

А.П. Богомолов



Богомолов
Алексей Павлович

22.10.1922–11.05.2006

Родился 22 октября 1922 года в селе Николаевка Пресновского района Северо-Казахстанской области. Окончил физико-математический факультет Омского государственного педагогического института.

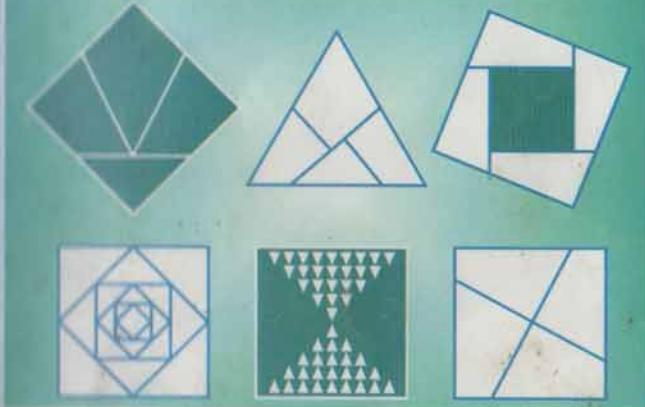
Учитель математики. Отличник народного просвещения СССР, учитель-методист. Трудовой стаж 52 года.

Участник Великой Отечественной войны. В боях за Родину был ранен четыре раза.

Государственные награды: орден Красной Звезды, орден Отечественной войны, орден Ленина, орден Трудового Красного Знамени; медали за участие в боевых действиях во время Великой Отечественной войны, медали за трудовую деятельность.

МАТЕМАТИКА

...ХАОС, ИДЕЯ, ТВОРЕНИЕ



А.П. Богомолов

МАТЕМАТИКА

Опыт нетрадиционного подхода
к преподаванию в средней школе

*Рекомендовано Министерством
образования и науки
Республики Адыгея*

Майкоп
Адыгейское республиканское книжное издательство
2009

УДК 373.5.026.9:51
ББК 74.262.21
Б 74

Ответственный редактор канд. физ.-мат. наук, профессор
Х. М. Андрухаев

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доцент **Д. С. Ушхо**

Богомолов А. П.

Б 74 Математика. Опыт нетрадиционного подхода к преподаванию в средней школе.– Майкоп: Адыг. респ. кн. изд-во, 2009.– 80 с.

Методико-дидактическое пособие, составленное учителем-методистом, адресовано учителям математики, работникам НО, методистам кабинетов институтов повышения квалификации учителей, учащимся старших классов и, вообще, всем, кто интересуется способами отыскания решений нестандартных задач, кто желает повысить свою математическую культуру.

В этом пособии вместо традиционного объяснительно-иллюстративного метода изучения нового материала предлагается метод оживленного диалога в форме вопросно-ответной беседы с элементами проблематики («озадачивания») и краткими исследовательскими экскурсами. Приводится решение достаточно большого числа нешаблонных задач. Все это способствует оттачиванию многовариантного математического мышления, дисциплинирует учащихся на уроке и повышает интерес к предмету.

Учитель, владеющий таким методом, успешно развивает репродуктивную и творческую активность у большинства учащихся класса, что, в свою очередь, способствует результативному формированию творческих способностей человека, способного видеть, ставить и решать нестандартные научные и другие проблемы.

Вместо предисловия

Успешное выполнение заданий по математике на выпускном ЕГЭ – есть следствие достаточно высокого уровня математического развития выпускников. Как достигнуть такого уровня? (И не для того, чтобы только сдать ЕГЭ!)

Ответ однозначный: надо развивать репродуктивную и творческую активность учащихся. Это вполне убедительно показано в данном пособии на примере изучения темы «Сумма углов треугольника», а также в процессе отыскания решений нестандартных задач и в других вопросах.

Своей конкретностью, практической направленностью это пособие, написанное простым без абстрактно-теоретических строгостей языком, выгодно отличается от многих печатных изданий на эту тему, нередко публикуемых в периодической печати.

Л.Н.Толстой как-то обронил: «Всякая метода хороша, если ею владеет учитель». Более современно это будет звучать несколько иначе: «Всякая метода, развивающая интеллект ученика, хороша, если ею владеет учитель».

Известно, что эта «метода», которую имел в виду Л.Н.Толстой, должна основательно учитывать развитие устойчивого интереса к предмету, «ибо те знания прочны, которые усвоены с интересом». Этого можно достигнуть с помощью «Беседы», о сущности которой будет идти речь в этом пособии. Конечно, учителю в достижении всеобщего внимания школьников к теме урока, трудно «тягаться» с юмористами, за последнее время заполонившими телевидение и несильно создающими, особенно у учащихся, мягко говоря, легковесное, не совсем серьезное, отношение к делу. Но все же «Беседа», в некоторой степени, призвана противостоять этому чрезмерному, весьма нежелательному, явлению.

Автор пособия на практике пропагандирует пропедевтику, т.к. она формирует ориентированочную основу в отыскании идеи решения проблемы и, тем самым, сокращает время «обдумывания», что позволяет решать на уроках трудные и даже олимпиадные задачи.

И тут в мой разум грянул блеск с высот,
Неся свершенье всех его усилий...

Алигьери Данте
«Божественная комедия»

К вопросу об активизации процесса изучения математики в средней школе

Широкое внедрение в работу школ предметных олимпиад, введение специализированных классов по некоторым дисциплинам, работа предметных факультативов, кружков, проведение вечеров, КВН, выпуск стенгазет – все это, несомненно, благоприятно оказывается на повышении качества знаний учащихся, создает внутришкольную атмосферу увлеченности учебными делами, стимулирует в некоторой степени тягу к осмысленному, прочному усвоению знаний. В результате кропотливой систематической и, я бы сказал, подвижнической работы учителей-предметников с учащимися, подающими надежды на успешное участие в олимпиадах, в школах появились свои герои – призеры олимпиад – объекты восхищения учителей, учащихся, родителей. Учащиеся, добившиеся успехов в олимпиадах, подают пример добросовестного отношения к учению. Но это положительное, в общем-то, явление в школе, к сожалению, не решает полностью фундаментальной задачи – повышения уровня знаний всех учащихся класса, школы и не только в силу некоторых негативных последствий, но и ввиду объективных причин, а именно: слишком много времени учитель-предметник тратит на индивидуальную подготовку олимпийцев, и даже на уроках больше внимания уделяет этой категории учащихся. Это и понятно, ведь призеры олимпиад повышают деловой престиж учителя. Другие учащиеся класса, оставаясь в тени, чувствуют себя на уроках, мягко говоря, не совсем в своей тарелке. Лучше, если бы успехи отдельных учащихся на олимпиадах являлись следствием высокого уровня преподавания и высокого качества знаний всех учащихся. Нередко работа учителя оценивается по успехам одного – двух олимпийцев, что, конечно, не совсем правильно. Это создает некоторые трения в педагогическом коллективе школы. Оценка мастерства учителя будет более объективной, если она будет осуществляться по среднему баллу за проверочную работу за четверть, за полугодие. В этих условиях учителя-предметники будут искать и практиковать методические приемы, активизирующие учащихся всего класса на всех стадиях урока, т.е. учитель будет работать одинаково интенсивно со всеми учениками. На таких уроках, где

все учащиеся в равной степени вовлечены в познавательный процесс, равнодушных и, тем более, пассивных не бывает, так как повышается интерес к предмету, все учащиеся горят желанием отвечать на вопросы учителя, который удачно «озадачивая» учащихся, ведет последних к эффективному раскрытию темы урока. Основная цель учителя в процессе преподнесения знаний – развитие навыков предметного мышления. Учитель истории развивает историческое мышление, географии – географическое, математики – математическое мышление и т.д. В конечном итоге интеллект учащегося получает всестороннее развитие.

В дальнейшем будем касаться только учебного процесса на уроках математики.

Не так просто успешно сдать выпускной экзамен по математике в 11-м классе по материалам ЕГЭ! Выпускник, не владея навыками решения нестандартных задач, будет испытывать на экзамене почти непреодолимые затруднения. Вполне удачно сложатся дела у тех учащихся, которые спрашиваются со всеми задачами группы А и с некоторыми – группы В. Задачи же группы С – нестандартные и трудные. Для их решения надо, помимо глубоких и твердых знаний, иметь еще и навыки в отыскании подходов к решению задач, иногда по трудности не уступающих задачам, предлагавшимся на математических олимпиадах. Само собою разумеется, что экзаменующийся должен безупречно владеть письменной математической речью, чтобы свое решение кратко, но полно обосновать. Считаем, что это нововведение в школьную жизнь является чрезвычайно необходимым, так как стимулирует качественную подготовку учащихся по математике на всем протяжении ее изучения в средней школе, а также акцентирует внимание учителей на повышении уровня математического развития учащихся, проверка которого осуществляется выполнением тщательно подобранных заданий ЕГЭ. Немаловажный аспект имеет ЕГЭ и в нравственно-этическом плане, кардинально учитывает индивидуальный подход к оценке знаний учащихся, как говорится, «каждому свое».

С введением ЕГЭ Министерство образования и науки осуществило мероприятие огромной государственной значимости, т.к. создаются реальные условия появления и развития нового поколения людей, призванных повысить положительный потенциал общества. Это шаг к подлинному процветанию России.

Исходя из своего личного опыта работы, из опыта работы лучших учителей математики, чьи питомцы успешно продолжают обучение на механико-математических факультетах престижных университетов, приходим к заключению: наиболее плодотворным преподаванием является такое, когда одновременно развиваются репродуктивная и творческая активность учащихся. Эти виды активности учитель развивает при доказательстве новой теоремы, при повторении ранее изученного материала с целью его закрепления и углубления, при выполнении упражнений, предшествую-

ших раскрытию новой темы (пропедевтика), при мыслительном процессе отыскания возможных путей - подходов, способствующих решению трудной многофункциональной нестандартной задачи. Успешное изучение школьной программы по математике зависит также от удачной структуры урока, учитывающей специфические особенности изучаемой темы. Поэтому актуально звучит призыв: «*Каждой теме - свою структуру урока*».

Опуская детали структуры урока, на котором изучается новый материал, остановимся на главных моментах.

1. Пропедевтика. Здесь рассматриваются вопросы, способствующие усвоению новой темы; учащиеся, отвечая на вопросы учителя, настраиваются на проявление умственного усилия, столь необходимого в познавательном процессе.

2. Познавательный процесс. Процесс осуществления вопросно-ответной формы обучения с привлечением элементов проблематики и кратких исследовательских экскурсов (кратко – «Беседа»).

3. Применение нового знания. Применение знаний к решению практических жизненно важных задач, а также задач, решение которых основано на абстракции нового знания.

4. Домашнее задание. Задание, выполнение которого предусматривает привлечение идей инновационного обучения (развитие способностей к саморазвитию путем самообразования).

5. Поурочный балл. Балл, который может быть выставлен в журнал на следующем уроке с учетом выполнения домашнего задания.

Привить учащимся твердые навыки в самостоятельном отыскании решений нестандартных задач, в формулировке и доказательстве новых теорем и, вообще, в открытии или переоткрытии математических предложений – одна из первейших задач учителя.

Отысканию подходов к решению математических проблем разной степени сложности способствуют *неполная индукция, аналогия, использование математических моделей*, имитирующих протекание процессов в реальном или абстрактном мире, выполнение пропедевтических упражнений, проливающих свет на решение проблемы, наконец, способствуют и некоторые психологические приемы, в том числе объемное «вынашивание» самой сути решаемой проблемы.

Оттачиванию математического мышления способствуют решение задачи разными способами (А.Дистервег), отыскание суперрациональных решений, составление задач, разбор софизмов, парадоксов, решение логических задач алгебраическим способом (с помощью уравнений, неравенств) и методом исключения невозможного.

Приводим примерные конспекты нескольких уроков, посвященных изучению некоторых тем школьного курса геометрии в седьмом классе. Эти темы трудны в методическом отношении, так как при их изучении осуществляется обоснованный переход от объектов реального мира к объек-

там абстрактного мира геометрии, являющегося математическим отражением закономерностей окружающей действительности. Предполагается, что учебная тема, спланированная для изучения на данном уроке, раскрывается в живой вопросно-ответной беседе с элементами проблематики и краткими исследовательскими экскурсами. В процессе урока учащиеся отвечают на вопросы, требующие проявления репродуктивной и творческой активностей.

В тексте приведены предполагаемые ответы учащихся. Не всегда удается с первого раза получить удачный ответ. Проявляя педагогический такт, учитель с помощью детализированных вопросов добивается желаемого ответа.

Пропедевтика какой-либо изучаемой темы неоднозначна: она зависит от уровня математического развития класса, от мастерства учителя и других причин.

