Л.Ж. Паланджянц

КОММЕРЧЕСКАЯ АРИФМЕТИКА

Л. Ж. ПАЛАНДЖЯНЦ

КОММЕРЧЕСКАЯ АРИФМЕТИКА

Майкоп • 2005

УДК 51(023)
ББК 22.1
П 19

П19 **Паланджянц Л.Ж.**
Коммерческая арифметика. – Майкоп: МГТУ, 2005. – 283 с.

ISBN 5-88941-003-2

Книга представляет собой наиболее полное собрание существующих задач по коммерческой арифметике, систематизированных по основным типам. В книге более 600 задач, имеющих различную степень сложности: от непосредственных вычислений до задач олимпиадного характера. Почти все задачи снабжены ответами.

Предлагаемая книга позволит читателю выработать первичные навыки коммерческих знаний, будет способствовать формированию экономической культуры современного предпринимателя.

Рецензенты: Волкова Е.В., Кагазежев М.К. к.п.н., Куприенко Н.Н., Мамий К.С. – зав. кафедрой математического анализа АГУ, Мамий Д.К. – зав. кафедрой алгебры и геометрии АГУ.

ISBN 5-88941-003-2 © Л.Ж. Паланджянц, 2005

Предисловие

Коммерческая арифметика не является самостоятельной наукой. Она представляет собой приложение к арифметике и алгебре и рассматривает задачи, связанные с торговыми операциями.

Большинство этих задач известны, однако они недостаточно систематизированы и разбросаны по всему курсу математики.

Предлагаемое пособие представляет собой собрание существующих задач по коммерческой арифметике, систематизированных по основным типам. Необходимо отметить, что коммерческая арифметика, как дисциплина, изучалась прежде в коммерческих учебных заведениях России. Соответствующие учебные пособия «Сборник задач по коммерческой арифметике» Н.П.Васильева-Яковлева и «Коммерческая арифметика» претерпели 12 изданий соответственно с 1878–1912 и 1884–1915 гг. Существовали также учебное пособие Ф.Боболовича «Коммерческая арифметика с примерами, задачи и упражнения», пособие для самообучения «Коммерческая арифметика» в трех частях, изданное товариществом «Благо» в Санкт-Петербурге. В частности, здесь рассматривались такие вопросы: упрощенные приемы производства арифметических действий, метрология, процентные вычисления, товарные вычисления, вексельные вычисления, вычисление стоимости процентных бумаг, контокоррентные вычисления, арбитражи. В «Коммерческой арифметике» Ф.Боболовича рассматривались следующие разделы: упрощение в арифметических действиях, метрология, простое тройное правило, цепное и товарищества (то есть пропорционального деления), правила процентов и интересов, страхование, промилли, терминология скидок, расходов и документов, продажа с отсрочкой платежа.

Кроме того, приобретению коммерческих знаний уделялось внимание также в гимназиях и реальных училищах, о чем свидетельствуют темы заданий на испытаниях зрелости и на выпускных экзаменах.

Если посмотреть на содержание курса «Коммерческой арифметики» с современной точки зрения, то, очевидно, что многие рассматриваемые в ней задачи перешли в такие дисциплины, как бухгалтерский учет, финансовая математика и др. И все же определенная часть задач осталась невостребованной. Тем не менее, нужно отметить, что огромный опыт, который был накоплен отечественными коммерческими учреждениями, не исчез бесследно. В учебных пособиях по математике, которые вышли в послевоенное время, определенная доля задач была связана с коммерческой арифметикой. Однако в дальнейшем арифметические задачи были постепенно вытеснены алгебраическими задачами и в существующих пособиях по математике доля таких задач ничтожна. Большая часть коммерческих задач ушла из основных учебников и попала в разряд занимательных, то есть не совсем обязательных, и продолжает кочевать из одного математического пособия в другое. К тому же, за это время появились новые пособия и издания, где рассматриваются подобные задачи. Было бы очень полезно систематизировать задачи, связанные с торговыми операциями, выявить, какие математические модели реализуются в тех или иных случаях. В предлагаемом пособии обобщен этот опыт, современному школьному курсу математики придается прикладной характер. При систематизации коммерческих задач удается установить также и связи с известными задачами экономики. Например, задача о бесконечном переливании в точности совпадает с задачей о равновесии цены, то есть соответствия спроса и предложения при так называемой паутинообразной модели рынка. Далее, задачи на расход материалов в большинстве своем, оказываются связаны с оптимизационными задачами линейного программирования, точнее, с их опорными решениями. Изучение наценок и скидок, то есть одной из важных задач арифметики маркетинга, более глубоко раскрывает их двойственную природу, ведет к основным структурам проективной геометрии, как геометрии дополняющей в двойственном смысле обычную геометрию. Это обстоятельство позволяет рассмотреть не только числовую прямую, но и числовую окружность, обеспечив тем самым полноту рассуждений о числах. Предлагаемые задачи имеют различную степень сложности: от непосредственных вычислений до задач олимпиадного характера. Поэтому почти все задачи снабжены ответами. Для сравнения с современным состоянием, приводятся задачи, служившие темами на испытаниях зрелости в гимназиях и на выпускных экзаменах в реальных училищах.

Изучение этих арифметических задач позволит, на наш взгляд, выработать у учащихся первичные навыки коммерческих знаний, будет способствовать формированию экономической культуры современного предпринимателя.

Составитель благодарен К.С. Мамию, В.Б. Тлячеву, Д.К. Мамию, М.Н. Кагазежеву, Н.Н. Куприенко, Е.В. Волковой, высказавших ряд замечаний и предложений по тексту.

Август 2002 г.
Майкоп Л.Ж. Паланджянц

§ 1. Задача о расфасовке товара

1. Прямая задача.

Пусть $a_1, a_2, ..., a_n$ **– количество товара одного вида. Найти количество одинаковых ящиков, содержащих максимально возможное количество этого товара.**

Решение. Пусть x – количество товара в одном ящике. Тогда числа $a_1, a_2, ..., a_n$ делятся на x. Следовательно, x – общий делитель этих чисел и, поскольку, x – должно быть максимально возможным, то оно будет наибольшим общим делителем чисел $a_1, a_2, ..., a_n$:

$$x = НОД(a_1, a_2, ..., a_n).$$

Таким образом, $a_1 : x$, $a_2 : x$, ... , $a_n : x$ – искомое количество ящиков.

Пример. С оптового склада отправили 1840 апельсинов в первый магазин, 2080 апельсинов – во второй и 2400 апельсинов – в третий магазин. Ящики с апельсинами содержали одинаковое наиболее возможное число апельсинов. Сколько ящиков с апельсинами получил каждый магазин?

Решение. 1) $x = НОД(1840, 2080, 2400) = 80$

2) 1840:80=23

3) 2080:80=26

4) 2400:80=30

Ответ. 23 ящ., 26 ящ., 30 ящ.

1. Для приготовления подарков выделено 78 плиток шоколада, 156 пряников, 52 пачки печенья, 104 апельсина 130 яблок. Какое наибольшее число одинаковых подарков можно приготовить из этих продуктов?
2. Мимо станции железной дороги проходят один за другим три поезда: в первом – 418 пассажиров, во втором – 494 и в третьем – 456 пассажиров. Сколько пассажирских вагонов в каждом поезде, если известно, что в ка-

ждом вагоне находится по одинаковому числу пассажиров и их число – наибольшее из всех возможных?

3. В первом поезде 792 пассажирских мест, во втором – 869 и в третьем – 946. Сколько вагонов имеет каждый поезд, если известно, что в каждом вагоне находится одинаковое число пассажирских мест, наибольшее из всех возможных?
4. Из 72 красных и 36 белых роз составили букеты. Какое наибольшее количество букетов можно составить из этих роз, если в каждом букете должно быть по одинаковому числу красных и по одинаковому числу белых роз?
5. Для устройства елки купили орехов, конфет и пряников – всего 760 штук. Орехов было на 80 штук больше, чем конфет, а пряников на 120 меньше, чем орехов. Какое наибольшее число одинаковых подарков можно сделать из этих продуктов и сколько орехов, конфет и пряников в отдельности войдет в каждый подарок?
6. Турист проехал на велосипеде в первый день 91 км, во второй день – 65 км и в третий день – 78 км. Сколько часов затратил турист на весь маршрут, если скорость движения была одинакова во все дни и наибольшая из возможных?
7. Из 156 желтых роз, 234 белых и 390 красных сделали букеты в возможно большом количестве и так, что во всех букетах было поровну желтых, поровну белых и поровну красных роз. Сколько рублей стоил каждый букет, если желтая роза стоила 2 рубля, белая – 1 руб. 50 коп и красная – 1 рубль?
8. Для участия в эстафете нужно разделить 36 девочек и 24 мальчика на равные (по числу участников) команды, состоящие только из мальчиков и только из девочек. Ка-

кое наибольшее число человек может быть в каждой команде? Сколько команд получится в этом случае?

2. Двойственная задача

Пусть $a_1, a_2, ..., a_n$ **– количество товара в каждой упаковке различного вида. Найти количество упаковок одного вида, которыми можно набрать одинаковое минимально возможное количество товара.**

Решение. Пусть *y* – одинаковое количество товара, набранное упаковками одного вида. Тогда *y* – делится на числа $a_1, a_2, ..., a_n$. Следовательно, *y* – общее кратное этих чисел и, поскольку, *y* - является наименее возможным, то оно будет наименьшим общим кратным чисел $a_1, a_2, ..., a_n$:

$$y=НОК\,(a_1, a_2, ..., a_n).$$

Таким образом, $y{:}\,a_1$, $y{:}\,a_2$, $y{:}\,a_n$ - искомое количество упаковок.

Пример. В три киоска отправили по одинаковому числу тетрадей. Для одного киоска отправили тетради пачками по 150 штук в каждой пачке, для второго – по 100 штук, а для третьего – по 200 штук в каждой пачке. Сколько пачек тетрадей отправили каждому киоску, если число тетрадей, отправленных каждому киоску, меньше 1000?

Решение. 1) *y=НОК* (150, 100, 200)=600<1000.

2) 600:150=4
3) 600:100=6
4) 600:200=3

Ответ. 4 п., 6 п., 3 п.

9. Первый пароход регулярно прибывает в порт А через 8 дней, второй – через 10 дней, третий – через 15 дней. Через какое наименьшее число дней встретится в порту первый пароход со вторым, первый с третьим и все три

парохода вместе, если они из порта А вышли одновременно?

10. Учеников построили для прогулки в ряды по 6 человек, а затем их перестроили, поставив по 4 человека в ряд. Сколько было учеников, если их меньше 90, но больше 80?
11. Переднее колесо телеги имеет в окружности 210 см, и заднее 330 см. Определить наименьшее расстояние, которое должен проехать экипаж, чтобы оба колеса сделали целое число оборотов.
12. Вдоль дороги от пункта А до пункта В были поставлены 2400 столбов, по одному через каждые 40 м. Через несколько лет эти столбы решили заменить другими, поставив последние на расстоянии 60 м друг от друга. На каком расстоянии от пункта А новый столб будет поставлен в точности на место старого? Сколько таких мест?
13. Отец делает 12 шагов, а сын, идущий рядом с ним, за это же время делает 18 шагов. Следы каких шагов (если их пронумеровать) у отца и у сына будут расположены как раз друг напротив друга?
14. Два ученика вышли одновременно из пункта А. Шаг первого 60 см, второго – 69 см. В первый раз их шаги совпали через 17 с после начала движения, а после 5 мин движения их шаги совпали в пункте В. Определить расстояние от А до В.
15. Две шестеренки с 12 и 27 зубцами находятся в сцеплении и вращаются. Через сколько оборотов один и тот же зубец большой шестеренки будет попадать в данную впадину малой шестеренки?

16. На столе лежат книги, не более 100. Определите, сколько их, если известно, что их можно связывать в пачки по 3 книги, по 4 книги и даже по 5 книг.
17. Какую наименьшую квадратную площадь можно вплотную замостить плитками, размеры которых 6 см х 8 см?
18. По окружности радиуса 40 см катится колесо радиуса 18 см. В колесо вбит гвоздь, который, ударяясь об окружность, оставляет на ней отметки. Сколько всего таких отметок оставит гвоздь на окружности? Сколько раз прокатится колесо по всей окружности, прежде чем гвоздь попадет в уже отмеченную точку?
19. Мальчик хочет купить несколько пачек мороженного по 20 коп. У него есть только монеты по 15 коп, а у продавца нет сдачи. Какое наименьшее число пачек мороженного сможет купить мальчик?
20. Отец поручает сыну измерить длину двора шагами. На снегу остались следы сына. Затем отец проверил своими шагами, начав с того же места, идя в том же направлении так, что в некоторых местах следы отца и сына совпали. Общее число шагов 61. Какова длина двора, если длина шага отца равна 0,72 м, а длина шага сына 0,54 м?

§ 1. Задача о переливании

Пусть имеются два пустых сосуда емкостью *a* литров и *b* литров. С помощью этих сосудов набрать из бака *c* литров воды. (Воду можно сливать обратно в бак. *a, b, c* – целые числа).

Решение. Без ограничения общности можно считать, что числа *a, b, c* расположены на числовой оси так, как это изображено на рисунке 1 соответствующими точками.

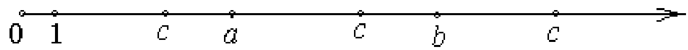

Рис.1

а) Если $a=b=1$, то задача имеет решение для любых натуральных чисел.

б) Если $a=b\neq 1$, то задача имеет решение только в том случае, когда c кратно a. Поэтому всегда можно предположить, что $a<b$.

в) Если $c<b$, то решение задачи сводится к решению в натуральных числах следующего уравнения

$$ax\text{-}by=c \tag{1}$$

или

$$bx\text{-}ay=c\,. \tag{2}$$

г) Если c>b, то решение задачи сводится к решению в натуральных числах уравнения

$$ax+by=c. \tag{3}$$

Покажем на примере как решить уравнение (1) или (2). При этом будем пользоваться методом последовательных переливаний.

Смысл этого метода состоит в том, что содержимое сосудов будем задавать парой чисел (a,b). Естественно назвать первый сосуд вливаемым, а второй - выливаемым.

В случае уравнения (2) вливаемым сосудом будет второй сосуд, а выливаемым - первый.

Пример. Имея два сосуда емкостью 3 л и 5 л, набрать из бака 4 л воды.

Решение. 1) Выберем в качестве вливаемого сосуда, сосуд емкостью 3 л. Осуществим последовательные переливания с соответствующими пояснениями.

(0, 0) – оба сосуда пусты.

(3, 0) – наливаем из бака в 1-ый сосуд 3 л воды.

(0, 3) – переливаем из 1-го сосуда во второй.

(3, 3) – наливаем из бака в 1-ый сосуд 3 л воды.

(1, 5) – переливаем из 1-го сосуда во второй 2 л воды.

(1, 0) – выливаем содержимое второго сосуда.

(0, 1) – переливаем из 1-го сосуда во второй 1 л.

(3, 1) – наливаем из бака в 1-ый сосуд 3 л воды.

(0, 4) – переливаем из 1-го сосуда во второй 3 л.

Итак, во втором сосуде 4 л воды.

Подсчитав количество вливаний x и выливаний y, то есть количество троек и пятерок, соответственно на первом и втором местах пары, получаем, что $x=3, y=1$.

2). Выберем в качестве вливаемого сосуда сосуд емкостью 5 л. В этом случае нужно решить уравнение $5x–3y=4$.

Проведем последовательные переливания:

(0, 0), (0, 5), (3, 2), (0, 2), (2, 0), (2, 5), (3, 4).

Итак, во втором сосуде 4 л воды.

Подсчитав число вливаний x и число выливаний y, получаем решение $x=2, y=2$, то есть решение уравнения $5x–3y=4$.

Пусть имеются три сосуда: по *c, a* и *b* литров. Первый наполнен водой, а остальные пустые. С помощью этих сосудов отмерить *d* литров воды.

Решение. а) Если в качестве вливаемого сосуда выбрать сосуд емкостью a литров, то решение задачи сводится к решению в натуральных числах уравнения

$$c–ax+by=d \qquad (4)$$

б) Если в качестве вливаемого сосуда выбрать сосуд емкостью b литров, то решение задачи сводится к решению в натуральных числах уравнения

$$c+ax-by=d. \tag{5}$$

Пример. Имеются три сосуда: по 8 л, 5л и 3 л.

Первый сосуд наполнен водой, а остальные пустые. С помощью этих сосудов отмерить 4 л воды.

Решение. 1) Выберем в качестве вливаемого сосуда сосуд емкостью 5 л. Осуществим последовательные переливания: (8,0,0), (3,5,0), (3,2,3), (6,2,0), (6,0,2), (1,5,2), (1,4,3), (4,4,0).

Итак, в первом и во втором сосудах по 4 л воды.

Подсчитав число вливаний $x=2$ и число выливаний $y=2$, получаем решение уравнения (4):

$$8-5x+3y=4$$

2) Выберем в качестве вливаемого сосуда сосуд емкостью 3 л. Осуществим последовательные переливания.

(8,0,0), (5,0,3), (5,3,0), (2,3,3), (2,5,1), (7,0,1), (7,1,0), (4,1,3), (4,4,0).

Итак, в первом и во втором сосудах по 4 л воды.

Подсчитав количество вливаний $y=3$, и количество выливаний $x=1$, получаем решение уравнения (5).

$$8+5x-3y=4.$$

3. Рассмотрим уравнение (3): $ax+by=c$.

Имеют место следующие утверждения.

1) Если c не делится на $НОД(a,b)$, то уравнение (3) не имеет решения.
2) Если числа a и b взаимно просты, то уравнение (3) имеет решение в целых числах.
3) Если (x_0, y_0) – решение уравнения (3), то при любом целом t, $x = x_0 + bt$, $y = y_0 - at$ также являются его решениями.

В самом деле, $ax+by=a(x_0+bt)+b(y_0-at)=ax_0+abt+by_0-abt=ax_0+by_0=c$.

4) Если (x_0,y_0) – решение уравнения $ax+by=1$, то (cx_0,cy_0) – решение уравнения (3)

В самом деле, $ax+by=acx_0+bcy_0=c(ax_0+by_0)=c$.

Укажем способ решения уравнения (3), основанный на алгоритме Евклида. Рассмотрим тройку чисел (x, y, c), связанных уравнением (3).

Если менять первые два числа этой тройки, то как правило соответственно изменится и третье число c.

Выберем две произвольные тройки

$$(x_1, y_1, c_1) \tag{6}$$

$$(x_2, y_2, c_2), \quad c_2 < c_1.$$

Затем составим третью тройку (x_3, y_3, c_3) по следующему правилу:

$$x_3 = x_1 - q_1 x_2,$$

$$y_3 = y_1 - q_1 y_2, \tag{7}$$

$$c_3 = c_1 - q_1 c_2, \quad c_3 < c_2 < c_1.$$

Продолжая этот процесс рекурсивно, то есть, применяя формулу (7) к паре троек (x_2, y_2, c_2), (x_3, y_3, c_3), через конечное число шагов получаем тройку $(x_k, y_k, 1)$.

При этом (x_k, y_k) – будет решением уравнения (3).

В качестве начальных троек (6), можно выбрать тройки (0,1,b) и (1,0,a) и применить алгоритм Евклида к числам b и a.

Пример. Решить в целых числах уравнение $5x+9y=1$.

Выберем тройки (0,1,9), (1,0,5), (-1,1,4), (2,-1,1).

Следовательно, $x_0 = 2, \quad y_0 = -1$.

Таким образом, $x=2+9t$, $y=-1-5t$ – решение данного уравнения при любом целом t.

4. Укажем еще один способ решения уравнения (3).

Пусть дано натуральное число с каноническим разложением.

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

Функция натурального аргумента

$$\varphi(m) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1) \cdots p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1)$$

называется функцией Эйлера и показывает число натуральных чисел, взаимно простых с m и меньших m.

Имеет место следующее утверждение:

Если числа a и b взаимно просты, то

$$x = ca^{\varphi(b)-1} + bt\ ,$$

$$y = c\frac{1 - a^{\varphi(b)}}{b} - at\ ,$$

где t – любое целое число, есть решение уравнения (3).

В бочке *c* литров воды. Имеется два ведра емкостью *a* литров и *b* литров. Кроме того, имеется черпак емкостью *d* литров. Пользуясь только черпаком разделить в ведра по *n* и *m* литров соответственно.

Решение. В качестве вливаемого сосуда выбран черпак. Для того, что разлить в первое ведро n литров воды, нужно решить в натуральных числах уравнение

$$dx - ay = n.$$

Соответственно, чтобы разлить во второе ведро m литров воды, нужно решить в натуральных числах уравнение

$$dx - by = m.$$

Решение этих уравнений можно осуществить методом последовательных переливаний.

Пример. Имеется два ведра емкостью по 7 л, в которые нужно налить по 3 л и 5 л воды из бака, пользуясь черпаком емкостью 4 л.

Решение. а) Вначале наполним одно из ведер:

(0,0,0), (4,0,0), (0,4,0), (0,0,4), (4,0,4), (0,4,4), (0,1,7), (0,1,0), (0,0,1), (4,0,1), (0,0,5)

Итак, во втором ведре 5 л воды.

Подсчитав число вливаний $x=3$ и число выливаний $y=1$, получаем решение уравнения

$$4x-7y=5.$$

б) наполним теперь другое ведро, пользуясь только черпаком:

(4,0,5), (0,4,5), (4,4,5), (1,7,5), (1,0,5), (0,1,5),
(4,1,5), (0,5,5) , (4,5,5), (2,7,5), (2,0,5), (0,2,5),
(4,2,5), (0,6,5), (4,6,5), (3,7,5), (3,0,5), (0,3,5).

Итак, в первом ведре 3 л воды.

Подсчитав число вливаний $x=6$ и число выливаний $y=3$, получаем решение уравнения

$$4x-7y=3.$$

5. Имеются два сосуда цилиндрической формы емкостью $2a$ и $2b$ литров. Требуется налить из бака $(2d+1)$ литров воды.

Решение. Если в качестве вливаемого сосуда выбрать сосуд емкостью $2a$ литров, то решение задачи сводится к решению в натуральных числах уравнения

$$2ax-2by=2d+1. \quad (8)$$

Однако это уравнение не имеет решение в целых числах, поскольку левая часть уравнения всегда четная, а правая – нечетная.

Поэтому нужно использовать цилиндрическую форму сосудов, наклоняя их таким образом, чтобы только половина жидкости оставалась в сосудах. Тогда при взаимно простых a

и b, уравнение (8) будет иметь решение в натуральных числах и примет вид:

$$ax - 2by = 2d + 1. \tag{9}$$

Пример. Имеется два сосуда цилиндрической формы емкостью 10 л и 6 л. Требуется налить из бака 1 л воды.

Решение.

а) Выберем в качестве вливаемого сосуда сосуд емкостью 10 л. Осуществим последовательные переливания, набирая во вливаемый сосуд 5 л воды указанным способом.

(5,0), (0,5), (5,5), (4,6), (4,0), (0,4), (5,4), (3,6), (3,0), (0,3), (5,3), (2,6), (2,0), (0,2), (5,2), (1,6).

Итак, в первом сосуде 1 л воды. Подсчитав количество вливаний $x=5$ и количество выливаний $y=4$, получаем решение уравнения (9):

$$5x - 6y = 1.$$

б) Выберем в качестве вливаемого сосуда сосуд емкостью 6 л. Осуществляя последовательные переливания, получаем:

(0,0), (0,6), (5,1), (0,1).

Итак, во втором сосуде 1 л воды. Подсчитав количество вливаний $x=1$ и количество выливаний $y=1$, получаем решение уравнения:

$$6x - 5y = 1.$$

в) Выберем в качестве вливаемого сосуда сосуд емкостью 10 л. Осуществим последовательные переливания, наклоняя указанным способом оба сосуда.

(0,0), (5,0), (2,3), (2,0), (0,2), (5,2), (4,3), (4,0), (1,3), (1,0).

Итак, в первом сосуде 1 л воды. Подсчитав количество вливаний $x=2$ и количество выливаний $y=3$, получаем решение уравнения:

$$5x - 3y = 1.$$

г) Выберем в качестве вливаемого сосуда сосуд емкостью 6л. Осуществим последовательные переливания, наклоняя указанным способом оба сосуда.

(0,0), (3,0), (0,3), (3,3), (1,5), (1,0).

Итак, в первом сосуде 1 л воды. Подсчитав количество вливаний $x=2$ и количество выливаний $y=1$, получаем решение уравнения:

$$3\,x–5\,y=1.$$

6. Шкала долей сосуда цилиндрической формы.

Пусть имеется сосуд цилиндрической формы, наполненный жидкостью. Укажем способ, с помощью которого можно получить различные доли этого объема, другими словами, составим шкалу долей объема сосуда.

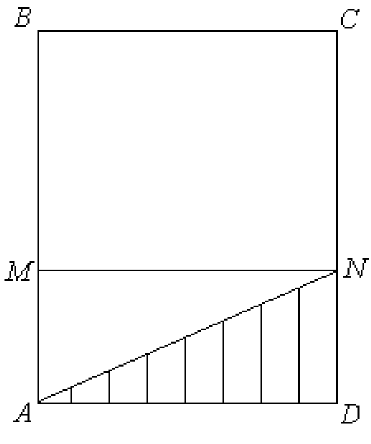

Рис. 2

Пусть *ABCD*, *AMND* – цилиндры, (рис.2)

S – площадь основания,

$CD=h$ – высота.

