике были разработаны приближенные методы, позволяющие в той или иной мере упростить систему гидродинамических уравнений и приспособить ее к характеру отдельных типов конкретных физических задач. Большинство конкретных задач о движении вязкой неизотермической среды, имеющих тот или иной практический интерес, решены именно на основании приближенных уравнений движения вязкой неизотермической среды. Они получаются из полных уравнений с помощью некоторых упрощений путем отбрасывания (полностью или частично) некоторых членов в уравнениях и граничных условиях. Эти методы основаны обычно на использовании малых параметров, называемыми в научной литературе безразмерными комбинациями (числа Рейнольдса, Пекле, Эйлера и т.д.), которые подходящим способом определяются из исходных уравнений, граничных и начальных условий. Малость этих безразмерных комбинаций позволяет упростить полную систему гидродинамических уравнений.

Для решения системы уравнений (1.1) – (1.3) сделаем следующие физические допущения, реализуемые в большинстве прикладных задач:

1. Движение частицы в газообразной среде рассматривается при значительных (больших) относительных перепадах температуры. Под относительным перепадом температуры понимают отношение разности температуры на поверхности частицы и температуры области вдали от нее к последней. Относительный перепад температуры считается малым, если выполняется неравенство  $(T_{iS} - T_{e\infty}) / T_{e\infty} \ll 1$ . При выполнении этого неравенства коэффициенты молекулярного переноса (вязкости и теплопроводности) и плотность можно

считать постоянными величинами. Если  $(T_{iS} - T_{e\infty}) / T_{e\infty} \sim O(1)$ , то относительный перепад температуры считается значительным. В этом случае уже нельзя считать эти величины постоянными. В работе при описании свойств газообразной среды и частицы рассматривается степенной вид зависимости динамической вязкости и теплопроводности от температуры [7, 8], таким образом

$$\begin{aligned}\mu_e &= \mu_{e\infty} t_e^\beta, \quad \lambda_e = \lambda_{e\infty} t_e^\alpha, \quad \rho_e = \rho_{e\infty} t_e, \quad \lambda_i = \lambda_{i\infty} t_i^\omega, \\ \mu_{e\infty} &= \mu_e(T_{e\infty}), \quad \rho_{e\infty} = \rho_e(T_{e\infty}), \quad \lambda_{e\infty} = \lambda_e(T_{e\infty}), \quad \lambda_{i\infty} = \lambda_i(T_{e\infty}), \\ t_k &= T_k/T_{e\infty}, \quad k = e, i, \quad 0,5 \leq \alpha, \beta \leq 1, \quad -1 \leq \omega \leq 1.\end{aligned}$$

2. Определяющими параметрами задачи являются коэффициенты  $c_p, \rho_{e\infty}, \mu_{e\infty}, \lambda_{e\infty}$  и сохраняющиеся в процессе движения частицы величины  $R, T_{e\infty}, U_\infty$ . Из этих параметров можно составить две безразмерные комбинации: число Рейнольдса  $\text{Re}_\infty = (\rho_{e\infty} U_\infty R) / \mu_{e\infty} \ll 1$  и тепловое число Пекле  $\text{Pe}_\infty = (c_p U_\infty R \rho_{e\infty}) / \lambda_{e\infty} \ll 1$ , где  $R$  — радиус частицы,  $U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|$  — характерная скорость.
3. Коэффициент теплопроводности частицы по величине много больше коэффициента теплопроводности газа. Это допущение приводит к тому, что в коэффициенте вязкости можно пренебречь зависимостью от угла  $\theta$  в системе частица-газ (предполагается слабая угловая асимметрия распределения температуры) и считается, что вязкость связана только с температурой  $t_{e0}(r)$ , т.е.  $\mu_e(t_e(r, \theta)) \approx \mu_e(t_{e0}(r))$ . При этом  $t_e(r, \theta) = t_{e0}(r) + \delta t_e(r, \theta)$ , где  $\delta t_e(r, \theta) \ll t_{e0}(r)$ , а  $\delta t_e(r, \theta), t_{e0}(r)$  определяются из решения тепловой задачи. Это допущение позволяет рассматривать гидродинамическую часть отдельно от тепловой части, а связь между ними осуществляется через граничные условия.
4. Частица образована однородным и изотропным по своим свойствам веществом.

В рамках сформулированных выше допущений в работе рассматривается следующая система гидродинамических уравнений, описывающая распределения полей скорости  $\mathbf{U}_e$ , давления  $P_e$  и температуры  $T$  вне и внутри нагретой частицы

$$\frac{\partial}{\partial x_k} P_e = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu_e \left( \frac{\partial U_k^e}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^e}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_k^j \frac{\partial U_n^e}{\partial x_n} \right) \right\}, \quad \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_e U_k^e) = 0, \quad (1.5)$$

$$\rho_e c_{pe} (\mathbf{U}_e \cdot \nabla) T_e = \operatorname{div} (\lambda_e \nabla T_e), \quad (1.6)$$

$$\operatorname{div} (\lambda_i \nabla T_i) = q_i, \quad (1.7)$$

где  $x_k$  — декартовые координаты,  $q_i$  — плотность тепловых источников, неоднородно распределенные в объеме частицы, за счет которых и происходит ее нагрев.

При математическом описании равномерного движения нагретой частицы в вязкой неизотермической газообразной среде природа сил, вызывающих это движение, нас интересовать не будет. Она может быть гравитационной, магнитной, термофоретической, электрофоретической и т.д., что позволяет распространить разработанный математический метод решения линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса на очень широкий класс физических задач. Этот вопрос мы подробно рассмотрим во второй части статьи на конкретной физической задаче. Поскольку частица движется равномерно, то мы можем перейти в систему координат связанную с ее центром масс. В качестве системы координат выбираем сферическую систему координат  $(r, \theta, \varphi)$ . В этом случае задача сводится к задаче обтекания нагретой неподвижной частицы плоскопараллельным потоком газа со скоростью  $\mathbf{U}_\infty$  ( $\mathbf{U}_\infty \parallel Oz$ ). Все неизвестные функции зависят только от координат  $r$  и  $\theta$ .

В сферической системе координат линеаризованное по скорости уравнение Навье-Стокса, описывающее распределение скорости и давления вне частицы равенством (1.5), имеет следующий вид

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial y} + \frac{2}{y} \sigma_{rr} + \frac{1}{y} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{y} \sigma_{r\theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{y}, \quad (1.8)$$

$$\frac{1}{y} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial y} + \frac{3}{y} \sigma_{r\theta} + \frac{1}{y} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{y} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}), \quad (1.9)$$

где  $y = r/R$ ,  $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta\theta}$  и  $\sigma_{\varphi\varphi}$  — компоненты тензора напряжений в сферической системе координат, определяемые равенствами

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \mu_e \left( 2 \frac{\partial U_r^e}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} U_e \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \mu_e \left( \frac{2}{y} \frac{\partial U_\theta^e}{\partial \theta} + \frac{2}{y} U_r^e - \frac{2}{3} \operatorname{div} U_e \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \mu_e \left( \frac{2}{y} U_r^e + \frac{2}{y} \operatorname{ctg} \theta U_\theta^e - \frac{2}{3} \operatorname{div} U_e \right), \quad \sigma_{r\theta} = \mu_e \left( \frac{\partial U_\theta^e}{\partial y} + \frac{1}{y} \frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^e}{y} \right). \end{aligned}$$

Компоненты массовой скорости и давления будем искать в виде разложения по полиномам Лежандра и Гегенбауэра. Они нужны нам для нахождения общей силы, действующей на частицу. Сила определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности частицы [3]

$$F_z = \int_S (-P_e \cos \theta + \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (1.10)$$

Используя свойство полиномов Лежандра и Гегенбауэра, легко показать, что эта сила определяется только первыми членами разложений [2]. Поэтому мы можем записать

$$U_r^e(y, \theta) = U_\infty G(y) \cos \theta, \quad U_\theta^e(y, \theta) = -U_\infty g(y) \sin \theta, \quad (1.11)$$

где  $G(y)$  и  $g(y)$  — произвольные функции, зависящие от радиальной координаты.