Вопросно-ответная беседа на тему «Угол»

Занятие на тему «Угол» согласно предлагаемой структуры урока, несколько отличающейся от традиционной, начинаем с пропедевтических вопросов.

1. Пропедевтика

Какие первичные объекты из абстрактного мира геометрии вы знаете?

Ответ. Я знаю первичные объекты из абстрактного мира геометрии – это точка, прямая (линия) и плоскость.

Почему эти объекты называются первичными в абстрактном мире геометрии?

Ответ. Потому что путем объединения этих объектов по разным «сценариям» получают более сложные объекты (фигуры) из того же мира.

Приведите примеры.

Ответ. Фигуры, являющиеся объектами абстрактного мира геометрии, как-то: луч, угол, ромб, пирамида, двугранный угол, октаэдр, шар, конус и другие плоские и пространственные фигуры являются сложными образованиями из первичных объектов, то есть они состоят из точек, частей прямой (линий) и частей плоскости.

Правильно, но не совсем убедительно. Кто добавит?

Ответ. И еще потому, что нельзя ответить на вопрос: «Что называется точкой?», «Что называется прямой линией?», «Что называется плоскостью?». Другими словами, эти объекты абстрактного мира геометрии являются неопределеняемыми.

Какие объекты реального мира дают представление о точке, прямой и плоскости?

Ответ. О точке дают представление зерна проса, мака, звезды бесконечного Мироздания, видимые в безоблачную ночь, наконец, след от мела в виде маленького кружочка, оставленного на доске.

Названы удачные объекты. Действительно, отбрасывая физические, химические и некоторые математические (размеры) особенности этих объектов, можно создать умозрительный образ точки как абстрактного объекта, не имеющего ширины, длины и высоты.

А как насчет прямой и плоскости?

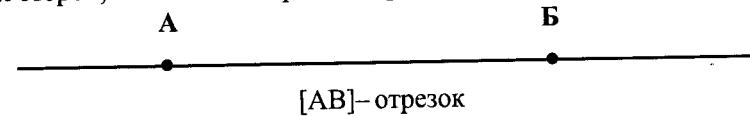
Ответ. О прямой дает представление тую натянутая нить, струна гитары, луч света, проникающий в затемненную комнату через небольшое круглое отверстие в закрытой ставне, тонкие высокие деревья в сосновом бору, след от карандаша на бумаге, получаемый с помощью линейки, след, оставляемый мелом также с помощью линейки на доске и т.д. О плоскости дает представление поверхность воды в непроточном водоеме в безветренную погоду, поверхность хорошо отполированного зеркала, поверхность крышки стола и т.д.

Конечно, чтобы «увидеть» абстрактный объект, например, прямую линию в уме, необходимо представить «нечто», имеющее только длину; плоскость – «нечто», имеющее длину и ширину, но лишенное толщины (высоты); при этом надо проявлять значительные умственные усилия. Затем, с помощью упражнений основательно закрепить достигнутые результаты.

Восстановим в памяти определения некоторых объектов абстрактного мира геометрии.

Определение отрезка прямой.

Объединение части прямой и двух ее точек, ограничивающих эту часть с двух сторон, называется отрезком прямой.



Отрезок прямой характеризуется длиной.

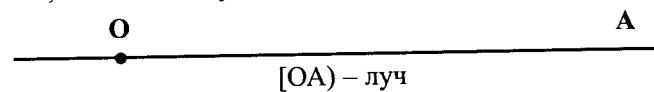
Что вы можете сказать о записи (AB)?

Ответ. Это запись отрезка, концы которого ему не принадлежат. Представьте себе отрезок, у которого нет концов! У прямой линии тоже нет начала и нет конца.

Запись (AB) есть обозначение прямой АВ т.е. $(AB) \equiv AB$.

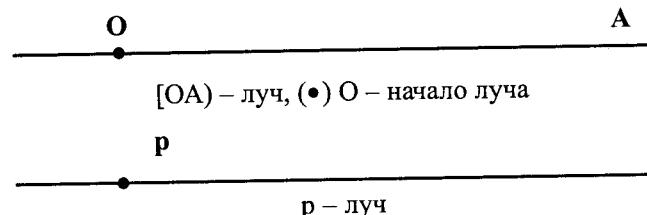
Определение луча.

Объединение части прямой и точки, ограничивающей эту часть с одной стороны, называется лучом.



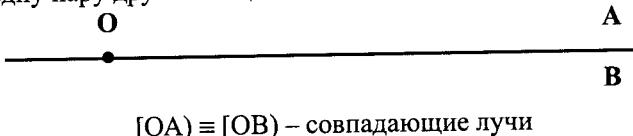
Определение начала луча и его обозначение.

Ответ. Точка, ограничивающая прямую с одной стороны, называется началом луча. Луч обозначается латинскими буквами: двумя большими или одной малой.



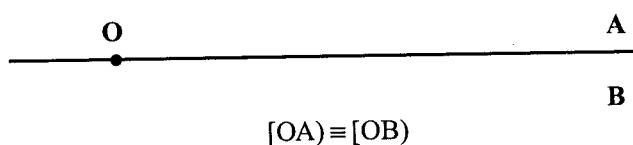
Определение совпадающих лучей.

Два луча называются совпадающими, если они имеют общее начало и хотя бы одну пару других общих точек.



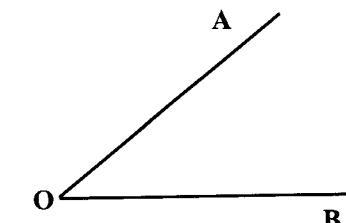
Как на плоскости могут располагаться два луча с общим началом?

Ответ. Два луча с общим началом могут совпадать.



Далее, два луча с общим началом могут не совпадать и не лежать на одной прямой. Кто изобразит эту фигуру?

Ответ.



Два луча с общим началом, наконец, могут лежать на одной прямой, но не совпадать.

На доске надо изобразить этот случай взаимного расположения двух лучей.

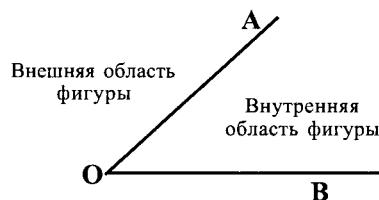
Ответ.



[OA); [OB)

2. Познавательный процесс

Рассмотрим фигуру, состоящую из двух лучей с общим началом и не лежащих на одной прямой.



Эта фигура разбивает плоскость на две области, границами которых являются лучи, исходящие из одной точки.

Область называется внутренней, если отрезок прямой с концами в произвольных точках этой области, не пересекает ее границу. В противном случае не все точки плоскости принадлежат одной области.

Общая граница этих областей не принадлежит никакой области.

Объединение внешней и внутренней областей фигуры и самой фигуры называется полной областью фигуры, т.е. это есть множество всех точек плоскости.

Что можно сказать о внутренней области двух совпадающих лучей?

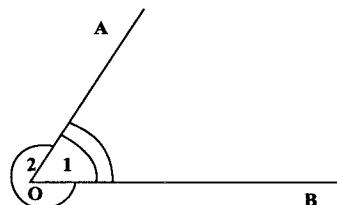
Ответ: Внутренняя область двух совпадающих лучей не содержит своих границ, что следует из ее определения, поэтому она не содержит ни одной точки плоскости, т.е. она представляет собой пустое множество точек.

А если внешняя область двух совпадающих лучей содержит свою границу, то что можно о ней утверждать?

Ответ. О ней можно утверждать, что она совпадает с полной областью этих совпадающих лучей.

Определение угла.

Объединение двух лучей, имеющих общее начало, и одной из двух областей этих лучей называется углом. Общее начало лучей называется вершиной угла, а сами лучи – сторонами угла.



Кто повторит определение угла?

Учащиеся повторяют определение угла до тех пор, пока самый слабо усваивающий новый материал ученик, не сформулирует своими словами бегло, без запинки это определение.

Какие углы соответствуют паре лучей, о которых говорится в определении угла?

Ответ. Определение угла не однозначно, т.к. ему удовлетворяют два угла: один угол – объединение этой пары лучей и ее внутренней области ($\angle 1$); другой угол – объединение этой же пары и ее внешней области ($\angle 2$).

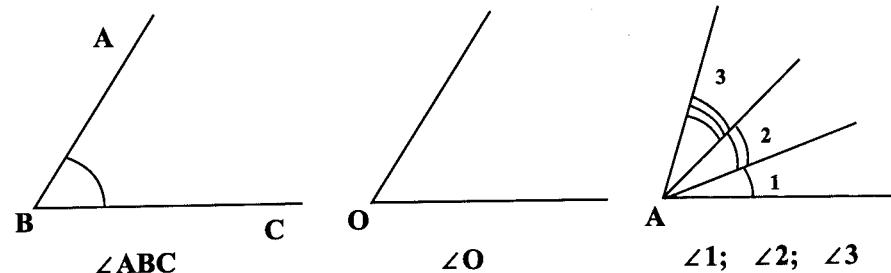
Какой угол следует брать во внимание?

Ответ. Это зависит от условия решаемой задачи.

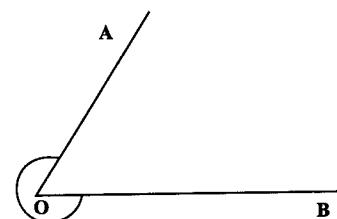
Надо полагать, что есть задачи, условиям которых удовлетворяют оба угла.

Как обозначается угол?

Ответ. Чаще всего угол обозначается тремя большими латинскими буквами, например, $\angle ABC$, причем обозначение вершины угла находится на втором месте. Иногда угол обозначается одной большой латинской буквой или одной цифрой.



Если условию задачи удовлетворяет только один угол, то этот угол на рисунке отмечается малой дугой с концами на сторонах угла и полностью лежащий в соответствующей области.

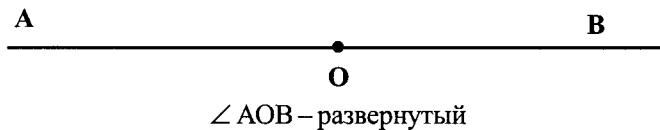


$\angle AOB$ – удовлетворяет условию задачи

Величина угла зависит от «разворота» его сторон относительно вершины, но не зависит от их длины.

Определение развернутого угла.

Объединение двух несовпадающих лучей с общим началом и лежащих на одной прямой с любой из двух областей этих лучей называется развернутым углом.

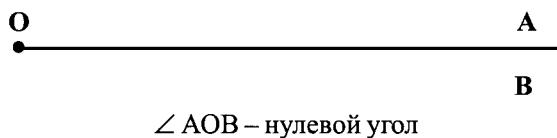


Кто скажет, почему в определении развернутого угла не конкретизируется область, с которой объединяются два луча с общим началом и лежащих на одной прямой?

Ответ. Потому что внутренняя и внешняя область в этом случае равновозможны. Убеждаемся в этом путём перегибания чертежа по (AB). Поэтому величина развернутого угла сохраняется в любом случае.

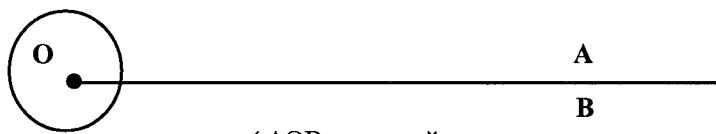
Определение нулевого угла.

Объединение двух совпадающих лучей и внутренней их области, представляющей собой пустое множество точек области, называется нулевым углом.



Определение полного угла.

Объединение двух совпадающих лучей и внешней области представляющее собой полную область совпадающих лучей, называется полным углом.



Возьмём два совпадающих луча. Будем вращать прямую, на которой лежат совпадающие лучи, например, по часовой стрелке вокруг их начала. Когда прямая сделает один оборот, то она займёт своё исходное положение, т.е. повернётся на полный угол, что не вызывает сомнений, т.к. принадлежность полной области двум совпадающим лучам – определяющий признак полного угла, который изображают эти лучи.

Любая точка плоскости, как геометрическая фигура, имеет полную область, принадлежащую этой точке, а поэтому может считаться вершиной полного угла.

Определение развернутого, нулевого и полного угла и их умозрительные образы учащиеся прочно усваивают непосредственно на уроке путём выполнения целенаправленных упражнений, которые учитель составляет сам.

Примечание. В действующем учебнике геометрии нет определений нулевого и полного угла, что нередко осложняет доказательство теорем и решение одной задачи разными способами. Пусть читатель не смущается употреблением терминов теории множеств – объединение и пустое множество. Это не противоречит дидактическому принципу «опережающего обучения». Семиклассники не испытывают затруднений в их понимании. Этому способствуют раскрытие этих терминов на уровне непересекающихся множеств и жизненной интуиции учащихся.