Обозначим $ND=x$,

V_{ABCD} – объем цилиндра *ABCD*

V_{AMND} – объем цилиндра *AMND*,

n – произвольное натуральное число.

Тогда имеет место равенство:

$$V_{ABCD} = n \cdot \frac{1}{2} V_{AMND},$$

откуда следует, что $Sh = n \cdot \frac{1}{2} S \cdot x$, т.е.

$$x = \frac{2}{n} h.$$

Таким образом, сторона цилиндра *CD* может быть размечена последовательностью точек $\frac{2}{n}$, $n \in N$, начиная от точки *C* и до точки *D*.

При этом каждой точке $\frac{2}{n}$ полученной шкалы соответствует доля объема $\frac{1}{n}$.

Удобство такой шкалы состоит в том, что указанные доли можно получить, наклоняя соответствующим образом цилиндрический сосуд.

Кроме того, многократное использование этой шкалы позволяет получить дробную часть данного объема.

Задача о бесконечном переливании

1) **Имеются два сосуда, в первом из них 1 л воды, второй сосуд пустой. Последовательно производится переливание из первого сосуда во второй, из второго в первый и т.д., причем, из первого сосуда переливают $\frac{1}{n}$ находящейся в ней воды во второй сосуд; затем из второго сосуда переливают $\frac{1}{n}$ получившегося в нем объема воды обратно в первый сосуд, далее, из первого сосуда переливают во второй $\frac{1}{n}$ находящейся в**

нем воды и так до бесконечности. Как в конце концов распределится вода между этими сосудами?

Решение. а) Пусть x_k и y_k – количество воды в первом и во втором сосудах после k-го переливания.

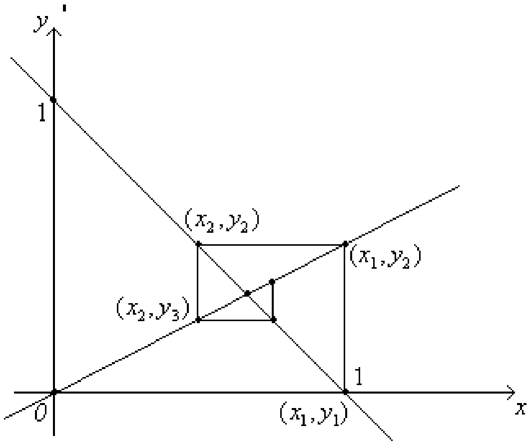

Рис. 3

Изобразим точки (x_k, y_k) на плоскости (рис.3)

Тогда точки (x_i, y_i) лежат на прямой $x+y=1$, а точки (x_i, y_{i+1}) - лежат на прямой $y = \frac{1}{n}x$.

Решая систему уравнений $x+y=1$, $y = \frac{1}{n}x$,

получаем решение задачи: $x = \frac{n}{n+1}$, $y = \frac{1}{n+1}$.

б) Количество воды в первом сосуде x – есть сумма бесконечной убывающей прогрессии со знаменателем

$q = -\frac{1}{n}$,

$$x = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \cdots = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1}.$$

Количество воды во втором сосуде y – есть сумма бесконечной убывающей прогрессии со знаменателем

$$q = -\frac{1}{n},$$

$$y = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \cdots = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1}.$$

2. **Имеются три сосуда, в первом из них 1 л воды, а два других – пустые. Последовательно производится переливание из первого сосуда во второй, из второго в третий, из третьего в первый и т.д., причем, каждый раз переливается $\frac{1}{n}$ находящейся в сосуде воды. Как распределится вода между этими сосудами при бесконечном переливании?**

Решение. Пусть x, y, z – количество воды соответственно в первом, во втором и в третьем сосудах. Тогда эти величины связаны между собой следующими соотношениями:

$$x+y+z=1, \quad y = \frac{1}{n}x, \quad z = \frac{1}{n}y.$$

Решая систему уравнений, получаем решение задачи:

$$x = \frac{n^2}{n^2+n+1}; \quad y = \frac{n}{n^2+n+1}; \quad z = \frac{1}{n^2+n+1}.$$

21. 12-ведерная бочка наполнена керосином. Разлить его на две равные части, пользуясь пустыми пяти ведерной и восьми ведерной бочками.
22. В бочке не менее 10 л бензина. Как отлить из нее 6 л бензина с помощью 9-литрового ведра и 5-литрового бидона?
23. С помощью двух бидонов емкостью 17 л и 5 л отлить из молочной цистерны 13 л молока.
24. Разделить поровну между двумя семьями 12 л кваса, находящегося в двенадцатилитровом сосуде, пользуясь для этого двумя пустыми сосудами: восьми литровым и трехлитровым.
25. Бидон, емкость которого 10 л, наполнен керосином. Имеются еще пустые сосуды в 7 л и 2 л. разлить керосин в два сосуда по 5 л каждый.
26. Имеются два сосуда. Емкость одного из них 9 л, а другого 4 л. С помощью этих сосудов набрать из бака 6 л некоторой жидкости. (Жидкость можно сливать обратно в бак.)
27. Имея два сосуда емкостью 5 л и 9 л, набрать из водоема ровно 3 л воды.
28. Имеются три сосуда вместимостью 8 л, 5 л и 3 л. Первый из них заполнен некоторой жидкостью, а два остальных - пустые. С помощью этих сосудов отмерить 4 л жидкости.
29. Имеются сосуды в 12 л, 9 л и 5 л. Первый из них наполнен водой. Сколько литров можно отлить из первого сосуда, пользуясь вторым и третьим. Можно ли отлить 6 л?
30. Можно ли с помощью двух сосудов емкостью 9 л и 11 л набрать из крана 10 л воды?

31. Имеются пятилитровая банка и четырех-литровая кастрюля. Для приготовления супа надо налить в кастрюлю 3 л воды из-под крана. Как это сделать?
32. В ведре содержится 10 л молока. Требуется с помощью пустой трехлитровой банки и пустого семилитрового бидона распределить молоко так, чтобы в ведре и бидоне оказалось по 5 л молока. Как это сделать наименьшим числом переливаний?
33. Имея два сосуда цилиндрической формы емкостью 6 л и 4 л, набрать из бака 1 л воды.
34. В бочке 18 л бензина. Имеется два ведра объемом по 7л, в которые нужно налить по 6 л бензина. Кроме того, есть черпак объемом 4 л. Как можно осуществить разлив?
35. Имеются три бочки A, B и C. Бочка A наполнена водой, бочки B и C – пустые. Если из бочки A наполнить бочку B , то в бочке A останется $\frac{m}{n}$ ее содержимого. Если же из бочки A наполнить бочку C, то в бочке A останется $\frac{p}{q}$ ее содержимого. Чтобы наполнить обе бочки B и C, надо взять содержимое бочки A и еще добавить a ведра воды. Сколько ведер воды вмещает каждая бочка?
36. Имеются четыре бочки A, B, C и D, причем бочки C и D одинаковой емкости. Если содержимым бочки A наполнить бочку C, то в бочке A останется $\frac{m}{n}$ ее содержимого; если же содержимым бочки B наполнить бочку D, то в бочке D останется $\frac{p}{q}$ ее содержимого. Чтобы наполнить бочки A и B, надо взять содержимое бочек C и D и

добавить еще a ведер воды. Сколько ведер воды вмещает каждая бочка?

37. Из ведра, содержащего 5 литров воды, отливают 1 литр, а затем в ведро вливают 1 литр сока. Перемешав все это, из ведра отливают 1 литр смеси, затем в ведро опять вливают 1 литр сока. Опять перемешивают, отливают 1 литр смеси и вливают 1 литр сока. Сколько в ведре после этого останется воды?
38. Из бочки, содержащей 100 л сока, отливают 1 литр и вливают в нее затем 1 л воды. Перемешав полученную смесь, из бочки отливают 1 литр смеси и опять отливают один литр смеси и вливают 1 л воды, и так делают неоднократно. Можно ли в результате таких операций получить смесь, содержащую 50 л воды и 50 л сока?
39. Из сосуда, вмещающего 20 л и наполненного спиртом, отлили некоторую часть и долили в сосуд воды, затем опять долили такое же количество смеси и снова долили водой, после чего в сосуде осталось 5 л спирта. Сколько литров жидкости отливали каждый раз?
40. Имеются два сосуда, в первом из них 1 л воды, второй сосуд пустой. Последовательно проводится переливание из первого сосуда во второй, из второго в первый и т.д., причем доля отливания воды составляет соответственно 1/2, 1/3, 1/4 и т.д. от количества воды в сосуде, из которого вода отливается. Сколько воды будет в сосуде после 1991 переливаний? После бесконечного числа переливаний?
41. В двух сосудах вместе имеется l л воды; из первого сосуда переливают половину находящейся в ней воды во второй сосуд; затем из второго сосуда переливают половину получившегося в нем объема воды обратно в первый сосуд; далее, из первого сосуда переливают во вто-

рой половину находящейся в нем воды и так до бесконечности. Как в конце концов распределится вода между обоими сосудами?

42. Человек пил кофе следующим образом: сначала он наливал полную чашку кофе, выпивал некоторую ее часть, затем доверху наливал молоко, выпивал часть смеси, снова наливал молоко доверху и т.д. Каждый раз он выпивал вдвое меньше предыдущего, кроме последнего раза, когда он выпивал чашку до дна. Чего он больше выпил - кофе или молоко?
43. Имеется два трехлитровых сосуда. В один налит 1 л спирта, в другой 1 л воды. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой. Можно ли за несколько переливаний сделать 60 %-ый раствор спирта в том сосуде, где была вода?
44. Имеются три сосуда, содержащие неравное количество жидкости. Для выравнивания этих количеств сделано три переливания. Сначала третью часть жидкости перелили из первого сосуда во второй, затем четвертую часть жидкости, оказавшейся во втором сосуде перелили в третий и, наконец, десятую часть жидкости, оказавшейся в третьем сосуде, перелили в первый. После этого в каждом сосуде оказалось $a_л$ жидкости. Сколько жидкости было первоначально в каждом сосуде?
45. Одна из трех бочек наполнена водой, остальные пустые. Если вторую бочку наполнить водой из первой бочки, то в первой останется $\frac{1}{n}$ часть бывшей в ней воды. Если затем наполнить третью бочку из второй, то во второй останется $\frac{p}{q}$ количества содержащейся в ней воды. Если, наконец, из третьей бочки вылить в пустую

первую, то для ее наполнения недостанет a ведер. Определить емкость каждой бочки.

46. Бак был полон воды. Эту воду поровну перелили в три бидона. Оказалось, что в первом бидоне вода заняла половину его объема, во втором бидоне вода заняла 2/3 его объема, а в третьем – 3/4 его объема. Бак и все три бидона вмещают по целому числу литров. При каком наименьшем объеме бака возможна такая ситуация?
47. Даны две бочки бесконечно большой емкости. Можно ли пользуясь ковшами емкостью $2-\sqrt{2}$ л и $\sqrt{2}$ л, перелить из одной в другую ровно 1 л?
48. В нескольких одинаковых баллонах находится сжатый газ под разными известными давлениями, причем самое слабое давление в первом баллоне.

Разрешается подсоединять первый баллон поочередно к любому из остальных баллонов, но не более чем по одному разу. При соединении двух баллонов давление в них обоих становится равным среднему арифметическому их исходных давлений. К каким баллонам, и в какой последовательности следует подсоединять первый баллон, чтобы создать в нем наибольшее давление?

49. Пусть пары чисел $(a,b),(a_1,b_1),(a_2,b_2),\ldots$ образуются по следующему закону
$$a_1=\frac{a+b}{2};b_1=\frac{a_1+b}{2};a_2=\frac{a_1+b_1}{2};b_2=\frac{a_2+b_1}{2};\ldots$$
Доказать, что
$$a_n=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$$
$$b_n=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4^n}\right).$$

§ 3. Задача о размене

Задачей о размене называется следующая задача.

Сколько неотрицательных целых решений имеет уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m = n, \qquad (1)$$

где a_i **– целые положительные числа,** n **– натуральное число.**

Пример 1. Решить в целых числах уравнение

$$ax+by+cz=d, \qquad (2)$$

где a, b, c, d – целые числа, и ни одно из чисел a, b и c не равно нулю.

Возможны следующие случаи:

1) из трех коэффициентов a, b и c по крайней мере два - взаимно просты;
2) каждые два коэффициента имеют общий множитель, но все три взаимно просты.

1). Пусть a и b – взаимно простые числа.

Тогда $ax+by=d-cz$ и к этому уравнению можно применить метод решения уравнения с двумя неизвестными, считая z известной величиной. Следовательно, получаем

$$x = \alpha + bt\,,\;\; y = \beta + at\,,$$

где α и β – многочлены первой степени относительно z. Придавая z и t произвольные целые значения, получаем все целые решения уравнения (2).

2). Пусть теперь среди коэффициентов a, b и c нет ни одной пары взаимно простых.

Пусть h=НОД($a; b$) и a', b' – частные от деления a, b на h. Тогда уравнение (2) примет вид $ha'x + hb'y + cz = d$, или $a'x + b'y = \dfrac{d - cz}{h}$.

Чтобы левая часть была целым числом, необходимо, чтобы ($d - cz$)/h было равно целому числу. Следовательно,

$$a'x + b'y = t \tag{3}$$

$$cz + ht = d \tag{4}$$

Так как НОД(a', b')=1, то уравнение (3) имеет целые решения вида $x = \alpha + b't'$, $y = \beta + a't'$, где α и β – многочлены первой степени от t с целыми коэффициентами.

Кроме того, поскольку h, будучи делителем чисел a и b, не делит c. Отсюда следует, что уравнение (4) имеет целые решения вида $z = \gamma + ht''$, $t = \delta - ct''$.

Подставляя это значение t в формулы для x и y, можно представить эти неизвестные в виде многочленов первой степени с целыми коэффициентами от t' и t''. Придавая t' и t'' произвольные целые значения, получаем все целые решения x, y и z исходного уравнения (2).

Для того, чтобы найти число целых решений уравнения вида (2), нам потребуются следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть

$$ax + by \le c,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge 0; \tag{5}$$

и c делится на a и на b, d=НОД $\left(\dfrac{c}{a}; \dfrac{c}{b}\right)$. Тогда число целых неотрицательных решений системы неравенств (5) вычисляется по формуле:

$$T = \frac{c(a + b + c)}{2ab} + \frac{1}{2}d + 1. \tag{6}$$

Доказательство. Площадь треугольника, образованного прямыми $ax + by = c$, $x = 0$, $y = 0$; равна:

$$S = \frac{1}{2}\frac{c}{a}\frac{c}{b}$$

С другой стороны, площадь этого треугольника можно вычислить по известной формуле Пика

$$S = B + \frac{1}{2}\Gamma\text{-}1,$$

где B – число внутренних целочисленных точек, Γ – число целочисленных точек на границе треугольника.

Число целых неотрицательных решений системы неравенств (5) равно сумме внутренних целочисленных точек и целочисленных точек на границе, т.е. T=B+Γ.

Можно показать, что $\Gamma = \left(\frac{c}{b} + 1\right) + \frac{c}{a} + d + 1$,

B+Γ =S+1+$\frac{1}{2}\Gamma$. Откуда следует равенство

$$B+\Gamma = \frac{c^2}{2ab} + 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b} + \frac{c}{a} + 1\right) + \frac{1}{2}(d+1),$$

которое равносильно равенству (6).

Теорема 2. Пусть

$$\begin{cases} a_1x + b_1y \ge c_1 \\ x \ge 0, \ \ y \ge 0 \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} a_2x + b_2y \le c_2 \\ x \ge 0, \ \ y \ge 0, \end{cases} \tag{8}$$

$a_1 \le a_2$, $b_1 \le b_2$, $c_1 \le c_2$,

T_1 – число целочисленных решений системы (7),

T_2 – число целочисленных решений системы (8),

T_{21} – число целочисленных решений в полосе между прямыми a_1x+b_1y-c_1 и a_2x+b_2y-c_2; d_1=НОД $\left(\frac{c_1}{a_1};\frac{c_1}{b_1}\right)$

Тогда имеет место равенство: $T_{21}=T_2-T_1+d_1+1$.

Доказательство следует из теоремы 1.

Теорема 3. Пусть $ax+by\le c,\ x\ge 0,\ y\ge 0$; и c одновременно не делится на a и на b.

Тогда число целых неотрицательных решений системы неравенств (5), вычисляется по формуле:

$$T=\sum_{x=0}^{\left[\frac{c}{a}\right]}\left[\frac{c-ax}{b}+1\right], \tag{9}$$

где квадратная скобка [x] обозначает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.

Доказательство. Подсчитаем число целочисленных точек непосредственно, т.е. просуммируем число целочисленных точек на отрезках $\left[0,y_0\right],\left[0,y_1\right],\ldots,\left[0,y_k\right]$, где

$$k=\left[\frac{c}{b}\right],\ y_i=\frac{c-ax_i}{b},\quad i=0,1,\ldots,k.$$

Тогда $T=\sum\limits_{x=0}^{\left[\frac{c}{a}\right]}\left[y+1\right]$, откуда следует равенство (9).

Пример. Найти число целочисленных решений уравнения $2x+3y+25z=150$.

Решение. Имеем $2x+3y=150–25z$,

$$\begin{cases} x=(30-5z)+3t \\ y=(30-5z)-2t \end{cases}$$

Используя условие $x\ge 0,\ y\ge 0$, получаем

$$\begin{cases} -3t+5z\le 30, \\ 2t+5z\le 30, \\ z\ge 0. \end{cases}$$

Применим теорему 3. Имеем $T_1(0)=T_2(0)=7$.

Тогда $T_2=58$, $T_1=40$.

Следовательно, T=58+40–7=91.

Ответ: 91 решение.

Замечание. Известно также, что число решений исходного уравнения (1) определяется коэффициентами c_i выражения

$$(1+z^{a_1}+z^{2a_1}+z^{3a_1}+\cdots)(1+z^{a_2}+z^{2a_2}+z^{3a_2}+\cdots)\times$$
$$\times\ldots(1+z^{a_m}+z^{2a_m}+z^{3a_m}+\cdots)=$$
$$=(1+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\cdots).$$

Пример. Сколько целых неотрицательных решений имеет уравнение $x_1+2x_2=3$?

Решение. Имеем

$$(1+z+z^2+\cdots)(1+z^2+z^4+\cdots)=1+c_1z+c_2z^2+\cdots$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях этого равенства, получаем, что $c_2=2$.

Ответ: 2 решения.

Частным случаем задачи о размене является задача о разбиении числа: найти число положительных целых решений уравнения:

$$x_1+x_2+\ldots+x_m=k, \tag{10}$$

где m и k – фиксированные натуральные числа.

Для решения данной задачи рассматривается выражение

$$a(z)=(1+z+z^2+z^3+\ldots)^m, \tag{11}$$

где z – переменная.

После раскрытия скобок, получаем

$$a(z)=1+B_1z+B_2z^2+B_3z^3+\ldots$$

Коэффициент B_k равен числу способов выбора по одному целому показателю из каждой из скобок в правой части (11), то есть B_k равно числу положительных целых решений уравнения (10) и выражается равенством:

$$B_k=\frac{m(m+1)\ldots(m+k-1)}{n!}.$$

Замечание 1. Задача о числе строго положительных решений $x_1,x_2,\ldots,x_m$ уравнения (10) сводится к задаче о числе положительных решений уравнения

$$y_1+y_2+\ldots+y_m=n-m. \qquad (12)$$

Каждое строго положительное решение $x_1,x_2,\ldots,x_m$ уравнения (10) определяет положительное решение $y_1=x_1-1, y_2=x_2-1,\ldots,y_m=x_m-1$ уравнения (12).

Различные решения $x_1,x_2,\ldots,x_m$ определяют различные решения $y_1,y_2,\ldots,y_m$. И каждое положительное решение $y_1,y_2,\ldots,y_m$ уравнения (12) определяется строго положительным решением $x_1=y_1+1, x_2=y_2+1,\ldots,x_m=y_m+1$ уравнения (10).

Следовательно, число строго положительных решений $x_1,x_2,\ldots,x_m$ уравнения (10) равно числу положительных решений $y_1,y_2,\ldots,y_m$ уравнения (12).

Замечание 2. Уравнение (10) определяет разбиение натурального числа k на слагаемые. Очевидно, что в зависимости от k число таких разбиений будет различным. Поэтому можно определить функцию разбиений $p(k)$ как число всех разбиений числа k.

Непосредственно можно вычислить, что

$p(1)=1$, $p(2)=2$, $p(3)=3$, $p(4)=5$, $p(5)=7$, $p(6)=11$.

Значения функции $p(k)$ очень быстро растут с ростом k; например $p(10)=42$, $p(20)=627$, $p(50)=204226$, $p(100)=190569292$.

Во многих случаях представляет интерес рассмотреть не все разбиения, а только какие-то определенные подмножества множества всех разбиений.

Например, разбиение с нечетными частями, разбиения с различными частями и т.п.

50. Сколько целочисленных решений имеет уравнение
    а) $x+2y+3z=6$. б) $x+2y+3z+4t=8$.
51. Каким количеством способов можно разменять 25 коп монетами по две и три копейки?
52. Как разменять 59 коп пятнадцатью монетами по 3 и 5 копеек?
53. Как составить сумму в 99 коп из 22 монет по 2, 3 и 5 копеек?
54. Сколькими способами можно разменять пятирублевый денежный билет монетами по 15 коп и 20 коп?
55. Можно ли разменять 25 рублей на рублевые, трехрублевые и пятирублевые денежные казначейские билеты так, чтобы получилось ровно 10 билетов?
56. Как с помощью монет в 3 и 5 коп заплатить в магазине кассиру 13 коп.?
57. Доказать, что любую денежную сумму, выраженную целым числом рублей, большим 7, можно уплатить без сдачи, имея лишь, трехрублевые и пятирублевые купюры в достаточном количестве.
58. Доказать, что за любую покупку стоимостью в целое число рублей можно заплатить одними трехрублевыми купюрами, если у кассира имеются только пятирублевые купюры. Какое наименьшее количество пятирублевых купюр достаточно при этом иметь кассиру?

59. Можно ли набрать сумму в 1000 рублей с помощью купюр достоинством в 1 рубль, 10 рублей, 100 рублей таким образом, чтобы всего было использовано ровно 40 купюр?
60. На складе имеются гвозди, упакованные в ящики по 16 кг, 17 кг и 40 кг. Может ли кладовщик отпустить 140 кг гвоздей, не вскрывая ни одного ящика?
61. На станцию привезли 420 т угля в вагонах вместимостью по 15 т, по 20 т и по 25т. Сколько таких вагонов было использовано, если известно, что всего было 27 вагонов?
62. Для перевозки зерна имеются мешки, в которые входит либо 60 кг, либо 80 кг зерна. Сколько надо заготовить тех и других мешков для загрузки 1 т зерна таким образом, чтобы все мешки были полными? Какое наименьшее количество мешков при этом может понадобиться?
63. Требуется разлить 20,5 л сока в банки по 0,7 л и 0,9 л так, чтобы все банки оказались полными. Сколько таких банок надо заготовить? Какое наименьшее количество банок при этом может понадобиться?
64. Для перевозки большого количества контейнеров по 170 кг и по 190 кг выделены трехтонные машины. Можно ли ими загружать машины полностью?
65. Школьник купил несколько тетрадей, простых и цветных карандашей. Тетрадь стоит 1 коп., простой карандаш 4 коп., а цветной 6 коп. Было куплено 20 предметов и уплачено 40 коп. Сколько тетрадей, простых и цветных карандашей купил школьник?
66. В трамвай вошли 5 ребят. У Миши 3 коп по 1 коп., у Лены две по 2 коп., у Кости одна по 3 коп., у Димы одна по 15 коп., у Нади одна по 10 коп. Как им оплатить проезд? (по три копейки)

67. В кошельке 50 монет по 3 и 5 коп. Если бы первых было двое, а вторых втрое меньше, то число монет обоего рода было бы 19. Сколько денег в кошельке?
68. Фома и Ерема нашли по дороге по пачке семнадцатирублевых. В чайной Фома заплатил без сдачи этими купюрами за 4 стакана чая и семь калачей. Ерема взял шесть калачей и один стакан чая. Доказать, что и он сможет расплатиться этими купюрами без сдачи. Стакан чая, как и калач, стоит целое число рублей.
69. У школьника есть 1 рубль монетами достоинства до 10 коп включительно. Известно, что если отобрать по одной монете каждого типа, имеющегося у школьника, то в сумме получится 18 коп. Сколько монет каждого достоинства имеется, если монет самого большого достоинства больше числа всех прочих монет на 4?
70. Разменять 45 рублей по 3 и 5 рублей.
71. В автобусе без кондуктора ехали $4n$ пассажира (n - целое число), которые имели только монеты достоинством 10,15 и 20 коп. Обмениваясь монетами между собой, пассажиры уплатили за проезд и каждый из них получил сдачу. Доказать, что пассажиры имели в общей сложности не менее 5 n монет. (Стоимость проезда одного пассажира 5 коп).
72. В автобусе без кондуктора ехали $4n+1$ пассажиров (n – целое число), которые имели только монеты достоинством 10,15 и 20 коп. Обмениваясь монетами между собой, пассажиры уплатили за проезд и каждый из них получил сдачу. Доказать, что пассажиры имеют в общей сложности не менее $5n+2$ монет. (Стоимость проезда одного пассажира 5 коп).
73. В автобусе без кондуктора ехали n пассажиров (n – целое число), которые имели только монеты достоинством 10,15 и 20 коп. Обмениваясь монетами между собой, пассажиры

уплатили за проезд, и каждый из них получил сдачу. Доказать, что пассажиры имели в общей сложности не менее $n+\left[\frac{n+3}{4}\right]$ монет, где $[x]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее *x*. (Стоимость проезда одного пассажира 5 коп).