Связь между функциями  $G(y)$  и  $g(y)$  может быть найдена из уравнения непрерывности (1.2) с учетом зависимости плотности газообразной среды от температуры (уравнение состояния). Эта связь имеет следующий вид

$$g(y) = G(y) + \frac{y}{2} (G'(y) - f(y) G(y)), \quad (1.12)$$

$$\text{где } f(y) = \frac{1}{t_{e0}(y)} \frac{dt_{e0}(y)}{dy}.$$

Тепловая задача решается методом сращиваемых асимптотических разложений [9, 10]. Нулевое приближение для внутреннего разложения поля температуры с учетом третьего допущения равно

$$t_{e0}(y) = \left( 1 + \frac{\Gamma_0}{y} \right)^{1/(1+\alpha)}, \quad (1.13)$$

где  $\Gamma_0 > 0$  — постоянная, определяемая из граничных условий на поверхности нагретой частицы.

С учетом (1.13) зависимость динамической вязкости от температуры (см. допущение 3) принимает вид

$$\mu_e(y, \theta) \approx \mu_{e\infty} t_{e0}^\beta(y) = \mu_{e\infty} \left( 1 + \frac{\Gamma_0}{y} \right)^{\beta(1+\alpha)}. \quad (1.14)$$

**Решение линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса в виде обобщенных степенных рядов.** Подставляя (1.11) в (1.8), (1.9) и, учитывая (1.12) и (1.3), освобождаясь от давления, предварительно продифференцировав (1.8) по переменной  $\theta$ , а (1.9) по  $y$ , в конечном итоге было получено следующее однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка для функции  $G(y)$

$$\begin{aligned} &y^4 \frac{d^4 G(y)}{dy^4} + y^3 (8 + \alpha_1 \ell(y)) \frac{d^3 G(y)}{dy^3} + y^2 (8 + \alpha_2 \ell(y) + \alpha_3 \ell^2(y)) \frac{d^2 G(y)}{dy^2} + \\ &+ y (-8 + \alpha_4 \ell(y) + \alpha_5 \ell^2(y) + \alpha_6 \ell^3(y)) \frac{dG(y)}{dy} + (\alpha_7 \ell^2(y) + \alpha_8 \ell^3(y) + \alpha_9 \ell^4(y)) G(y) = 0, \quad (1.15) \end{aligned}$$

в котором

$$\ell(y) = \frac{\Gamma_0}{y + \Gamma_0}, \quad \alpha_1 = \frac{1 - 2\beta}{1 + \alpha}, \quad \alpha_2 = -\frac{8\beta}{1 + \alpha}, \quad \alpha_3 = \frac{\beta^2 - 3\beta - \alpha\beta + 3 + 3\alpha}{(1 + \alpha)^2}, \quad \alpha_4 = 2\frac{\beta - 1}{\alpha + 1},$$

$$\alpha_5 = 2\frac{\beta^2 + \beta - \alpha\beta - 3\alpha - 3}{(1 + \alpha)^2}, \quad \alpha_6 = \frac{6 + 12\alpha + 6\alpha^2 + \beta^2 - 5\beta - 5\alpha\beta}{(1 + \alpha)^3},$$

$$\alpha_7 = 2\frac{2 + 2\alpha - \beta}{(1 + \alpha)^2}, \quad \alpha_8 = -2\alpha_6,$$

с краевыми условиями

$$G(1) = F_1, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} G(y) = 1, \quad g(1) = F_2, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = 1, \quad (1.16)$$

где  $F_1$  и  $F_2$  — постоянные вид, которых определяется конкретной физической задачей. Например, в случае классической задачи Стокса имеем  $F_1 = F_2 = 0$ , что соответствует условию прилипания на поверхности сферы радиуса  $R$ .

Точка  $y = 0$  для уравнения (1.15) является регулярной особой точкой [11, 12]. Поэтому будем искать его решение в виде следующего функционального ряда

$$G(y) = y^\rho \sum_{n=0}^{\infty} C_n \ell^n(y), \quad C_0 \neq 0. \quad (1.17)$$

Вычисляя производные, получим

$$G'(y) = -y^{\rho-1} \sum_{n=0}^{\infty} [(n - \rho) C_n - (n - 1) C_{n-1}] \ell^n(y),$$

$$G''(y) = y^{\rho-2} \sum_{n=0}^{\infty} [(n - \rho)(n - \rho + 1) C_n - 2(n - \rho)(n - 1) C_{n-1} + (n - 1)(n - 2) C_{n-2}] \ell^n(y),$$

$$G'''(y) = -y^{\rho-3} \sum_{n=0}^{\infty} [(n - \rho)(n - \rho + 1)(n - \rho + 2) C_n - 3(n - \rho)(n - \rho + 1)(n - 1) C_{n-1} +$$

$$+ 3(n - \rho)(n - 1)(n - 2) C_{n-2} + (n - 1)(n - 2)(n - 3) C_{n-3}] \ell^n(y),$$

$$G^{IV}(y) = y^{\rho-4} \sum_{n=0}^{\infty} [(n - \rho)(n - \rho + 1)(n - \rho + 2)(n - \rho + 3) C_n - 4(n - \rho)(n - \rho + 1) \times$$

$$\times (n - \rho + 2)(n - 1) C_{n-1} + 6(n - \rho)(n - \rho + 1)(n - 1)(n - 2) C_{n-2} -$$

$$- 4(n - \rho)(n - 1)(n - 2)(n - 3) C_{n-3} + (n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4) C_{n-4}] \ell^n(y).$$

Подставляя ряд (1.17) в (1.15) и приравнивая коэффициенты при  $y^\rho$ , получаем определяющее уравнение

$$\rho(\rho + 3)(\rho + 1)(\rho - 2) = 0,$$

имеющего корни  $\rho_1 = -3$ ,  $\rho_2 = -1$ ,  $\rho_3 = 0$ ,  $\rho_4 = 2$ . Заметим, что разность корней равна целому числу. Следовательно, согласно общей теории решения дифференциальных уравнений в виде обобщенных степенных рядов (метод Фробениуса) во всех остальных решениях, кроме первого, соответствующего  $\rho_1 = -3$ , появляется дополнительное слагаемое содержащее множитель  $\ln y$ , умноженный на первое решение (см. [11, 12]).