На изучение темы «Угол» с основательным и углублённым повторением ранее изученного материала о первичных, неопределляемых объектах абстрактного мира геометрии, автор рекомендует отводить не менее двух уроков. За это время надо не только добиться, чтобы все учащиеся твердо усвоили новые определения, законспектированные в тетрадях, но и получить навыки в умозрительном представлении геометрических объектов (фигур), что бесспорно скажется на качественном усвоении последующего программного материала и скорости его изучения.

Домашнее задание:

1. Что вы можете сказать о первичных объектах абстрактного мира математики?
2. Определение угла.
3. Повторите по учебнику параграф 1; п. 1;3.
4. Решите задачи №№ 11, 16, 40.
5. Научитесь представлять в уме неопределываемые объекты и различные виды углов.
6. Изобразите на бумаге в виде отрезков, соблюдая их соразмерность, путь от своего дома до школы, до гастронома. (1 клетка – квартал).

Метод рассказа (лекция), с помощью которого учитель преподносит новый материал, популярностью среди современных школьников не пользуется (скучно). Только оживлённая диалогическая беседа способна пробудить интерес учащихся к изучению новой темы.

Сумма углов треугольника

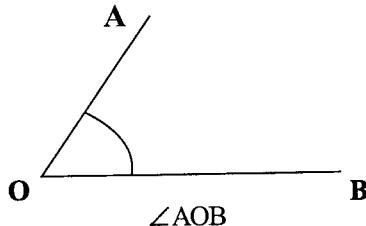
Тему «Сумма углов треугольника» автор данного методико-дидактического пособия раскрывает с помощью все той же вопросно-ответной беседы с привлечением элементов проблематики и кратких исследовательских экскурсов.

Ниже приводится краткий конспект урока, посвященного этой теме.

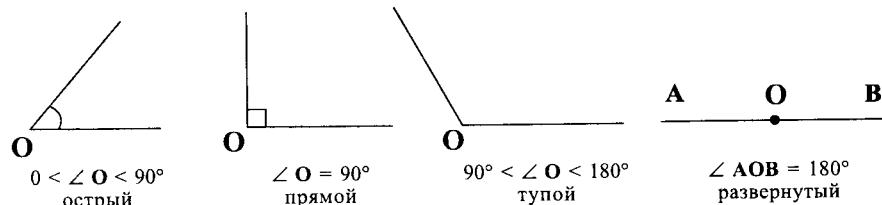
1. Пропедевтика

Определение угла. Виды углов.

Объединение двух лучей, имеющих общее начало, и одной из двух областей этой фигуры, называется углом.



Углы бывают острые, прямые, тупые, развернутые, нулевые и полные.



Определение нулевого угла.

Объединение двух совпадающих лучей с внутренней их областью, представляющей собой пустое множество точек плоскости, называется нулевым углом.



$$[OA] \equiv [OB]$$

$\angle AOB$ – нулевой угол, $\angle AOB = 0$

Определение полного угла.

Объединение двух совпадающих лучей и внешней их области, представляющее собой полную область этих лучей, называется полным углом.

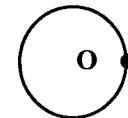


$$[OA] \equiv [OB]$$

$\angle AOB$ – полный, $\angle AOB = 360^\circ$

Можно ли считать любую точку плоскости вершиной полного угла?

Ответ. Можно, так как точка – геометрическая фигура, имеющая полную область.



$\angle O$ – полный

Назовите сумму всех плоских углов с общей вершиной, расположенных в одной плоскости и попарно имеющих только по одной общей стороне.

Ответ. Т.к. объединение внутренних областей этих углов и их сторон, очевидно, есть полная область их вершины, то сумма равна 360° .

Может ли угол какой-либо геометрической фигуры превосходить 360° ?

Ответ. Нет.

Существуют ли фигуры в абстрактном мире геометрии с суммой внутренних углов, выражаящейся любым натуральным числом?

Ответ. Да.

Ответы на два последних вопроса дайте письменно на развернутом листе тетради. Ответы должны быть обоснованы и снабжены рисунками. Подумайте.

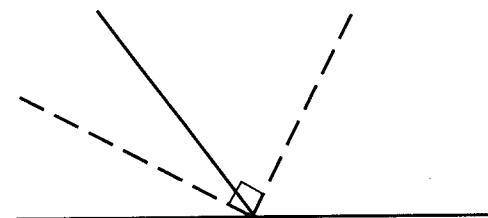
Свои решения сдайте мне не позже двух последующих уроков геометрии.

Величина угла между биссектрисами углов замечательного двугольника.

Ответ. Замечательный двугольник – это смежные углы. Биссектрисы углов замечательного двугольника взаимно перпендикулярны.

Кто даст суперкраткое доказательство?

Ответ. Сумма углов 180° , а сумма их половин, очевидно, 90° .



Признаки параллельности двух прямых.

Нет специального прибора, устанавливающего, что две прямые параллельны. Такой прибор, в принципе, не сможет существовать, т.к. прямые – бесконечны. Но есть признаки, научно обоснованные, в абстрактном мире математики, по которым точно устанавливают, что прямые параллельны.

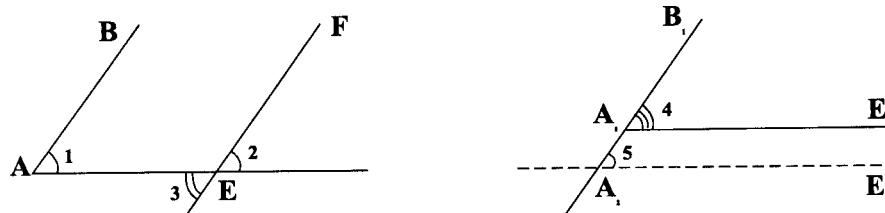
Ответ. Если накрест лежащие или соответственные углы равны, или сумма односторонних углов равна 180° , то две прямые, пересеченные третьей, параллельны.

Обратные теоремы.

Ответ. Если две параллельные прямые пересечь третьей, то накрест лежащие углы будут равны, соответственные углы будут равны, а сумма односторонних углов окажется равной 180° . Демонстрация этих теорем по чертежам на доске.

Как практически построить угол, равный данному?

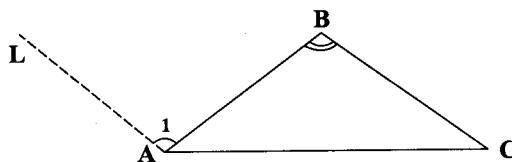
Ответ. Для этого достаточно построить угол, соответственный данному, или угол, накрест лежащий по отношению к данному, или построить угол с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами.



Построение выполняется с помощью линейки и чертежного угольника. Строим: $EF \parallel AB$, тогда $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$.

$A_1B_1 \parallel AB$ и $A_1E_1 \parallel AE$, тогда $\angle 4 = \angle 1$, т. к. $\angle 1 = \angle 5 = \angle 4$, что следует из теорем, обратных признакам.

Задача. Дан $\triangle ABC$, построить угол с вершиной в $(\bullet) A$ и равный $\angle B$.



Строим: $AL \parallel BC$, тогда $\angle 1 = \angle B$ (как накрест лежащие углы при $AL \parallel BC$ и секущей AB).

2. Познавательный процесс

Сумма углов треугольника давно известна. Еще в VI в до н.э. Пифагор доказал соответствующую теорему. Но нас, ребята, интересует сам процесс постижения истины, известной человечеству со времен античного мира.

Итак, как Пифагор догадался, что сумма углов треугольника равна 180° ?

Ответ. Он построил на песке (пергаменте, восковой дощечке) треугольник. Измерил его углы, сложил и получил число, близкое к 180° .

Еще как мог поступить Пифагор?

Ответ. Он изготовил три модели одного и того же треугольника. Расположил эти модели в одной плоскости и, объединив их так, что разные углы моделей треугольников имели бы одну и ту же вершину, получил угол, напоминающий развернутый. Значит, сумма углов треугольника близка к 180° . Сказанное демонстрируем на магнитной доске.

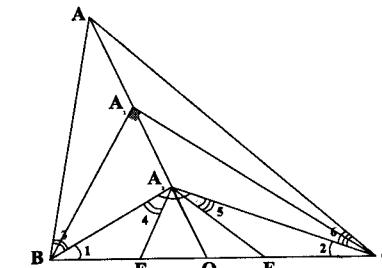
Вполне возможен и третий путь.

Перед вами, ребята, динамическая модель треугольника. Вообразите, что вершина A движется по отрезку AO , стремясь совпасть с $(\bullet) O \in BC$. Что вы наблюдаете?

Ответ. Угол A увеличивается, а углы B и C уменьшаются.

Какие виды углов возникают при вершине $\angle A$, если $0 < \angle A < 90^\circ$?

Ответ. Эти виды углов характеризуются такими неравенствами:



$$0 < \angle A < 90^\circ; 90^\circ \leq \angle A \leq 180^\circ,$$

Нас, ребята, как я уже отмечал, интересует сумма углов треугольника. Какой уместно задать себе вопрос?

Ответ. Как ведет сумма переменных углов треугольника?

Правильно, этот вопрос закономерен. Кто выскажет мнение?

Ответ. Я не могу точно сказать, но считаю, что сумма переменных углов в динамической модели треугольника остается постоянной, т.е. $\angle A + \angle B + \angle C = Const$.

Предпримем элементарное математическое исследование этого вопроса.

Строим: $A_2E \parallel AB$ и $A_2F \parallel AC$ тогда $\angle EA_2F = \angle A$.

Имеем очевидные равенства:

$$\begin{aligned} \angle B - \angle 1 &= \angle 3 = \angle 4 \\ + \angle A - \angle A_2 &= \angle 4 - \angle 5 \\ \angle C - \angle 2 &= \angle 6 = \angle 5 \end{aligned}$$

$$\angle B - \angle 1 + \angle A - \angle A_2 + \angle C - \angle 2 = \angle 4 - \angle 4 - \angle 5 + \angle 5 = 0,$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle 1 + \angle A_2 + \angle 2.$$

Но углы $\angle 1$, $\angle 2$ и $\angle A_2$ – это углы нового треугольника BA_2C .

Значит, сумма переменных углов в треугольниках не изменилась, она осталась прежней, т.е. действительно $\angle A + \angle B + \angle C = Const$.

Мы, ребята, получили интересный математический факт, присущий рассматриваемой модели треугольника, и его обосновали. Так, в основном, делаются и другие открытия новых объективных математических истин.

Приведем в систему наши наблюдения:

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \angle A \rightarrow 180^\circ \\ \angle B \rightarrow 0, \\ \angle C \rightarrow 0. \end{array} \right. \\ \angle A + \angle B + \angle C \rightarrow 180^\circ$$

Анализируя ваши, ребята, догадки и результаты исследования с помощью динамической модели треугольника, приходим к однозначному выводу: «Сумма углов треугольника равна 180° ».

А как строго доказать?

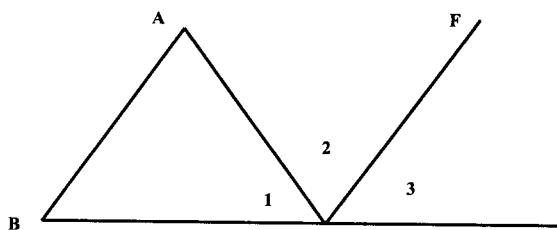
Ответ. Надо отвлечься от моделей и иметь дело только с геометрическими объектами из абстрактного мира математики.

А все-таки, как это сделать?

Ответ. Надо найти геометрическую сумму углов треугольника. Для этого необходимо построить все три угла треугольника с помощью циркуля и линейки так, чтобы они имели общую вершину и не менее чем по одной общей стороне.

Кто выполнит суперрациональное построение?

Ответ. Я беру вершину $\angle C$ треугольника ABC и строю $CF \parallel BA$ и $CE \parallel BC$.



$\angle A = \angle 2$ (накрест лежащие при $BA \parallel CF$ и секущей AC),

Имеем: $\angle B = \angle 3$ (соответственные при $BA \parallel CF$ и секущей BE),

$\angle C = \angle 1$

$$\begin{aligned} \angle A + \angle B + \angle C &= \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle BCE = 180^\circ, \Rightarrow \\ &\Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ, \text{ ч.т.д.,} \end{aligned}$$

т.к. найдена геометрическая сумма углов треугольника; она оказалась равной сумме углов замечательного двуугольника!

Вопросы есть?

Ответ: Да, есть. Где надо брать $(\bullet)O \in BC$?

Положение $(\bullet)O$ на отрезке BC не сказывается на результатах исследования, т.к. $(\bullet)O$ взята на BC произвольно.

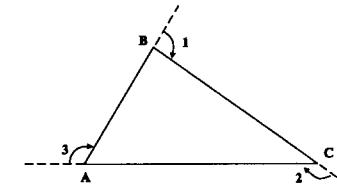
Многие из вас заслуживают высокого поурочного балла, который я выставлю в журнал на следующем уроке геометрии с учетом выполнения домашнего задания. Учитывая достаточно массовую активность учащихся, в специальном закреплении новый материал не нуждается. Зато познакомимся с другим способом доказательства этой теоремы.