74. У покупателя имеются денежные знаки достоинством в три и 5 руб. в достаточном количестве, чтобы уплатить в кассу 46 руб. Можно ли без сдачи уплатить 46 руб. десятью названными денежными билетами.
75. Требуется на 1 рубль купить 40 почтовых марок 1-копеечных, 4-копеечных и 12-копеечных. Сколько окажется марок каждого достоинства?
76. За пересылку бандероли надо уплатить 18 коп. Сколько способами можно оплатить ее марками стоимостью в 4 и в 10 коп., если два способа, отличные порядком, считаются различными?
77. Имеются марки с достоинством в $n_1, n_2, \ldots, n_k$ коп. Сколькими способами можно оплатить с их помощью сумму в N коп., если два способа, отличающиеся порядком, считать различными?
78. Показать, что число целых положительных решений уравнения (10) равно C_{k-1}^{m-1} – числу сочетаний из *(k-1)* – элементов по (*m-1)*.
79. Показать, что общее число целых неотрицательных решений уравнений
$x+y=n;\ 2x+3y=n-1;\ \ldots;\ nx+(n+1)y=1;$
$(n+1)x+(n+2)y=0$ равно $n+1$.
80. Показать, что общее число целых неотрицательных решений уравнений

$$x+4y=3n-1,\quad 4x+9y=5n-4,\quad 9x+16y=7n-9,\ldots,$$

$n^2x+(n+1)^2y=n(n+1)$ равно *n*.

81. Доказать, что уравнение

$$x_1+2x_2+\dots+nx_n=a$$

не допускает решений в целых положительных числах тогда и только тогда, когда уравнение

$$y_1+2y_2+\dots+ny_n=a-\frac{n(n+1)}{2}$$

не допускает решений в целых неотрицательных числах (a – целое положительное число).

82. Пусть k и n - натуральные числа, $2\le k\le n$. Назовем набор k положительных чисел $a_1,a_2,\ldots a_k$, меньших 1, исключительным, если для любого разбиения $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$ числа n на неотрицательные целые слагаемые, хотя бы одно из чисел a_in_i - целое (i=1, 2, ..., n).

а) Для каких k и n существуют исключительные наборы?

б) Каковы эти наборы?

83. Для каждого натурального числа n обозначим через $p(n)$ число разбиений в сумму натуральных слагаемых (разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми). Количество различных чисел в данном разбиении назовем его разбросом.

а) Доказать, что сумма $q(n)$ разбросов всех разбиений числа n равна $1+p(1)+p(2)+\dots+p(n-1)$.

б) Доказать, что эта сумма не больше $\sqrt{2n}\,p(n)$.

84. Пусть n, m, k – натуральные числа. Доказать, что если 1+2+3+...+ n= $k\,m$, то числа 1,2,..., n можно разбить на k групп так, чтобы суммы чисел в каждой группе были равны m.

85. На склад привезли 57 т груза. Для вывода этого груза дали 10 машин грузоподъемностью 8 т, 4 т и 3 т. Сколько ма-

шин каждого дали, если все машины были загружены полностью и сделали по одному рейсу?

86. Ученику прислали задание, состоящее из 20 задач. За каждую верно решенную задачу ему ставят 8 баллов, за каждую неверно решенную – минус 5 баллов, за задачу, которую он не брался решать – 0 баллов. Ученик получил в сумме 13 баллов. Сколько задач он брался решать?
87. Имеются контейнеры двух видов: по 130 кг и 160 кг. Нужно полностью загрузить ими грузовик грузоподъемностью 3 тонны. Можно ли это сделать?
88. На складе имеются газопроводные трубы длиной 13 м и 7 м. Сколько следует взять тех и других, чтобы проложить газопровод на участке 218 м?
89. Отпущено 30 руб. для покупки линейки по 1 руб 90 коп и готовальни по 3 руб 70 коп. Сколько следует взять тех и других, чтобы израсходовать всю отпущенную сумму?
90. Доказать, что уравнение x-y+z=1 имеет бесконечно много решений, среди таких попарно различных натуральных чисел x,y,z , что произведение любых двух из них делится на третье.
91. Можно ли перевести 50 контейнеров, веса которых 370 кг, 372 кг, 374 кг, ..., 468 кг на 7 грузовиках, если на каждый из них нельзя грузить более 3 тонн.
92. У школьника было несколько монет достоинством в 15 коп и 20 коп, причем двадцатикопеечных монет было больше, чем пятнадцатикопеечных. Пятую часть всех денег школьник истратил, заплатив две монеты за билет в кино. Половину оставшихся у него денег он отдал за обед, оплатив его тремя монетами. Сколько монет каждого достоинства было у школьника вначале?

93. На переговорном пункте установлены автоматы для размена серебряных монет достоинством 10, 15 и20 копеек по следующему правилу:
   20=15+2+2+1; 15=10+2+2+1; 10=3+3+2+2.
   Сумму 1 руб 25 коп серебряными монетами можно разменять в автоматах на медь. Узнать, сколько было серебряных монет.
94. Имеются 2 автомата. Если в первый из них бросить 5 коп, то он умножит данное ему число на 3. Если во второй бросить 2 коп, то он прибавит к данному ему числу 4. какую минимальную сумму денег надо иметь, чтобы с помощью этих автоматов получить из данного числа 1 число 1979?
95. Разменный автомат меняет любую монету от 5 коп до 1 руб на 5 других монет. Если какую-либо монету можно разменять несколькими способами, то выбор фиксирован конструкцией автомата. Степенью полезности автомата назовем наибольшее число S, при котором можно разменять 1 руб на S монет, пользуясь только этим автоматом.
1). Можно ли разменять 50 коп на 20 монет?
2). Доказать, что с помощью любого разменного автомата можно разменять 1 руб на любое число монет вида $4k+1$, не превышающее 33.
3). Можно ли вместо 33 взять 37?
4). На какое количество монет можно разменять 1 руб при помощи автомата со степенью полезности?
5). Какое максимальное и минимальное значение S?
6). Что можно сказать об автомате, в котором способ размена не фиксирован конструкцией?
96. Ученик заплатил за альбом тремя разными монетами и получил сдачу, составляющую 1/59 части стоимости альбома. Сколько стоит альбом?

97. Отдав продавцу рубль, покупатель получил столько копеек сдачи, сколько он купил литров молока. Найти стоимость литра молока, если известно, что она выражается четным числом копеек.
98. (А.П. Чехов «Репетитор»). Куплено 138 аршин черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин куплено того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное 3 руб.?
99. Сколькими способами можно разменять рубль на монеты достоинством в 1, 2, 5, 10, 20 и 50 копеек?
100. Сколькими способами можно наклеить 40 копеек марками достоинством в 5, 10, 15 и 20 копеек, расположенными в одну линию, если рассматривать расположения, отличающиеся друг от друга порядком следования двух марок неодинакового достоинства, как различные?
101. Показать, что число неотрицательных целочисленных решений уравнения $x+2y+3z=n$, есть ближайшее к $\frac{(n+3)^2}{12}$ целое число.
102. Показать, что число неотрицательных целочисленных решений уравнения $ax+by=n$, где a, b, n – положительные числа и a, b - взаимно простые, равно $\left[\frac{n}{ab}\right]$ или $\left[\frac{n}{ab}\right]+1$.
103. Пусть $a_1, a_2, ..., a_k$ – целые положительные взаимно простые числа. Если A_n – число неотрицательных целых решений уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k = n$, то имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{n^{k-1}} = \frac{1}{a_1a_2...a_k(k-1)!}$$

104. Сколько целых точек лежит на плоскости $x+y+z=n$ в замкнутом положительном октанте $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$? Сколько их в открытом октанте $(x > 0, y > 0, z > 0)$?

105. Сколько целых точек лежит в «октаэдре» $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_p| \leq n$ p – мерного пространства (n – целое)?

106. Показать, что число положительных целочисленных решений уравнения $x+y+z=n$ $(n \geq 3)$, удовлетворяющих условиям

$$x \leq y+z, \quad y \leq z+x, \quad z \leq x+y$$

равно $\dfrac{(n+8)(n-2)}{8}$ или $\dfrac{n^2-1}{8}$, смотря потому, будет ли n четно или нечетно.

107. а) Могут ли несколько человек расплатиться в автобусе без кондуктора, где проезд стоит 5 коп, имея только 10-, 15- и 20-копеечные монеты?

б) Тот же вопрос, если имелись только 10- и 20-копеечные монеты.

в) Тот же вопрос, если имелись только 15- и 20-копеечные монеты.

108. Пусть a и n – целые положительные числа. Число тех из чисел 1, 2, 3,..., n, которые делятся на a, равно $\left[\dfrac{n}{a}\right]$.

109. Пусть a и b – целые числа, $f(x)$ – функция, определенная и положительная в интервале $a \leq x \leq b$. Выразить посредством символа [ ] число целых точек, находящихся в области, определяемой неравенствами $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$.

110. Пусть p и q – взаимно простые целые положительные числа. Доказать путем подсчета целых точек формулу

$$\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\left[\frac{3q}{p}\right]+\cdots+\left[\frac{(p-1)q}{p}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

111. Пусть p и q – нечетные взаимно простые целые положительные числа. Обозначим $\frac{p-1}{2}=p'$, $\frac{q-1}{2}=q'$. Показать, что

$$\left(\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\cdots+\left[\frac{p'q}{p}\right]\right)+\left(\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\cdots+\left[\frac{q'p}{q}\right]\right)=p'q'.$$

§4. Задача о взвешивании

Задачей о взвешивании называют следующую задачу: **какие грузы можно взвесить гирями в 1, 2, 4, 8, ..., 2^m грамм, и сколькими способами.**

1. Единственность решения задачи следует из того, что любое натуральное число единственным образом представляется в виде степеней числа 2, то есть в двоичной записи.

Пример.

$$27=16+8+2+1=1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0=11011_2.$$

2. Известно, что в троичной системе счисления любое целое число можно записать с помощью цифр 0, 1, 2. Однако если ввести «отрицательные числа», то в силу равенства

$$2\cdot 3^m=3^{m-1}-3^m=1\cdot 3^{m+1}+\overline{1}\cdot 3^m$$

любое число в троичной системе можно записать с помощью цифр 0, 1, $\overline{1}$.

Имеет место следующее утверждение:

всякое целое число есть алгебраическая сумма различных степеней тройки, то есть

$$n=3^{a_1}+3^{a_2}+\cdots-3^{b_1}-3^{b_2}-\cdots, \qquad (1)$$

где $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ – различные целые неотрицательные числа; отрицательных членов в равенстве (1) может и не быть.

Пример 1. $1910=2121212_3=212121\bar{1}_3=212\bar{1}1\bar{1}_3=$
$=213\bar{1}\bar{1}1\bar{1}_3=220\bar{1}\bar{1}1\bar{1}_3=3\bar{1}0\bar{1}\bar{1}1\bar{1}_3=$
$=10\bar{1}0\bar{1}\bar{1}1\bar{1}_3=3^7-3^5-3^3-3^2+3-3^0$.

Пример 2. Рабочий на стройке уронил камень весом 40 кг. Камень раскололся на четыре части и эти части, используя в качестве разновесок на чашках весов, можно взвесить любой груз от одного кг до 40 кг одним взвешиванием. Найти части, на которые раскололся камень?

Решение. Камень раскололся на 1, 3, 9, 27 кг.

3. Рассмотрим произведение

$$a(z) = (1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\ldots, \tag{2}$$

которое, после раскрытия скобок и приведения подобных членов, представляется в виде «бесконечного многочлена» по z:

$$a(z) = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \cdots \tag{3}$$

коэффициенты A_k – это в точности число разных представлений числа в виде суммы некоторых чисел 1, 2, 4, 8, ..., 2^m. Другими словами, A_k – это число способов взвешивания груза в k грамм рассматриваемыми гирями. Для нахождения A_k рассмотрим очевидные тождества:

$$(1-z)(1+z) = 1-z^2,$$
$$(1-z^2)(1+z^2) = 1-z^4,$$
$$(1-z^4)(1+z^4) = 1-z^8,$$

а после перемножения и сокращения на общие множители, получаем $(1-z)(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdots = 1$, то есть $(1-z)a(z) = 1$.

Отсюда по формуле геометрической прогрессии

$$a(z)=\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\cdots \qquad (4)$$

Сравнивая равенство (4) с равенством(3), получаем, что $A_k=1$, для всех k, то есть, всякий груз в целое число граммов можно взвесить гирями 1, 2, 4, 8, ..., 2^m граммов, притом единственным способом.

4. **Задача о фальшивой монете.**

Имеется *n* одинаковых с виду монет, одна из которых тяжелее остальных. Какое число взвешиваний придется произвести, чтобы отыскать эту монету?

Решение. Всякое натуральное число можно разбить на три слагаемых, среди которых два слагаемых равны. Таким образом, возникают три случая: а) $n=3k$; б) $n=3k+1$; в) $n=3k+2$.

Соответственно, представления в виде трех слагаемых имеют вид:

а) $3k=k+k+k$
б) $3k+1=k+k+(k+1)$
в) $3k+2=k+(k+1)+(k+1)$.

В любом из этих случаев взвешиванию подвергаются части, содержащие одинаковое число монет. Если окажется, что эти части равны, то фальшивая монета будет в третьей части и с этой частью нужно проделать то же самое, что и с числом n. Если же какая-то из взвешиваемых частей окажется тяжелее, то и с ней нужно проделать то же самое, что и с числом n. Так как количество монет с каждым разбиением уменьшается, то через конечное число шагов фальшивая монета будет найдена. При этом число взвешиваний m вычисляется из неравенства $3^{m-1}\le n\le 3^m$.

112. Имеется 200 одинаковых по виду монет, одна из которых тяжелее остальных. За сколько взвешиваний можно определить эту самую тяжелую монету?
113. Имеется 21 монета, одна из которых несколько тяжелее других, однако, с виду они все одинаковые. Какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь потребуется произвести, чтобы определить эту тяжелую монету?
114. Имеется несколько мешков с монетами, в одном из которых все монеты фальшивые, а в остальных настоящие. Фальшивая монета на 1 кг легче настоящей. Каким наименьшим числом взвешиваний на пружинных весах можно обнаружить фальшивую монету, если в каждом мешке монет достаточно много?
115. Имеется 5 предметов различного веса, которые нужно упорядочить по убыванию весов, пользуясь чашечными весами без гирь, с помощью которых можно сравнить веса любых двух предметов. Как нужно действовать, чтобы решить задачу, используя наименьшее возможное число взвешиваний? Чему равно это число?
116. Имеется четыре предмета разного веса, а также весы без гирь. На весах можно сравнивать вес любых двух предметов. Легко указать способ, который дает возможность установить порядок весов данных предметов самое большее после пяти взвешиваний. Доказать, что не существует такого способа, который бы гарантировал установление порядка весов предметов после четырех взвешиваний.
117. Известно, что для 10 предметов существует способ установления порядка весов, требующих 24 взвешиваний; можно ли это число взвешиваний уменьшить?
118. У продавца имеются 100-граммовые гирьки и консервные банки весом по 450 г. Как с их помощью отвесить на

чашечных весах 2,5 кг сахарного песка за один раз, используя для взвешивания наименьшее количество гирек и банок в общей сложности?

119. Имеются 13 гирь, каждое из которых весит целое число граммов. Известно, что любые 12 из них можно так разложить на чашки весов, по 6 на каждую, что наступит равновесие. Доказать, что все гири имеют одинаковый вес.
120. Даны 1985 гирь с массами 1 г, 2 г,...,1985 г. Можно ли их разделить на 5 групп так, чтобы и число гирь и их суммарная масса были одинаковы во всех пяти группах?
121. Рассматриваются наборы из n различных гирек. Масса каждой гирьки - целое число граммов, не превосходящее 21 г. При каком наименьшем n в любом таком наборе найдутся две пары гирек, уравновешивающие друг друга?
122. У продавца испортились весы (плечи весов оказались неравными). Продавец отпустил покупателю два веса: первый раз на одну чашку весов положил килограммовую гирю, а во второй раз поменял гирю и товар местами. Компенсировал ли продавец неточность весов?
123. У продавца, который привез на базар продавать орехи, оказались неправильные рычажные весы и правильная килограммовая гиря. Чтобы отвесить покупателю 2 кг орехов, он один раз уравновесил гирю орехами, положив ее на правую чашку весов, а другой раз уравновесил эту гирю орехами, положив ее на левую чашку весов. Оказалось, что в результате он отвесил больше 2 кг орехов (покажите это). Как продавец должен поступить, чтобы отвесить ровно 2 кг орехов?
124. Некто обладает восемью разновесами весом соответственно в 1, 1, 2, 5, 10, 10, 20, 50 г. Сколькими способами он может составить из них 78 г, если считать отдельно применение двух разновесок, хотя бы и одного и того же веса?

125. Сколькими способами можно составить из разновесок предыдущей задачи вес в 78 г, если пользоваться обеими чашками весов?
126. Десять машин выпускают одинаковые резиновые мячи массой по 10 г каждый. Контроль обнаружил, что одна из машин выпускает мячи массой всего в 5 г. Как найти испортившуюся машину при одном взвешивании мячей?
127. Выделить четырьмя взвешиваниями из 80 монет одну фальшивую (более легкую). Чашки весов вмещают любое число монет, не превышающее 50. Сколько понадобится взвешиваний, чтобы выделить такую монету из 12 одинаковых на вид монет?
128. Доказать, что с помощью стандартного набора разновесок: 1 мг, 2, 2, 5, 10, 20, 20, 50, 100, 200, 200, 500 мг и т.д. можно составить любой вес, выраженный целым числом миллиграммов.
129. Несколько одинаковых ящиков весят вместе 10 т, причем каждый из них весит не более 1 т. Какое наименьшее количество трехтонок заведомо достаточно, чтоб увести за один раз весь этот груз?
130. Нужно отвесить на чашечных весах 13 кг сахарного песку при наличии всего лишь одной килограммовой гири. Конечно, 13 взвешиваний для этого вполне достаточно. Нельзя ли, однако, обойтись существенно меньшим их числом?
131. Каким наименьшим числом, и каких именно гирь нужно запастись, чтобы с их помощью можно было отвесить любое целое число килограммов от 1 до 13 при условии, что гири разрешается класть а) только на одну чашку весов; б) на обе чашки весов?
132. Расположить несколько данных предметов в порядке возрастания их весов с помощью чашечных весов. Какое наименьшее число сравнений является заведомо достаточным, если количество предметов равно: а) 3; б) 4; в) 5?

§5. Обыкновенные дроби

Пусть даны две величины A и B . Рассмотрим задачу: измерить величину A с помощью величины B.

Возможны следующие случаи: величина B укладывается в целое число k в величину A или не укладывается в целое число раз. В первом случае говорят, что величина A делится нацело на величину B и записывается так: $A:B=k$. Рассмотрим случай, когда величина B не содержится целое число раз в A. Для решения этой задачи величину B делят на такое целое число m, чтобы полученная часть укладывалась в целое число раз в величину A. Разделим величину B на n равных частей. Обозначим n-ую часть через C. Говорят, что C есть $1/n$ часть величины B; $C=\frac{1}{n}B$. Символ $\frac{1}{n}$ называют долей. Пусть величина C содержится в A m раз: $A=m\cdot C$.

Тогда $A=m\left(\frac{1}{n}\right)B=\frac{1}{n}B+\frac{1}{n}B+\cdots+\frac{1}{n}B$ (ровно m слагаемых). Таким образом, величина A равна сумме m слагаемых, из которых каждое равно $\frac{1}{n}B$. Следовательно, доля $\frac{1}{n}$ величины B является общей мерой величины A и B.

Для записи результата измерения величины A при помощи величины B необходимо ввести символ $\frac{m}{n}$, который называется обыкновенной дробью (m – называют числителем, n-знаменателем).

Дробь, числитель которой меньше знаменателя, называется правильной.

Если не удается подобрать числа m и n, то величины A и B называются несоизмеримыми.

Основные свойства дробей

1. Две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называются равными, если $ad=bc$.
2. Дробь не меняется, если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля.

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \text{ или } \frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m}$$

3. Приведение дроби к более простому виду посредством деления числителя и знаменателя на одно и то же число, называется сокращением дроби:

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}.$$

Дробь называется несократимой, если числитель и знаменатель взаимно просты.

4. Приведением нескольких дробей к общему знаменателю называется такое преобразование этих дробей, в результате которого дроби, не изменяя своей величины, будут иметь один и тот же знаменатель. Для того, чтобы привести дроби к общему знаменателю, достаточно выбрать общим знаменателем любое число, кратное всех знаменателей, и умножить числитель и знаменатель каждой дроби на дополнительный множитель.

Пример. $\frac{1}{2};\frac{1}{6};\frac{1}{5}$, НОК(2,6,5)=30.

Дополнительные множители: 15;5;6.

Следовательно, получаем дроби с общим знаменателем:

$\frac{15}{30};\frac{5}{30};\frac{6}{30}$.

5. Сравнение дробей.

Пусть a, b, c, d >0. Дробь $\frac{a}{b}$ называется большей, чем дробь $\frac{c}{d}$, если $ad>bc$.

6. Всякое целое число можно выразить в виде дроби, которой есть любое натуральное число: $a=\frac{an}{n}$.

   Дробь, числитель которой больше или равен знаменателю, называется неправильной.

7. Суммой двух дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называется дробь $\frac{ad+bc}{bd}$;

   $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$

Если НОК $(b,d)=m$, то

$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}=\frac{ad'+cb'}{НОК(b,d)}$, $b'=НОК(b,d):b$; $d'=НОК(b,d):d$.

Сумма натурального и дробного числа, записанная в виде слагаемых, стоящих рядом, называется смешанным числом.

8. Вычитание определяется как действие, обратное сложению.

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

9. Произведением двух дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называется дробь $\frac{ac}{bd}$;

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

10. Деление определяется как действие, обратное умножению:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

133. Дана дробь $\frac{11}{41}$. Какое число нужно прибавить к числителю и знаменателю этой дроби, чтобы она обратилась в дробь $\frac{3}{8}$?

134. Дана дробь $\frac{29}{64}$. Какое число надо отнять от числителя и знаменателя этой дроби, чтобы получить дробь $\frac{2}{9}$?

135. Дана дробь $\frac{37}{63}$. Какое число нужно вычесть из ее числителя и прибавить к знаменателю, чтоб после сокращения получилась дробь $\frac{3}{17}$?

136. Какое число нужно прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{a}{b}$, чтобы получилась дробь $\frac{c}{d}$?

137. Какое число нужно вычесть из числителя и знаменателя дроби $\frac{a}{b}$, чтобы получилась дробь $\frac{c}{d}$?

138. Какое число нужно прибавить к числителю дроби $\frac{a}{b}$ и вычесть из знаменателя, чтобы получить дробь $\frac{c}{a}$?

139. Какое число нужно вычесть из числителя дроби $\frac{a}{b}$ и прибавить к знаменателю, чтобы получить дробь $\frac{c}{d}$?

140. Доказать, что от прибавления к числителю и знаменателю дроби одного и того же натурального числа, дробь, меньшая единицы, увеличивается, дробь, большая единицы, уменьшается, а дробь, равная единице, не изменяет своей величины.

141. Доказать, что от вычитания от числителя и знаменателя дроби, меньшей единицы, одного и того же натурального числа, соответственно меньшего и числителя и знаменателя, получается меньшая дробь.

142. Доказать, что при вычитании из числителя и знаменателя дроби одного и того же натурального числа, соответственно меньшего числителя и знаменателя, дробь, большая единицы, увеличивается.

143. Найти такие правильные дроби, из которых каждая от уменьшения ее числителя и знаменателя на единицу, обращается в 1/2.

144. Найти такие правильные дроби, из которых каждая от увеличения ее числителя и знаменателя на единицу, обращается в 1/4.

145. Какие числа можно прибавить к числителю и знаменателю дроби, не изменяя ее величины?

146. Доказать, что если дробь $\frac{a}{b}$ несократима, то дробь, дополняющая ее до единицы, то есть, $\frac{b-a}{b}$, также несократима.

147. Если дробь $\frac{a}{b}$ несократима, то $\frac{a+b}{ab}$ и $\frac{a-b}{ab}$ также несократимые дроби.

148. Доказать, что ни при каком значении n дробь $\frac{n-6}{15}$ и $\frac{n-5}{24}$ одновременно не могут равняться целым числам.

149. Если $\frac{a_1}{b_1}$; $\frac{a_2}{b_2}$; $\cdots$; $\frac{a_n}{b_n}$; - дроби, у которых числители и знаменатели положительны, то дробь $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ будет заключаться между наименьшей и наибольшей из данных дробей.

150. При каких натуральных n дробь $(3\ n+4)/5$ является целым числом?

151. При каких натуральных n дробь $(2\ n+3)/(5\ n+7)$ сократима?

152. Дробь $\frac{a+b}{a-b}$ сократима. Сократима или несократима дробь $\frac{a}{b}$?

153. Сократимой или несократимой будет дробь $\frac{14a+3}{21a+4}$, где a - натуральное число?

154. При каких целых значениях n дробь $\frac{n^2+1}{n(n^2-1)}$ сократима?

155. Доказать, что дробь $\frac{2n^2-1}{2n^2+1}$, где n – натуральное число, несократима.

156. Доказать, что если дробь $\frac{5n^2+1}{6}$, где n – натуральное число, равна целому числу, то дроби $\frac{n}{2}$ и $\frac{n}{3}$ – несократимы.