Большему (по модулю) из корней отвечает решение

$$G_1(y) = \frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} \ell^n(y). \quad (1.18)$$

Подставляя (1.18) в (1.15) и используя метод неопределенных коэффициентов, получим следующую рекуррентную формулу для нахождения коэффициентов  $C_{n,1}$

$$\begin{aligned} C_{0,1} &= 1, \quad C_{n,1} = \frac{1}{n(n+2)(n+3)(n+5)} \{ (n+2) \times \\ &\times [4(n-1)(n^2+4n+1) + \alpha_1(n+3)(n+4) + \alpha_4 - \alpha_2(n+3)] C_{n-1,1} - \\ &- [2(n-1)(n-2)(3n^2+9n+4) + 3\alpha_1(n-2)(n+2)(n+3) - \\ &- 2\alpha_2(n+2)(n-2) + \alpha_3(n+1)(n+2) + \alpha_4(n-2) - \alpha_5(n+1) + \alpha_7] C_{n-2,1} + \\ &+ [4(n+1)(n-1)(n-2)(n-3) + 3\alpha_1(n-2)(n+2)(n-3) - \alpha_2(n-3)(n-2) + \\ &+ 2\alpha_3(n+1)(n-3) - \alpha_5(n-3) + \alpha_6 n - \alpha_8] C_{n-3,1} - \\ &- (n-3)[(n-1)(n-2)(n-4) + \alpha_1(n-2)(n-4) + \alpha_3(n-4) + \alpha_6] C_{n-4,1} \}, \end{aligned}$$

здесь и в дальнейшем мы считаем, что  $C_{n,k} = 0$ , если  $n < 0$ .

Второе решение уравнения (1.15) линейно независимое с решением  $G_1(y)$  и соответствующее корню  $\rho_2 = -1$  будем искать в виде

$$G_2(y) = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,2} \ell^n(y) + \frac{\omega_1 \ln y}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} \ell^n(y). \quad (1.19)$$

Аналогично, подставляя (1.19) в (1.15), получаем следующую рекуррентную формулу для нахождения коэффициентов  $C_{n,2}$

$$\begin{aligned} C_{0,2} &= 1, \quad C_{1,2} = -\frac{1}{8}(6\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_4), \quad C_{2,2} = 1, \\ C_{n,2} &= \frac{1}{n(n-2)(n+3)(n+1)} \{ n [4(n-1)(n^2-3) + \alpha_1(n+1)(n+2) + \alpha_4 - \\ &- \alpha_2(n+1)] C_{n-1,2} - [2(n-1)(n-2)(3n^2-3n-2) + 3\alpha_1 n(n-2)(n+1) - 2\alpha_2 n(n-2) + \\ &+ \alpha_3 n(n-1) + \alpha_4(n-2) - \alpha_5(n-1) + \alpha_7] C_{n-2,2} + [4(n-1)^2(n-2)(n-3) + \\ &+ 3\alpha_1 n(n-2)(n-3) - \alpha_2(n-3)(n-2) + 2\alpha_3(n-1)(n-3) - \alpha_5(n-3) - \alpha_8 + \\ &+ \alpha_6(n-2)] C_{n-3,2} - (n-3)[(n-1)(n-2)(n-4) + \alpha_1(n-2)(n-4) + \\ &+ \alpha_3(n-4) + \alpha_6] C_{n-4,2} + \frac{\omega_1}{\Gamma_0^2} \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1) \Delta_k \}. \end{aligned}$$

где

$$\frac{\omega_1}{\Gamma_0^2} = \frac{1}{30} [2\alpha_3 - \alpha_5 + \alpha_7 - 2(4 + 12\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_4) C_{1,2}],$$

$$\begin{aligned} \Delta_k &= (4k^3 + 30k^2 + 62k + 30) C_{k,1} - \\ &- [12(k^2-1)(k+3) + \alpha_4 + \alpha_1(3k^2+18k+26) - \alpha_2(2k+5)] C_{k-1,1} + \\ &+ [6(k-1)(k-2)(2k+3) - 2\alpha_2(k-2) - \alpha_5 + \alpha_3(2k+3) + 3\alpha_1(k-2)(2k+5)] C_{k-2,1} - \\ &- [4(k-1)(k-2)(k-3) + 3\alpha_1(k-2)(k-3) + \alpha_6 + 2\alpha_3(k-3)] C_{k-3,1}. \end{aligned}$$

Третье решение уравнения (1.15), линейно независимое с решениями  $G_1(y)$ ,  $G_2(y)$  и соответствующее корню  $\rho_3 = 0$  будем искать в виде

$$G_3(y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,3} \ell^n + \frac{\omega_2 \ln y}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} \ell^n + \frac{\omega_0 \ln y}{y} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,2} \ell^n, \quad (1.20)$$

где коэффициенты  $C_n^{(3)}$  ( $n \geq 4$ ) определяются из следующей рекуррентной формулы

$$\begin{aligned} C_{0,3} &= 1, \quad C_{1,3} = 0, \quad C_{2,3} = \frac{\alpha_7}{8}, \quad C_{3,3} = 1, \quad \omega_0 = 0, \\ C_{n,3} &= \frac{1}{n(n+2)(n-3)(n-1)} \left\{ (n-1) [4(n-1)(n^2 - 2n - 2) + \alpha_1 n(n+1) + \alpha_4 - \right. \\ &\quad \left. - \alpha_2 n] C_{n-1,3} - [2(n-1)(n-2)(3n^2 - 9n + 4) + 3\alpha_1 n(n-2)(n-1) + (n-1)(n-2) \times \right. \\ &\quad \times (\alpha_3 - 2\alpha_2) + (n-2)(\alpha_4 - \alpha_5) + \alpha_7] C_{n-2,3} + [4(n-1)(n-2)^2(n-3) + \right. \\ &\quad + 3\alpha_1(n-1)(n-2)(n-3) + (n-3)(n-2)(2\alpha_3 - \alpha_2) + (n-3)(\alpha_6 - \alpha_5) + \alpha_7] C_{n-3,3} - \\ &\quad - (n-3)[(n-1)(n-2)(n-4) + \alpha_1(n-2)(n-4) + \alpha_3(n-4) + \alpha_6] C_{n-4,3} + \\ &\quad + \frac{1}{60} \left[ \alpha_8 - \frac{\alpha_7}{4} (8 + 12\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_4) \right] \sum_{k=0}^{n-3} (n-k-2)(n-k-1) \Delta_k. \end{aligned}$$

Четвертое решение  $G_0(y)$  уравнения (1.15), отвечающее корню  $\rho_4 = 2$ , согласно методу Фробениуса, следует искать в виде

$$G_0(y) = y^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,4} \ell^n + \frac{\varsigma_0}{y^3} \ln y \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} \ell^n + \frac{\varsigma_1}{y} \ln y \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,2} \ell^n + \varsigma_2 \ln y \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,3} \ell^n, \quad C_{0,4} = 1.$$

Поскольку это решение не удовлетворяет краевому условию  $\lim_{y \rightarrow \infty} G(y) = 1$ , то его явный вид мы не приводим.