Построив при какой-либо вершине угла треугольника два других его угла, нам удалось доказать, что сумма его углов равна 180° .

Построением прямой, параллельной стороне треугольника и проходящей через вершину противоположного угла, доказывается эта же теорема традиционным способом, существующим свыше двух тысяч лет и изложенным в действующем учебном пособии. В обоих случаях доказательства основываются на аксиоме параллельных прямых и теоремах о параллельности двух прямых. А нельзя ли доказать теорему о сумме углов треугольника без привлечения концепции параллельности прямых?

Оказывается можно.

Приведем еще один способ доказательства.



Осуществим поворот прямой AB , на которой лежит сторона AB , около $(\bullet)B$ по часовой стрелке на величину внешнего угла 1; тогда AB совпадает с BC .

Теперь $BC \equiv AB$ повернем на величину внешнего угла 2 около $(\bullet)C$, являющейся вершиной угла ΔABC , получим $CA \equiv BC \equiv AB$.

CA в свою очередь поворачиваем около $(\bullet)A$ на $\angle 3$, тогда CA совпадет с AB , т.е. имеем $CA \equiv BC \equiv AB$. Это означает, что угол поворота прямой, сохранившей ориентацию, равен 360° . Так как повороты прямой AB совершались последовательно на величины внешних углов треугольника, то

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ$$

т.е. сумма внешних углов треугольника равна 360° .

Далее. Сумма смежных углов при каждой вершине треугольника равна 180° . Всего вершин три, поэтому общая сумма углов 540° , из которых на долю внутренних углов треугольника приходится 180° , ч.т.д.

Это доказательство по строгости не уступает доказательствам признаков равенства треугольников, т.к. прямую (в силу ее бесконечности) можно последовательно вращать около любой ее точки на углы α, β, \dots – результат такой же, как и ее вращение около одной точки на угол, равный $\alpha + \beta + \dots$

Учащиеся с некоторым удивлением воспринимают последний способ доказательства, т.к. традиционный способ им (и не только им) казался незыблемым.

Интуитивно считая справедливым существование у прямой бесконечного числа центров симметрии, около которых совершаются повороты, этот способ, основанный на поворотах прямой, можно применять наравне с традиционным и для доказательства некоторых других теорем геометрии, например, теоремы о сумме углов выпуклого n -угольника.

В самом деле, осуществив последовательные повороты (описанные выше) прямой, на которой лежит какая-нибудь сторона n -угольника, на величины внешних его углов получим общую сумму углов $2dn$, из которой надо вычесть $4d$ (сумму его внешних углов, т.к. сторона n -угольника совершила один оборот).

Имеем $2dn - 4d = 2d(n-2)$, ч.т.д.

Примечание. Интересно отметить, что сумма внешних углов любого выпуклого n -угольника ($n \geq 3$) равна $4d$.

Домашнее задание:

1. Изучите все следствия из теоремы о сумме углов треугольника.
2. Сумма внешних углов треугольника. Докажите соответствующую теорему двумя способами.
3. Выборочно решите три задачи из соответствующего пункта учебника.
4. Изготовьте три модели одного и того же треугольника. Научитесь их так объединять, чтобы получить сумму всех углов одной модели треугольника.

Отыскание способов решения нестандартных задач с помощью эвристической беседы с элементами проблематики

Приводим конспекты таких решений четырех примечательных задач.

Задача 1. Длина каждого ребра треугольной пирамиды SABC равна 1. BD высота ΔABC . Равносторонний треугольник BED лежит в плоскости, образующей угол φ с ребром AC, причем точки S и E лежат по одну сторону от (ABC). Найти расстояние между точками S и E.

(МГУ, мех-мат., вступ. экзамены 1970 г.)

Дано:

SABC – прав. тетраэдр;

AS = 1;

BD \perp AC;

$\hat{(BED)AC} = \varphi$;

ΔBED – равносторонний.

SE - ?

Первый способ решения задачи

1. Пропедевтика

1. Определение угла прямой с плоскостью.

Ответ. Угол между прямой и ее проекцией на плоскость называется углом прямой с плоскостью.

2. Определение перпендикулярности прямой и плоскости.

Ответ. Прямая, перпендикулярная к каждой прямой, лежащей на плоскости, называется перпендикулярной к данной плоскости.

3. Признак перпендикулярности прямой к плоскости.

Ответ. Прямая, перпендикулярная к каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих на плоскости, будет перпендикулярна и самой плоскости.

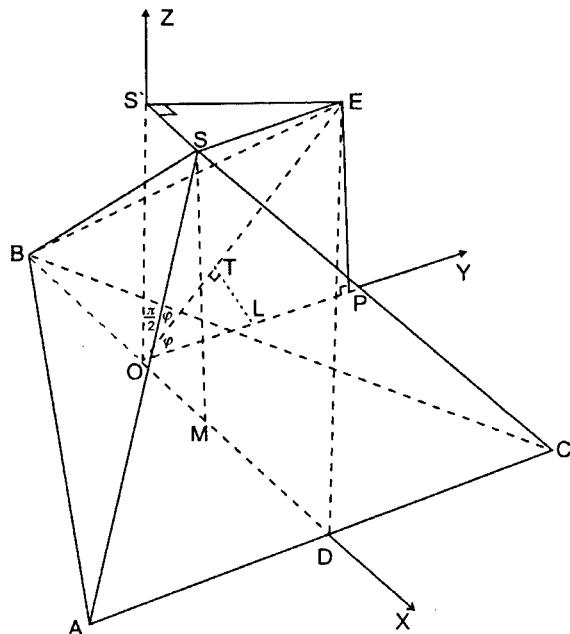
4. Теорема косинусов.

Ответ. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон и косинуса угла между ними, т.е. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

Пояснение к чертежу: $\frac{1}{2}BD = BO = OD$; $(\bullet)M$ – центр ΔABC ; $SM \perp (ABC)$.

$OS' = MS$ и $OS' \parallel MS$; $OL \parallel AC$; $\angle LOT = \varphi$, т.к. $LT \perp (BED)$, OT – проекция OL на (BED) и проекция на OE (они совпадают).

$\angle LOT = \hat{(BED)AC} = \varphi$; (углы с взаимно параллельными и одинаково направленными сторонами).



Чертеж к задаче № 1

2. Поиск решения задачи

У кого есть соображения по решению этой непростой задачи?

Ответ. Необходимо, чтобы отрезок SE был элементом какой-нибудь «работающей» плоской фигуры, например, стороной треугольника.

Что для этого надо предпринять?

Ответ. Для этого надо предпринять целенаправленные дополнительные построения, а именно:

Строим $OS' \parallel MS$ и $OS' = MC$, тогда $SS' \perp SE$, т.к. $SS' \perp (OS'E)$.

Кто продолжит?

В результате построения образовался прямоугольный $\triangle SS'E$, в котором катеты $S'S$ и $S'E$, а, следовательно, и гипотенуза элементарно находятся путем несложных преобразований.

Вычисление OE .

Ответ: Из прямоугольного $\triangle DOE$:

$$OE = DE \cdot \sin 60^\circ = BD \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4},$$

$$OE = \frac{3}{4}.$$

Вычисление OS' .

$$\text{Ответ. } OS' = MS = \sqrt{(BS)^2 - (BM)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}BD\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$OS' = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Вычисление SS' .

$$\begin{aligned} \text{Ответ. } SS' &= MO = OD - MD = \frac{1}{2}BD - \frac{1}{3}BD = BD\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \\ &= BD \cdot \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{3}}{12}, \quad SS' = \frac{\sqrt{3}}{12}. \end{aligned} \quad (1)$$

Вычисление $S'E$.

Ответ. По теореме косинусов из треугольника $OS'E$ находим:

$$\begin{aligned} S'E &= \sqrt{(OS')^2 + (OE)^2 - 2(OS') \cdot (OE) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{3}{4} \sin\varphi} = \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{9}{16} - \frac{1}{2}\sqrt{6}\sin\varphi} = \\ &= \sqrt{\frac{32 + 27 - 24\sqrt{6}\sin\varphi}{48}} = \sqrt{\frac{59 - 24\sqrt{6}\sin\varphi}{48}}, \\ S'E &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{3}(59 - 24\sqrt{6}\sin\varphi)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Вычисление искомого расстояния SE .

Из прямоугольного треугольника $SS'E$ находим с учетом (1) и (2):

$$\begin{aligned} SE &= \sqrt{(SS')^2 + (S'E)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{3}(59 - 24\sqrt{6}\sin\varphi)}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{144} + \frac{1}{48}(59 - 24\sqrt{6}\sin\varphi)} = \sqrt{\frac{3 + 177 - 72\sqrt{6}\sin\varphi}{144}} = \\ &= \frac{1}{12}\sqrt{180 - 72\sqrt{6}\sin\varphi} = \frac{1}{2}\sqrt{5 - 2\sqrt{6}\sin\varphi}. \\ SE &= \frac{1}{2}\sqrt{5 - 2\sqrt{6}\sin\varphi}. \end{aligned}$$

Второй способ решения этой задачи

Кто предложит другое решение?

Ответ. Я думаю, что эту задачу можно решить координатным методом.

Необходимо найти координаты точек S и E .

Найдение координат точки S .

Ответ. Точка S расположена в профильной плоскости, поэтому $Y_s = O$.

$$X_s = OM = \frac{1}{2}BD - \frac{1}{3}BD = BD\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{3}}{12}; \quad X_s = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

$$Z_s = MS = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}BD\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad Z_s = \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad S\left(\frac{\sqrt{3}}{12}; 0; \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Нахождение координат точки E.

Ответ. Точка E расположена во фронтальной плоскости, поэтому $X_E = O$.

Из треугольника POE находим остальные координаты.

$$Y_E = OP = OE \cdot \cos\varphi = \frac{3}{4} \cos\varphi; \quad Y_E = \frac{3}{4} \cos\varphi;$$

$$PE = Z_E = OE \cdot \sin\varphi = \frac{3}{4} \sin\varphi; \quad Z_E = \frac{3}{4} \sin\varphi;$$

$$E\left(0; \frac{3}{4} \cos\varphi; \frac{3}{4} \sin\varphi\right).$$

Наконец, вычисляем искомое расстояние SE.

Ответ. Известно, что расстояние между двумя точками, заданными своими координатами, равно корню квадратному из суммы квадратов разностей одноименных координат этих точек. Поэтому будем иметь:

$$\begin{aligned} SE &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{12} - 0\right)^2 + \left(0 - \frac{3}{4} \cos\varphi\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{3}{4} \sin\varphi\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{144} + \frac{9}{16} \cos^2\varphi + \frac{2}{3} - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3}{4} \sin\varphi + \frac{9}{16} \sin^2\varphi} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{144} + \frac{9}{16} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{6} \sin\varphi} = \\ &= \frac{1}{12}\sqrt{3 + 81 + 96 - 72\sqrt{6} \sin\varphi} = \frac{1}{12}\sqrt{180 - 72\sqrt{6} \sin\varphi} = \\ &= \frac{1}{12}\sqrt{36(5 - 2\sqrt{6} \sin\varphi)} = \frac{1}{2}\sqrt{5 - 2\sqrt{6} \sin\varphi}. \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{1}{2}\sqrt{5 - 2\sqrt{6} \sin\varphi}$.

Что вы можете сказать о двух способах решения этой задачи?

Ответ. Второе решение задачи методом координат является более кратким и даже можно его считать суперрациональным.

Примечание. Эта задача предлагалась на вступительных экзаменах в МГУ на механико-математический факультет в 1970г. Решение автора этой задачи мне неизвестно.

Домашнее задание:

1. Высота треугольной пирамиды, у которой плоские углы при вершине прямые, проектируется в ортоцентр основания. Докажите двумя способами: традиционным и методом векторов.

2. Докажите, что $-\ln \ln \underbrace{e \sqrt{e} \dots \sqrt[n]{e}}_n = n (n \in N)$.

3. Вычислите площадь параболического сегмента.

Задача 2. При каком натуральном a число $a^2 + a + 2004$ окажется точным квадратом?

Первый способ решения задачи

1. Пропедевтика

1. Вычислите (устно):

$$\begin{aligned} a) \quad 74^2 + 74 + 75 &= 74(74 + 1) + 75 = 74 \cdot 75 + 75 = 75 \cdot (74 + 1) = \\ &= 75 \cdot 75 = 5625. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad 98^2 + 98 + 99 &= 98 \cdot (98 + 1) + 99 = 98 \cdot 99 + 99 = 99 \cdot (98 + 1) = \\ &= 99 \cdot 99 = 99^2 = (100 - 1)^2 = 9801. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v) \quad 74^2 - 74 \cdot 73 + 73 &= 74^2 - 73 \cdot (74 - 1) = 74^2 - 73^2 = \\ &= (74 + 73) \cdot (74 - 73) = 147 \cdot 1 = 147. \end{aligned}$$

$$2. \text{Выделите полный квадрат: } m^2 + m = m^2 + 2m \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = (m + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}.$$

3. Продолжите ряд: 18, 10, 6, 4, ...; (10·2-2), (6·2-2), (x ·2-2), откуда $2x - 2 = 4$, $x = 3$; имеем: 18, 10, 6, 4, 3.