157. Доказать, что если дробь $\frac{a}{b}$ – несократима, то $\frac{a+b}{a^2-nab+b^2}$, где n - натуральное число, или несократима, или сократима только на делители числа (n+2).

158. Найти условия, при которых:

а) сумма двух несократимых дробей равна целому числу;

б) разность двух несократимых дробей равна целому числу;

в) произведение двух несократимых дробей равно целому числу;

г) частное двух несократимых дробей равно целому числу.

159. Доказать, что если знаменатели двух несократимых дробей взаимно простые числа, то их сумма и разность - дроби несократимые.

160. Найти все числа, на которые может быть сократима дробь $\frac{5l+6}{8l+7}$ при целом значении l.

161. Числа a, b, n – натуральные. Доказать, что если a^n+b^n и a+b одновременно делятся на n, то число $\frac{a^n+b^n}{a+b}$ в случае, если оно целое, также делится на n.

162. Известно, что a^n-b^n делится на n (a, b, n – натуральные числа, $a \neq b$). Доказать, что $\frac{a^n-b^n}{a-b}$ делится на n.

163. Доказать, что для любого целого d найдутся такие целые m, n, что $d = \dfrac{n-2m+1}{m^2-n}$

164. Доказать, что дробь $\dfrac{ad+bc}{bd}$ является сократимой тогда и только тогда, когда b и d взаимно простые числа.

165. Доказать, что если число $\dfrac{2^n-2}{n}$ целое, то число $\dfrac{2^{2^n-1}-2}{2^n-1}$ целое.

166. Доказать, что дробь $\dfrac{a^2+b^2}{ac+bd}$, (a, b, c, d – целые числа), несократима, если ad-bc=1.

167. Доказать, что при любом n дробь $\dfrac{2n+1}{2n(n+1)}$ несократима.

168. Доказать, что дроби $\dfrac{n-1}{n}$ и $\dfrac{n+1}{n}$ несократимы.

169. Показать, что при любом натуральном n дробь $\dfrac{10^n+2}{10^n+8}$ сократима на 6.

170. Доказать, что при натуральном n число $\dfrac{10^n+2}{3}$ целое.

171. Доказать, что сумма двух несократимых дробей может равняться целому числу только в том случае, когда знаменатели равны.

172. Доказать, что если один из знаменателей трех несократимых дробей имеет делитель, отличный от делителей двух других знаменателей, то сумма этих дробей не может быть целым числом.

173. При каких натуральных значениях n число $\dfrac{n+2}{n-1}$ является целым?

174. Если число $\dfrac{a^n}{p_1 p_2 \dots p_k}$ – целое, причем $p_1, p_2, \dots, p_k$ простые, а n и a натуральные, то и число $\dfrac{a^n}{(p_1 p_2 \dots p_k)^n}$ так же целое. Доказать.

175. Может ли сумма двух дробей равняться произведению этих? Если может, то какой вид должны иметь эти дроби?

176. Может ли разность двух дробей равняться произведению этих дробей? Если может, то какой вид должны иметь такие дроби?

177. Доказать, что $\dfrac{n}{12}+\dfrac{n^2}{8}+\dfrac{n^3}{24}$ является целым при любом четном n.

178. При каких значениях x дробь $\dfrac{2x+3}{5x+7}$ сократима?

179. Доказать, что среди дробей $\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \cdots, \dfrac{n-1}{n}$ четное число несократимых дробей ($n \geq 3$).

180. Пусть m и n - натуральные числа, причем $\dfrac{m}{n}$ – правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\dfrac{3m-n}{5n+2m}$, если известно, что она сократима?

181. Доказать, при любом натуральном n следующее выражение есть целые числа: $\frac{10^n+8}{9}$.

182. Показать, что ни при каком целом значении x дроби $\frac{x^2-3x+4}{49}; \frac{x^2+5x-9}{169}; \frac{x^2+3x+15}{121}$ не могут быть равны целым числам.

183. Найти несократимую дробь $\frac{a}{b}$, если a и b – однозначные натуральные числа, и число, обратное b, есть $\frac{b+1}{9a+2}$.

184. Дробь $\frac{a}{b}$ - несократима. Сократима или несократима сумма дробей с числителем 1 и знаменателем a и $a+b$ соответственно.

185. Доказать, что суммы следующих дробей равны их произведениям:

$$\frac{a+b}{a-b}, \frac{n+p}{n-p} \text{ и } \frac{an-bn}{ap-bn};$$

$$\frac{b-c}{1+bc}, \quad \frac{c-q}{1+ac} \text{ и } \frac{a-b}{1+ab}.$$

186. Доказать, что при целом a и натуральном n выражение $\left(\frac{a^{2n}}{a^n-1}+\frac{1}{a^n+1}\right)-\left(\frac{a^{2n}}{a^n+1}+\frac{1}{a^n-1}\right)$ есть целое число.

Указать область допустимых значений a.

187. Установить, что если a - целое число, то $\frac{a}{3}+\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{6}$ – есть целое число; $\frac{a^4}{24}+\frac{a^3}{4}+\frac{11a^2}{24}+\frac{a}{4}$ – есть целое число.

188. Доказать, что число вида $\frac{18a+5b}{19}$ есть целое, если известно, что число вида $\frac{11a+2b}{19}$ является целым (числа a и b - целые).

189. Пусть $x=\frac{a-b}{a+b}$, $y=\frac{b-c}{b+c}$, $z=\frac{c-a}{c+a}$. Доказать, что $(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$.

190. Доказать, что сумма дробей $\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)+1}$ и $\frac{2(0{,}5-x)}{x(1-x)-1}$ равна сумме их кубов. Указать область допустимых значений x.

191. Пусть n - натуральное число, $p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_k^{n_k}$ - его разложение на простые множители. (причем, $p_1<p_2<\ldots<p_k$). Доказать, что число $\varphi(n)$ несократимых правильных дробей со знаменателем n выражается формулой: $\varphi(n)=(p_1-1)\ldots(p_k-1)p_1^{n_1-1}\ldots p_k^{n_k-1}$.

192. Пусть a, b, c, d, l – целые числа. Доказать, что если дробь $\frac{al+b}{cl+d}$ сократима на число k, то $ad–bc$ делится на k.

§6. Разложение доли в сумму долей

1. Пусть p – данное натуральное число; $x_1, x_2, \dots, x_n$ – неизвестные натуральные числа. Решить уравнение

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}.$$

Рассмотрим случай, когда числа $p, x_1, x_2, \dots, x_n$ взаимно просты, ибо в противном случае можно бы сократить эти знаменатели на их общий делитель.

Вначале рассмотрим более простое уравнение

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$

где p, x, y - взаимно простые натуральные числа.

$$\frac{1}{p} = \frac{x+y}{xy}; \qquad p = \frac{xy}{x+y}.$$

Следовательно, имеем:

$$\frac{1}{\frac{xy}{x+y}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \text{ откуда } \frac{1}{xy} = \frac{1}{x(x+y)} + \frac{1}{y(x+y)}.$$

Если знаменатель $p=mk$, то получаем

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{m(m+k)} + \frac{1}{k(m+k)}. \tag{1}$$

Если в равенстве $p=mk$ принять $k=1$, то получаем:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{p+1}.$$

Если взято вместо дроби $\frac{1}{p}$ дробь $\frac{1}{p+1}$, то получаем

$$\frac{1}{p+1} = \frac{1}{(p+1)(p+2)} + \frac{1}{p+2}.$$

Аналогично, получаем:

$$\frac{1}{p+2}=\frac{1}{(p+2)(p+3)}+\frac{1}{p+3}.$$

В общем случае,

$$\frac{1}{p+i}=\frac{1}{(p+i)(p+i+1)}+\frac{1}{p+i+1}.$$

Принимая во внимание все эти равенства, получаем следующую конечную сумму:

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{p(p+1)}+\frac{1}{(p+1)(p+2)}+\cdots+\frac{1}{(p+i)(p+i+1)}+\frac{1}{p+i+1},$$

где p, i – натуральные числа.

Если p – простое число, то получаем разложение доли $\frac{1}{p}$ единственным способом:

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{p\cdot 1}=\frac{1}{p(p+1)}+\frac{1}{p+1}.$$

Пример. $\frac{1}{5}=\frac{1}{30}+\frac{1}{6}$.

2) Предположим, что число p – составное и его можно записать в каноническом виде

$$p=1\cdot p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n},$$

где $p_1, p_2, \dots, p_n$ – простые числа, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – натуральные числа. Для применения формулы (1) достаточно в каноническом разложении числа p принять произведение одних делителей за m, а других – за k. Так как m и k в формуле (1) взаимно просты, то за m нужно принимать произведение наивысших степеней одних из простых делителей $p_1, p_2, \dots, p_n$, за k – произведение наивысших степеней остальных делителей, с учетом также делителя, равного 1.

Таким образом, число всех способов разложения дроби по формуле (1) не зависит от показателя степеней $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, а зависит исключительно от количества простых делителей $p_1, p_2, ..., p_n$.

Поэтому, чтобы подсчитать число разложений дроби $\frac{1}{p}$ при $p = 1 \cdot p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ по формуле (1), достаточно подсчитать число разложений дроби $\frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_n}$.

Это число разложений знаменателя *p* на парные множители будет равно сумме числа сочетаний всех простых делителей знаменателя *p*, взятых по одному (с учетом 1), числа сочетаний по 2 делителя и т.д. Число всех таких разложений на парные множители равно

$$c_n^0 + c_n^1 + c_n^2 + \cdots + c_n^{n-1} + c_n^n = 2^n.$$

Учитывая, что при разложении дроби $\frac{1}{p}$ при $p = 1 \cdot p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$, получаем одинаковые результаты при разложении знаменателя *p* на множители:

1 и $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ или $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ и 1, точно также при разложении на множители $p_1^{\alpha_1}$ и $p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ или $p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ и $p_1^{\alpha_1}$ и т.д., то число всех различных способов разложений дроби $\frac{1}{p}$ по формуле (1), будет вдвое меньше, чем 2^n, т.е. 2^{n-1}.

Формула (1) является основной при решении исходной задачи. Дроби, полученные в правой части этой формулы, называют составными дробями; величины *m* и *k* зависят от величин делителей знаменателя. Применяя к одной из составных дробей или к обеим составным дробям метод разложения по основной формуле, поступая таким же образом со вновь полученными составными дробями, можно любую дробь $\frac{1}{p}$ представить в виде суммы произвольного числа составных дробей того же вида.

Пример. $\frac{1}{12}=\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{4\cdot 7}=\frac{1}{21}+\frac{1}{28}$.

193. Разложить на доли следующие доли: $\frac{1}{15}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{24}$; $\frac{1}{35}$.

194. Как 7 яблок разделить поровну между 12 мальчиками, не разрезая ни одного яблока больше, чем на 4 части?

195. Можно ли 5 яблок разделить между 6 мальчиками поровну, так, чтобы не пришлось ни одного яблока резать больше, чем на 3 части.

196. Доказать, что любую положительную правильную дробь $\frac{m}{n}$ можно представить в виде суммы величин, обратных различным натуральным числам.

197. Доказать, что, если $\frac{a}{b}$ - правильная дробь, то она может быть представлена в виде:

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_1 q_2}+\frac{1}{q_1 q_2 q_3}+...+\frac{1}{q_1 q_2 ... q_n},$$

где $q_1, q_2, q_3, ..., q_n$ - целые и положительные числа, причем, $q_1 \le q_2 \le q_3 \le ... \le q_n$.

198. Доказать, что всякое рациональное число $\frac{p}{q}$ единственным образом представляется в виде:

$$\frac{p}{q} = x_1 + \frac{x_2}{2!} + \frac{x_3}{3!} + \cdots + \frac{x_n}{n!},$$

где $0 \le x_k \le k$ при k>1.

199. Рассмотрим все рациональные числа между нулем и единицей, знаменатели которых не превосходят n. Расположим их в порядке возрастания. Пусть $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ – какие-то два соседних числа (дроби несократимые). Доказать, что $|bc - ad| = 1$.

200. Доказать, что для любого простого p>2 числитель m дроби $\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}$ $\quad (m, n \in N)$ делится на p.

201. Доказать, что дробь $\frac{2n+1}{n(n+1)}$, где n=2, 3,..., можно представить в виде суммы положительных дробей со знаменателями n и n+1.

202. Все положительные рациональные числа выписаны в виде последовательности $1; \frac{2}{1}; \frac{1}{2}; \frac{3}{1}; \frac{2}{2}; \frac{1}{3}; \frac{4}{1}; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \cdots$. Доказать, что число $\frac{p}{q}$ этой последовательности имеет номер $\frac{1}{2}(p+q-1)(p+q-2)+q$.

203. Доказать, что при любом натуральном a>1 уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$ имеет, по крайней, мере три решения в натуральных числах x и y.

204. Решить в натуральных числах систему

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1,$$
$$x \le y \le z.$$

205. Решить в натуральных числах уравнение
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.

206. Решить в натуральных числах уравнение
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{u}=1.$

207. Найти все решения в натуральных числах *x, y, z, t,* где $x \le y \le z \le t$ уравнения $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=1$.

208. Доказать, что для каждого натурального числа *s* уравнение $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_s}=1$ имеет конечное положительное число решений в натуральных числах $x_1, x_2, \dots, x_s$.

209. Доказать, что для натурального числа *s*>2 уравнение $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_s}=1$ имеет решение в натуральных возрастающих числах $x_1, x_2, \dots, x_s$ и что если число всех таких решений обозначить через l_s, то для *s*=3, 4,... имеет место неравенство $l_{s+1} > l_s$.

210. Доказать, что если *s* есть натуральное число, не равное 2, то уравнение $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_s}=1$ имеет решение в треугольных числах $x_1, x_2, \dots, x_s$ (то есть числа вида $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$, где *n* – натуральное число).

211. Рассматриваются решения (x, y) уравнения $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}$, где x, y и p - натуральные числа, p>1. Доказать, что при простом p это уравнение имеет ровно 3 решения; если же p составное, то число решений больше трех. (Решения (a, b) и (b, a) при $a \neq b$ считаются различными).

212. Найти все решения уравнения $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}=1$ во множестве натуральных чисел.

213. Доказать, что при n>1 и различных $a_1, a_2, ..., a_n$ невозможно равенство $\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\dots+\frac{1}{a_n^2}=1$.

214. Доказать тождество:

$$1+\frac{1}{a}+\frac{a+1}{ab}+\frac{(a+1)(b+1)}{abc}+\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abcd}=$$
$$=\frac{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}{abcd.}.$$

215. Доказать, что сумма $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}$ не может быть целым числом при натуральном n.

216. Доказать, что для любого натурального n справедливо неравенство $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$.

217. Доказать, что для любого натурального n>2 справедливо неравенство $2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$.

218. Доказать, что для любого натурального n>2 справедливо неравенство $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<2$.

219. Доказать, что

$$\frac{b+c+d+...+k+l}{a(a+b+c+...+k+l)}=\frac{b}{a(a+b)}+\frac{c}{(a+b)(a+b+c)}+...$$

$$\cdots+\frac{l}{(a+b+...+k)(a+b+...+k+l)}\ .$$

220. Доказать, что если при некоторых числах *a, b, c* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, то при любом натуральном n:

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}\,.$$

221. Пусть $p_k=(1-x)(1-x^2)...(1-x^k)$. Доказать, что

$$\frac{1}{p_n}-\frac{x}{p_1p_{n-1}}+\frac{x^3}{p_2p_{n-2}}-...\pm\frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{p_n}=1\,.$$

222. Доказать тождество:

$$p^3=(p\frac{p^3-2q^3}{p^3+q^3})^3+(q\frac{2p^3-q^3}{p^3+q^3})^3+q^3.$$

223. Доказать, что любое рациональное число является суммой кубов рациональных чисел.

224. Найти все рациональные значения x, при которых $\sqrt{x^2+x+1}$ есть рациональное число.

225. Располагая достаточно большим запасом единичных сопротивлений, нетрудно создать между двумя произвольными точками *A* и *B* любое сопротивление p/q, где p и q - целые числа. Для этого достаточно соединить параллельно q групп из p последовательно включенных единичных сопротивлений, то есть взять всего pq еди-

ничных сопротивлений. Однако обычно то же сопротивление удается получить из меньшего числа единичных сопротивлений. Найти минимальное число единичных сопротивлений, которое необходимо для создания между двумя точками A и B электрической цепи сопротивлением p/q, где p и q - целые числа.

226. Рассмотрим дроби вида $1/n$, где n- натуральное число больше 1: $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...$.Требуется определить, какие n из этих дробей (дроби могут повторяться), взятые в сумме, дают наилучшее приближение к 1 снизу. Например, при n=3 наилучшее приближение дает в сумме 1/2+1/3+1/7=41/42. Доказать, что в общем случае наилучшее приближение к 1 дает сумма n первых членов ряда $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1807}+\cdots$ (знаменатель каждого члена этого ряда, начиная со второго, на 1 больше произведения знаменателей всех предыдущих членов).

§7. Десятичные дроби

Обыкновенная правильная дробь со знаменателем, равным степени числа 10, может быть записана без знаменателя по тем же правилам, по которым записывают целые числа. Целую и дробную части отделяют запятой (точкой). Записанная таким образом обыкновенная дробь со знаменателем, равным степени десяти, называют десятичной дробью.

Пример. $\frac{1}{10}$=0,1; $\frac{51}{100}$=0,51.

Аналогично можно записать неправильную дробь со знаменателем, равным степени десяти.

I. Обращение обыкновенной дроби в конечную десятичную дробь.

Десятичная дробь называется конечной, если число десятичных знаков конечно.

Несократимая дробь $\frac{a}{b}$ тогда и только тогда представима в виде конечной десятичной дроби, когда каноническое разложение числа b имеет вид: $b = 2^x 5^y$, где $x, y \in N$.

Пример. $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = \frac{5^2}{2^2 5^2} = \frac{25}{100} = 0{,}25$.

II. Обращение обыкновенной дроби в бесконечную периодическую дробь.

Пусть $\frac{a}{b}$ – несократимая обыкновенная дробь. Процесс деления числа a на число b сопровождается постепенным приписыванием нулей в делимом, пока деление не завершится. Если знаменатель b делится на некоторое простое число, отличное от 2 и 5, то процесс деления не может закончиться. В этом случае десятичная запись числа представляется бесконечной последовательностью десятичных знаков, т.е., бесконечной десятичной дробью.

Пример. $\frac{1}{7} = 0{,}1428571...$

Так как при делении a на b остаток меньше делителя, то на каком-то шаге деления снова появится такой остаток, который уже встречался. Это приводит к периодически повторяющейся группе цифр в десятичной записи числа.

Пример. $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857$.

Последовательно повторяющаяся группа десятичных знаков после запятой в десятичной записи числа, называется периодом, а сама бесконечная десятичная дробь, имеющая такой период, называется периодической.

Существует кратная запись периодической дроби. Число цифр в периоде называется длиной периода.

Пример. $\frac{1}{7} = 0,(142857)$.

Если период начинается сразу после запятой, то дробь называется чисто периодической. Если между запятой и периодом есть другие десятичные знаки, то дробь называется смешанной периодической.

Если знаменатель несократимой дроби $\frac{a}{b}$ в каноническом разложении не содержит делителей 2 или 5, то десятичная дробь будет чисто периодической. В противном случае, если знаменатель дроби содержит делители 2 или 5 и отличные от них делители, то десятичная дробь будет смешанной периодической.

Пример. $\frac{1}{3} = 0,(3)$; $\frac{1}{6} = 0{,}1(6)$.

III. Обращение бесконечной десятичной периодической дроби в обыкновенную дробь.

1). Пусть $a = 0,\ (a_1 a_2 \ldots a_k)$ – чистая периодическая дробь. Имеет место правило:

<u>Чтобы чистую периодическую дробь преобразовать в обыкновенную, следует в числителе записать число, образо-</u>

ванное цифрами периода, а в знаменателе - число, записанное одними девятками, в количестве равном длине периода.

В самом деле, умножим обе части равенства $a = 0,\ (a_1a_2...a_k)$ на 10^k. Получаем

$$10^k a = \overline{a_1a_2...a_k} + 0,\ (a_1a_2...a_k),$$

откуда следует, что

$$a(10^k - 1) = \overline{a_1a_2...a_k}\ .$$

Очевидно, что $a = \dfrac{\overline{a_1a_2...a_k}}{(10^k - 1)}$ – искомая дробь.

Пример. 0,(15)= $\dfrac{15}{99} = \dfrac{5}{33}$; 0,(023)= $\dfrac{23}{999}$.

2). Пусть $a = 0, a_1a_2...a_n(a_{n+1}...a_{n+k})$ – смешанная периодическая дробь. Имеет место правило:

Чтобы смешанную периодическую дробь записать в виде обыкновенной, следует в числителе записать разность между числом, стоящим до второго периода и числом, образованным цифрами, стоящими до первого периода. В знаменателе следует записать число, образованное k девятками и n нулями, где k - длина периода, n - число цифр, стоящих до первого периода.

Пример.

0,12(3)=$\dfrac{123-12}{900} = \dfrac{111}{900} = \dfrac{37}{300}$;$0{,}05(24) = \dfrac{524-5}{9900} = \dfrac{519}{9900}$.

Заметим также, что длина периода десятичной дроби при обращении обыкновенной несократимой дроби $\dfrac{a}{b}$, где НОД(10,b)=1, не зависит от числителя a, поэтому периодические десятичные дроби всех несократимых дробей с одним и тем же знаменателем имеют одну и ту же длину периода.

4. Длина периода периодической десятичной дроби.

Пусть $\frac{a}{b}$ – несократимая обыкновенная дробь, НОД(b,10)=1, n – длина периода чистой периодической десятичной дроби, в которую обращается дробь $\frac{a}{b}$. Тогда число $10^n - 1$ делится нацело на b.

В самом деле, так как дробь $\frac{a}{b}$ обращается в чисто периодическую дробь, то $\frac{a}{b} = 0,(q_1 q_2 ... q_n)$

Умножим обе части этого равенства на 10^n.Тогда получаем, что $10^n \frac{a}{b} = \overline{q_1 q_2 ... q_n} + 0,(q_1 q_2 ... q_n)$ или $(10^n - 1)\frac{a}{b} = \overline{q_1 q_2 ... q_n}$.

Так как по условию дробь $\frac{a}{b}$ – несократимая, то $(10^n - 1)$ делится нацело на b.

Задача отыскания длины периода облегчается с помощью следующего утверждения: длина периода n есть делитель числа $\varphi(b)$, где $\varphi(b)$ означает количество чисел, меньших b и взаимно простых с ним.

Пример. Найти число цифр в периоде бесконечной дроби, которая получится от обращения $\frac{5}{7}$ в периодическую дробь.

В этом случае b=7, $\varphi(7) = b$. Делители числа 6 таковы: 1, 2, 3, 6. Проверяем, что числа $(10^1 - 1) = 9$;

$(10^2-1)=99;\ (10^3-1)=999$ не делятся на 7, а число 10^6-1 делится на 7. Значит длина периода числа $\frac{5}{7}$ равна 6.

227. Существует ли рациональное число, обращающееся в бесконечную непериодическую десятичную дробь?
228. Конечной или бесконечной десятичной дробью будет сумма, разность и произведение двух конечных десятичных дробей?
229. Всегда ли частное от деления двух конечных десятичных дробей выразится конечной десятичной дробью? Если не всегда, то, при каком условии частное выразится конечной десятичной дробью?
230. Будет ли периодической дробью сумма и разность двух чистых периодических дробей?
231. Будет ли периодической дробью произведение и частное двух периодических дробей?
232. Доказать, что сумма трех чисел, обратных трем последовательным натуральным числам, обращается в смешанную периодическую десятичную дробь.
233. Доказать, что сумма дробей $\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}$ и $\frac{2}{2n+1}$ обращается в смешанную десятичную дробь при любом натуральном *n*.
234. Доказать, что дробь $\frac{1}{2n^2+1}$ обращается в чистую периодическую дробь при любом натуральном *n*.
235. Доказать, что сумма чистой и смешанной периодических дробей не может быть равна целому числу.
236. Доказать, что сумма двух чистых периодических дробей, имеющих разные длины периодов, не может быть равна целому числу.

237. Дана несократимая дробь, знаменатель которой не делится на 3, и эта дробь обращается в чистую периодическую дробь. Доказать, что период данной дроби есть число, делящееся на 9.

238. Если дробь 0,213213213... принять за период 213, а потом 213213, то их представления в виде обыкновенной дроби равны.

239. Показать, что всякое целое число N есть делитель числа, выраженного цифрой 9, повторенной несколько раз и сопровождаемой несколькими нулями.

240. Указать каким свойством обладают знаменатели обыкновенных дробей, которые обращаются в чистые периодические дроби с 1, 2, ..., n цифрами в периоде.

241. Если обыкновенная несократимая дробь, знаменатель которой есть число простое, обращается в периодическую дробь с четным числом цифр в периоде, то сумма цифр, занимающих в каждом полу периоде место одного и того же порядка, равна 9. Проверить это для дробей 3/7 и 2/13.

242. Если знаменатель обыкновенной несократимой дроби есть число взаимно простое с 11, то в том случае, когда при обращении этой дроби в периодическую в периоде получается четное число цифр, период делится на 11. Проверить это для дробей 5/7 и 9/13.

243. Чтобы получить период дробей 2/7; 3/7; 4/7; 5/7 – достаточно написать цифры периода дроби в круговом порядке, от левой руки к правой, начиная с цифры, следующей в этом периоде за последней цифрой произведения знаменателя дроби, обращаемой в десятичную, на ее числитель.