Заметим, что выбор постоянных  $C_{0,1}$ ,  $C_{0,2}$  и  $C_{0,3}$  осуществляется таким образом, чтобы функции  $G_1(y)$ ,  $G_2(y)$  и  $G_3(y)$  стремились к соответствующим функциям для сферы при малых относительных перепадах температуры [2, 3], т.е., чтобы при  $\Gamma_0 \rightarrow 0$

$$G_1(y) \rightarrow \frac{1}{y^3}, \quad G_2(y) \rightarrow \frac{1}{y}, \quad G_3(y) = 1.$$

Учитывая неравенство

$$\ell(y) = \frac{\Gamma_0}{y + \Gamma_0} \leq \frac{\Gamma_0}{1 + \Gamma_0} < 1,$$

можно показать, что ряды, определяющие функции  $G_i(y)$ ,  $i = 1, 2, 3$  равномерно сходятся при  $y \geq 1$  и определяют ограниченные функции, которые можно дифференцировать нужное число раз. В дальнейшем нам потребуются производные до третьего порядка. Производя необходимые вычисления, получим

$$\begin{aligned} G'_1(y) &= -\frac{1}{y^4} \sum_{n=0}^{\infty} [(n+3)C_n^{(1)} - (n-1)C_{n-1,1}] \ell^n(y), \\ G''_1(y) &= \frac{1}{y^5} \sum_{n=0}^{\infty} [(n+3)(n+4)C_n^{(1)} - 2(n+3)(n-1)C_{n-1,1} + (n-1)(n-2)C_{n-2,1}] \ell^n(y), \\ G'''_1(y) &= -\frac{1}{y^6} \sum_{n=0}^{\infty} [(n+3)(n+4)(n+5)C_{n,1} - 3(n+3)(n+4)(n-1)C_{n-1,1} + \\ &\quad + 3(n+3)(n-1)(n-2)C_{n-2,1} + (n-1)(n-2)(n-3)C_{n-3,1}] \ell^n(y), \\ G'_2(y) &= -\frac{1}{y^2} \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)C_{n,2} - (n-1)C_{n-1,2}] \ell^n(y) + \frac{\omega_1}{y^4} \ln y \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} \ell^n(y) + \omega_1 \ln y C_1^I(y), \\ G''_2(y) &= \frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)C_{n,2} - 2(n+1)(n-1)C_{n-1,2} + (n-1)(n-2)C_{n-2,2}] \ell^n(y) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\omega_1}{y^5} \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+7)C_{n,1} - 2(n-1)C_{n-1,1}] + \omega_1 \ln y G''_1(y), \\
G''_2(y) = & -\frac{1}{y^4} \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)(n+3)C_{n,2} - 3(n+1)(n+2)(n-1)C_{n-1,2} + \\
& + 3(n+1)(n-1)(n-2)C_{n-2,2} + (n-1)(n-2)(n-3)C_{n-3,2}] \ell^n(y) + \\
& + \frac{\omega_1}{y^6} \sum_{n=0}^{\infty} [(3n^2 + 24n + 47)C_{n,1} - 3(n-1)(2n+7)C_{n-1,1} + 3(n-1)(n-2)C_{n-2,1}] \ell^n(y) + \\
& + \omega_1 \ln y G''_1(y), \\
G'_3(y) = & -\frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} [nC_{n,3} - (n-1)C_{n-1,3}] \ell^n(y) + \frac{\omega_2}{y^4} \ln y \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} \ell^n(y) + \omega_2 \ln y G'_1(y), \\
G''_3(y) = & \frac{1}{y^2} \sum_{n=0}^{\infty} [n(n+1)C_{n,3} - 2n(n-1)C_{n-1,3} + (n-1)(n-2)C_{n-2,3}] \ell^n(y) - \\
& - \frac{\omega_2}{y^5} \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+7)C_{n,1} - 2(n-1)C_{n-1,1}] + \omega_2 \ln y G''_1(y), \\
G'''_3(y) = & -\frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} [n(n+1)(n+2)C_{n,3} - 3n(n+1)(n-1)C_{n-1,3} + 3n(n-1) \times \\
& \times (n-2)C_{n-2,3} + (n-1)(n-2)(n-3)C_{n-3,3}] \ell^n(y) + \frac{\omega_2}{y^6} \sum_{n=0}^{\infty} [(3n^2 + 24n + 47)C_{n,1} - \\
& - 3(n-1)(2n+7)C_{n-1,1} + 3(n-1)(n-2)C_{n-2,1}] \ell^n(y) + \omega_2 \ln y G''_1(y).
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили общее решение уравнения (1.15)

$$G(y) = A_1 G_1(y) + A_2 G_2(y) + A_3 G_3(y) + A_0 G_0(y), \quad (1.21)$$

где  $A_1, A_2, A_3$  и  $A_0$  — произвольные постоянные.

Постоянные  $A_1, A_2, A_3$  и  $A_0$  однозначно определяются из краевых условий (1.16). Очевидно,  $A_0 = 0, A_3 = 1$ . Для определения постоянных  $A_1$  и  $A_2$  имеем следующую линейную систему уравнений

$$\begin{cases} A_1 G_1(1) + A_2 G_2(1) = F_1 - G_3(1) \\ A_1 G_4(1) + A_2 G_5(1) = F_2 - G_6(1) \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение, поскольку ее главный определитель отличен от нуля в силу линейной независимости решений  $G_1(y), G_2(y), G_3(y)$ . Таким образом, имеем

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_1 - G_3(1) & G_2(1) \\ F_2 - G_6(1) & G_5(1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1(1) & G_2(1) \\ G_4(1) & G_5(1) \end{vmatrix}}, \quad A_2 = \frac{\begin{vmatrix} G_1(1) & F_1 - G_3(1) \\ G_4(1) & F_2 - G_6(1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1(1) & G_2(1) \\ G_4(1) & G_5(1) \end{vmatrix}} \quad (1.22)$$

В результате проведенного исследования доказана следующая теорема.

**Теорема.** Функция  $G(y) = A_1 G_1(y) + A_2 G_2(y) + G_3(y)$  с коэффициентами определяемыми формулой (1.22) является единственным решение уравнения (1.15), удовлетворяющим краевым условиям (1.16).

Перейдем теперь к определению компонентов массовой скорости  $U_e(y, \theta)$  и давления  $P_e(y, \theta)$ , которые необходимы для нахождения общей силы (1.10), действующей на нагретую частицу, движущуюся равномерно в неизотермической газообразной среде. Учитывая, что

$$U_r^e(y, \theta) = U_\infty G(y) \cos \theta, \quad U_\theta^e(y, \theta) = -U_\infty g(y) \sin \theta,$$

получаем

$$U_r^e(y, \theta) = U_\infty \cos \theta [A_1 G_1(y) + A_2 G_2(y) + G_3(y)], \quad (1.23)$$

$$U_\theta^e(y, \theta) = -U_\infty \sin \theta [A_1 G_4(y) + A_2 G_5(y) + G_6(y)], \quad (1.24)$$

где

$$G_k(y) = \left(1 + \frac{\ell(y)}{2(1+\alpha)}\right) G_{k-3}(y) + \frac{y}{2} G'_{k-3}(y), \quad k = 4, 5, 6. \quad (1.25)$$

Поскольку явный вид функций  $U_r^e(y, \theta)$  и  $U_\theta^e(y, \theta)$  нам известен, то мы можем легко получить выражения для поля давления

$$\begin{aligned} P_e = P_{e\infty} + \frac{\mu_{e\infty} U_\infty}{R} t_{e0}^\beta & \left\{ \frac{y^2}{2} G'(y) + y \left[ 3 + \frac{\beta-1}{2} y f(y) \right] G''(y) - \left[ 2 - y^2 f'(y) - \frac{\beta}{2} y^2 f^2(y) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (\beta-2) y f(y) \right] G'(y) + 2 \left[ y^2 f''(y) + y f'(y) (4 + \beta y f(y)) - \frac{2}{3} f(y) \right] G(y), \right. \\ & \left. f(y) = -\frac{\ell(y)}{(1+\alpha)y}. \right. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Для согласования полученных результатов отметим, что в случае малых относительных перепадов температуры, т.е., если  $(T_{is} - T_{e\infty})/T_{e\infty} \ll 1$  и, соответственно ( $\ell(y) = 0$ ), то выражения (1.24) – (1.26) переходят в известные формулы для компонент массовой скорости и давления [2, 3].