4. Упростите: $(m - n - 1)(m + n + 1) = (m - (n + 1)) \cdot (m + (n + 1)) = m^2 - (n + 1)^2$.

2. Поиск способа решения

У кого есть некоторые соображения по поводу решения этой задачи?

Ответ. Я могу подбором найти одно натуральное значение a , удовлетворяющее условию задачи. Это будет число 2003.

В самом деле:

$$\begin{aligned} 2003^2 + 2003 + 2004 &= 2003(2003 + 1) + 2004 = 2003 \cdot 2004 + 2004 = \\ &= 2004(2003 + 1) = 2004^2. \end{aligned}$$

Я применил аналогию с решениями примеров 1 а), 1 б) из пропедевтики.

Но могут быть и другие натуральные a , удовлетворяющие условию задачи.

А как найти все натуральные a , при которых число $a^2 + a + 2004$ окажется точным квадратом?

Ответ. Я полагаю: надо решить какое-то уравнение, в котором a было бы переменным.

Как составить это уравнение?

Ответ. Очень просто: достаточно обозначить $a^2 + a + 2004$ буквой $C^2 \in N$, тогда получим уравнение с двумя переменными: $a^2 + a + 2004 = C^2$.

Это уравнение надо решить в натуральных числах.

Кто наметит дальнейший ход преобразований?

Ответ. В этом уравнении есть квадраты переменных. Напрашивается возможность применения формулы разности квадратов; есть натуральное число 2004, которое можно представить в виде произведения простых чисел или произведения двух сомножителей.

Эти догадки надо реализовать.

Надо на доске получить уравнение, у которого обе части разложены на множители.

Ответ. Будем иметь:

$$a^2 + a - C^2 = -2004,$$

$$C^2 - (a^2 + a) = 2004,$$

$$C^2 - (a^2 + 2a \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = 2004,$$

$$C^2 - (a + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} = 2004,$$

$$C^2 - (a + \frac{1}{2})^2 = 2003 \cdot \frac{3}{4} = \frac{8015}{4},$$

$$4(C - a - \frac{1}{2})(C + a + \frac{1}{2}) = 8015,$$

$$(2C - 2a - 1)(2C + 2a + 1) = 8015,$$

$$(2C - 2a - 1)(2C + 2a + 1) = 5 \cdot 1603 = 7 \cdot 1145 = 1 \cdot 8015 = 35 \cdot 229.$$

Кто продолжит равносильные преобразования этого уравнения?

Ответ. Так как переменные a и C – натуральные числа, то это уравнение равносильно совокупности четырех таких систем:

$$1. \begin{cases} 2C - 2a - 1 = 5, \\ 2C + 2a + 1 = 1603. \end{cases} 2. \begin{cases} 2C - 2a - 1 = 7, \\ 2C + 2a + 1 = 1145. \end{cases} 3. \begin{cases} 2C - 2a - 1 = 1, \\ 2C + 2a + 1 = 8015. \end{cases} 4. \begin{cases} 2C - 2a - 1 = 35, \\ 2C + 2a + 1 = 229. \end{cases}$$

$$1. \begin{cases} C = 402, \\ a = 339. \end{cases} 2. \begin{cases} C = 288, \\ a = 284. \end{cases} 3. \begin{cases} C = 2004, \\ a = 2003. \end{cases} 4. \begin{cases} C = 66, \\ a = 48. \end{cases}$$

Проверка подтверждает правильность найденных натуральных значений a .

Ответ. 2003; 399; 284; 48.

Второй способ решения этой задачи

Имеем: $a^2 + a + 2004$.

Будем решать в абстрактном виде, а именно: введем новую натуральную переменную как функцию натурального аргумента a , т.е. $b = f(a)$, где $a \in N$ и $b \in N$.

Получим квадратный трехчлен относительно натурального a . Он должен быть точным квадратом двучлена.

Ставим вопрос, при каком $b = f(a)$ выражение $a^2 + a + b$ есть квадрат двучлена?

После размышлений подбором находим, что $b = a + 1$.

Что тогда получим?

Ответ. Получим следующее: $a^2 + a + a + 1 = a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$.

Есть ли еще двучленные значения b , как функции аргумента a , обращающие $a^2 + a + b$ в полный квадрат?

Ответ. Таких значений b – бесконечное множество.

Можно записать:

$$a^2 + a + a + 1 = a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2;$$

$$a^2 + a + 3a + 4 = a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2;$$

$$a^2 + a + 5a + 9 = a^2 + 6a + 9 = (a + 3)^2;$$

$$a^2 + a + 7a + 16 = a^2 + 8a + 16 = (a + 4)^2;$$

$$a^2 + a + (2n - 1)a + n^2 = a^2 + 2an + n^2 = (a + n)^2.$$

$$\text{Тогда } b_n = (2n - 1)a + n^2, \text{ откуда } a = \frac{b_n - n^2}{2n - 1}.$$

$$\text{В нашей задаче } b_n = 2004, \text{ тогда имеем } a = \frac{2004 - n^2}{2n - 1}. \quad (1)$$

Кто укажет ограничения для $n \in N$?

Ответ. Т. к. $a \in N$, то $2004 - n^2 > 0$, $n^2 < 2004$, $n < 45$, т. е. $1 \leq n \leq 44$.

Как будем вычислять a ?

Ответ. Прибавая n значения последовательных натуральных чисел от 1 и до 44 включительно будем получать значения a .

Чтобы получить ответ надо брать только натуральные a .

Пусть $n = 1$, тогда из (1) будем иметь $a = \frac{2004 - 1}{2 \cdot 1 - 1} = \frac{2003}{1} = 2003$, $a_1 = 2003$.

Если $n = 3$, то $a = \frac{2004 - 9}{5} = \frac{1995}{5} = 399$, и т.д.

Как суперрационально вычислять значения a ?

Ответ. Надо воспользоваться компьютером. Составить программу работы компьютера согласно формуле: $a = \frac{2004 - n^2}{2n - 1}$, где $n = 1, 2, 3, \dots, 44$ и $a \in N$.

Получим ответы: 2003; 399; 284; 48.

Примечание. В пособии П.Ю. Германовича «Вопросы и задачи» на соображение (арифметика и алгебра) издания 1956 года, аналогичная задача опубликована под № 148: «При каком значении a число $a^2 + a + 1589$ окажется точным квадратом?». В пособии приведено решение этой задачи и получено только одно значение $a = 1588$, тогда как условию задачи удовлетворяют четыре значения a : 1588; 316; 43 и 28.

Если воспользоваться формулой (1) $a = \frac{1589 - n^2}{2n - 1}$, где ($n = 1, 2, \dots, 39$), то при $n = 1; 3; 16; 21$ получаются все значения a , удовлетворяющие условию задачи.

Домашнее задание:

1. Решите в натуральных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} x + yz = 19, \\ x + y + z = 14, \end{cases} \text{ где } y < z.$$

2. В треугольнике проведены три медианы. Образовалось шесть треугольников. Докажите, что все они равновелики.

3. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sqrt{(x+3)^2} = x+3, \\ \sqrt{(x-3)^2} = 3-x. \end{cases}$

4. Найти $\max(ab)$, если $a + 2b = 1$.

Задача 3. Сколько нулей в конце имеет число 1253!

Первый способ решения задачи

1. Пропедевтика

Определение факториала.

Ответ. Функция, определенная на множестве целых неотрицательных чисел и значение которой равно произведению последовательных натуральных чисел от 1 до данного числа n включительно, т.е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$, называется факториалом числа.

Существует ли ноль-факториал?

Ответ. Да, существует, т.к. ноль принадлежит области определения данной функции. Принято считать $0! = 1$.

Есть ли разница в записи: $(2n)!$ и $(2n)!!$?

Ответ. Да, есть.

$$(2n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot 2n, \quad (2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot 2n,$$

Раскрыть символы: $(2n-1)!$ и $(2n-1)!!$

$$\begin{aligned} \text{Ответ. } (2n-1)! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-2)(2n-1), \\ (2n-1)!! &= 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)(2n-1), \end{aligned}$$

Какой цифрой оканчивается разность $6! - 5!!$?

Ответ. Эта разность оканчивается цифрой 5.

В самом деле:

$$6! - 5!! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 - 1 \cdot 3 \cdot 5 = \dots 0 - \dots 5 = \dots 5$$

Сократить дробь $\frac{m!}{(m-3)!}$.

$$\text{Ответ. } \frac{m!}{(m-3)!} = \frac{(m-3)!(m-2)(m-1)m}{(m-3)!} = m(m-1)(m-2).$$

Определение функции Антъе.

Ответ. Функция вида $f(x) = [x]$, где x – любое действительное число, а $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее x , называется функцией Антъе.

Выполнение некоторых упражнений.

$$[1,5] = 1, [-1,7] = -2, [\pi] = 3, \left[-\frac{3}{4}\right] = -1, \left[\frac{50}{5^3}\right] = 0, \left[\frac{1254}{5^5}\right] = 0.$$

Определение натурального ряда.

Ответ. Натуральные числа, расположенные в порядке последовательного возрастания, начиная с 1, т.е. 1, 2, 3, ..., n , ... называются натуральным рядом.

Замечательное свойство натурального ряда.

Ответ. Если разбить натуральный ряд чисел на последовательные группы по два числа в каждой, начиная с 1, то в каждой группе второе число делится на 2; если разбить на группы по три числа в каждой, то третье число каждой группы делится на 3 и т.д.; если в каждой группе будет k чисел, то k -тое число каждой группы делится на k .

Сколько нулей в конце числа $7!$?

Ответ. Число $7!$ в конце имеет один нуль, т.к. его развернутый факториал содержит одну пятерку.

Сколько нулей в конце числа $11!$?

Ответ. В конце числа $11!$ два нуля, т.к. развернутый факториал этого числа содержит две пятерки.

Какую закономерность вы подметили?

Ответ. Количество нулей в конце числа $n!$ равно количеству пятерок, содержащихся в развернутой записи этого числа.

Второй способ решения задачи

Как установить количество пятерок в числе 1253?

Ответ. Надо разбить развернутый факториал числа 1253 на последовательные группы, содержащие по 5 чисел, по 25, по 125, по 625 и т.д. Каждая группа содержит, хотя бы одну пятерку. Теперь идея решения задачи ясна.

Кто сказанное выразит математически?

Ответ. Сказанное можно записать в виде суммы однотипных слагаемых:

$\sum_{k=1}^n \left[\frac{1253}{5^k} \right]$, где $\left[\frac{1253}{5^k} \right]$ – количество групп по пять чисел в каждой, если $k = 1$; по 25, если $k = 2$; по 125, если $k = 3$ и т.д.

Надо краткую запись $\sum_{k=1}^n \left[\frac{1253}{5^k} \right]$ выразить в виде суммы конкретных слагаемых.

Ответ.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \left[\frac{1253}{5^k} \right] &= \left[\frac{1253}{5} \right] + \left[\frac{1253}{5^2} \right] + \left[\frac{1253}{5^3} \right] + \left[\frac{1253}{5^4} \right] + \left[\frac{1253}{5^5} \right] + \dots = \\ &= 250 + 50 + 10 + 2 + 0 = 312.\end{aligned}$$

Домашнее задание:

1. Сколько нулей в конце числа 100!?

2. Обосновать замечательное свойство натурального ряда.

3. Решите неравенство: $|||31x - 147| + 157| - 167| + 177| \leq 93$;

4. Решите уравнение: $x - \frac{1}{2}(\log_2 9 + \log_2 49) = 0$.

5. Биссектриса прямого угла треугольника делит противоположную сторону в отношении 1:3. В каком отношении делит эту сторону высота?

Задача 4. В пруд пустили 30 щук, которые постепенно поедали друг друга. Щука считается сытой, если она съела трех щук сытых или голодных. Каково наибольшее число щук, которые могут насытиться?

Первый способ решения задачи

I. Пропедевтика

1. Вычислите устно: $(7,29)^2 + 7,29 \cdot 2,71$

Решение.

$$(7,29)^2 + 7,29 \cdot 2,71 = 7,29(7,29 + 2,71) = 7,29 \cdot 10 = 72,9.$$

2. Решите задачу устно:

Щука весит 0,5 кг и еще $\frac{3}{4}$ своего веса. Каков вес щуки?