244. Дана несократимая дробь, знаменатель которой число, взаимно простое с 5 и эта дробь обращается в смешан-

ную периодическую десятичную дробь. Доказать, что последние цифры периода и числа, стоящие до периода, или одинаковы, или отличаются друг от друга на 5.

245. Дана несократимая дробь, знаменатель которой число нечетное, и эта дробь обращается в смешанную периодическую десятичную дробь. Доказать, что последние цифры числа, образованного цифрами, стоящими до периода, и числа, образованного цифрами периода, – числа одинаковой четности.

246. Доказать, что всякое нечетное число, не оканчивающееся на 5, есть делитель числа, записанного в десятичной системе исчисления с помощью одних единиц.

247. Доказать, что если дробь $1/n$ при обращении в десятичную периодическую дает в периоде четное число цифр, причем цифры второй половины периода дополняют цифры первой половины периода до 9, то число n есть делитель числа вида $10^p = 1$, где p – число цифр в периоде дроби.

248. Доказать, что бесконечная десятичная дробь 0,123456789101112..., полученная вписыванием после нуля всех натуральных чисел, не будет периодической десятичной дробью.

249. Разложить дробь 5/1638 на простейшие и определить число цифр в периоде и до периода в ее разложении в десятичную дробь.

250. Определить длину и цифры периодов в разложении дробей со знаменателем 37, 41, 239 и 271.

251. Неизвестное число N изображается в десятичной системе счисления цифрами $x, y,...,z, a, b,...,c$, а число nN-цифрами $a, b, ...,c, x, y,...,z$. Числа $a, b, ...,c$ – даны. Найти такую дробь, которая при обращении в десятичную имеет периодом число N.

252. Если p простое и $\frac{1}{p^n}$ содержит m цифр в периоде, то $\frac{1}{p^{n+1}}$ содержит либо m, либо mp цифр в периоде. В последнем случае $\frac{1}{p^{n+a}}$ содержит mp^a цифр в периоде.

253. Что можно сказать о числе цифр в периоде дроби, знаменатель которой есть 1020?

254. Найти куб рациональной дроби, обращающейся в чистую периодическую дробь с тремя цифрами в периоде.

255. Найти знаменатель дроби вида $1/m$, которая представляется чистой периодической десятичной дробью с двумя цифрами в периоде.

256. Найти длину периода следующих дробей:

$\frac{4}{21}$; $\frac{9}{21}$; $\frac{1}{43}$; $\frac{a}{97}$, где $(a, 97)=1$;

$\frac{1}{14}$; $\frac{7}{550}$; $\frac{10}{17\cdot 23}$; $\frac{1}{53\cdot 59}$.

§8. Задачи на процентные вычисления

I. Понятие о проценте.

Процентом называется сотая часть числа.

$$\frac{1}{100} = 0{,}01 = 1\,\%.$$

Знак % заменяет множитель 0,01. Поэтому всякое число a можно записать в виде: a=100 a %

Иногда выражение a% называют процентным числом, а само равенство называют основным процентным тождеством. Таким образом, чтобы выразить число в процентах, нужно это число умножить на 100 и поставить знак %.

Пример. Представить в процентах числа 0,3 и $\frac{2}{5}$.

Решение. $0{,}3 = 100 \cdot 0{,}3\%$=30%,

$$\frac{2}{5} = 100 \cdot \frac{2}{5}\,\%=40\%.$$

Обратное действие состоит в том, чтобы процентное число записать в виде числа следующим образом: $a\% = \frac{a}{100}$

Пример. Представить процентные числа 4,5% и $\frac{2}{3}\%$ в виде числа.

Решение. $4{,}5\% = \frac{4{,}5}{100} = 0{,}045$,

$$\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}:100 = \frac{2}{300} = \frac{1}{150}.$$

257. Выразить в процентах следующие числа:

$$4;\ 0{,}32;\ 1\frac{4}{7};\ 18\frac{1}{4};\ 100;\ \frac{384}{500}.$$

258. Выразить процентные числа в виде числа:

$$0{,}5\%;\ 1{,}75\%;\ 0{,}0075\%;\ 120{,}3\%;\ \frac{7}{16}\%;\ 3\frac{1}{7}\%.$$

259. Какую часть единицы составляют 5%; 25%; 50%; 125% ее?

260. Какой части числа равны: 4%; 10%; 20%; 0,5%; 0,1% его?

261. Выразить в процентах изменение производительности труда, если она:

1) возросла на $\frac{1}{5}$ своего первоначального значения;
2) уменьшилась на $\frac{1}{4}$ своего первоначального значения;
3) возросла на 0,24 своего первоначального значения;
4) уменьшилась в 2 раза.

II. Процентное отношение двух чисел.

Пусть даны два числа. Чтобы найти процентное отношение x числа a к числу b нужно найти отношение этих чисел и выразить его в процентах:

$$x = \frac{a}{b}100\,\%$$

Пример. Найти процентное отношение чисел 3 к 5.

Решение. $x = \frac{3}{5}\cdot 100\% = 60\%$.

Свойства процентных отношений

1. Пусть x – процентное отношение чисел a и b,
   y – процентное отношение c и d.

Тогда $x+y$ – процентное отношение чисел $ad + bc$ и bd

В самом деле, $x = \frac{a}{b}100\%,\ y = \frac{c}{d}100\%$.

Складывая почленно эти равенства, получаем

$$x + y = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)100\% \text{ или } x + y = \left(\frac{ad + bc}{bd}\right)100\%.$$

Что в свою очередь и означает, что $x+y$ является процентным отношением чисел $ad + bc$ и bd.

2. Пусть x – процентное отношение чисел a и b,

y – процентное отношение c и d,

z – процентное отношение процентных чисел x и y.

Тогда

z – процентное отношение чисел ad и bc.

В самом деле, по определению $z = \frac{x}{y}100\%$, но $x = \frac{a}{b}100\%,\ y = \frac{c}{d}100\%$, откуда следует, что $z = \frac{ad}{bc}100\%$, а это значит, что z является процентным отношением чисел ad и bc.

3. Пусть x – процентное отношение чисел a и b,

y – процентное отношение c и d.

Тогда xy – процентное отношение чисел 100 ac и bd.

В самом деле, так как $x = \frac{a}{b}100\%,\ y = \frac{c}{d}100\%$, то $xy = \left(\frac{ac}{bd}100\%\right)100\%$ и после сокращения обоих частей этого равенства на 1%, получаем, что $xy = \left(\frac{100ac}{bd}\right)100\%$, а это означает, что xy – процентное отношение чисел 100 ac и bd.

262. Найти процентное отношение чисел: а) 1 к 4; б) 3 к 16; в)33 к 125; г)7,2 к 3.
263. Сколько процентов составляет: а) 4 от 5; б) 3 от 4; в) 7 от 50; г) 11 от 25.
264. Выразить в процентах дроби: 0,17; 0,3; 0,245; 0,002; $\frac{1}{8}; \frac{3}{16}; \frac{1}{3}; \frac{2}{7}$. Данное число уменьшили в три раза. На сколько процентов уменьшили данное число?
265. Данное число увеличили в 12 раз. На сколько процентов увеличили данное число?
266. Из 325 т железной руды получено 165 $\frac{3}{4}$ т железа. Какой процент руды составляет железо?
267. В 110 л чистой воды растворили 15 кг соли. Сколько процентов соли содержит этот раствор?
268. От $\frac{7}{16}$ отняли $\frac{2}{5}$. На сколько процентов уменьшилась дробь?
269. К $\frac{3}{8}$ прибавили $\frac{2}{25}$. На сколько процентов увеличилась дробь?
270. Время, затрачиваемое на изготовление одной детали, снизилось с 1 часа 40 мин до 1 часа. На сколько процентов увеличилась производительность труда?
271. На сколько процентов повысилась производительность труда рабочего, если он в день вместо нормы в 600 деталей стал изготовлять 850 деталей?

<u>Нахождение процента от числа</u>

Задача 1. Найти число x, составляющее p% от данного числа a.

Решение. Воспользуемся основным процентным тождеством x=100 x%.

Разделим обе части этого равенства на $a \neq 0$. Тогда получаем, что $\frac{x}{a} = \frac{100x}{a}\%$. С другой стороны имеем: $\frac{x}{a} = p\%$. Таким образом, получаем равенство:

$$\frac{100x}{a} = p \text{ или } x = \frac{ap}{100}$$

Задача 2. Найти число y, составляющее q% от числа x, составляющего p% от данного числа a.

Решение. Имеем $x = \frac{ap}{100}$ и $y = \frac{xq}{100}$, откуда следует, что

$$y = \frac{apq}{10000}$$

272. Найти 2% от 54; 30% от 50; 24% от 480; 1,5% от 40.
273. Найти 0,4% от 5,85 млрд. руб; 0,12% от 60,5 м; 0,8% от 2,1 т; 7,8% от 149 млн. м^2.
274. Увеличить число 720 на 4%; 3,75%; $33\frac{1}{3}$%; 150%.
275. Уменьшить число 288 на 5%; $6\frac{2}{3}$%; 1,25%; 67,5%.
276. Что больше: 0,8% от 5 или 0,6% от 10?
277. Что меньше: 0,4% от 2,5 или 2,5% от 0,4?
278. Сравнить: 2% от 5 руб и 5% от 2 руб.
279. Перерабатывается 7,8 т молока. Сколько получится масла, если вес его составляет 2,5% веса молока?
280. Сколько граммов соли находится в 30 г 5 - процентного раствора соли?

281. Сколько граммов борной кислоты надо взять на стакан воды (250 $см^3$), чтобы приготовить 3 - процентный раствор?
282. Сколько граммов крови содержит тело человека, весящего 62,1 кг, если кровь в среднем составляет $13\frac{8}{9}\%$ общего веса тела?
283. Латунь представляет собой сплав из 64,8% меди, 32,8% цинка и 2,4% свинца. По сколько кг надо взять меди, цинка и свинца, чтобы получить слиток латуни в 3 ц 30 кг?
284. Засеяли три участка. Второй участок на 20% больше первого, а третий - на 20% меньше второго. На сколько процентов второй участок больше третьего?
285. Яблоки при сушке теряют 84% своей массы. Сколько получится сушенных яблок из 300 кг свежих?
286. Гречневая крупа содержит 10% белков, 2,5% жиров и 60% углеводов. Сколько этих продуктов содержится в 14,4 ц гречневой крупы?

Нахождение числа по проценту

Задача 1. Пусть число a составляет p% от неизвестного числа x. Найти это неизвестное число.

Решение. Воспользуемся основным процентным тождеством a=100 a%. Тогда получаем, что $\frac{a}{x}=\frac{100a}{x}\%$. С другой стороны имеем $\frac{a}{x}=p\%$. Таким образом, получаем равенство

$$\frac{100a}{x}=p \text{ или } x=\frac{100a}{p}.$$

Задача 2. Пусть число a составляет p% от неизвестного числа x, которое составляет q% от неизвестного числа y. Найти число y.

Решение. Имеем $x = \frac{100a}{p}$ и $y = \frac{100x}{q}$, откуда следует, что

$$y = \frac{10000a}{pq}.$$

Замечание. Комбинируя задачи на нахождение процента от числа и числа по проценту, получим следующие задачи.

Задача 3. Пусть x составляет p% от a и y составляет q% от x. Найти y.

Решение. Имеем $x = \frac{ap}{100}$ и $x = \frac{100y}{q}$, откуда $y = \frac{apq}{10000}$.

Задача 4. Пусть a составляет p% от x и y составляет q% от x. Найти y.

Решение. Имеем $x = \frac{100a}{p}$ и $y = \frac{xq}{100}$, откуда следует, что

$$y = \frac{aq}{p}.$$

287. От какого числа число 48 составляет 3%; 5%; 12%; 25%; 150%?
288. От какого числа число 30 составляет: 2%; 4%; 75%; 120%?
289. Чему равно неизвестное число, если 4/5 его составляют 76%?
290. Узнать число, если 0,7 его равны 56%.
291. Сколько стоит книга, если 2 рубля составляют 5% ее стоимости?

292. При скидке 15% за книгу заплатили 68 руб. Какова первоначальная цена книги?
293. Рабочий изготовил 2100 деталей, что составляет 105% недельного плана его выработки. Какова его норма недельной выработки?
294. Сколько надо взять 5 – процентного раствора соли, чтобы получить 2 л раствора крепостью 0,1 %?
295. Для хлорирования воды необходимо иметь 1 мг чистого хлора на 1 л воды. Сколько надо взять 25 – процентной хлорной извести для хлорирования 100 л воды?
296. Спустя 2 часа после выпечки хлеб теряет 0,6% первоначального веса. Сколько весит только что выпеченный хлеб, если спустя два часа он весит 4,97 ц?
297. За сутки автозаводом выпущено 468 машин, что составляет 112,5%. Сколько машин в сутки надо было выпустить по плану?
298. Двое людей имели 765 руб., причем один имел $80\frac{40}{47}$ % той суммы, которую имел второй. Сколько денег было у каждого?

§9. Наценки и скидки

Товары и услуги, поступающие на рынок, имеют определенную себестоимость. Величина этой себестоимости естественным образом зависит от количества затрат, необходимых для производства данного товара или услуги. Однако, в дальнейшем, при движении товара по рынку и конечному потребителю, природа себестоимости товара меняется. Продавец, как правило, отождествляет себестоимость товара с последней продажной ценой и, исходя из существующих условий рынка, устанавливает на имеющие товары или услуги новую продажную цену. При этом у него есть три возможности: во-первых, он может продавать товар по последней продажной цены; во-вторых, он может увеличить последнюю продажную цену и в-третьих, он может уменьшить продажную цену. Вопрос о том, какую прибыль получает продавец в каждом из этих случаев, определяется условиями прохождения товара через рынок. Известны случаи, что уменьшение продажной цены может привести к увеличению объема продаж, что, в конечном итоге, положительно повлияет на интенсивность оборачиваемости товарных запасов.

Таким образом, изменение природы себестоимости товара, позволяет формализовать математически процесс прохождения товара через рынок. При этом себестоимость товара, теряя свои свойства, связанные с производством, на первое место выносит те свойства, которые ей присущи, как чисто скалярной величине.

Поэтому представляется возможность определить себестоимость не с помощью производственных затрат, а на основе свойств скалярной величины. Такое представление нисколько не противоречит природе самого товара, а лишний раз подтверждает его двойственную природу.

I. <u>**Наценки на цены**</u>

1. Процент наценки на себестоимость.

Пусть x – продажная цена товара,

y – себестоимость товара,

q – процент наценки на себестоимость,

$q \cdot y$ – наценка на себестоимость.

Тогда эти величины связаны между собой соотношением

$$x = y + q \cdot y \tag{1}$$

Пример. Найти продажную цену товара с себестоимостью 300 руб., если процент наценки на себестоимость составляет 25%.

Решение. x=300+0,25 300=375 (руб.)

Процент наценки на продажную цену.

2. Пусть x – продажная цена товара,

y – себестоимость товара,

p – процент наценки на продажную цену,

$p \cdot x$ – наценка на продажную цену.

Тогда справедливо равенство:

$$x = y + p \cdot x \tag{2}$$

Пример. Найти продажную цену товара с себестоимостью 300 руб., если процент наценки на продажную цену составляет 25%.

Решение. x=300+0,25 x,

x=400 (руб.).

3. Имеет место следующее утверждение:

<u>процент наценки на себестоимость во столько раз больше процента наценки на продажную цену, во сколько раз продажная цена товара больше его себестоимости:</u>

$$\frac{q}{p}=\frac{x}{y} \qquad (3)$$

В самом деле, из равенств (1) и (2), получаем $qy=px$, откуда следует равенство (3).

4. Между процентом наценки на себестоимость q и процентом наценки на продажную цену p существует следующая связь:

$$\frac{1}{p}=1+\frac{1}{q}. \qquad (4)$$

В самом деле, из условий (1) и (2), исключая переменные x и y, получаем

$$1=(1-p)(1+q),$$

откуда следует равенство (4).

5. Если процент наценки на себестоимость выражается в виде доли, т.е. $q=\frac{1}{n}$, где n - произвольное натуральное число, то процент наценки на продажную цену выражается соответствующей долей:

$$p=\frac{1}{n+1}.$$

Справедливость этого утверждения следует из равенства (4).
Пример. Если q =100%, то p=50%.

6. При любых процентах наценки на себестоимость соответствующий процент наценки на продажную цену меньше 100%.

Это утверждение следует из равенства (3), при этом, если $p\in[0;+\infty)$, то $q\in[0;1)$.

7. График зависимости процента наценки на продажную цену от процента на себестоимость представляет собой график обратной пропорциональности, перенесенный в

точку с координатами (-1;1) в системе координат (q, p). (рис.4)

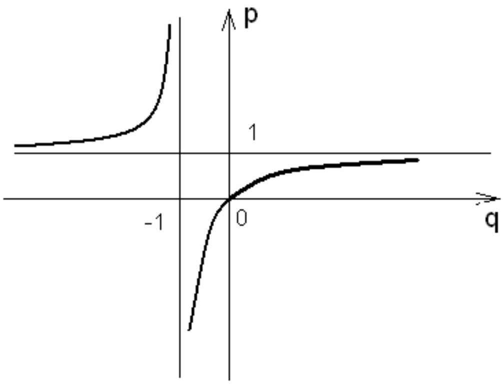

Рис. 4.

Доказательство следует из равенства:

$$p = \frac{q}{q+1} = \frac{q+1-1}{q+1} = 1 - \frac{1}{q+1}$$

Многоразовая наценка на себестоимость

Пусть x – продажная цена товара,

y – себестоимость товара,

$q_1, q_2, ..., q_n$ – многоразовые проценты наценки на себестоимость.

Тогда справедливо равенство

$$x = y(1+q_1)(1+q_2)...(1+q_n) \qquad (5)$$

В самом деле, после первой наценки на q_1, имеем

$$y + y \cdot q_1 = y(1+q_1).$$

После второй наценки на q_2, имеем

$$y + y \cdot q_1 + (y + y \cdot q_1)q_2 = y(1+q_1)A(1+q_2)\,.$$

Продолжая процесс наценок на себестоимость, после n-ой наценки, продажная цена x будет выражена равенством (5).

Пример. Найти продажную цену товара с себестоимостью 300 руб. после трехразовой наценки на себестоимость товара соответственно на 20%, 30%, 40%.

Решение. x=300(1+0,2)(1+0,3)(1+0,4)=664,4 (руб.)

<u>Многоразовая наценка на продажную цену</u>

Пусть x – продажная цена товара,

y – себестоимость товара,

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ – многоразовые процентные наценки на продажную цену.

Тогда справедливо равенство:

$$y = x(1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_n) \qquad (6)$$

В самом деле, после первой наценки на p_1, имеем:

$$y = x(1-p_1)\,.$$

После второй наценки на p_2, имеем:

$$s = x(1-p_1)(1-p_2)\,.$$

Продолжая процесс наценок на продажную цену, после n-ой наценки, получаем равенство (6).

Пример. Найти продажную цену товара с себестоимостью 300 руб. после трехразовой наценки на продажную цену товара соответственно на 20%, 30%, 40%.

Решение. 300=x(1–0,2)(1–0,3)(1–0,4),

$x \approx 893$(руб.).

Заметим, что при многоразовой наценке между процентными наценками на себестоимость $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и процентными наценками на продажную цену $p_1, p_2, \ldots, p_n$ существует следующая связь:

$$1=(1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_n)\ (1+q_1)(1+q_2)\ldots(1+q_n) \qquad (7)$$

В самом деле, если из условий (5) и (6) исключить x и y, то получим равенство (7).

Интересно отметить также и следующий факт. Если при многоразовой наценке процентные наценки на себестоимость и на продажную цену не меняются, то есть остаются стандартными и равными p и q соответственно, то имеет место равенство:

$$1=(1-p)(1+q)\,. \qquad (8)$$

В самом деле, из условия (7) при равенствах

$$p_1=p_2=\cdots=p_n=p \text{ и } q_1=q_2=\cdots=q_n=q$$

следует, что

$$1=(1-p)^n(1+q)^n\,,$$

откуда и получается равенство (8).

Равенство (8), как легко заметить, соответствует случаю одноразовой наценки на себестоимость и продажную цену.

Таким образом, видно, что равенство (8) не зависит от последующих стандартных наценок. Это обстоятельство, на наш взгляд, играет важную роль в маркетинге (см. например, Ф. Котлер «Основы маркетинга», с.366):

«Кладбище розничного бизнеса забито могилами купцов, которые твердо держались за свои стандартные наценки, в то время как конкуренты устанавливали цены со скидками.»

Это свойство стандартных наценок будем называть свойством идемпотентности.

Экономический смысл числа *e*

Многоразовые наценки связаны с фундаментальной математической структурой, являющейся произведением бесконечного числа близких к единице чисел. Эта структура возникает во многих экономических задачах, таких как задача о вкладах, задача о естественном приросте населения и т. п.

Предположим, что банк производит начисления 100k% и n изъятий вклада в течение года. Тогда каждый раз первоначальный вклад вырастает в $(1+\frac{k}{n})$ раз. В течение года при n изъятиях этот вклад возрастет в $a_n = (1+\frac{k}{n})^n$ раз.

Очевидно, чем больше будет изъятий, тем больше a_n. Поэтому выгоднее изымать и снова вносить вклад каждый месяц, каждую неделю и т. д. На самом деле, уже ежедневное производство этой операции является предельно возможным, т. к. за дробную часть дня банк процентов не начисляет. Однако в математической модели банка можно представить себе процесс внесений и изъятий вклада беспредельным.

Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Введем обозначение $n = m \cdot k$. Тогда

$$a_n = (1+\frac{k}{mn})^{mk} = ((1+\frac{1}{m})^m)^k.$$

Найдем вначале $\lim\limits_{m\to\infty} (1+\frac{1}{m})^m$.

Первоначальные вычисления показывают, что

$$a_1 = (1+1)^1 = 2$$

$$a_2 = (1+\frac{1}{2})^2 = 2{,}25$$

$$a_3 = (1+\frac{1}{3})^3 = 2{,}37...$$

В общем случае получаем:

$$(1+\frac{1}{m})^m=1+m\cdot\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{m^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{m^3}+\cdots=$$
$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{m})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})+\cdots$$

При $m\to\infty$, все множители в скобках стремятся к единице.

Таким образом $(1+\frac{1}{m})^m=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{m!}+\cdots$

Дальнейшие вычисления показывают что

$$\lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^m=2{,}718281828459045\ldots$$

Это число называют натуральным или эйлеровым и обозначают буквой *e*. Роль числа *e* в математике исключительно велика.

Итак, получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=e^k$.

Если представить себе такой банк, который начислял бы 100% непрерывно, не только ежемесячно, но и ежедневно, ежесекундно, то к концу года вклад 1 доллар вырос бы до 2,71828...

В этом и состоит экономический смысл числа *e*.

II. **Скидки с цены**

1. Процент скидки с себестоимости.

Пусть x – продажная цена товара,

y – себестоимость товара,

l – процент скидки с себестоимости,

$l\cdot y$ – скидка с себестоимости.

Тогда эти величины связаны между собой следующим соотношением:

$$x=y-ly \tag{9}$$

Пример. Найти продажную цену товара с себестоимостью 300 руб., если процент скидки с себестоимости составляет 25%.

Решение. x=300–0,25$\cdot$300=225 (руб.)

2. Процент скидки с продажной цены.

Пусть x – продажная цена товара,

y – себестоимость товара,

m – процент скидки с продажной цены,

$m \cdot x$ – скидка с продажной цены.

Тогда справедливо равенство:

$$x = y - mx \tag{10}$$

Пример. Найти продажную цену товара с себестоимостью 300 руб., если процент скидки с продажной цены составляет 25%.

Решение. x=300–0,25 x, x=240 (руб.)

3. Имеет место следующее утверждение: процент скидки с себестоимости во столько раз больше процента скидки с продажной цены, во сколько раз продажная цена больше себестоимости:

$$\frac{l}{m} = \frac{x}{y} \tag{11}$$

В самом деле, из равенств (9) и(10), получаем $ly=mx$, откуда следует равенство (11).

4. Между процентом скидки с себестоимости l и процентной скидки на продажную цену m существует следующая связь:

$$\frac{1}{l} = 1 + \frac{1}{m} \tag{12}$$

В самом деле, из условий (9) и (10). исключая переменные x и y, получаем $1=(1-l)(1+m)$, откуда следует равенство (12).

5. Если процент скидки с продажной цены выражается в виде доли, т.е. $m=\frac{1}{n}$, где n – произвольное натуральное число, то процент наценки на себестоимость выражается соответствующей долей:

$$l=\frac{1}{n+1}.$$

Справедливость этого утверждения следует из равенства (12).

Пример. Если m=100%, то l=50%.

6. При любых процентах скидки на продажную цену соответствующий процент скидки на себестоимость меньше 100%.

Это утверждение следует из равенства (12), при этом, если $m \in [0;+\infty)$, то $l \in [0;1)$.

7. График зависимости процента скидок на себестоимость от процента скидок на продажную цену представляет собой график обратной пропорциональности, перенесенный в точку с координатами (–1,1) в системе координат (m,l). (рис.5)

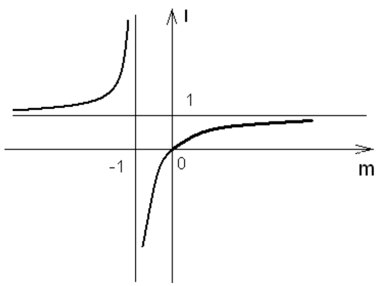

Рис. 5.