Общая сила, действующая на частицу, определяется интегрированием тензора напряжений по ее поверхности и в сферической системе координат, определяется по формуле (1.10). Производя необходимые вычисления, получаем

$$F_z = -4\pi R \mu_{e\infty} U_\infty A_2 n_z, \quad (1.27)$$

где  $n_z$  — единичный вектор в направлении оси  $Oz$ ,  $A_2$  — постоянная, которая определяется равенством (1.22) из граничных условий на поверхности нагретой частицы.

Проведем анализ выражения (1.27). Различным значениям постоянной  $A_2$  соответствуют различные качественные картины движения частицы в неизотермической газообразной среде. Отметим, что сила (1.27) вычислена в предположении равномерности движения, которое возможно только в случае, если полная сила, действующая на частицу, равна нулю. Поскольку сила (1.27) пропорциональна скорости и обращается в нуль вместе с ней, то для реализации случая равномерного движения частицы следует предположить наличие некоторой сторонней силы, уравновешивающей силу (1.27).

В зависимости от параметров задачи сила (1.27) может быть, как силой сопротивления (в этом случае для поддержания движения необходима сила, действующая в направлении скорости, например, сила тяжести), так и силой тяги (тогда для поддержания движения должна существовать сила, действующая в направлении, противоположном скорости).

Возможна и другая интерпретация полученных результатов, когда заданной считается действующая на частицу внешняя сила, например, термофоретическая сила, фотофоретическая сила, диффузиофоретическая и т.д. В этом случае из равенства силы (1.27) внешней силе может быть найдена, например, скорость термофореза, скорость фотофореза нагретой частицы и т.д.

**Заключение.** В данном разделе исследовалось линеаризованное по скорости уравнение Навье-Стокса в сферической системе координат в предположении, что коэффициент теплопроводности частицы много больше коэффициента теплопроводности газа (слабая угловая асимметрия распределения температуры). Рассматриваемое уравнение может быть сведено к однородному дифференциальному уравнению четвертого порядка, учитывающему зависимость динамической вязкости и плотности газообразной среды от температуры.

В зависимости от конкретной физической задачи, задавая явный вид зависимости вязкости среды от температуры, мы можем исследовать полученные уравнения, что, несомненно, представляет как теоретический, так и практический интерес для поиска аналитического решения полного уравнения Навье-Стокса (1.1).

В частном случае, когда

$$t_{e0}(y) = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y}\right)^{1/(1+\alpha)}, \quad \mu_e(y, \theta) \approx \mu_{e\infty} t_{e0}^\beta(y)$$

получено однородное дифференциальное уравнение (1.15) четвертого порядка для функции  $G(y)$  с краевыми условиями (1.16), для решения которого был применен известный в научной литературе метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений в виде обобщенных степенных рядов (метод Фробениуса). Установлено существование и единственность полученного решения.

## II. ГРАВИТАЦИОННОЕ ДВИЖЕНИЕ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОЙ ТВЕРДОЙ ЧАСТИЦЫ СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

**Введение.** На входящие в состав аэродисперсных систем аэрозольные частицы могут действовать силы различной природы. Самым распространенным видом движения является гравитационное, т.е. движение аэрозольных частиц в поле силы тяжести, происходящее за счет разности удельных весов частиц и окружающей среды [2, 3]. На гравитационном движении основаны такие технологические процессы как флотация, определение гранулометрического состава аэродисперсных систем, тонкая очистка газов и т.п. В частности, при очистке газов от загрязняющих их частиц и обогащении полезных ископаемых важно ускорить процесс выпадения осадка. Этого добиваются различными способами в зависимости от рода частиц и окружающей среды. Основу седиментометрии составляет взаимосвязь между скоростью движения аэрозольных частиц в газообразной среде и их размерами. Скорость движения частиц можно существенно корректировать за счет нагрева их поверхности (например, с помощью лазера), поскольку коэффициенты молекулярного переноса газообразной среды (вязкость, теплопроводность и плотность) существенно зависят от температуры. В связи с этим представляет как теоретический, так и практический интерес описание гравитационного движения неравномерно нагретых частиц в вязких неизотермических средах.

Среднее расстояние между частицами, у значительной части, встречающихся на практике аэродисперсных систем намного больше характерного размера частиц. В таких условиях учет влияния аэрозоля на развитие физического процесса можно проводить, основываясь на знание законов динамики движения и тепло- и массообмена с бесконечной окружающей средой отдельных частиц. Поэтому изучение закономерностей движения отдельных частиц в вязких средах является важной актуальной задачей. Кроме того, важно отметить, что исследование движения отдельных частиц в неподвижной среде является составной частью изучения их поведения в произвольном потоке.

**Постановка задачи.** Рассмотрим движение нагретой твердой частицы сферической формы в вязкой газообразной среде в поле силы тяжести. В рамках сформулированных в части I допущений уравнения для скорости, давления и температур вне и внутри частицы запишутся в виде

$$\frac{\partial P_e}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu_e \left[ \frac{\partial U_j^e}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k^e}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \frac{\partial U_m^e}{\partial x_m} \right] \right) + F_k, \quad m, k, j = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div}(\rho_e \mathbf{U}_e) = 0, \quad (2.2)$$

$$\rho_e c_p (U_e \cdot \nabla) T_e = \operatorname{div}(\lambda_e \nabla T_e), \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div}(\lambda_i \nabla T_i) = -q_i, \quad (2.4)$$

где  $(x_1, x_2, x_3)$  декартовы координаты,  $q_i(r, \theta)$  — плотность тепловых источников неоднородно распределенных в объеме частицы, за счет которых и происходит нагрев частицы. Наличие источников тепла внутри частицы можно связать, например, с протеканием объемной химической реакции, с процессом радиоактивного распада вещества частицы, поглощением электромагнитного излучения и т.д. Наличие источников тепла внутри частицы приводит к тому, что средняя температура ее поверхности может существенно отличаться от температуры окружающей газообразной среды вдали от нее. Возникающее при этом повышение температуры поверхности

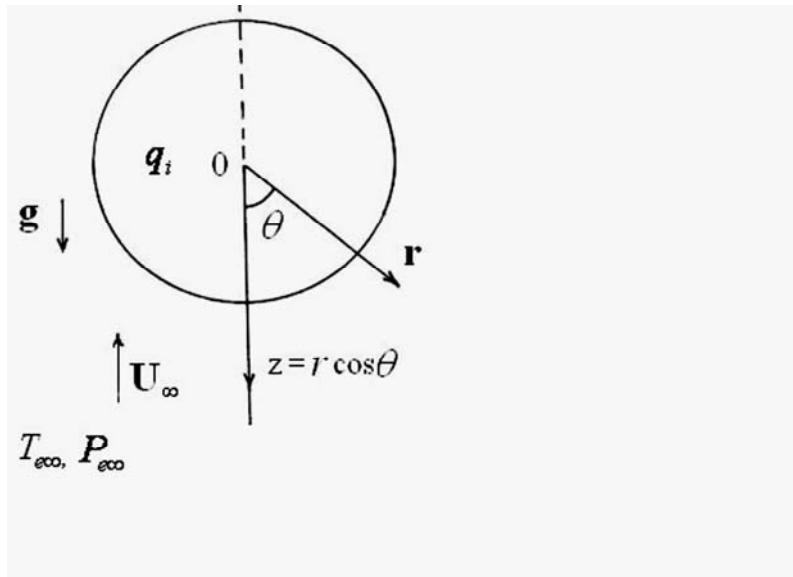


Рис. 1. Обтекание сферы.