Решение:

$\frac{1}{4}$ веса щуки равна 0,5 кг, тогда вес щуки будет равен $0,5 \cdot 4 = 2$ (кг).

Можно решить алгебраически.

3. Решите уравнение $||x + 1| + 6| = 6$.

Решение: т. к. $|x + 1| + 6 > 0$, $|x + 1| + 6 = 6$, $|x + 1| = 0$, $x = -1$.

4. Решите задачу:

Один статистик утверждал, что в России из каждого 10 мужчин одного зовут Иван, а из каждого 20 одного – Петр. Если это верно, то кого чаще можно встретить: Ивана Петровича или Петра Ивановича?

Ответ. Одинаково.

5. Задача:

В небольшом озере плавают пять голодных щук, которые постепенно поедают друг друга. Щука считается сытой, если она съела двух щук (сытых или голодных). Каково наибольшее число щук, которые могут насытиться?

Ответ. Две щуки.

Решение:

Каждые три щуки, очевидно, могут насытить одну. После первого акта насыщения появится одна сытая, после второго еще одна. Всего две.

II. Поиск решения

Как вы, ребята, считаете, какое наименьшее число щук способно насытить одну голодную (G), если условие задачи верно?

Ответ. Четыре щуки.

Можете обосновать свое утверждение?

Ответ. Допустим, что в пруду плавают только $4G$: a_1, a_2, a_3, a_4 . Выделим из них одну, например a_1 .

Останутся $3G$, которых a_1 может заглотить и, значит, насытиться. Такой возможности, очевидно, нет у $3G$ и, тем более, у $2G$. Поэтому $4G$ – наименьшее число щук, способное насытить одну G .

Будем считать $4G \leadsto G^\dagger$ ($4G \leadsto C$). Это читается так: четыре голодные щуки эквивалентны одной сытой.

Можно это утверждение записать в виде: $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} \leadsto G^\dagger$,

где G^\dagger – щука, проглатившая трех, т.е. сытая (C).

Как узнать, сколько всего щук насытят $30G$?

Ответ. Очень просто. Надо установить сколько «четверок» содержится в числе 30. Для этого достаточно 30 разделить на 4 с остатком: $30 = 4 \cdot 7 + 2$.

Как интерпретировать полученное выражение?

Ответ. Наибольшее число, «четверок» в числе 30 – семь, значит, наибольшее число насытившихся щук будет семь, да еще остались $2G$, которые будут насыщаться, поедая сытых (сытые щуки не агрессивны). В их распоряжении семь сытых. Этого количества достаточно, чтобы все голодные (а их две) – насытились.

Значит, наибольшее число насытившихся щук станет 9.

Ответ. 9 щук.

Есть ли вопросы?

Ответ. У меня возник такой вопрос.

Процесс каннибализма, разыгравшийся между Г щуками в пруду, характерен. Но все-таки, нельзя ли подсчитать число возможных вариантов процесса насыщения?

Очень хороший вопрос. Экспромтом, пожалуй, не ответишь.

Ответ. Можно мне, я занимался этой проблемой дома, получив от Вас задачи для подготовки к олимпиаде.

Дело в том, что в пруду одновременно рыщут голодные (Γ) щуки, щуки, заглотившие по одной голодной (Γ^+), по две голодных (Γ^+) и по три голодных (Γ^+), т.е. сытые (C).

Для своего насыщения щука должна съесть три. Эта «тройка» комплектуется из четырех щук: $C; \Gamma^+; \Gamma^+; \Gamma$.

При этом возможные «сценарии» приведены в табл.1

Таблица 1

I	CCC	II	$\Gamma^+ \Gamma^+ \Gamma^+$	III	$\Gamma^* \Gamma^* \Gamma^*$	IV	$\Gamma \Gamma \Gamma$
V	$CC\Gamma^+$	VI	$CC\Gamma^+$	VII	$CC\Gamma$	VIII	$C\Gamma^+ \Gamma^+$
IX	$C\Gamma^+ \Gamma^+$	X	$C\Gamma^* \Gamma^*$	XI	$C\Gamma \Gamma$	XII	$C\Gamma^+ \Gamma$
XIII	$\Gamma^+ \Gamma^+ \Gamma^*$	XIV	$\Gamma^+ \Gamma^+ \Gamma$	XV	$\Gamma^* \Gamma^* \Gamma$	XVI	$\Gamma^* \Gamma \Gamma$
XVII	$\Gamma^+ \Gamma^* \Gamma^*$	XVIII	$\Gamma^+ \Gamma \Gamma$	XIX	$\Gamma^* \Gamma \Gamma$	XX	$\Gamma^* \Gamma^+ \Gamma$

У меня получилось 20 различных «троек». Но я не уверен, что этот хаотический процесс может развиваться по 20 «сценариям».

Кто продолжит иной способ подсчета?

Ответ. Эти «тройки» нечто иное, как сочетания из четырех элементов по три с повторениями, поэтому надо применить соответственную формулу.

Кто помнит эту формулу?

Ответ. В моем рукописном личном справочнике она есть!

Напишите ее на доске и выполните подсчет вариантов.

Ответ. $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$, где

n – количество щук из которых формируются «тройки»,

k – количество щук, необходимое для насыщения одной щуки.

В нашей задаче: $n = 4$, $k = 3$.

$$\text{Имеем, } C_{4+3-1}^3 = C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{3! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

Итак, 20 «сценариев» процесса насыщения. Не так уж и много! Результат подсчета ученика оказался правильным.

Запишите творческие задания:

1. Математизируйте процесс насыщения, т.е. найдите формулу, из которой следовали бы все возможные варианты насыщения.

2. Выведите формулу вычисления наибольшего числа насытившихся щук по каждому варианту.

3. Составьте математизированную таблицу, наиболее полно отражающую процесс насыщения.

4. Свои результаты изложите письменно.

Время выполнения – неделя, т.е. до ближайшего понедельника включительно.

Привожу (почти дословно) одну из работ. Ее выполнил ученик – неоднократный призер математических олимпиад разного уровня.

Пусть процесс насыщения, о котором говорится в условии задачи, проходит по «сценарию»: $\Gamma^+ \Gamma^+ \Gamma$, т.е. из каждого 7Γ , насыщается одна, тогда выражение $30 = 7 \cdot 4 + 2$ будет математической моделью (ММ) этого варианта.

По аналогии составляем ММ всех десяти вариантов.

Результаты сводим в табл.2.

Таблица 2

№ варианта	Результаты	Количество Γ	ММ
I	$\Gamma \Gamma \Gamma$	3	$30 = 4 \cdot 7 + 2$
II	$\Gamma \Gamma \Gamma^+$	4	$30 = 5 \cdot 6 + 0$
III	$\Gamma^+ \Gamma \Gamma; \Gamma^* \Gamma^* \Gamma$	5	$30 = 6 \cdot 5 + 0$
IV	$\Gamma^* \Gamma^* \Gamma^*; C\Gamma \Gamma; \Gamma^+ \Gamma^+ \Gamma^+$	6	$30 = 7 \cdot 4 + 2$
V	$\Gamma^+ \Gamma^* \Gamma^*; \Gamma^+ \Gamma^+ \Gamma^+; C\Gamma \Gamma^+$	7	$30 = 8 \cdot 3 + 6$
VI	$\Gamma^+ \Gamma^+ \Gamma^+; C\Gamma^* \Gamma^*; C\Gamma^+ \Gamma$	8	$30 = 9 \cdot 3 + 3$
VII	$\Gamma^+ \Gamma^+ \Gamma^+; C\Gamma \Gamma; C\Gamma^+ \Gamma^+$	9	$30 = 10 \cdot 3 + 0$
VIII	$C\Gamma^+ \Gamma^+; C\Gamma \Gamma^+$	10	$30 = 11 \cdot 2 + 8$
IX	$C\Gamma \Gamma^+$	11	$30 = 12 \cdot 2 + 6$
X	CCC	12	$30 = 13 \cdot 2 + 4$

Выражения, записанные в столбце ММ, выражаем общей формулой:

$$Nq = (q + 3) \cdot \left\lfloor \frac{30}{q+3} \right\rfloor + \left(30 - (q + 3) \cdot \left\lfloor \frac{30}{q+3} \right\rfloor \right), \quad (1)$$

где q – номер варианта, $q = 1, 2, \dots, 10$; $Nq = 30$,

Эта формула, конечно, далека от совершенства, но она работает, например, при $q = 8$ будем иметь

$$N_8 = 11 \cdot \left\lfloor \frac{30}{11} \right\rfloor + \left(30 - 11 \cdot \left\lfloor \frac{30}{11} \right\rfloor \right) = 11 \cdot 2 + 8.$$

$N_8 = 11 \cdot 2 + 8$, т. к. $N_8 = 30$, то $30 = 11 \cdot 2 + 8$, что соответствует VIII строке табл.2.

Представленная ММ интерпретируется следующим образом: из каждого 11Γ насыщается одна, а из 30Γ насытятся, стало быть, две и 8Γ останутся голодными.

По ММ этого варианта находим наибольшее число насытившихся щук. Но это не будет окончательным результатом.

В дальнейшем в процессе насыщения принимают участие $2C$ и 8Γ , т.е. 10 щук, а математическая модель второго акта насыщения будет следующей: $10 = 11 \cdot 0 + 10$, т.е. из десяти щук ни одна не может насытиться, т.к. для насыщения хотя бы одной щуки необходимо не менее 11 щук. Значит, наибольшее число насытившихся щук в данном варианте равно двум.

С помощью ММ можно вычислить наибольшее количество насытившихся щук по каждому варианту.

Как это выполняется?

Рассмотрим конкретный пример. Пусть процесс насыщения протекает по «сценарию», ММ которого следующая: $30 = 8 \cdot 3 + 6$, т.е. из каждого 8 щук насыщается только одна, а из 30 щук насытятся, очевидно, 3. При этом 6 щук останутся голодными. Теперь в водоеме плавают 3 сытых и 6 голодных, всего 9 щук. Процесс насыщения продолжается. Он будет описываться такой ММ:

$$9 = 8 \cdot 1 + 1 \quad (2)$$

Согласно (2) еще одна щука насытится, а одна останется голодной. Всего, таким образом, насытятся 4 щуки. Это максимум для этого варианта.

Мне удалось путем «проб и ошибок» с учетом следствий из теории множеств и рассмотрения конечного числа частных случаев, найти формулы подсчета наибольшего числа насытившихся щук по каждому варианту

H_q – наибольшего числа насытившихся щук (по каждому варианту). Вот эти формулы:

$$H_q = \begin{cases} \left\lfloor \frac{30}{q+2} \right\rfloor - 1, & \text{где } q = 1, 2, 3, 4, 8 \text{ (номер варианта из табл. 3.);} \\ \left\lfloor \frac{30}{q+2} \right\rfloor, & \text{где } q = 5, 6, 7, 9, 10 \text{ (номер варианта из табл. 3.).} \end{cases}$$

Вычислим, например, H_5 и H_2

$$H_5 = \left\lfloor \frac{30}{5+2} \right\rfloor = 4, \text{ что соответствует варианту 5 табл. 3.}$$

$$H_2 = \left\lfloor \frac{30}{2+2} \right\rfloor - 1 = 7 - 1 = 6, \text{ что соответствует варианту 2 табл. 3.}$$

Всестороннее представление о математической природе процесса, который имел место в водной среде между голодными щуками, можно получить, анализируя числовые характеристики отдельных вариантов, взятых из табл. 3.

1. Абсолютный максимум насытившихся щук – 9 дает один вариант – ГГГ, т.е. когда щуки, чтобы насытиться заглатывают по три голодных. Это и понятно, чем меньше щук заглотит каждая насытившаяся щука, тем большее число щук насытится, т.к. резерв щук ограничен.

Этот вариант будем называть максимизирующим. Вероятность его осуществления низка, всего $\frac{1}{20}$.

2. Вариант, протекающий по сценарию ССС следует назвать абсолютно минимизирующим.

Он осуществляется при заглатывании только по три ранее насытившихся щук. Его вероятность $\frac{1}{20}$.

С вероятностью $\frac{1}{20}$ еще протекает процесс ССГ⁺, т.е. когда щука, чтобы насытиться, должна заглатывать по 11 щук.