Доказательство следует из равенства:

$$l=\frac{m}{m+1}=\frac{m+1-1}{m+1}=1-\frac{1}{m+1}.$$

Многоразовая скидка с себестоимости

Пусть x – продажная цена товара,

y – себестоимость товара,

$l_1, l_2, \ldots, l_n$ – многоразовые процентные скидки с себестоимости.

Тогда справедливо равенство:

$$x = y(1-l_1)(1-l_2)\ldots(1-l_n) \qquad (13)$$

В самом деле, после первой скидки на l_1, имеем

$$y - l_1 y = y(1-l_1)$$

После второй скидки на l_2, имеем

$$y(1-l_1)-y(1-l_1)l_2 = y(1-l_1)(1-l_2)$$

Продолжая процесс скидок на себестоимость, после n - ой скидки, продажная цена x будет выражаться равенством (13).

Пример. Найти продажную цену товара с себестоимостью 300 руб. после трех -разовой скидки на себестоимость товара соответственно на 20%, 30%. 40%.

Решение. x=300(1-0,2)(1-0,3)(1-0,4)=100,8 (руб.)

Многоразовая скидка с продажной цены

Пусть x – продажная цена товара,

y – себестоимость товара,

$m_1, m_2, \ldots, m_n$ – многоразовые процентные скидки с продажной цены.

Тогда справедливо равенство:

$$x(1+m_1)(1+m_2)\ldots(1+m_n)=y. \qquad (14)$$

В самом деле, после первой скидки на m_1, имеем

$$x(1+m_1)=y.$$

После второй скидки на m_2, имеем

$$x=\frac{y}{1+m_1}-xm_2 \text{ или } x(1+m_1)(1+m_2)=y.$$

Продолжая процесс скидок с продажной цены, после n-ой скидки, получаем равенство (14).

Пример. Найти продажную цену товара с себестоимостью 300 руб. после трех -разовой скидки с продажной цены соответственно на 20%, 30%. 40%.

Решение. $x(1+0{,}2)(1+0{,}3)(1+0{,}4)=300$ (руб.)

$x\approx 137{,}36$.

Заметим, что при многоразовой скидке между процентными скидками с себестоимости $l_1, l_2, \ldots, l_n$ и процентными скидками с продажной цены $m_1, m_2, \ldots, m_n$ существует следующая связь:

$$1=(1-l_1)(1-l_2)\ldots(1-l_n)\,(1+m_1)(1+m_2)\ldots(1+m_n) \qquad (15)$$

В самом деле, если из условий (13) и (14) исключить x и y, то получим равенство (15).

Имеет место также и следующий факт.

Если при многоразовой скидке процентные скидки с себестоимости и с продажной цены остаются стандартными, то есть равными одним и тем же величинам l и m, то между ними сохраняется соотношение:

$$1=(1-l)(1+m).$$

Полученное равенство соответствует случаю одноразовой скидки с себестоимости и с продажной цены.

Таким образом, стандартные скидки также обладают свойством идемпотентности.

Экономический смысл числа $\frac{1}{e}$

Многоразовые скидки позволяют смоделировать еще одну задачу, связанную с числом e.

Предположим, что необходимо в течение года израсходовать некоторую сумму. Другими словами, предполагается израсходовать 100% первоначальной суммы. Предположим также, что в течение года можно производить n отчислений и каждый раз отчислять $\frac{100}{n}$% оставшейся суммы, т.е. $\frac{1}{n}$ часть. Какая сумма останется после n отчислений от первоначальной суммы, если процесс отчислений будет беспредельным.

Каждый раз первоначальная сумма будет уменьшаться в $\left(1-\frac{1}{n}\right)$ раз.

В течение года при n отчислениях эта сумма уменьшится в

$$a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \text{ раз.}$$

Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Первоначальные вычисления показывают, что

a_1=1–1=0,

$$a_2 = \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$a_3 = \left(1-\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \approx 0{,}296...$$

$$a_4 = \left(1-\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{81}{256} \approx 0{,}3164...$$

Дальнейшие вычисления показывают, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \approx 0{,}3678795...$$

Таким образом, число e^{-1} показывает, какая часть суммы остается при достаточно большом количестве отчислений от одной денежной единицы. В этом состоит экономический смысл числа e^{-1}.

Данная модель может быть использована, в частности, при расходовании кредитов, использовании залога (пени) и т.п.

Из приведенных рассуждений следует, что максимум суммы расходуется при одном отчислении в течение года. Однако для достижения этого максимума нужно ждать целый год. Поэтому в реальных моделях возникает потребность оптимизации этого процесса, поскольку, взятые в течение года деньги могут принести больше дохода, чем первоначальная сумма. Ожидание же гарантированной сумы, равносильно известной древнеримской модели, при которой «талант зарывается в землю».

III. <u>**Комбинированные наценки**</u>

Наценка называется комбинированной, если она осуществляется одновременно на себестоимость и на продажную цену товара.

Пусть x – продажная цена товара,
y – себестоимость товара,
a – процентная наценка на продажную цену,
b – процентная наценка на себестоимость.

Тогда справедливо равенство

$$x - y = ax + by \qquad (16)$$

Пример. Найти продажную цену товара с себестоимостью 300 руб., если одновременные наценки на себестоимость и на продажную цену составляют соответственно 20% и 25%.

Решение. x=300+0,25 x+0,2$\cdot$300,

x=480 (руб.)

При одновременной комбинированной наценке между себестоимостью и продажной ценой существует следующая связь:

$$x = \frac{1+b}{1-a}y. \qquad (17)$$

В самом деле, из равенства (16), получаем, что

$$(1-a)x = (1+b)y,$$

откуда следует равенство (17).

Между одновременными комбинированными наценками a, b, и процентной наценкой на себестоимость q существует следующая связь:

$$q = \frac{a+b}{1-a.}. \qquad (18)$$

В самом деле, x-y=ax+by, или

$$x - y = \left(\frac{1+b}{1-a} - 1\right)y.$$

Сравнивая это равенство с равенством (1), получаем равенство (18).

Между одновременными комбинированными наценками a, b и процентной наценкой на продажную цену p существует соотношение:

$$p = \frac{a+b}{1+b.} \qquad (19)$$

В самом деле, имеем $x = \frac{1+b}{1-a}y$ или $x - y = \left(1 - \frac{1-a}{1+b}\right)x$,

$$x - y = \frac{a+b}{1+b}x$$

Сравнивая это равенство с равенством (2), получаем равенство (19).

Замечание. Можно показать, что справедливо равенство (3): $\frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{q}$.

В самом деле,

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1+b}{a+b} - \frac{1-a}{a+b} = \frac{b+a}{a+b} = 1.$$

Многоразовые комбинированные наценки

Пусть x – продажная цена товара,

y – себестоимость товара,

$a_1, a_2, \dots, a_n$; $b_1, b_2, \dots, b_n$ – комбинированные процентные наценки на продажную цену и на себестоимость.

Тогда справедливо равенство:

$$x(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n) = y(1+b_1)(1+b_2)\dots(1+b_n) \qquad (20)$$

В самом деле, после первой комбинированной наценки на a_1 и b_1 имеем

$$x(1-a_1) = y(1+b_1)$$

После второй комбинированной наценки на a_2 и b_2 получаем $x - \frac{y(1+b_1)}{1-a_1} = a_2 x + b_2 \frac{y(1+b_1)}{1-a_1}$ или

$$x(1-a_1)(1-a_2) = y(1+b_1)(1+b_2).$$

После n-ой комбинированной наценки на a_n и b_n, получаем равенство (20).

Между комбинированными наценками $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и процентной наценкой на себестоимость q существует следующая связь:

$$1+q=\frac{(1+b_1)(1+b_2)\ldots(1+b_n)}{(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)}.$$

Утверждение следует из равенств (20) и (1).

Между комбинированными наценками $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и процентной наценкой на продажную цену p существует связь:

$$1-p=\frac{(1+b_1)(1+b_2)\ldots(1+b_n)}{(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)}.$$

Утверждение следует из равенств (20) и (2).

Комбинированные скидки

Скидка называется комбинированной, если она осуществляется одновременно на себестоимость и на продажную цену.

Пусть x – продажная цена товара,
y – себестоимость товара,
d – процентная скидка на продажную цену,
c – процентная скидка на себестоимость.

Тогда справедливо равенство:

$$x-y=-dx-cy \tag{21}$$

Пример. Найти продажную цену товара с себестоимостью 300 руб., если скидка на себестоимость товара 20%, а скидка на продажную цену 25%.

Решение. x-300= –0,25 x–0,2$\cdot$300,
x=192 (руб.)

При комбинированной скидке между себестоимостью и продажной ценой существует следующая связь:

$$x = \frac{1-c}{1+d}\,y\,. \qquad (22)$$

В самом деле, из равенства (21), получаем, что

$$(1+d)x = y(1-c)\,,$$

откуда следует равенство (22).

Между комбинированными скидками c, d и процентной скидкой l на себестоимость существует следующая связь:

$$l = \frac{c+d}{1+d}\,. \qquad (23)$$

В самом деле, имеем $x - y = -dx - cy$ или

$$x - y = \left(\frac{1-c}{1+d} - 1\right) y\,,$$

$$x - y = -\frac{c+d}{1+d}\,y\,.$$

Сравнивая последнее равенство с равенством (9), получаем равенство (23).

Между комбинированными скидками c, d и процентной скидкой m на продажную цену существует связь:

$$m = \frac{c+d}{1-c}\,. \qquad (24)$$

В самом деле имеем $x = -\frac{1-c}{1+d}\,y$ или

$$x - y = \left(1 - \frac{1+d}{1-c}\right) x\,,$$

$$x - y = -\frac{c+d}{1-c}\,x\,.$$

Сравнивая последнее равенство с равенством (10), получаем равенство (24).

Замечание. Можно показать, что справедливо равенство (12):

$$\frac{1}{l}-\frac{1}{m}=\frac{1+d}{c+d}-\frac{1-c}{c+d}=\frac{c+d}{c+d}=1.$$

Многоразовые комбинированные скидки

Пусть x – продажная цена товара,

y – себестоимость товара,

$d_1, d_2, \ldots, d_n$ – комбинированные процентные скидки на себестоимость,

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ – комбинированные процентные скидки на продажную цену.

Тогда справедливо равенство:

$$x(1+d_1)(1+d_2)\ldots(1+d_n)=y(1-c_1)(1-c_2)\ldots(1-c_n) \qquad (25)$$

В самом деле, после первой скидки на c_1 и d_1 имеем

$$x(1+d_1)=y(1-c_1).$$

После второй скидки c_2 и d_2 получаем

$$x=\frac{y(1-c_1)}{1+d_1}-d_2x-c_2\frac{y(1-c_1)}{1+d_1} \text{ или}$$

$$x(1+d_1)(1+d_2)=y(1-c_1)(1-c_2).$$

После n-ой комбинированной скидки на c_n и d_n, получаем равенство (25).

Между комбинированными скидками $c_1, c_2, \ldots, c_n$; $d_1, d_2, \ldots, d_n$ и процентной скидкой на себестоимость l существует следующая связь:

$$1-l=\frac{(1-c_1)(1-c_2)\ldots(1-c_n)}{(1+d_1)(1+d_2)\ldots(1+d_n)}.$$

Утверждение следует из равенств (25) и (9).

Между комбинированными скидками $c_1, c_2, \ldots, c_n$; $d_1, d_2, \ldots, d_n$ и процентной скидкой на продажную цену m существует следующая связь:

$$1+m=\frac{(1+d_1)(1+d_2)\ldots(1+d_n)}{(1-c_1)(1-c_2)\ldots(1-c_n)}.$$

Утверждение следует из равенств (25) и (10).

Колебание цен

Колебанием цен называется последовательное изменение процентных наценок и скидок.

1. Пусть x – продажная цена товара,

y – себестоимость товара,

q – процентная наценка на себестоимость,

l – процентная скидка на себестоимость.

Тогда справедливо равенство:

$$x=y(1+q)(1-l)$$

В самом деле, после наценки на q имеем

$$x=y+q\,y.$$

После последующей скидки на себестоимость l, (которая уже равна продажной цене после наценки на q), получаем

$$x=(1+q)y-l(1+q)s \text{ или}$$

$$x=y(1+q)(1-l).$$

Пример. Найти продажную цену товара с себестоимостью 300 руб., если процентная наценка на себестоимость 20%, а процентная скидка на себестоимость 25%.

Решение. x=300(1+0,2)(1–0,25)=270 (руб.)

Замечание. а) Если $l < \dfrac{q}{q+1}$, то продажная цена x возрастает. Это утверждение следует из равенства $x = (1 + q - l - ql)y$

Так как $q - l - ql > 0$, то продажная цена x возрастает.

б) Если $l > \dfrac{q}{q+1}$, то продажная цена x убывает.

в) Если $l = \dfrac{q}{q+1}$, то продажная цена x не меняется.

2. Пусть x – продажная цена товара,
y – себестоимость товара,
q – процентная наценка на себестоимость,
m – процентная скидка на продажную цену.

Тогда справедливо равенство:

$$x(1+m) = y(1+q)$$

В самом деле, после наценки на q имеем

$$x = (1+q)y$$

После последующей скидки на m, получаем

$$x = (1+q)y - mx \text{ или}$$
$$x(1+m) = y(1+q).$$

Пример. Найти продажную цену товара с себестоимостью 300 руб., если процентная наценка на себестоимость 20%, а процентная скидка на продажную цену 25%.

Решение. x(1+0,25)=300(1+0,2)
x=288 (руб.)

Замечание. а) Если $q>m$, то продажная цена x возрастает. Это утверждение следует из равенства $x(1+m) = y(1+q)$ или

$$x - y = \left(\frac{1+q}{1+m} - 1\right)y.$$

Так как $\frac{1+q}{1+m}-1>0$, то x возрастает.

б) Если $q<m$, то продажная цена x убывает.

в) Если $q=m$, то продажная цена x не меняется.

3. Пусть x – продажная цена товара,

y – себестоимость товара,

p – процентная наценка на продажную цену,

l – процентная скидка с себестоимости.

Тогда справедливо равенство:

$$x(1-p)=y(1-l).$$

В самом деле, после наценки на продажную цену на p имеем

$$x(1-p)=y.$$

После последующей скидки на себестоимость l, получаем

$$x=\frac{y}{1-p}-l\cdot\frac{y}{1-p} \text{ или}$$

$$x(1-p)=y(1-l).$$

Пример. Найти продажную цену товара с себестоимостью 300 руб., если процентная наценка на продажную цену 25%, а процентная скидка с себестоимости 20%.

Решение. x(1–0,25)=300(1–0,20),

x= 320 руб.

Замечание. а) Если $p>l$, то продажная цена x возрастает. Это утверждение следует из равенства

$$x=\frac{y(1-l)}{1-p} \text{ или } x-y=\left(\frac{1-l}{1-p}-1\right)y.$$

Так как $\frac{1-l}{1-p}-1>0$, то продажная цена x возрастает.

б) Если $p<l$, то продажная цена x убывает.

в) Если $p=l$, то продажная цена x не меняется.

4. Пусть x – продажная цена товара,

y – себестоимость товара,

p – процентная наценка на продажную цену,

m – процентная скидка на продажную цену.

Тогда справедливо равенство:

$$x(1-p)(1+m)=y\,.$$

В самом деле, после наценки на p имеем

$$x=\frac{y}{1-p}\,.$$

После последующей скидки на продажную цену, получаем

$$x=\frac{s}{1-p}-mx \text{ или } x(1-p)(1+m)=s\,.$$

Пример. Найти продажную цену товара с себестоимостью 300 руб., если процентная наценка на продажную цену 20%, а процентная скидка с продажной цены 25%.

Решение. x(1–0,2)(1+0,25)=300,

x=300 руб.

Замечание. а) Если $m<\dfrac{p}{1-p}$, то продажная цена x возрастает. Утверждение следует из равенства

$$x=\frac{y}{(1+m)(1-p)} \text{ или } x-y=\left(\frac{1}{(1+m)(1-p)}-1\right)y\,.$$

Так как $\dfrac{1}{(1+m)(1-p)}-1>0$, то x возрастает.

б) Если $m>\dfrac{p}{1-p}$, то продажная цена x убывает.

в) Если $m = \dfrac{p}{1-p}$, то продажная цена x не меняется.

(см. предыдущий пример.)

5. Двойственность себестоимости товара и продажной цены

Рассмотрим соотношения (1) и (10)

$$x = y + qs \text{ и } x = y - mx,$$

которые являются соответственно соотношениями для нахождения продажной цены x при наценке на себестоимость и при скидке с продажной цены. Перепишем эти равенства в виде:

$$x = y + qy \text{ и } y = x + mx.$$

Очевидно, что эти равенства переходят друг в друга, если заменить соответственно x на y и q на m, и наоборот.

В этом смысле можно считать, что себестоимость товара и продажная цена являются двойственными понятиями.

Аналогично можно рассмотреть соотношения (2) и (9) между продажной ценой и себестоимостью при наценке на продажную цену и при скидке с себестоимости, т.е. равенства

$$x = y + p \cdot x \text{ и } x = y - ly.$$

Перепишем эти равенства в виде:

$$x = y + p \cdot x \text{ и } y = x + ly.$$

Очевидно, что и эти равенства переходят друг в друга, если заменить соответственно x на y и p на l, и наоборот. В этом смысле можно считать, что продажная цена и себестоимость являются двойственными понятиями.

Проективная модель себестоимости и продажной цены

Двойственность себестоимости и продажной цены товара позволяет сформулировать основные проективные свойства этих понятий. Однородная связь между себестоимостью и продажной ценой непосредственно следует из их определения, в частности, из соотношений (1) и (10).

Рассмотрим проективную прямую, под которой будем понимать обычную евклидову прямую, пополненную бесконечно удаленной (несобственной) точкой. каждой точке A_i этой прямой сопоставим некоторое число S_i. Каждому направленному отрезку $A_i\ A_j$ поставим в соответствие разность S_i- S_j. (рис. 6.)

Рис. 6.

Далее предположим, что точки A_i определяют последовательность $A_1, A_2, ..., A_n$. Соответственно, пусть числа S_i задают некоторую последовательность $S_1, S_2, ..., S_n$ – последовательность продажных цен.

Тогда, очевидно, числа S_j–S_i – определяют наценки, а числа S_i–S_j – скидки.

Таким образом, для последовательности наценок и скидок строится математическая (проективная) модель, основанная на свойствах проективной прямой.

а) Одним из важных понятий, связанных с прямой линией, является простое отношение трех точек на ней. Дадим смысл этого понятия в терминах процентных наценок и скидок. Напомним, что простым отношением трех точек A, B, C на прямой, называется число $(ABC) = \dfrac{AC}{CB}$.

Рассмотрим подробно это отношение.

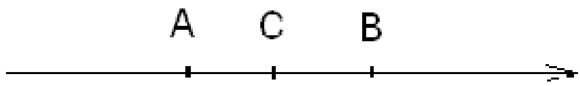

Рис. 7.

Введем обозначения: (рис. 7.)

$AC = y$ – себестоимость товара;

$CB = y \cdot q_1$ – наценка на себестоимость;

q_1 – процентная наценка на себестоимость;

$AB = x_1$ – продажная цена при наценке q_1.

p_1 – процентная наценка на продажную цену.

В терминах себестоимости

$$(ABC) = \frac{AC}{CB} = \frac{y}{yq_1} = \frac{1}{q_1}.$$

В терминах продажной цены

$$(ABC) = \frac{AC}{CB} = \frac{x_1 - x_1 p_1}{x_1 p_1} = \frac{1}{p_1} - 1.$$

Отсюда получаем известное соотношение между процентными наценками на себестоимость и продажную цену:

$$\frac{1}{p_1} = 1 + \frac{1}{q_1}$$

б) Следующим важным понятием, связанным с прямой линией, является сложное отношение четырех точек *A*, *B*, *C*, *D* на ней.

Это понятие определяется как отношение двух простых отношений:

$$(ABCD) = (ABC):(ABD)$$

Справедлива формула

$$(ABCD) = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}$$

Для последовательности наценок и скидок, рассмотрим математическую (проективную) модель, связанную со сложным отношением четырех точек на проективной прямой.

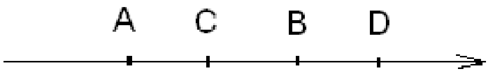

Рис. 8.

Введем обозначение: (рис.8)

$AC = y$ – себестоимость товара;

$CB = y \cdot q_1$ – наценка на себестоимость;

q_1 – начальная процентная наценка на себестоимость;

$AB = x$ – продажная цена, она же себестоимость при последующей процентной наценке q_2.

BD – последующая наценка на себестоимость.

Тогда, сложное отношение ($ABCD$) вычисляется по формуле:

$$(ABCD) = \frac{q_2}{q_1(1 + q_2)}.$$

в) Известно, что четверка точек *A, B, C, D* называется гармонической, если ($ABCD$)= –1.

По аналогии с гармонической четверкой точек, определим понятие гармонических наценок. При этом имеет место следующее утверждение:

Четыре величины: начальная себестоимость, начальная наценка на себестоимость, последующая продажная цена, последующая наценка на себестоимость образуют гармоническую четверку наценок, если последующая процентная наценка на себестоимость совпадает с начальной процентной наценкой на продажную цену, т.е. $q_2 = p_1$.

В самом деле, из равенства (*ABCD*)= –1.

следует $\dfrac{AC:CB}{AD:DB} = -1$ или

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD}, \text{ то есть } \frac{y}{x_1 - y} = \frac{x_2}{x_2 - x_1}.$$

Преобразуя последнее равенство, получаем

$$\frac{1}{q_1} = 1 + \frac{1}{q_2}.$$

Сравнивая это равенство с равенством, связывающим процентные наценки на себестоимость и продажную цену, получаем, что $q_2 = p_1$, то есть, последующая процентная наценка на себестоимость совпадает с начальной процентной наценкой на продажную цену.

Таким образом, проективная модель себестоимости и продажной цены построена. Очевидно также, что эта модель выдерживает и многоразовые наценки и скидки, причем, в последнем случае необходимо выбрать на прямой направление, противоположное направлению в случае наценок. Рассмотрение проективной модели позволяет более наглядно представлять взаимосвязь наценок и скидок.

Задачи на наценки

299. Найти продажную цену товара с себестоимостью 500 руб., если наценка на себестоимость составила 20%.
300. Найти продажную цену товара с себестоимостью 500 руб., если наценка на продажную цену составила 20%.

301. Найти себестоимость (первоначальную цену) товара, если наценка на себестоимость составила 20%, а продажная цена 600 руб.
302. Найти себестоимость (первоначальную цену) товара, если наценка на продажную цену составила 10%, а продажная цена 600 руб.
303. Себестоимость товара составила 800 руб., а продажная цена 1000 руб. Найти наценку на себестоимость товара.
304. Себестоимость товара 800 руб., а продажная цена 1000 руб. Найти наценку на продажную цену.
305. Разность между наценками на себестоимость и на продажную цену равна 1/12 наценки на себестоимость. Найти процентные наценки.
306. Процентная наценка на себестоимость в k раз (k>1) больше процентной наценки на продажную цену. Найти процентную наценку на продажную цену.
307. *Найти процентные наценки на себестоимость и на продажную цену, которые представляются в виде натуральных чисел.
308. Кооператив получил для продажи сахар на 120 руб., ткани на 750 руб., хлебных товаров на 600 руб. На сахар кооператив начислил 5%, на ткани – 12%, на хлебные товары - 2%. какую сумму составила вся накидка на эти товары?
309. Кооператив назначил первоначально на изготовляемые им изделия цену выше государственной на определенное число процентов. Через некоторое время кооператив уценил изделие на то же число процентов, в результате цена изделий стала на 1% меньше государственной. На какое число процентов кооперативная цена первоначально превышала государственную?

Задачи на многоразовые наценки

310. Найти продажную цену товара с себестоимостью 500 руб. после двухразовой наценки на себестоимость товара соответственно на 20% и 30%.
311. Найти продажную цену товара с себестоимостью 500 руб. после двухразовой наценки на продажную цену соответственно на 20% и 30%.
312. Найти продажную цену товара с себестоимостью 1000 руб. в конце полугодия, если ежемесячная наценка на себестоимость составляет 10%.
313. Найти продажную цену товара с себестоимостью 1000 руб. в конце полугодия, если ежемесячная наценка на себестоимость составляет 10%.
314. Найти процентную наценку на себестоимость после трехразовой наценки на себестоимость товара с себестоимостью 600 руб., если продажная цена составила 4800 руб.
315. Найти процентную наценку на продажную цену после трехразовой наценки на себестоимость товара с себестоимостью 600 руб., если продажная цена составила 4800 руб.
316. Заработная плата некоторой категории служащих повышалась два раза, причем процент повышения во второй раз был в два раза больше, чем в первый раз. Определить на сколько процентов повышалась заработная плата каждый раз, если до первого повышения зарплата была 7 тыс. руб., а после второго повышения составила 9,24 тыс. рублей.

Задачи о вкладах.

317. В банк кладется a руб. и банк выплачивает p% годовых. Сколько руб получит вкладчик через m лет?

318. Вкладчик на свои сбережения через год получил a руб начисления процентных денег. Добавив еще b руб., он оставил деньги еще на год. По истечении года вклад вместе с процентными составил c руб. Какая сумма была положена первоначально и какой процент дает банк?

319. Вкладчик на свои сбережения через год получил a руб начисления процентных денег. Последующие пять лет он регулярно добавлял каждый год b руб. По истечению этого времени вклад вместе с процентными составил c руб. Какая сумма была положена первоначально и какой процент дает банк?