частицы оказывает влияние на теплофизические характеристики газообразной среды (вязкость, теплопроводность, плотность) и тем самым может существенно повлиять на распределение полей скорости и давления в ее окрестности и в конечном итоге на силу и скорость ее гравитационного движения.

Целесообразно, как и в первой части, ввести систему координат, связанную с центром масс движущейся частицы. В этом случае задача сводится к анализу обтекания частицы радиуса  $R$  бесконечным плоскопараллельным потоком газа со скоростью  $\mathbf{U}_\infty$  ( $\mathbf{U}_\infty \parallel Oz$ ), которая подлежит определению из условий задачи.

Описывать движение будем в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$ , полярную ось  $z = r \cos \theta$  направим по вектору ускорения свободного падения  $\mathbf{g}$ . Картину набегающего потока и направления координатных осей приведены на рис. 1.

Угол  $\theta$  будем отсчитывать против часовой стрелки от точки, где поток набегает на сферу. Распределения скоростей, давлений и температур обладают аксиальной симметрией относительно оси  $Oz$ . В такой системе отсчета нагретая частица неподвижна, а внешняя среда (газ) — движется (как целое) в сторону противоположную направлению фактического движения частицы со скоростью  $\mathbf{U}_\infty = -\mathbf{U}_p$  ( $\mathbf{U}_p$  — скорость дрейфа нагретой частицы относительно лабораторной системы координат).

Эта система гидродинамических уравнений решается в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$  со следующими граничными условиями

$$U_r^e(y, \theta)|_{r=R} = U_\theta^e(y, \theta)|_{r=R} = 0, \quad T_e|_{r=R} = T_i|_{r=R}, \quad (2.5)$$

$$\left( \lambda_e T_e \frac{\partial T_e}{\partial r} \right)|_{r=R} = \left( \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} + \sigma_0 \sigma_1 (T_i^4 - T_{e\infty}^4) \right)|_{r=R}, \quad (2.6)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{U}_e = \mathbf{U}_\infty \cos \theta \mathbf{e}_r - \mathbf{U}_\infty \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} P_e = P_{e\infty}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} T_e = T_{e\infty}, \quad \lim_{r \rightarrow 0} T_i \neq \infty, \quad (2.7)$$

т.е. мы считаем, что на поверхности частицы ( $r = R$ ) выполнено условие прилипания для нормальной и касательной компонент массовой скорости  $\mathbf{U}_e$ , имеют место равенство температур и непрерывность радиальных потоков тепла с учетом излучения на поверхности частицы ( $\sigma_0$  — постоянная Стефана-Больцмана,  $\sigma$  — интегральная степень черноты тела [13]), а также стандартные условия вдали от частицы при  $r \rightarrow \infty$  и  $r \rightarrow 0$ .

Наличие больших относительных перепадов температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее приводит к необходимости учитывать зависимость от температуры

динамической вязкости  $\mu_e$ , теплопроводности  $\lambda_e$  и плотности  $\rho_e$

$$\mu_e = \mu_{e\infty} t_e^\beta, \quad \lambda_e = \lambda_{e\infty} t_e^\alpha, \quad \lambda_i = \lambda_{i\infty} t_i^\omega, \quad \rho_e = \rho_{e\infty} t_e,$$

где  $\mu_{e\infty} = \mu_e(T_{e\infty})$ ,  $\lambda_{e\infty} = \lambda_e(T_{e\infty})$ ,  $\lambda_{i\infty} = \lambda_i(T_{e\infty})$ ,  $\rho_{e\infty} = \rho_e(T_{e\infty})$ ,  $t_k = T_k/T_{e\infty}$  ( $k = e, i$ ) — безразмерная температура. Здесь и далее индекс  $e$  указывает на газообразную среду, индекс  $i$  — на принадлежность частице, а индекс  $\infty$  означает параметры газообразной среды на бесконечности, т.е. вдали от частицы.

**Выражения для силы и скорости гравитационного движения нагретой твердой частицы сферической формы.** При нахождении силы, действующей на нагретую твердую аэрозольную частицу, и скорости ее движения в гравитационном поле необходимо знать распределение температуры, как вне частицы, так и внутри нее.

Интегрируя уравнения теплопереноса и учитывая степенной вид зависимости коэффициентов теплопроводности, получаем

$$t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y}\right)^{1/(1+\alpha)}, \quad (2.8)$$

$$t_i(y, \theta) = t_{i0}(y) = \left(B_0 + \frac{D_0}{y} + \frac{1}{y} \int_y^1 \psi_0(y) dy - \int_y^1 \frac{\psi_0(y)}{y} dy\right)^{1/(1+\omega)}, \quad (2.9)$$

где постоянные  $\Gamma_0$ ,  $B_0$  и  $D_0$  определяются из граничных условий (2.5), (2.6) на поверхности частицы,

$$\psi_0(y) = -\frac{R^2}{2\lambda_{i\infty}} \frac{1+\omega}{T_{e\infty}} y^2 \int_{-1}^1 q_i dx, \quad x = \cos \theta.$$

Среднее значение температуры поверхности частицы  $T_{iS}$  определяется из решения следующей системы уравнений

$$\begin{cases} t_{iS} = t_{eS}, \\ \frac{\ell(1)}{1+\alpha} \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} t_{eS} = \frac{R^2}{3\lambda_{iS} T_{e\infty}} J_0 - \sigma_0 \sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_{iS}} (t_{iS}^4 - 1), \end{cases} \quad (2.10)$$

в которой

$$\lambda_{eS} = \lambda_{e\infty} t_{eS}^\alpha, \quad \lambda_{iS} = \lambda_{i\infty} t_{iS}^\omega, \quad t_{iS} = t_{i0}|_{y=1}, \quad t_{eS} = t_{e0}|_{y=1}, \quad T_{iS} = t_{iS} T_{e\infty}, \quad T_{eS} = t_{eS} T_{e\infty},$$

$$\ell(1) = \frac{\Gamma_0}{1+\Gamma_0}, \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad J_0 = \frac{1}{V} \int_V q_i(r, \theta) dV,$$

а интегрирование ведется по всему объему частицы.

Из формулы (2.8) следует, что температура окружающего частицу газа изменяется с расстоянием от поверхности частицы, поэтому и динамическая вязкость также является функцией расстояния  $\mu_e = \mu_e(y)$ .