Таблица 3

№ варианта	«Сценарий»	Кол-во Γ	$\Gamma \curvearrowright \Gamma^*$	max Γ^*	Вероятн. варианта	Вероятн. max Γ^*	%
I	ГГГ	3	4	9	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	5
II	ГГГ ⁺	4	5	6	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	5
III	Г ⁺ ГГ Г ⁺ ГГ	5	6	5	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	5
IV	Г ⁺ Г ⁺ Г ⁺ СГГ Г ⁺ Г ⁺ Г	6	7	4	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	5

Продолжение таблицы

№ варианта	“Сценарий”	Кол-во Γ	$\Gamma \leadsto \Gamma^+$	$\max \Gamma^+$	Вероятн. варианта	Вероятн. $\max \Gamma^+$	%
V	$\Gamma^+ \Gamma^+ \Gamma^+$ $\Gamma^+ \Gamma^+ \Gamma$ СГГ^+	7	8	4	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	10
VI	$\Gamma^+ \Gamma^+ \Gamma^+$ $\text{СГГ}^+ \Gamma^+$ $\text{СГ}^+ \Gamma$	8	9	3	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	10
VII	$\Gamma^+ \Gamma^+ \Gamma^+$ ССГ^+ $\text{СГ}^+ \Gamma^+$	9	10	3	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	10
VIII	$\text{СГГ}^+ \Gamma^+$ ССГ^+	10	11	2	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	15
IX	ССГ^+	11	12	2	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	15
X	CCC	12	13	2	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	15

Какое число насытившихся щук близко к наиболее вероятному событию?

Пусть событие 4 – это четыре насытившиеся щуки. Этому способствуют шесть «сценариев» в вариантах IV и V. Всего процессов может протекать 20, тогда вероятность появления четырех насытившихся щук равна:

$$P(4) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

Шесть процессов насыщения в вариантах VI и VII способствуют событию 3, когда насытившимися окажутся три щуки. Вероятность этого события равна:

$$P(3) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

Вероятность появления события 3 или события 4 равна:

$$P(3,4) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

Выход: Наиболее реальным количеством насытившихся щук в этом неуправляемом процессе являются два числа – три или четыре.

Примечание. Решая эту задачу, мы не учитываем физические, биологические и другие возможности реально существующей щуки, а считаем щуку неким абстрактным организмом, способным, утоляя голод, заглатывать не более 12 щук, что следует из условия задачи.

Нет особой надобности убеждать читателя, что решение этой многофункциональной задачи и, особенно, ее следствий не только создает настоящие условия проявления учащимися творческой активности, но и в миниатюре основательно знакомит с математизацией реальных неуправляемых процессов.

Прогноз погоды, глобальное изменение климата, предсказание землетрясения с указанием силы и координат его эпицентра возникновения – вот первоочередные проблемы, требующие достоверного прогнозирования, т.е. математизации.

Второй способ решения задачи (теория множеств)

Лемма. Наименьшее число Γ , способное насытить одну Γ , равно 4Γ , если считать щуку, заглатившую 3Γ , сытой.

Эта лемма доказана нами ранее. Кто повторит?

Ответ. В самом деле, выделим из $4\Gamma(a_1, a_2, a_3, a_4)$ одну, например, a_1 , останутся 3Γ , заглатив которые a_1 насытится.

Ни 3Γ , ни тем более 2Γ не могут насытить хотя бы одну щуку в силу условия задачи. Значит, 4Γ – наименьшее число щук, которое может насытить Γ . Тогда есть основание считать:

$$4\Gamma \leadsto \Gamma^+$$

т.е. четыре голодные щуки эквивалентны одной сытой. Ч.т.д.

Что значит Γ^+ ? Это означает, что в желудке сырой щуки находится 3Γ да плюс она сама и – выходит, что в образе одной 4Γ .

Справедливы следующие записи:

$$\{a_1, a_2, \dots, a_4\} = \{(a_1, a_2, \dots, a_4)\} \leadsto \{(4\Gamma)\} \leadsto \left\{\Gamma^+\right\} = \Gamma^+$$

В желудке сырой щуки могут находиться $3\Gamma^+$ (согласно условию задачи), тогда

$$\left(\left(3\Gamma^+\right) \cup \Gamma\right) \leadsto 4\Gamma^+$$

Это хорошо видно из схемы: $(\bullet \bullet \bullet \circ) \Rightarrow \bullet$

Сосчитав затемненные кружочки, получаем $4\Gamma^+$.

Теперь имеем:

$$M = \{a_1, a_2, \dots, a_{29}, a_{30}\} = \{(a_1, a_2, a_3, a_4), (a_5, a_6, a_7, a_8), \dots, (a_{25}, a_{26}, a_{27}, a_{28}), (a_{29}, a_{30})\} \sim$$

$$\sim \left\{ \begin{pmatrix} + \\ \Gamma_*^+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + \\ \Gamma_*^+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + \\ \Gamma_*^+ \end{pmatrix}, a_{29} \right\} \left\{ \begin{pmatrix} + \\ \Gamma_*^+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + \\ \Gamma_*^+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + \\ \Gamma_*^+ \end{pmatrix}, a_{30} \right\} \left\{ \begin{pmatrix} + \\ \Gamma_*^+ \end{pmatrix} \right\} \sim \left\{ \begin{pmatrix} + \\ 4\Gamma_*^+ \end{pmatrix} \right\} \left\{ \begin{pmatrix} + \\ 4\Gamma_*^+ \end{pmatrix} \right\} \left\{ \begin{pmatrix} + \\ \Gamma_*^+ \end{pmatrix} \right\} \quad (3)$$

Подмножества (3) попарно не пересекающиеся (щуки разного веса), поэтому

$$\left\{ \begin{pmatrix} + \\ 4\Gamma_*^+ \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} + \\ 4\Gamma_*^+ \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} + \\ \Gamma_*^+ \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} + \\ 4\Gamma_*^+ \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} + \\ 4\Gamma_*^+ \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} + \\ \Gamma_*^+ \end{pmatrix} \right\} = 4\Gamma_*^+ + 4\Gamma_*^+ + \Gamma_*^+ = 9\Gamma_*^+$$

т.е. 9 насытившихся щук.

Ответ. 9 щук.

Третий способ решения задачи (алгебра)

Составим уравнение, наиболее полно отражающее требования условия задачи.

Пусть n – наибольшее число щук, которые заглатывали только голодных, тогда $3n$ – число проглоченных голодных щук, k – количество голодных щук, которым не хватило голодных щук для своего насыщения (конечно, $0 \leq k \leq 2$, $k \in N$).

Имеем уравнение:

$$\begin{aligned} n + 3n + k &= 30, \\ 4n + k &= 30, \\ k &= 30 - 4n, \text{ где } n \in N, k \in N \text{ и } 0 \leq k \leq 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Так как $0 \leq k \leq 2$, то с учетом (4) получим двойное неравенство:

$$0 \leq 30 - 4n \leq 2,$$

$$-30 \leq -4n \leq -28,$$

$$14 \leq 2n \leq 15,$$

$$7 \leq n \leq 7 \frac{1}{2} \Rightarrow n = 7, \text{ т.к. } n \in N.$$

Из (4) следует, что при $n = 7$, $k = 2$.

Теперь в пруду плавают 7 сытых и 2 голодных щуки, которые насытившись, образуют второй *max*.

Ответ. 9 щук.

Домашнее задание:

1. Решите задачу: «На стене висит портрет. Спросили Н: «Чей портрет?» Н ответил: «Отец висящего есть единственный сын отца говорящего». Чей портрет?»

2. Новогодний гусь на 25% тяжелее утки. На сколько процентов утка легче гуся?

3. Прочитать в книге «За страницами учебника алгебры» (А.Ф. Пичурин) интересующие вас места.

4. Вычислить площадь фигуры, заданной неравенством:

$$|x - 2| + |y - 1| \leq 6$$

Примечание. В изящном решении этой задачи, ранее опубликованной в сборнике «Задачи математических олимпиад» (И. Л. Бабинская) допущены некоторые логические неувязки, которые нам удалось избежать.

Нельзя не познакомить выпускников средней школы с решением еще трех задач: одной логической и двух задач, допускающих исключительно рациональные решения.

Задача 5. В древнем мире существовал оракул. В отличие от других оракулов его устами вещало три божества: «бог Правды», «бог Дипломатии», «бог Лжи». Эти божества изображались совершенно одинаковыми скульптурами, расположеннымными в ряд за алтарём, перед которыми преклоняли колени люди, ищущие совета. Боги всегда охотно отвечали на вопросы. Но так как они были похожи друг на друга, никто не мог установить, то ли отвечает «бог Правды», который говорит всегда правду и которому надо верить, то ли «бог Лжи», который говорит всегда неправду, то ли «бог Дипломатии», который может либо солгать, либо сказать правду. Такое положение было на руку жрецам и способствовало популярности оракула: «боги» всегда оказывались правыми.

Но однажды нашелся человек, который задумал совершить то, что не удавалось самым большим мудрецам. Он решил опознать каждого из богов. Человек вошёл в храм и спросил бога, стоящего слева: «Кто рядом с тобой?»

«Бог Правды» – был ответ. Бог, стоящий справа; на вопрос кто рядом с тобой ответил: «Бог Лжи». На вопрос: «Кто ты?» средний бог ответил: «Бог Дипломатии».

По этим сведениям человек, вошедший в храм, установил кто «бог Правды», кто «бог Лжи» и кто «бог Дипломатии».

Как он рассуждал?

Поиск решения

Изобразим каждого из богов кругом (I, II, III). Под каждым кругом напишем в столбик три буквы: П, Д, Л.

Получим рабочую схему.

I	II	III
П-	П-	П+
Д+	Д-	Д-
Л-	Л+	Л-

Кто из богов, занимая место I, на вопрос: «Кто рядом с тобой?» мог ответить: «Бог Правды».

Ответ. Так мог ответить либо «бог Дипломатии», либо «бог Лжи». Почему?

Ответ. «Бог Правды» так не мог ответить, т.к. он сам «бог Правды», а «бог Правды» говорит всегда правду. Поэтому бог I не является богом «Правды».

Ставим около соответствующей буквы II прочерк.

Что вы можете сказать о боже II, стоящем в середине?

Ответ. Бог II, стоящий в середине, тоже не является богом «Правды». Если бы он был богом «Правды», то на вопрос человека: «Кто ты?» ответил бы: «Бог Правды», а он ответил: «Бог Дипломатии». Ставим около соответствующей буквы III прочерк.

Кто продолжит рассуждения?

Ответ. Значит, III-й – «бог Правды»: кто-то из трех богов должен же быть богом «Правды».

Ставим знак «+» около буквы III, стоящей под кругом III.

Кто подведет черту под наше решение?

Ответ. «Бог Правды» сказал, что рядом с ним «бог Лжи» (II). Так оно и есть, так как «бог Правды» никогда не изрекает неправду.

А бог I, стоящий слева оказался богом «Дипломатии».

Ответ. Слева направо боги: «Дипломатии», «Лжи» и «Правды».

Примечание. Задача, конечно, не очень трудная, но для своего решения предполагает отличное владение методами доказательства «от противного» и «исключения невозможного».

Задача 6. Найдите все действительные решения системы:

$$\begin{cases} |xy - 2| = 6 - x^2, \\ 2 + 3y^2 = 2xy \end{cases}$$

(МГУ, мех-мат, вступительные экзамены 1970 г.).

Поиск решения

Кто пролет свет на решение этой системы?

Ответ. А что тут проливать свет, когда решение и так насквозь просматривается.

Смотря какое решение?

Ответ. Можно к доске?

Пожалуйста.

Это система двух уравнений с двумя переменными второй степени. Так как в первом уравнении имеется модуль, то эта система равносильна совокупности двух смешанных систем:

$$\text{I. } \begin{cases} xy - 2 \geq 0, \\ xy - 2 = 6 - x^2 \\ 2 + 3y^2 = 2xy \end{cases} \quad \text{II. } \begin{cases} xy - 2 \leq 0, \\ xy - 2 = x^2 - 6 \\ 2 + 3y^2 = 2xy \end{cases}$$

Далее, я бы нашел способ решения системы I, а решение системы II выполню по аналогии.

Интересно, как бы вы это сделали?

Ответ. Очень просто (решает на доске).

$$\text{I. } \begin{cases} xy - 2 \geq 0, \\ xy + x^2 = 8, \\ 3y^2 - 2xy = -2. \end{cases}$$

Где $xy + x^2 = 8$ и $3y^2 - 2xy = -2$ соответственно (1) и (2).

Левые части уравнений (1) и (2) системы I – однородные многочлены второй степени. Это обстоятельство позволяет из системы I получить однородное уравнение второй степени.

$$\text{I. } \begin{cases} xy - 2 \geq 0, \\ x^2 - 7xy + 12y^2 = 0. \end{cases}$$

Дальше понятно без комментариев:

$$\text{т.к. } x \neq 0 \text{ и } y \neq 0, \text{ то I. } \begin{cases} xy - 2 \geq 0, \\ \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 7\left(\frac{x}{y}\right) + 12 = 0, \frac{x}{y} = t \text{ и т.д.} \end{cases}$$

Вы представляете, ребята, что этот способ решения вам готовит?

Ответ. Я понял. Надо искать другие приемы решения.

Сам ты, испытавший на себе, чрезвычайно длинный путь движения к окончательному ответу, что думаешь?