320. Решить предыдущую задачу в предположении, что вкладчик добавлял в течение пяти лет разные суммы денег /например, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, /.

321. Сколько процентных денег дает вклад 800 руб по 5% в 3/4 года? 1200 руб по 3% в 8 мес.?

322. На какое время нужно отдать в банк вклад в 30 000 руб по 2% годовых, чтобы получить 600 руб. процентных денег?

323. Один вкладчик положил в банк некоторую сумму, а второй вкладчик - вдвое большую сумму. Сумма первого вкладчика через m лет стала p рублей, а сумма второго через n лет стала q рублей. Определить, какова первоначальная сумма денег каждого вкладчика и сколько процентов в год выплачивает банк?

324. Определить вклад, отданный в банк, который при 5% годовых в 3/4 года даст 180 руб процентных денег.

325. Сумма 12756 руб. принесла в 7 месяцев столько же прибыли, сколько 14882 руб. по 4,5% за 8 месяцев. За сколько процентов в год была отдана первая сумма?

326. Обозначим через b всю прибыль с вклада a, помещенного в банк на T лет по p% годовых. Выяснить функцио-

нальную зависимость между указанными величинами, рассматривая каждую из них как функцию всех остальных.

327. Колхозник внес в сбербанк 20000 руб., разделив их на две части; одна часть приносила 3% прибыли, а другая срочная- 5%, и всего получено в год 940 руб. прибыли. Какая часть суммы была помещена по 3% и какая по 5%?

328. Рабочий-пенсионер получает ежемесячно на свои сбережения, хранящиеся в сбербанке, 36 руб. из расчета 5% годовых. Как велики сбережения рабочего?

329. За сколько процентов были отданы на хранение в сбербанк 2000 руб., если за 1 год 6 мес. дали 250 руб. дохода?

330. За сколько времени сумма денег 5000 руб, отданная в сбербанк по 3% годовых, принесет 50 руб. дохода?

331. Задача Ньютона из «Всеобщей арифметики» (1707г.) Некий торговец каждый год увеличивает на одну треть свое состояние, уменьшенное на 100 фунтов, которые ежегодно затрачивает на свою семью. Через три года он обнаруживает, что его состояние удвоилось. Спрашивается, сколько у него было денег вначале?

332. Вкладчик на свои сбережения через год получил 15 руб начисления процентных денег. Добавив еще 85 руб, он оставил деньги еще на год. По истечению года вклад вместе с процентами составил 420 руб. Какая сумма была положена первоначально и какой процент дает сбербанк?

333. В начале года на сберкнижку положено 1600 руб. и в конце года взято 848 рублей. В конце второго года на книжке оказалось 824 руб. Сколько процентов начисляет сбербанк в год?

334. В конце года вкладчику на его сбережения сбербанк начислил проценты, что составило 6 руб. Добавив 44

рубля, вкладчик оставил деньги еще на год. По истечению года вновь были начислены проценты, и теперь вклад вместе с процентами составил 257,5 руб. Какая сумма первоначально была положена на книжку?

335. Вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года 5/6 некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть – во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равной 670 денежных единиц, к концу следующего года – 749 денежным единицам. Если бы первоначально 5/6 исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равной 710 денежным единицам. В предположении, что исходное количество денег первоначально целиком положено в первый банк, определить величину вклада по истечении двух лет.

336. В банк кладется 1000 руб. на 10 лет. В каком случае вкладчик получит больше денег: если банк начисляет доход в 5% один раз в год и если он начисляет $\frac{5}{12}\%$ один раз в месяц?

337. Две суммы денег – всего 5000 руб. положены на некоторые сроки в сбербанк из расчета 3% годовых (проценты начисляются от первоначальной суммы в момент выдачи вклада пропорционально времени пребывания вклада в сбербанке). Каждая из этих сумм дала 60 руб. дохода. Первая сумма находилась в сбербанке на 4 месяца меньше, чем вторая. Как велика каждая сумма, и на какой срок она была положена в сбербанк?

Задачи на скидки

338. Найти продажную цену товара с себестоимостью 500 руб., если скидка на себестоимость составляет 20%.
339. Найти продажную цену товара с себестоимостью 600 руб., если скидка на продажную цену составляет 20%.
340. Найти себестоимость товара, если при скидке на себестоимость 25% продажная цена составила 600 руб.
341. Найти себестоимость товара, если при скидке на продажную цену 25% продажная цена составила 600 руб.
342. Разность между процентными скидками на продажную цену и себестоимость равна 1/10 скидки на себестоимость. Найти процентные скидки.
343. Скидка на продажную цену товара больше скидки на себестоимость на 1/8 скидки продажной цены. Найти процентные скидки.

Задачи на многоразовые скидки

344. Найти продажную цену товара с себестоимостью 500 руб., после двухразовой скидки на себестоимость соответственно на 20% и 30%.
345. Найти продажную цену товара с себестоимостью 500 руб., после двухразовой скидки на продажную цену соответственно на 20% и 25%.
346. Найти первоначальную себестоимость товара после трехразовой скидки на себестоимость на 10%, если продажная цена при этом составила 800 руб.
347. Найти первоначальную себестоимость товара после трехразовой скидки на продажную цену на 10%, если продажная цена при этом составила 800 руб.
348. Найти процентную скидку на себестоимость после трехразовой скидки на себестоимость товара с себестои-

мостью 4800 руб., если продажная цена составила 600 руб.

349. Найти процентную скидку на продажную цену после трехразовой скидки на продажную цену товара с себестоимостью 4800 руб., если продажная цена составила 600 руб.

350. Книгу стоимостью 350 руб. уценили дважды на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что после двойного снижения цен книга стоит 283 руб. 50 коп.

Задачи на комбинированные наценки

351. Найти продажную цену товара с себестоимостью 500 руб., если наценка на себестоимость составила 25%, а последующая наценка на продажную цену 20%.

352. Какой процентной наценкой на себестоимость товара можно заменить комбинированную наценку на себестоимость 20% и последующую наценку на продажную цену 25%?

353. Какой процентной наценкой на продажную цену можно заменить комбинированную наценку на себестоимость 20% и последующую наценку на продажную цену 25%?

354. Найти продажную цену товара с себестоимостью 600 руб., если наценка на себестоимость 25%, а последующая наценка на продажную цену в два раза меньше процентной наценки на себестоимость

Задачи на комбинированные скидки

355. Найти продажную цену товара с себестоимостью 500 руб., если скидка на себестоимость составила 20%, а последующая скидка на продажную цену 25%.

356. Какой процентной наценкой на себестоимость товара можно заменить комбинированные скидки на себестоимость 20% и на продажную цену 25%?

357. Какой процентной скидкой на продажную цену можно заменить комбинированные скидки на себестоимость 20% и на продажную цену 25%?

358. Найти продажную цену товара с себестоимостью 600 руб., если скидка на себестоимость 25%, а последующая процентная скидка на продажную цену в два раза меньше процентной скидки на себестоимость.

359. Цену товара снизили на 20%, затем новую цену снизили на 25%. На сколько процентов снизили первоначальную цену?

360. Цену товара сначала снизили на 15%, затем новую цену снизили еще на 16%, и, наконец, после пересчета произвели снижение на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену?

361. Цену товара сначала снизили на 20%, затем новую цену снизили еще на 15%, и наконец, после пересчета произвели снижение на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену?

362. Штаты сотрудников в учреждении составили 400 человек. В первое сокращение это число убавилось на 10%, а в следующее - еще на 10%. Подсчитать, на сколько больше или меньше убавилось бы в учреждении число служащих, если бы сокращение было произведено сразу на 20%.

Задачи на колебание цен

363. Найти продажную цену товара с себестоимостью 500 руб., если процентная наценка на себестоимость 25%, а последующая процентная скидка на себестоимость 20%.

364. Найти продажную цену товара с себестоимостью 600 руб., если процентная наценка на себестоимость 25%, а последующая процентная скидка на продажную цену 20%.
365. Найти продажную цену товара с себестоимостью 600 руб., если процентная наценка на продажную цену 25%, а последующая процентная скидка на себестоимость 20%.
366. Найти продажную цену товара с себестоимостью 600 руб., если процентная наценка на продажную цену 25%, а последующая процентная скидка с продажной цены 20%.
367. К весне цены на картофель с 4 руб. 80 коп за мешок поднялись на 50%. Цены на молоко с 25 коп за литр снизились на 20%. Мясо зимой было 80 коп за килограмм, потом поднялось в цене на 25%, а еще позже упало на 25% с последней цены. найти самые поздние цены на картофель, молоко и мясо.
368. Книжный магазин получил партию книг со скидкой в 25% с номинальной стоимости. С какой скидкой с номинальной стоимости он должен продавать эти книги, чтобы получить 25% прибыли?
369. Книжный магазин получает книгу со скидкой 25% с номинальной (обозначенной на обложке) цены, а продает ее по номиналу. Определить процент прибыли магазина.
370. Книжный букинистический магазин покупает книги со скидкой $33\frac{1}{3}\%$ с цены, обозначенной на обложке, а продает со скидкой 15% с той же цены. Сколько процентов прибыли получает магазин?
371. Букинистический магазин продал книгу со скидкой 10% по сравнению с первоначально назначенной ценой и получил при этом 8% прибыли. Сколько процентов прибыли первоначально предполагал получить магазин?

§10. Пропорции

Пусть величина A есть произведение величины B на число k. Тогда говорят, что отношение величины A к величине B равно k.

Различают два случая:

1) Величины A и B соизмеримы. Это значит, что отношение величин есть число рациональное.
2) Величины A и B несоизмеримы. Это значит, что отношение величин не является рациональным числом.

Частное от деления чисел a и b, т.е. число a/b также называется отношением числа a к числу b.

Пример. $\dfrac{15\text{ руб}}{5\text{ руб}} = 3$.

Здесь число 3 является отношением величин 15 руб. и 5 руб.

Определение. Четыре числа a, b, c, d образуют пропорцию, если отношение числа a к числу b равно отношению числа c к числу d:

$a/b=c/d$ или $a:b=c:d$.

Пример. Числа 2, 5, 6, 15 образуют пропорцию, так как

$$2:5=6:15.$$

В пропорции $a:b=c:d$ числа a и d называются крайними, а числа b и c – средними членами пропорции.

Рассмотрим основные свойства пропорции.

1. Во всякой пропорции произведение крайних членов равно произведению средних членов:
   $ad=bc$
2. Во всякой пропорции крайний член равен произведению средних членов, деленному на другой крайний член:

$a=(bc):d$ или $d=(bc):a$

3. Во всякой пропорции средний член равен произведению крайних членов, деленному на другой средний член. $b=(ad):c$ или $c=(ad):b$.
4. Пропорция $a:b=c:d$ равносильна следующим пропорциям:

$a:b=c:d$.	$b:a=d:c$
$a:c=b:d$.	$b:d=a:c$
$d:b=c:a$	$c:a=d:b$
$d:c=b:a$	$c:d=a:b$

5. Пропорция не изменится, если один из ее крайних членов и один из средних членов умножить или разделить на одно и то же число. Пусть $a:b=c:d$. Умножим a и c на $k \neq 0$, тогда получаем $ak:b=ck:d$

Отсюда, по свойству 1 (после сокращения), получаем $ad=bc$, что равносильно исходной пропорции $a:b=c:d$.

Аналогично, если a и c разделить на $k \neq 0$.

Пример. Пусть дана пропорция 3/4:2/7=7/12:2/9. Умножим первый и второй члены на 28, а третий и четвертый на 36, тогда получаем 21:8=21:8.

Таким образом, если пропорция задана рациональными числами, то всегда можно эту пропорцию записать целыми числами. Это свойство создает удобства при вычислениях.

6. Всякой пропорции $a:b=c:d$ равносильны пропорции:

$(a+b):b=(c+d):d$,	$(a-b):b=(c-d):d$,
$(a-b):a=(c-d):c$,	$(a-b):a=(c-d):c$,
$(a+b):(c+d)=b:d$,	$(a+b):(c+d)=a:c$,
$(a-b)(c-d)=b:d$,	$(a-b)(c-d)=a:c$,
$(a+c):a=(b+d):b$,	$(a-c):a=(b-d):b$,
$(a+c):c=(b+d):d$	$(a-c):c=(b+d):d$

7. Пусть $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}=k$, тогда $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=k$.

8. Показать, что из равенства
$$(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a-b+c-d)(a+b-c-d)$$
следует равенство
$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}.$$

372. В пропорции крайний член умножили на 8, а средний член умножили на 2. Что надо сделать, чтобы пропорция не нарушилась?

373. В пропорции один средний член умножили на 10, а другой средний член разделили на 2. Что надо сделать, чтобы пропорция не нарушилась?

374. Средний член пропорции разделили на 4, а крайний член умножили на 3. Что нужно сделать, чтобы пропорция не нарушилась?

375. Сохранится ли пропорция, если:

а) оба крайних или средних члена увеличить (уменьшить) в 2,5 раза?

б) один крайний и один средний член увеличить или уменьшить в 1,5 раза?

376. Можно ли составить пропорцию из следующих чисел:

а) 1, 2, 4, 8 б) 3, 4, 9, 12

в) 5, 9, 45, 81 г) 3, 50, 5, 90.

377. Останется ли верной пропорция:

1) 84:28=150:50, если оба члена первого отношения разделить на 4, а оба члена второго отношения разделить на 25?

2) 3:4=36:48, если оба члена первого отношения умножить на 15, а оба члена второго отношения умножить на 8.

378. Останется ли верной пропорция 48:16=60:20, если оба предыдущих члена отношений увеличить или уменьшить в 4 раза? если оба последующих члена отношений увели-

чить или уменьшить в 2 раза? Изменится ли от этого отношение?

§11. Величины прямо пропорциональные

Величины A и B называются прямо пропорциональными, если увеличение (уменьшение) значения одной из величин в несколько раз соответствует увеличению (уменьшению) значения другой величины во столько же раз.

I. Пусть x и y значения величин A и B соответственно. Тогда справедливо равенство: $y = k \cdot x$, где k – некоторое число.

II. Для двух пар (x_1, y_1) и (x_2, y_2) прямо пропорциональных величин справедливо равенство:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.$$

Это равенство позволяет находить значение одной из величин A и B по трем остальным значениям величин A и B.

Пример. За 7/12 кг конфет заплатили 16,8 руб. Сколько нужно заплатить за 2,5 кг конфет?

Решение. Составим таблицу:

Величины	масса конфет	стоимость
значение	7/12	16,8
значение	2,5	x
зависимость	прямая	–

Таким образом, $x = \dfrac{16{,}8 \cdot 2{,}5}{7/12}$ =48 (руб.)

379. Чтобы получить 4,2 кг сливочного масла, нужно иметь 9,45 ведра молока. Сколько нужно взять молока, чтобы получить 10 кг сливочного масла?

380. В 10 кг морской воды содержится 0,15 кг соли. Сколько центнеров морской воды нужно взять, чтобы получить 3 т соли?

381. Маятник стенных часов дает 728 качаний за 14 мин. Сколько качаний сделает он за 1 мин 15 сек?

382. На сколько градусов, минут и секунд повернется минутная и часовая стрелки за 40 мин, за 22,5 мин, за 7,5 мин?

383. За сколько времени каждая из часовых стрелок пройдет дугу в $96°$, в $122°$?

384. Чертеж сделан в масштабе 1/40; расстояние между двумя его точками равно 4,8 см. Какое будет расстояние между соответственными точками на другом чертеже, сделанном в масштабе 1/75?

385. Из 20 кг сырого кофе получается 16,8 кг жареного. Сколько нужно взять сырого кофе, чтобы получить 28 кг жареного?

386. Доставлено 4 вагона овощей по 16,5 т в каждом вагоне. Сколько нужно подать трехтонных грузовиков, чтобы вывести овощи?

387. 10 пудов составляют 163,8 кг. Сколько кг составит 175 пудов?

§12. Величины обратно пропорциональные

Величины A и B называются обратно пропорциональными, если увеличению (уменьшению) значения одной из них в несколько раз соответствует уменьшение (увеличение) значения другой во столько же раз.

I. Пусть x и y значения величин A и B соответственно. Тогда справедливо равенство: $xy = k$, где $k \neq 0$ – некоторое число.

II. Для двух пар (x_1, y_1) и (x_2, y_2) обратно пропорциональных величин справедливо равенство:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}.$$

Это равенство позволяет находить значение одной из величин A и B по трем известным значениям A и B.

Пример. Зубчатое колесо с 8 зубцами делает 95 оборотов в минуту. Сколько оборотов в минуту сделает колесо, сцепленное с первым и имеющее 20 зубцов?

Решение. Пусть x – число зубцов второго колеса.

Составим таблицу:

Величины	число зубцов	обороты
значение	8	95
значение	20	x
зависимость от x	обратная	–

Таким образом, $x = \dfrac{95 \cdot 8}{20}$ =38 (оборотов).

388. Зубчатое колесо делает 50 оборотов в минуту. Зубчатое колесо, сцепленное с первым, делает 75 оборотов. Найти число зубцов второго колеса, если число зубцов первого 30.

389. В стаде 420 коров, для которых запасено сена на 240 дней. На сколько дней хватит этого сена, если стадо увеличится на 60 коров?

390. Три машинистки должны напечатать по 100 стр. По сколько страниц напечатает каждая машинистка, если их число увеличить на 2?

391. Для покрытия пола комнаты линолеумом требуется его 24 м шириной 0,8 м. Но в магазине оказался линолеум шире на 0,4 м. Сколько метров широкого линолеума потребуется для покрытия пола?

392. 120 человек могут выполнить некоторую работу за 35 дней. Сколько человек потребовалось бы прибавить к ним, чтобы выполнить эту работу за 21 день?

393. Если проезжать по 90 км в день, то можно окончить путешествие за 12 дней. По сколько км нужно проезжать ежедневно, чтобы окончить путешествие четырьмя днями раньше?

§13. Величины прямо пропорциональные одним величинам и обратно пропорциональные другим

I. Пусть величина *A* – прямо пропорциональна каждой из величин *B, C,..., M*. Покажем, что если величина *A* имеет значение *a*, и значения *B, C,..., M* соответственно равны *b, c,..., m*, то существует правило, позволяющее вычислить значение *A* если даны значения величин *B, C,..., M*. Пусть эти величины соответственно равны $b_1, c_1, ..., m_1$; значение величины *A* обозначим через *x*.

Если значение *B* уменьшить в *b* раз, значение *C* в *c* раз,...,значение *M* в *m* раз, то значение *A* уменьшится в *b c... m* раз и будет равно *a*/*bc...m*. таким образом, при значениях *B, C,..., M*, равных единице, значение *A* равно *a*/*bc...m*. Следовательно при увеличении значений *B, C,..., M* соответственно в

$b_1, c_1, ..., m_1$ раз значение *A* увеличится в $b_1, c_1, ..., m_1$ раз и будет равно $a\, b_1, c_1, ..., m_1 / b\, c ...\, m$.

Итак, при значениях *B, C,..., M* соответственно *b, c,..., m* значение *A* будет равно *x*:

$$x = \frac{ab_1c_1...m_1}{bc...m}.$$

Пример. На 7 станках за 5 часов изготовляют 630 деталей. Сколько деталей изготовят на 10 станках за 8 часов?

Решение. Пусть *x* – количество деталей.

Составим таблицу:

Величины	станки	часы	детали
значение	7	5	630
значение	10	8	*x*
зависимость от *x*	прямая	прямая	–

Число деталей *x* пропорционально числу станков и продолжительности их работы:

$$x = \frac{630 \cdot 10 \cdot 8}{7 \cdot 5} = 1440 \text{ (деталей).}$$

II. Пусть величина *A* – прямо пропорциональна каждой из величин *B, C,..., M* и обратно пропорциональна каждой из величин *P, Q,...,T*. Пусть значение *A* равно *a*, когда значения величин *B, C,..., M* и *P, Q,...,T* равны *b, c,..., m* и *p, q,...,t* соответственно. Требуется найти значение *x* величины *A*, если значения величин *B, C,..., M* равны $b_1, c_1, ..., m_1$ и значения величин *P, Q,...,T* равны $p_1, q_1, ..., t_1$ соответственно.

Проводя аналогичные рассуждения, получаем правило, позволяющее вычислить значение *x*, когда известны значения величин *B, C,..., M* и *P, Q,...,T*:

$$x = \frac{apq...t\ b_1c_1...m_1}{bc...m\ p_1q_1...t_1}$$

При решении этой задачи удобно воспользоваться следующей таблицей:

Величины	A	B	C	...	M	P	Q	...	T
значение	a	b	c	...	m	p	q	...	t
значение	x	b_1	c_1	...	m_1	p_1	q_1	...	t_1
зависимость от x	–	прямая	прямая	...	прямая	обратная	обратная	...	обратная

Пример. Чтобы окончить за 9 дней, работая по 8 часов в день, 1/3 некоторой работы, потребуется 15 рабочих. Сколько нужно рабочих, чтобы остальную часть работы окончить за 6 дней, работая по 10 часов ежедневно?

Решение. Обозначим через x – число рабочих. Составим таблицу:

Величины	дни	часы	работа	Рабочие
значение	9	8	1/3	15
значение	6	10	2/3	x
зависимость от x	обратная	обратная	прямая	–

$x = \dfrac{15 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 2/3}{6 \cdot 10 \cdot 1/3}$ =36 (рабочих).

394. Автопогрузчик может за 1 час выполнить 8 - часовую работу 3 грузчиков. Для выгрузки прибывшего груза

предполагали послать 12 рабочих на 4 часа. За какое время эту работу выполнят два автопогрузчика?

395. За 15 дней 12 машин вытянули 14400 м проволоки. Сколько метров проволоки вытянут 16 таких машин за 25 дней?

396. За 20 дней 15 рабочих сделали половину работы, и затем трое из них оставили мастерскую. За сколько дней оставшиеся рабочие сделают вторую половину работы?

397. Пять машин, выдувающих бутылки, могут сделать 1900 бутылок за 4 часа. Сколько бутылок сделает 1 машина за 1 час?

398. 20 рабочих должны были выполнить некоторую работу за 6 дней. Спустя 2 дня 4 рабочих были переведены на другую работу. За сколько времени оставшиеся рабочие закончат работу?

399. За 4 пачки чая по 100 г в каждой заплатили 32 руб. Сколько следует заплатить за 17 пачек того же чая по 50 г в каждой?

400. Для изготовления 192 деталей требуется работа 4 рабочих по 8 часов в день. Сколько таких деталей могут сделать 6 рабочих, работая по 9 часов в день?

401. Машинистка в течение 10 дней, работая по 6 часов в день, напечатала 300 листов. Сколько листов напечатает она за 3 дня, работая по 8 часов в день (при одинаковой производительности труда)?

402. На прокорм 10 лошадей в течение 24 дней требуется 3360 кг сена. На сколько дней хватит 6720 кг сена для прокорма 16 лошадей?

403. 30 грузчиков за 10 дней, работая по 8 часов в день, выгрузили 96000 ц груза. По сколько часов должны работать 24 грузчика, чтобы за 6 дней выгрузить 40320 ц груза?

404. Мельница на 4 поставах, работая ежедневно по 16 часов, смолола 2400 гл зерна за 6 дней. За сколько дней мельница о 3 поставах может смолоть 7200 гл зерна, работая ежедневно по 12 часов?

405. 12 машинисток, работая по 8 часов ежедневно за 6 дней перепечатали 11 томов по 506 страниц в каждом, по 36 строк на странице и по 40 букв в строке. За сколько дней 10 машинисток, работая ежедневно по 6 часов, перепечатают 14 томов, по 700 страниц в каждом, по 40 строк на странице и по 33 буквы в строке?

406. Для отопления 12 печей в течение 5,5 месяцев израсходовали 12,8 т угля. Сколько печей можно отопить 19,2 т угля в течение 6,6 месяцев при том же расходе угля на 1 печь?

407. Шесть насосов, работая в течение 4 часов выкачали 120000 л воды. Сколько литров воды выкачают 5 таких насосов в течение 7 часов?

408. Девять рабочих за 14 дней выполнили 7/12 работы. Сколько надо нанять еще рабочих, чтобы вся работа была выполнена за 20 дней?

409. Для некоторой работы было нанято 24 рабочих, которые могли окончить ее за 9 дней работая по 8 часов в день. На четвертый день к ним присоединилось еще несколько рабочих, и все рабочие, работая по 6 часов ежедневно, окончили остальную работу за 6 дней. Сколько присоединилось рабочих?

410. Чтобы окончить за 9 дней, работая по 8 часов в день, $\frac{1}{3}$ некоторой работы, потребуется 15 рабочих. Сколько нужно нанять еще рабочих, чтобы вместе с первыми они могли окончить остальную работу за 6 дней, работая по 10 часов ежедневно?