Подставляя (2.8) в выражение для динамической вязкости, имеем

$$\mu_e = \mu_{e\infty} t_{e0}^\beta. \quad (2.11)$$

Выражение (2.11) для динамической вязкости совпадает с формулой (1.14) первой части и, следовательно, полученное аналитическое решение линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса применимо в нашем случае, т.е.

$$U_r^e(y, \theta) = U_\infty \cos \theta (A_1 G_1(y) + A_2 G_2(y) + G_3(y)), \quad (2.12)$$

$$U_\theta^e(y, \theta) = -U_\infty \sin \theta (A_1 G_4(y) + A_2 G_5(y) + G_6(y)), \quad (2.13)$$

где функции  $G_1$  —  $G_6$  определены равенствами (1.18)–(1.20), (1.25).

Подставляя (2.12), (2.13) в граничные условия (2.5) – (2.7), можем определить постоянные  $A_1$  и  $A_2$ . В частности, для коэффициента  $A_2$ , имеем

$$A_2 = \frac{N_2}{N_1}, \quad (2.14)$$

где  $N_1 = G_1(1)G'_2(1) - G_2(1)G'_1(1)$ ,  $N_2 = G_1(1)G'_3(1) - G_3(1)G'_1(1)$ .

Общая сила, действующая на частицу, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности частицы и в сферической системе координат находится по формуле (1.27)

$$\mathbf{F}_z = -4\pi R\mu_{e\infty} U_\infty A_2 \mathbf{n}_z, \quad (2.15)$$

где  $\mathbf{n}_z$  — единичный вектор в направлении оси  $Oz$ .

Подставляя в (2.15) определяемый равенством (2.14) коэффициент  $A_2$ , получаем выражение для силы сопротивления неравномерно нагретой сферы

$$\mathbf{F}_z = 6\pi R\mu_{e\infty} U_\infty f_\mu \mathbf{n}_z, \quad f_\mu = \frac{2N_2}{3N_1}. \quad (2.16)$$

Сферическая частица, падающая под действием силы тяжести, приобретает постоянную скорость  $\mathbf{U}_p$ , как только действие силы тяжести уравновешивается гидродинамическими силами.

Сила тяжести, действующая на частицу, с учетом выталкивающей силы равна

$$\mathbf{F}_g = (\rho_{iS} - \rho_{eS}) \mathbf{g} \frac{4}{3} \pi R^3, \quad (2.17)$$

где  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения,  $\rho_{iS}, \rho_{eS}$  — плотность частицы и газообразной среды, взятые при средней температуре поверхности частицы, равной  $T_{iS}$ .

Приравнивая (2.16) к (2.17), учитывая, что  $\mathbf{U}_\infty = -\mathbf{U}_p$ , получаем выражение для скорости установившегося падения твердой неравномерно нагретой частицы сферической формы в поле силы тяжести

$$\mathbf{U}_p = h_\mu \mathbf{n}_z, \quad h_\mu = \frac{2}{9} \frac{(\rho_{iS} - \rho_{eS})}{\mu_{e\infty} f_\mu} R^2 g. \quad (2.18)$$

Таким образом, формулы (2.16) и (2.18) позволяют оценивать силу, действующую на неравномерно нагретую сферу, и скорость ее гравитационного падения с учетом зависимости плотности газообразной среды и коэффициентов молекулярного переноса (вязкости и теплопроводности) от температуры при произвольных относительных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее.

В случае, когда величина нагрева поверхности частицы достаточно мала, т.е. средняя температура поверхности частицы незначительно отличается от температуры окружающей среды вдали от нее ( $\Gamma_0 = 0$ ), зависимостью плотности и коэффициентов молекулярного переноса от температуры можно пренебречь, и тогда

$$G_1(1) = 1, \quad G'_1(1) = -3, \quad G_2(1) = 1, \quad G'_2(1) = -1, \quad G_3(1) = 1, \quad G'_3(1) = 0, \quad N_1 = 2, \quad N_2 = 3.$$

В этом случае формулы (2.15) и (2.17) переходят в известные выражения для сферы, полученные Стоксом [1, 2]

$$\mathbf{F}_S = 6\pi R\mu_{e\infty} \mathbf{U}_\infty, \quad \mathbf{U} = \frac{2}{9} \frac{(\rho_{i\infty} - \rho_{e\infty})}{\mu_{e\infty}} R^2 \mathbf{g}. \quad (2.19)$$

Здесь следует отметить, что коэффициенты молекулярного переноса и плотность берутся при температуре поверхности частицы равной температуре окружающей среды (в нашем случае  $T_{e\infty}$ ), т.е. эти формулы справедливы при малых относительных перепадах температуры.

Однако, из (2.8) видно, что константа  $\Gamma_0$  зависит от средней относительной температуры  $t_{eS}$ , которая в случае неравномерного нагрева поверхности определяется из системы уравнений

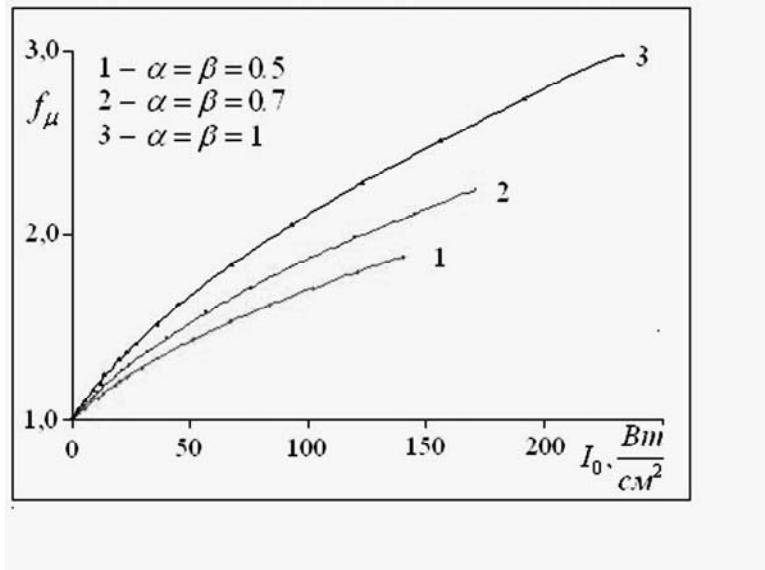


Рис. 2. График зависимости функции  $f_\mu$  от интенсивности падающего излучения  $I_0$ .

(2.10) и, следовательно, зависит от плотности тепловых источников, неоднородно распределенных в объеме частицы. Отсюда следует, что и функции  $G_1$ ,  $G_2$  и т.д. также зависят от плотности тепловых источников, поскольку в эти функции входит величина  $\ell(y) = \frac{\Gamma_0}{y + \Gamma_0}$ .

Чтобы оценить, какой вклад внутренние источники тепла (нагрев поверхности) оказывают на скорость гравитационного движения аэрозольной частицы сферической формы, можно рассмотреть наиболее простой случай, когда частица поглощает излучение как черное тело [13]. В этом случае поглощение происходит в тонком слое толщиной  $\delta R \ll R$ , прилегающем к нагреваемой части поверхности частицы. При этом плотность тепловых источников внутри слоя толщиной  $\delta R$  равенством

$$q_i(r, \theta) = \begin{cases} -\frac{I_0}{\delta R} \cos \theta, & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \quad R - \delta R \leq r \leq R, \\ 0, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

где  $I_0$  — интенсивность падающего излучения.