Ответ. Я думаю, что как-то надо более эффективнее использовать наличие модуля в первом уравнении системы.

Кто ему подскажет?

Ответ. Я и сам могу.

Т. к. $|xy - 2| \geq 0$, то $6 - x^2 \geq 0$, откуда $x^2 \leq 6$. (3)

Кто продолжит осуществлять эту идею?

Ответ. Второе уравнение системы будем рассматривать как квадратное относительно переменной y :

$$3y^2 - 2xy + 2 = 0, \text{ тогда } \frac{D}{4} = x^2 - 6 \geq 0, \text{ откуда } x^2 \geq 6. \quad (4)$$

Из неравенств (3) и (4) следует, что $x^2 = 6$, далее понятно.

Ответ. $\left\{ \left(\sqrt{6}; \frac{1}{3}\sqrt{6} \right), \left(-\sqrt{6}; -\frac{1}{3}\sqrt{6} \right) \right\}$.

Вот, ребята, куда ведет многовариантное математическое мышление! Оно ведет к суперрациональному решению задачи.

В заключение подробного рассмотрения нахождения способов решения непростых задач путем эвристической беседы с элементами проблематики и исследовательских экскурсов хочется предложить для самостоятельного решения систему двух уравнений с двумя переменными, предлагавшуюся на заключительном туре математической олимпиады республики Казахстан в 1992 году, на которой учащиеся г. Петропавловска (Северный Казахстан) заняли призовые места.

Вот эта система.

$$\begin{cases} 4x^2 - 3y = xy^3, \\ x^2 + x^3y^2 = 2y. \end{cases}$$

Указание: $(0; 0)$ – является решением системы.

Решение:

Пусть $x \cdot y \neq 0$, тогда

$$\begin{cases} 4\frac{x^2}{y} - 3 = xy^2, \\ \frac{x^2}{y} - 2 = -x^3y. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t - 3 = xy^2, \\ t - 2 = -x^3y, \\ \frac{x^2}{y} = t. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4t - 3}{t - 2} = -\frac{y}{x^2}, \\ t - 2 = -x^3y, \\ \frac{x^2}{y} = t. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4t - 3}{t - 2} = -\frac{1}{t}, \\ t - 2 = -x^3y, \\ \frac{x^2}{y} = t. \end{cases} \text{ и т.д.}$$

Ответ. $\{(0; 0), (1; 1), (-0,5\sqrt[3]{40}; -\sqrt[5]{50})\}$.

Методическое кредо античной педагогики

Античный мир дал человечеству выдающихся философов, математиков, литераторов, архитекторов, полководцев. Люди античного мира возводили прекрасные дворцы и храмы, строили совершенные по мореходным качествам суда, создавали шедевры ваятельного искусства. Просто диву даешься, ну какая педагогика их взрастила, кто их учил, какие учебные заведения они закончили? Ведь не было в то время ни университетов, ни институтов, ни разветвленной сети других учебных заведений, не было такого обилия научной и учебной литературы. А ученые – были. Да еще какие! Фалес Мiletский, Евклид, Аристотель, Платон, Архимед и другие, всех не перечтешь. Называли их в те времена мудрецами.

Откуда брались мудрецы? В очередной раз задаем себе этот вопрос. Их появлению способствовала богатая духовная жизнь, насыщенная многочисленными мифами, врожденная тяга к совершенству (каждому хотелось походить на какого-нибудь бога), а также исключительная объективность в оценке всех факторов и явлений деловой и общественно-индивидуальной жизни. Дети после семейного воспитания обогащались знаниями в гимназиях и многочисленных частных школах, где педагоги учили детей, применяя диалогическую, оживленную беседу, в последствии названную «сократовским» методом. Мудрец Сократ имел много последователей своего учения, которые его всюду сопровождали и которые были в восторге от того, с каким мастерством с помощью наводящих вопросов он приводил к абсурду всякого, кто осмеливался высказывать мнение, отличное от сократовского. Не один Сократ, надо полагать, имел учеников. Это было, пожалуй, массовым явлением. Только дела у Сократа шли более удачно. Из его школы вышел обогащенный знаниями, умением логически мыслить и безупречно рассуждать философ Платон, известный математикам по доказательству существования, так называемых, «пяти платоновских тел».

Школа, созданная Платоном недалеко от Афин с названием «Академия», взрастила разностороннего мудреца Аристотеля, чьи выводы и мнения в средние века принимались, чуть ли не за догмы – настолько они казались правдивыми. Много позднее «сократовский» диалектический метод наводящих вопросов отошел в тень в силу исторических, и общественно-политических обстоятельств.

Генрих Песталоцци (1746–1827), математик Дистервег (1790–1866), Симеон Полоцкий (воспитатель Петра I), К. Д. Ушинский (1870–1924) были сторонниками «сократовской» вопросно-ответной формы обучения.

В настоящий, послепрестороечный, период времени в силу наличия в жизни многочисленных отвлекающих от школьных дел факторов, съедающих значительную долю ограниченного бюджета времени школьника, при-

обретают актуальное значение активные методы преподавания математики, наверное, самого трудоемкого школьного предмета.

Я имею в виду эвристическую беседу с элементами проблематики и краткими исследовательскими экскурсами, применение которой на уроках оживляет процесс изучения математики. Этот метод, кстати, оправдавший себя в историческом плане, эффективен при усвоении новых знаний, углублении приобретенных ранее знаний, и при поиске способов решений трудных, нестандартных задач.

Систематически, из урока в урок, применяя вопросно-ответную форму преподнесения новых знаний, учитель добивается устойчивого интереса со стороны учащихся к изучению математики, что позволяет ему повысить уровень трудности решаемых в классе задач, а также предлагать на дом задания, учитывающие требования инновационного обучения. Например, задача, заданная на дом, решается более рационально с помощью теоремы, еще не изученной на уроке. Учащиеся должны самостоятельно изучить эту теорему и выполнить решение задачи, может быть, не одним способом. В этом плане необходимо практиковать задания на дом и творческого характера. Такое задание рассмотрено в задаче 4 настоящей работы.

С целью стимулирования учащихся к саморазвитию путем самообразования полезно практиковать обзорное устное решение примеров и задач по какой-либо теме школьной программы.

Поясним сказанное.

Учитель предлагает учащимся открыть учебник «Алгебра и начала анализа» для 10–11 классов на страницах 80–81. «Будем, — говорит учитель, — устно рассказывать о способах решения тригонометрических уравнений». Учащиеся отвечают по порядку занимаемых мест.

Учитель:

— № 164(а).

Ответ. Это квадратное уравнение относительно $\sin x$.

— № 165(в).

Ответ. Это квадратное уравнение относительно $\cos x$.

— № 166(г).

Ответ. Уравнение сводится к квадратному относительно $\cos x$.

— Почему не относительно $\sin x$?

Ответ. Потому что в этом уравнении $\cos x$ рационально не выражается через $\sin x$.

— № 169(а).

Ответ. Это однородное уравнение второй степени. Приводим его к квадратному путем деления всех его членов на $\cos^2 x \neq 0$.

— № 171(а).

Ответ. Синус двойного аргумента. Разложение на множители.

— № 171(в).

Ответ. Это однородное уравнение первой степени. Деля все его члены на $\cos x \neq 0$, получаем уравнение, которое мы умеем решать.

— № 172(а).

Ответ. Уравнение сводим к однородному, используя тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Далее, применяем формулы двойного аргумента.

— № 172(б).

Ответ. Левая часть уравнения есть разность квадратов.

— № 173(б).

Ответ. Это дробно-рациональное уравнение. Находим ОДЗ. Умножаем обе части уравнения на $5\cos x + 8 \neq 0$. Ответ записываем с учетом ОДЗ.

— № 173(г).

Ответ. Приводим функции к аргументу x . Уравнение равносильно совокупности двух простейших.

— № 174(б).

Ответ. Левая часть уравнения есть разность синусов двух аргументов.

— № 174(г).

Ответ. Левая часть уравнения есть сумма косинусов двух аргументов.

Устный обзор способов решения задач только по готовому чертежу рекомендуется проводить и по геометрии.

Психолого-педагогическая ценность «Обзоров» заключается в том, что они проводятся на виду у всего класса официально, и поэтому учащиеся, чтобы не выглядеть «белой вороной», дома основательно готовятся к занятиям.

Далее, рассмотрение сразу большого количества примеров, допускающих разные приемы получения правильных ответов, развивает алгебраическую (геометрическую) зоркость, математическую память и многовариантность математического мышления. Хотел бы остановиться на одном примечательном эпизоде, кардинально изменившем отношение учащихся к изучению математики.

В самом начале своей работы в школе, расположенной в Казахстанской глубинке, я столкнулся с вопиющим фактом незнания математики: учащиеся не только не проявляли творческую активность при изучении новой темы, но и не могли членораздельно отвечать на вопросы учителя, требующие репродуктивной (воспроизводящей) активности. Это побудило меня эффективно повлиять на проявление умственных возможностей учащихся.

Я написал на доске по памяти приближенное значение математической константы π с пятьюдесятью десятичными знаками, затем попросил одного из учащихся по задачнику, в котором было напечатано значение числа π , назвать все пятьдесят цифр, следующих после запятой. Эффект был потрясающим. То же самое я проделал и с числом e . После чего устроил «состязание»: кто больше запомнит десятичных знаков числа π . Результаты были неутешительными. Рекорд среди учащихся — 12 десятичных знаков.

Известно, что умственные возможности человека достаточно велики, чтобы знать многое. Только для приобретения знаний надо целенаправленно направлять умственные усилия. Я поделился своим секретом запоминания десятичных знаков математических констант – чисел π и e .

«Каждый из вас может выработать свой способ запоминания», – твердо сказал я и попросил учащихся похвалиться своими достижениями в этом деле на следующем уроке. Постепенно дела у меня пошли в гору, так как учащиеся поверили в свои силы.

Согласно педагогическим концепциям известных российских педагогов В. В. Давыдова и Л. В. Занкова преподавание надо осуществлять на высоком уровне трудности, выдерживать быстрый темп прохождения изучаемого материала и, переходя от абстрактного к конкретному, осуществлять развитие математического мышления учащихся. Умело применяя вопросно-ответную диалогическую беседу и чередуя ее с элементами проблематики («оздачивания») и краткими исследовательскими экскурсами, высказанные выше основополагающие условия полноценного учебного процесса, можно эффективно реализовать на практике. Опыт такого преподавания описан в начале этой книги.

Здесь также предпринята попытка приблизиться к решению давней педагогической проблемы о взаимосвязи обучения и развития.

Спрашивается, получает ли школьник должное развитие, когда его усиленно побуждают овладевать знаниями? Да, получает, приблизительно такое, какое умение получает человек, желающий научиться плавать, но стоящий на берегу водоема и изучающий, как другие плавают.

Обогащается ли человек в должной мере знаниями, который усиленно развивает свой ум, изучая подходящие для этой цели темы и разделы науки математики, например, «теорию множеств», «комбинаторику» и т.д.?

Да, обогащается, но только в ограниченном объеме изученного. Некоторые сторонники формального образования утверждают, что для приобретения новых знаний для человека, развитого в умственном отношении, не существует непреодолимых барьеров. И при желании этот человек может изучить любую науку. Это, конечно, верно. Но есть но...

Во-первых, упущено драгоценное время – самое благоприятное с точки зрения психологии и физиологии, когда мозг человека жаждет новых знаний, ярких впечатлений от парадоксальных явлений в природе и обществе и т.д.

Во-вторых, развитие, полученное в некотором отрыве от знаний, необходимых человеку для поддержания своего существования, страдает отсутствием должной широты и разносторонности.

Знания в этом случае носят дискретный характер, то есть, в некоторой степени, лишены связующей логической структуры. Сопоставляя эти два экстремально возможных направления в образовательном процессе, при-

ходим к убеждению, что они, взятые каждый в отдельности, так сказать, в чистом виде, не могут решать фундаментальных целей образования.

Развитие репродуктивной и творческой активности, осуществляющее параллельно в познавательном процессе, вооружает учащихся глубокими, более объемными и активными знаниями, способствующими проявлению интуиции, то есть своего рода чутья в решении больших и малых математических проблем и не только математических. Как на практике воплощать эти идеи, автор старался показать в конспектах уроков, посвященных изучению новых тем школьной программы и решению нестандартных задач.

Существенная роль в решении дидактических задач отводится в этих конспектах пропедевтике, где, в основном, господствует репродуктивная активность учащихся, необходимая для проявления творческой активности. Она также необходима для открытия новых или переоткрытия известных в науке, но не известных учащимся, объективных истин.

И в заключение: эстетика, эмоции учащихся и учителя, на фоне которых развертывается учебно-познавательный процесс, играют не последнюю роль в плодотворной работе учителя в современной школе.