В этом случае вычисляя интеграл  $\int_V q_i dV$ , получим  $\int_V q_i dV \approx \pi R^2 I_0$ .

Таким образом, задавая интенсивность падающего излучения, мы можем оценить среднюю температуру поверхности частицы

$$T_{IS} \approx T_{e\infty} \left( 1 + \frac{1+\alpha}{4\lambda_{e\infty} T_{e\infty}} RI_0 \right)^{1/(1+\alpha)}. \quad (2.20)$$

Из этой формулы следует, что средняя температура поверхности твердой частицы сферической формы зависит от ее радиуса и интенсивности падающего излучения. На рис. 2 приведены значения функции  $f_\mu$  в зависимости от интенсивности падающего излучения  $I_0$ . Численные оценки проводились для частиц меди радиуса 100  $\mu\text{мм}$ , взвешенных в воздухе при нормальных условиях.

Представляет также интерес сравнение полученных формул для силы сопротивления твердой нагретой частицы сферической формы с экспериментом приведенным, например, в [14]. В экспериментальной работе [14] исследовалось влияние температуры газовой среды и температуры горящих угольных частиц (разогретых антрацитовых частиц) на коэффициент аэродинамического сопротивления с погрешностью не более 20%. Температура частиц, взвешенных в

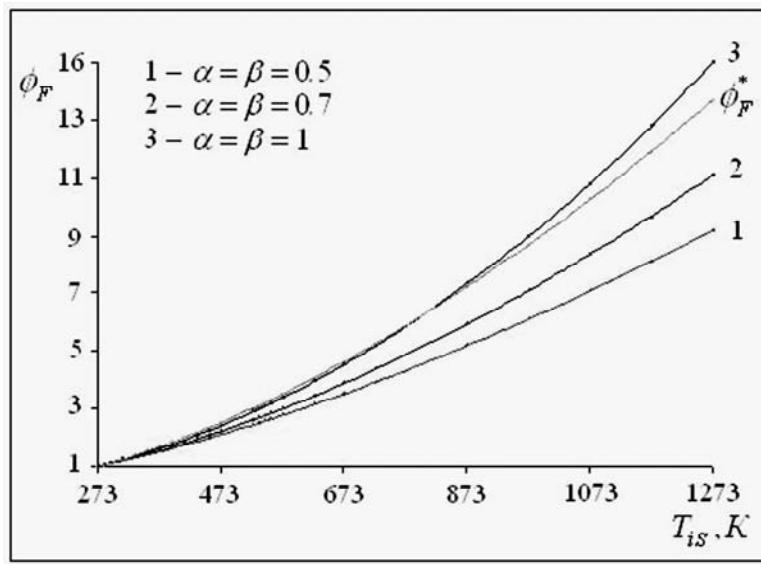


Рис. 3. График зависимости функции  $\phi_F$  от средней температуры поверхности частицы  $T_{is}$ .

нейтральной (азотной) и в окислительной (воздушной и кислородной) газовой среде, изменялась от  $20^0C$  до  $800^0C$ . Размеры угольных частиц в опыте менялись в пределах от 0,1 м.м. до 1,0 м.м.

В частности, если на частицу падает поток монохроматического излучения (длина волны  $\lambda_0$ ) интенсивностью  $I_0$ , то поглощаемая ею энергия равна  $\pi R^2 I_0 K_D$ , где  $R$  — радиус частицы,  $K_D$  — фактор поглощения [13, 15], и эта энергия распределяется по объему сферы равномерно. Сферу можно считать равномерно нагретой. Это допущение справедливо в том случае, если коэффициент теплопроводности частицы много больше коэффициента теплопроводности внешней среды и  $\lambda_0 >> R$ . В экспериментальной работе [14] была предложена формула расчета коэффициента аэродинамического сопротивления частицы в неизотермических условиях

$$C_F^* = \frac{52}{Re} \left( \frac{T_0}{T_{e\infty}} \right)^m = \frac{\phi_F^*}{Re}, \quad \phi_F^* = 52 \left( \frac{T_0}{T_{e\infty}} \right)^m,$$

где  $m = 1, 7$ ,  $T_0$  — температура поверхности частицы.

Если привести формулу (2.16) к аналогичному виду, то она примет вид:

$$C_F = \frac{\phi_F}{Re}, \quad \phi_F = 52 f_\mu t_{eS}.$$

На рис. 3 проведено сравнение коэффициентов  $\phi_F$  и  $\phi_F^*$  в интервале температур от  $273^0K$  до  $1273^0K$ . В диапазоне температур от  $273^0K$  до  $873^0K$  значения коэффициентов практически совпадают, а в диапазоне от  $873^0K$  до  $1273^0K$  различие с экспериментальными данными составляет до 15%.

**Заключение.** Получены аналитические выражения для силы, действующей на нагретую твердую частицу сферической формы, а также и для скорости ее движения в поле силы тяжести при произвольных относительных перепадах температуры. Указанные выражения являются аналогом формул Стокса.

Проведенный с помощью полученных формул численный анализ показал, что сила и скорость гравитационного движения существенно зависят от средней температуры поверхности частицы и показателей вязкости  $\alpha$  и теплопроводности  $\beta$ . Сравнение полученных результатов с экспериментом показало, что различие с экспериментальными данными (относительная погрешность) составляет не более 10%.

### Литература

1. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой жидкости. – М.: Наука, 1970.
2. *Ханнель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1960.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. – М.: Наука, 1986.
4. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: ОНТИ, 1965.
5. *Петкевич В.В.* Основы механики сплошных сред. – М.: УРСС, 2001.
6. *Победря Б.Е., Георгиевский Д.В.* Основы механики сплошных сред. Курс лекций. – М.: Физматлит, 2006.
7. *Бретшнейдер С.* Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. – М.: Химия, 1966.
8. *Варгафтик Н.Б.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. – М.: Наука, 1977.
9. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. – М.: Мир, 1967.
10. *Найфе А.* Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984.
11. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976.
12. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Иностр. лит-ра, 1958.
13. *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. – М.: Мир, 1986.
14. *Бабий В.И., Иванова И.П.* Аэродинамическое сопротивление частицы в неизотермических условиях. – М.: Теплоэнергетика, 1965.
15. *Береснев С.А., Кочнева Л.Б., Суетин П.Е.* Оптика атмосф. и океана. – 2002. – Т. 15. – С. 5-6.

**About some features of motion of the heated up firm spherical particles in viscous not isothermal gaseous environments**

N.V.Malay, N.N.Mironova, A.V.Glushak

The mathematical method of the decision of the of Nave-Stokes equation linearizable on speed is solved in view of dependence. Factors of molecular carry (viscosity, heat conductivity), density of the gaseous environment from temperature have been taken into account. Using found the decision, the problem of heating's influence of a particle's surface on force and speed of its gravitational motion is considered. By motion's consideration it was supposed, that average temperature of surface of the particles can differ essentially from temperature surrounding it sphere. Numerical estimations have shown, that having heated surfaces of a particle influences essentially on a gravitational falling force, resistance and speed. Carrying out comparison with the known experiment data has shown a divergence no more than 10