411. 18 рабочих, работая по 8 часов в день, могут окончить 2/5 некоторой работы за 8 дней. Сколько надо нанять еще рабочих, чтобы они вместе с первыми могли бы окончить остальную работу за 6 дней, работая по 9 часов ежедневно?
412. Для некоторой работы было нанято 30 рабочих, которые могли за 15 дней окончить ее, работая по 7 часов в день. На шестой день к ним еще присоединилось 30 рабочих, и все рабочие окончили остальную часть работы за 7 дней. По сколько часов в день они работали?
413. Фонтан дает 10 л воды в секунду и наполняет 3/4 резервуара за 42 мин. Второй фонтан за 1 час 20 мин наполняет весь резервуар. Сколько воды он дает в секунду?
414. Производительность трех лесопосадочных машин равна производительности 40 человек, выполняющих посадку ручным способом. Предполагается закончить посадку леса силами 30 человек в течение 8 дней. За какое время закончат эту посадку две лесопосадочные машины?
415. Заготовили запас сена для a лошадей на b дней при норме выдачи в день c кг; $1/d$ часть сена и несколько лошадей перебросили на другой участок. Оставшегося запаса сена хватило на e дней, причем каждой лошади стали выдавать f кг сена в день. Сколько лошадей было переведено на другой участок:?
416. Для выполнения некоторой работы было нанято a рабочих, которые могли окончить ее в b дней, работая по c часов в день. Через (d-1) дней к ним присоединились еще несколько рабочих, которые вместе с первыми окончили остальную работу за e дней, работая по f часов в день. Сколько всего рабочих закончило работу?
417. a грузовиков одной и b грузовиков другой грузоподъемности, работая ежедневно по c часов, могут окончить

некоторую работу за d дней. За сколько дней l первых грузовиков и f вторых, работая ежедневно по k часов, могут окончить ту же работу, если грузоподъемность m вторых грузовиков равна грузоподъемности n первых?

§14. Простое пропорциональное деление

I. *Прямое пропорциональное деление*

а) Прямая задача. Дана величина A, значение которой равно a. Разделить это значение в отношении m:n.

Алгоритм решения таков:

Решение. 1) Находим сумму всех частей: $m+n$.

2) Находим значение величины, которая приходится на одну часть:

$a:(m+n)$.

3) Находим значение величины, которая приходится на m частей:

$(a:(m+n))\cdot m$.

4) Находим значение величины, которая приходится на n частей:

$(a:(m+n))\cdot n$.

Проверка: $(a:(m+n))\cdot m+(a:(m+n))\cdot n=a$.

Пример. Двое рабочих заработали 48 рублей. Один из них работал 5 часов, другой - 3 часа. Сколько рублей получил каждый рабочий?

Решение. 1) 5+3=8

2) 48:8=6

3) $6\cdot 5=30$

4) $6\cdot 3=18$

Ответ: 30 руб., 18 руб.

б) Обратная задача. Известно, что значение величины разделено в отношении m:n. Известно также одна из час-

тей или соотношение между частями. Найти значение всей величины *A*.

Алгоритм решения обратной задачи совпадает с обратным алгоритмом прямой задачи.

Пример. Двое рабочих проработали соответственно 5 часов и 3 часа. Первый рабочий получил на 12 руб. больше, чем второй рабочий. Сколько рублей они получили за всю работу?

Решение. 1) 5+3=8

2) (5/8–3/8)=2/8

3) 12:2/8=48

Ответ: 48 руб.

II. *Согласование отношений в простом пропорциональном делении*

Пусть дана некоторая величина A, значение которой равно a. Известно, что величина A разделена на три части, такие, что первая часть относится ко второй части, как m:n, а вторая часть относится к третьей, как p:q. Найти полученные части.

Отношение m:n и p:q называют согласованными, если n=p. Используя свойства отношений, всегда можно согласовать два отношения m:n и p:q, связывающие три части некоторой величины A. Для этого нужно найти НОК(n,p) и записать исходные отношения в согласованном виде:

$m:n=M:\text{НОК}(n,p)$, $p:q=\text{НОК}(n,p):Q$,

где $M=\text{НОК}(n,p)\dfrac{m}{n}$, $Q=\text{НОК}(n,p)\dfrac{q}{p}$.

Для решения исходной задачи после согласования отношений нужно воспользоваться алгоритмом решения прямой задачи.

Пример. В трех городах 168000 жителей. Числа жителей первого и второго городов находятся в отношении 4:3, а второго и третьего в отношении 5:7. Сколько жителей в каждом городе.

Решение. 1) НОК (3,5)=15

2) $15\cdot\frac{4}{3}=20$

3) $15\cdot\frac{7}{5}=21$

4) 3:5=20:15

5) 5:7=15:21

6) 20+15+21=56

7) 168000:56=3000

8) $3000\cdot 20=60000$

9) $3000\cdot 15=45000$

10) $3000\cdot 21=63000$

Ответ: 60000 чел., 45000 чел., 63000 чел.

418. Разделить 460 на 4 части так, чтобы
I:II=2:3, II:III=4:9, III:IV=3:5.

419. Разделить 38 на три части так, чтобы
I:II=0,8:0,375, II:III=0,25:1,75.

420. Для приготовления фарфора идет глина, гипс и песок. Вес гипса относится к весу глины, как 0,1:2,5, вес песка относится к весу гипса, как 0,5:0,25. Сколько этих материалов надо взять для приготовления 87,5 кг фарфора?

421. Разделить окружность колеса на три части так, чтобы первая относилась ко второй, как 0,625:0,5, а вторая к третьей, как 0,4:0,6. сколько градусов содержит каждая часть?

422. Корове дают в среднем за сутки 61,5 кг кормов, из которых 16 частей составляют грубые корма, 15 частей -

концентраты и 92 части - сочные корма. Сколько кг каждого вида кормов дают корове?

423. В курином яйце среднее отношение между весом скорлупы, желтка и белка пропорционально числам 1, 3 и 5. Найти вес скорлупы 1000 яиц, если вес одного яйца в среднем 58,5 г.

424. Трое рабочих взялись совместно выполнить некоторую работу за 1380 руб. Первый рабочий работал 5 дней, второй 8 дней, третий 10 дней. Сколько денег заработал каждый рабочий, если дневная плата у всех одинакова?

III. *Обратное пропорциональное деление*

а) Прямая задача. Пусть дана величина *A*, значение которой равно *a*. Разделить это значение обратно пропорционально числам *m*:*n*. Найти полученные части.

Решение. 1) Находим сумму обратных чисел: $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$

2) Находим значение величины, которое приходится на одну часть: $a:\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$.

3) Находим значение величины, которое приходится на 1/*m* частей: $\left(a:\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\right)\cdot\frac{1}{m}$

4) Находим значение величины, которое приходится на 1/*n* частей: $\left(a:\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\right)\cdot\frac{1}{n}$

Проверка: $\left(a:\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\right)\cdot\frac{1}{m}+\left(a:\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\right)\cdot\frac{1}{n}=a.$

Пример. Двое рабочих затратили на выполнение одной и той же работы соответственно 6 часов и 8 часов. Сколько должен получить каждый рабочий, если вся работа стоит 49 рублей?

Решение. m:n. Найти 1) $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{7}{24}$

2) $48:\frac{7}{24}=168$

3) $168\cdot\frac{1}{6}=28$

4) $168\cdot\frac{1}{8}=21$

Ответ: 28 руб., 21 руб.

б) Обратная задача. Известно, что значение некоторой величины разделено обратно пропорционально числам *m*:*n*. Найти все значение величины.

Решение данной задачи аналогично решению обратной задачи в случае прямого пропорционального деления.

Пример. Некоторая сумма разделена обратно пропорционально числам 2, 3 и 6. Первая часть на 16 руб. больше третьей части. Найти всю сумму и полученные части.

Решение. 1) 1/2-1/6=1/3

2) $16:\frac{1}{3}=48$

3) $48\cdot 1/2=24$

4) $48\cdot 1/3=16$

5) $48\cdot 1/6=8$

Ответ: 48 руб., 24 руб., 16 руб., 8 руб.

425. На обработку детали один рабочий затрачивает 4 мин, другой – 5 мин, а третий – 6 мин. Сколько деталей обработал каждый из этих рабочих, если, работая одновременно, они обработали вместе 370 деталей?

426. Рукопись в 300 листов печатали 3 машинистки. Сколько листов напечатала каждая машинистка, если печатали они одинаковое время, но с разной скоростью: один и тот же материал первая машинистка печатает за 3 часа, вторая - за 6 часов, третья - за 2 часа?

427. В гараже имеются автомобили грузоподъемностью 1,5 т, 2 т и 3 т. Для перевозки груза было отправлено 81 машина с таким расчетом, чтобы все полуторные машины перевезли столько же груза, сколько все двухтонные и сколько все трехтонные. Сколько было отправлено машин каждой грузоподъемности?

428. Если деньги, отпущенные на покупку инструментов для трех оркестров, разделить между ними прямо пропорционально числам 5, 6 и 7, то второй оркестр получит 642 руб. сколько денег получит каждый оркестр, если отпущенные деньги будут разделены на части, обратно пропорциональные данным числам?

429. Куплено 52 кг муки трех сортов: по 0,4 руб., по 0,3 руб. и по 0,2 руб. за кг, каждого сорта на одинаковую сумму. Сколько кг муки каждого сорта куплено?

430. Когда некоторое количество материи распределили между тремя магазинами обратно пропорционально числам 4/7, 3/8 и 2/5, то третий магазин получил 11310 м. Сколько материи получил бы каждый магазин, если бы ее распределили на части прямо пропорционально данным числам?

431. Переднее колесо экипажа имеет 2 м в окружности, а заднее колесо 3,2 м. Какое расстояние проехал экипаж, если известно, что переднее колесо сделало на 3600 оборотов больше, чем заднее?

§15. Сложное пропорциональное деление

I. Прямая задача. Дана некоторая величина A, значение которой равно a. Это значение разделено в отношении $m{:}n$. В свою очередь одна из частей, например, часть, которая соответствует значению n, разделена в отношении $p{:}q$. Найти полученные части.

Решение прямой задачи можно записать в виде следующего алгоритма.

1. Применить алгоритм простого пропорционального деления к той части величины A, которая разделена в отношении $p{:}q$.
2. Применить простое пропорциональное деление ко всей величине A.

Таким образом, сложное пропорциональное деление представляет собой совокупность конечного числа простых пропорциональных делений.

Пример. Сумма 30 рублей разделена на две части в отношении 2:3. В свою очередь большая из полученных частей разделена в отношении 4:5. Найти полученные части.

Решение. Первый способ.

1) 2+3=5
2) 30:5=6
3) $6\cdot 3=18$
4) $6\cdot 2=12$ (руб.)
5) 4+5=9
6) 18:9=2
7) $2\cdot 4=8$ (руб.)
8) $2\cdot 5=10$ (руб.)

Ответ: 12 руб., 8 руб., 10 руб.

Второй способ.

1) 2+3=5
2) 4+5=9

3) $3/5 \cdot 4/9$=4/15
4) $3/5 \cdot 5/9$=1/3
5) $20 \cdot 2/5$=12 (руб.)
6) $30 \cdot 4/15$=8 (руб.)
7) $30 \cdot 1/3$=10 (руб.)

Ответ: 12 руб., 8 руб., 10 руб.

II. **Обратная задача. Известно, что некоторая величина *A* разделена в отношении *m*:*n*. В свою очередь одна из этих частей, например, вторая часть, разделена в отношении *p*:*q*. Известна также одна из частей или соотношение между какими-то частями. Найти значение величины *A*.**

Пример. Некоторая сумма разделена в отношении 2:3. В свою очередь, большая часть разделена в отношении 4:5, причем большая из полученных частей всей суммы равна 12 руб. Найти всю сумму.

Решение.

1) 2+3=5
2) 4+5=9
3) $3/5 \cdot 4/9$=4/15
4) $3/5 \cdot 5/9$=1/3
5) $2/5 > 1/3 >$4/15
6) 12:2/5=30 (руб.)

Ответ: 30 руб.

432. На фабрике выдают в полмесяца 23500 руб. зарплаты. Рабочие фабрики делятся на три категории: рабочие первой категории получают в полмесяца по 30 руб., второй - по 35 руб. и третьей - по 40 руб. На одного рабочего первой категории приходится 3 рабочего второй и 4 рабочих третьей категории. Каково число рабочих каждой категории?

433. За сезон было произведено 4 сбора огурцов. Первый сбор дал 16% всего урожая, а количество тонн огурцов, собранных отдельно во 2-й, 3-й и 4-й сборы, изменялось пропорционально числам: $4\frac{1}{6};1\frac{7}{8}$ и $1\frac{1}{4}$. Сколько всего тонн огурцов было собрано, если 2-й сбор превысил 1-й на 9,6 т?

434. Для лесозащитных станций выделены тракторы, автомашины и лесопосадочные машины. Найти общее число выделенных машин, если известно, что число автомашин на 4635 меньше числа тракторов, число тракторов относится к числу посадочных машин, как 20,6:10,8, а число автомашин составляет 10% числа тракторов.

435. Засеяли пшеницей 40% всей площади участка, а остальную часть площади участка распределили для посева овса и проса в отношении 0,6:0,4. Найти площадь всего участка, если известно, что пшеницей было засеяно на 24,8 га больше, чем овсом.

436. На участке посадили яблони, груши и сливы, причем число яблонь относилось к числу груш, как 0,3:0,15, а число слив составляло 25% числа яблонь. Сколько всего деревьев посажено на участке, если известно, что яблонь было посажено на 90 больше, чем слив?

437. Три бригады рабочих получили за работу некоторую сумму денег. Количество дней, в течение которых работала каждая бригада, находились в отношении 0,5:0,75:1, а суммы, уплаченные каждой бригаде, находились в отношении 3:2,5:2. Сколько рабочих было в каждой бригаде, если во всех бригадах было 68 человек?

438. Трое рабочих получили за работу вместе 9200 руб. Количество рабочих дней каждого рабочего было пропорционально числам: 4,5:3,6:3,(6), а ежедневная выработка

продукции была обратно пропорциональна числам: 3,75: $4\frac{2}{13}$:3,(6). Сколько денег получил каждый рабочий?

439. Четверо рабочих должны разделить между собой 8200 руб. пропорционально количеству произведенной каждым работы 1-й работал 6 дней, 2-й - 4 дня, 3-й - 8 дней и 4-й - 10 дней; кроме того, известно, что количество времени, в которое каждый в отдельности мог бы окончить работу соотносятся между собой, как 0,(6):1:0,5:0,8(3). Сколько денег должен получить каждый рабочий?

§16. Задачи на смешение жидкостей

I. Пусть $m_1, m_2, ..., m_k$ – количество жидкостей,

$t_1, t_2, ..., t_k$ – соответствующие концентрации (или температура).

Тогда концентрация (или температура) смеси t вычисляется по формуле:

$$m_1t_1 + m_2t_2 + \cdots + m_kt_k = t \cdot (m_1 + m_2 + \cdots + m_k).$$

Пример. Смешали 100 г воды при температуре 20° и 150 г воды при температуре 30°. Какова температура полученной воды?

Решение. $t = \dfrac{100 \cdot 20 + 150 \cdot 30}{100 + 150} = 26°$.

Пример. Взято 1 л спирта крепостью 96°. Сколько воды нужно долить, чтобы получить 40-градусный раствор спирта?

Решение. Пусть x - количество воды. Тогда

$$1 \cdot 96 + x \cdot 0 = 40(1 + x)$$

$$x = 1{,}4$$

Ответ: Нужно долить 1,4 л воды.

II. Пусть требуется смешать растворы a – процентной и b – процентной кислоты. В каких пропорциях нужно взять эти растворы, чтобы получить c – процентный раствор? ($a \le c \le b$).

Решение. Пусть m_1, m_2 – массы растворов.

Тогда $m_1a + m_2b = c(m_1 + m_2)$, то есть $\dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{c - a}{b - c}$.

На этой формуле основан старинный способ вычисления пропорций исходных растворов. Этот способ представляется в виде следующей схемы, изображенной на рисунке 9:

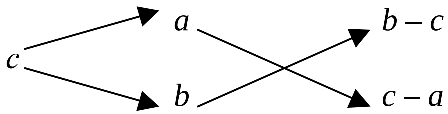

Рис. 9. Схема вычисления исходных растворов.

Пример. В каких пропорциях нужно смешать раствор 50-процентной и раствор 70-процентной кислоты, чтобы получить раствор 65-процентной кислоты?

Решение. Для решения задачи нарисуем схему (см. рис.10),

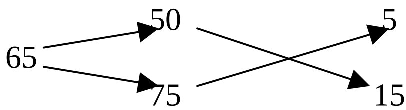

Рис. 10.

в которой слева запишем требуемую концентрацию кислоты в процентах, то есть 65, затем друг под другом запишем концентрацию имеющихся растворов, т.е. 50 и 70, наконец, подсчитаем и запишем крест-накрест соответствующие разности 65 – 50=15 и 70 – 65=5. Таким образом, для получения 65-процентной кислоты нужно взять растворы 50-процентной и 70-процентной кислот в отношении 5:15, т.е. 1:3.

440. Сколько надо добавить кипящей воды (100°) к 8 л воды при температуре 10°, чтобы получилась вода при температуре 28°?

441. К 5 литрам воды при температуре 90° добавили еще 10 л воды, после чего ее температура понизилась до 40°. Какова была температура добавленной воды?
442. Для поливки цветов приготовлено 14 л воды при температуре 21°, причем 8 л ее было взято при температуре 12°. При какой температуре взята более теплая вода?
443. Смешали 7 л воды при температуре 45° и 8 л воды при температуре 60°. Определить температуру смеси.
444. В кастрюлю влили 600 г кипятку (100°) и добавили 200 г комнатной воды (16°). Определить температуру смеси.
445. В ванну налили 48 л воды при температуре в 70°. Сколько надо добавить холодной воды при температуре в 12°, чтобы установилась температура в 28°?
446. В ванне имеется 18 л холодной воды при температуре 10°. Сколько надо добавить воды при температуре в 60°, чтобы температура в ванне повысилась на 20°?
447. Смешали 3,25 л кипящей воды с 6,5 л воды при температуре в 26°. Какова температура смеси?
448. Смешано 200 г при температуре 18° со 150 г воды при температуре 36° и со 150 г при температуре 40°. Определить температуру смеси.
449. Для того, чтобы получить смесь при температуре 28°, воду взяли из трех сосудов. Из первого взяли 3,5 л воды при температуре 50°, из второго - 4,5 л при температуре 10°, а из третьего - 2 л. Какова была температура в третьем сосуде?
450. К 2 л воды при температуре 30° добавили 5 л кипятку, а потом еще добавили 0,5 холодной воды. Температура полученной смеси равна 76°. Какова температура холодной воды?

451. Смешали 3 л жидкости, подогретой до 40°, с 2 л при 50° и 5 л при 60°. Определить температуру смеси.
452. Смешали воду из трех сосудов: из первого взяли 2 л воды температурой 45°, из второго - 3 л в 60°, из третьего - 5 л в 25°. Определить температуру смеси.
453. В сосуд налили сначала 24 л воды температурой 40°, затем налили еще 18 л воды температурой 15°. Сколько нужно еще прибавить воды температурой 37,5°, чтобы получить температуру воды в сосуде, равную 35°?
454. В чан поступает вода таким образом, что на каждые 2 части при температуре 10° вливается 5 таких же частей при температуре в 30° и 8 частей при температуре в 50°. Какая температура воды устанавливается в чане?
455. Количество воды при температуре в 40°, поступающее в бак, в 3 раза больше, чем кипятку, а воды при температуре в 11° поступает столько, сколько при 40° и кипятку вместе. Какая температура воды устанавливается в баке?
456. Вода поступает в бак по двум трубам: через одну поступает вода при температуре в 20°, а через другую поступает в 4 раза большее количество воды при температуре в 50°. Определить температуру воды в баке?
457. Когда в кастрюле закипела вода, в нее влили комнатной воды при температуре в 16° в 2 раза меньше, чем в ней было кипятку. Какой температуры вода оказалась после этого в кастрюле?
458. В кипящую воду влили некоторое количество воды при температуре 16°. Известно, что кипящей воды было в 6 раз меньше, чем холодной. Какова температура смеси, если всего воды было 10,5 л?

459. Смешали воду при 40° с водой при 60° и получили 6 л воды при $51\frac{2}{3}$°. Сколько было взято воды при 40° и сколько при 60°?

460. Взято 0,5 л кислоты крепостью 40% и 9,5 л воды. Определить крепость раствора.

461. Сколько граммов воды надо добавить к 50 г 35-процентной кислоты, чтобы получить 10-процентную кислоту?

462. Смешали 20 л 60-процентного раствора кислоты с 30 л 40-процентного раствора той же кислоты. Определить процентную концентрацию получившегося раствора кислоты.

463. Имеется 400 г 4,5-процентного, 250 г 6-процентного, 600 г 7-процентного раствора соли. Сколько процентов соли получится в растворе от смешения всех растворов?

464. В 800 г 25-процентного раствора прибавлено 200 г воды. Какой процентной концентрации получится раствор?

465. Смешали 30-процентный раствор борной кислоты с 15-процентным и получили 450 г 20-процентного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

466. Смешали 30-процентную серную кислоту с чистой водой и получили 1,5 л 12-процентного раствора. Сколько было взято 30-процентного раствора и сколько воды?

467. К 15 л серной кислоты крепостью 32% добавили 80-процентной серной кислоты и получили 40-процентную серную кислоту. Сколько литров серной кислоты было добавлено?

468. Имеется 900 г 6-процентного раствора соли. Сколько можно израсходовать раствора, чтобы потом, долив его водой до 450 г, получить 4-процентный раствор?

469. Какой концентрации нужно взять азотную кислоту, чтобы, смешав 10 кг ее с 40 кг 30-процентной кислоты, получить смесь концентрации 36%?

470. Имеется 40-процентная серная кислота в количестве 2 л. Сколько нужно прибавить 80-процентной серной кислоты, чтобы получить 60-процентную серную кислоту?

471. Сколько воды надо добавить к 130 г 40-процентного раствора серной кислоты, чтобы получить 5-процентный раствор?

472. Сколько 5-процентного раствора поваренной соли нужно добавить к 600 г 25-процентного раствора, чтобы получить 20-процентный раствор?

473. Если смешать 5 кг серной кислоты одного сорта с 3 кг серной кислоты другого сорта, то концентрация полученного раствора будет 19%. Если же взять первого раствора 3 кг, а второго 5 кг, то концентрация полученного раствора будет 21°. Определить крепость серной кислоты каждого сорта.

474. В каком отношении надо смешать 9-процентный и 15-процентный растворы кислоты, чтобы получить 12-процентный раствор ее?

475. Для технических целей требуется спирт в 70°. На складе имеется 3,5 л спирта крепостью 90°. Сколько воды надо к нему добавить?

476. Смешали 0,5 л воды с 1,5 л 95-градусного спирта. Определить крепость смеси.

477. Сколько воды нужно добавить к 40 л спирта крепостью 60°, чтобы получить спирт крепостью 40°?

478. Имеется 12 л спирта крепостью 80°. Сколько надо добавить воды, чтобы получился спирт крепостью 60°?

479. Имеются два раствора винного спирта в воде. Первый раствор весом 400 г содержит 30% спирта, второй рас-

твор весом 600 г содержит 80% спирта. Из двух растворов составляют один раствор. Сколько в нем будет процентов спирта?

480. Смешали 8 л 70-градусного спирта, 7 л 80-градусного и 5 л более слабого спирта, получили спирт 71-градусный. какой крепости были 5 л спирта?

481. От смешения двух сортов технического спирта крепостью 68° и 48° получено 15 кг смеси крепостью 60°. Сколько кг спирта каждого сорта в отдельности взяли для смеси?

482. Смешали 60-градусный спирт с 95-градусным и получили 14 л смеси, 60-градусного спирта было взято в 2,5 раза больше, чем 95-градусного. Определить крепость смеси.

483. Смешали 340 л спирта крепостью 60°, 52° и 42°. Известно, что спирта крепостью 52° было взято 3/5 количества литров спирта 60-градусного, а спирта крепостью 40° было взято в 3 раза больше, чем 52-градусного. Какой крепости получился спирт?

484. Смешан спирт двух сортов в количестве 70 куб. см в 84° и в 70° и получена смесь крепостью 75°. После этого к смеси добавили еще 5 куб. см спирта первого сорта и 135 куб. см спирта второго сорта. Какой крепости получился спирт?

485. Одна бочка содержит смесь спирта с водой в отношении 2:3, а другая в отношении 3:7. По сколько ведер нужно взять из каждой бочки, чтобы составить 12 ведер смеси, в которой спирт и вода были бы в отношении 3:5?

486. Сосуд в 20 л наполнен спиртом. Из него выливают некоторое количество спирта в другой, равный ему, и, дополнив остальную часть второго сосуда водой, дополняют этой смесью первый сосуд. Затем из первого отлива-

ют $6\frac{2}{3}$ л во второй, после чего в обоих сосудах содержится одинаковое количество спирта. Сколько отлито первоначально спирта из первого сосуда во второй?

487. Сосуд в a л наполнен спиртом. Из него выливают некоторое количество спирта в другой, равный ему, и, дополнив остальную часть второго сосуда водой, дополняют этой смесью первый сосуд. Затем из первого отливают $a/3$ л во второй, после чего в обоих сосудах содержится одинаковое количество спирта. Сколько отлито первоначально спирта из первого сосуда во второй?

488. Если смешать a литров спирта первого сорта и b литров спирта второго сорта, то получится спирт крепостью в k градусов; если же смешать b литров спиртов первого сорта и a литров второго сорта, то получится спирт в t градусов. Определить крепость спирта каждого сорта.

489. Из бака, наполненного спиртом, вылили часть спирта и долили водой; потом из бака вылили столько же литров смеси; тогда в баке осталось 49 л чистого спирта. Вместимость бака 64 л. Сколько спирта вылили в первый раз и сколько во второй? (Задача составлена в предположении, что объем смеси равен сумме объемов спирта и воды. На самом деле он несколько меньше.).

490. Из бака, наполненного спиртом, вылили часть спирта и долили водой; потом из бака вылили столько же литров смеси; тогда в баке осталось b^2 л чистого спирта. Вместимость бака a^2 л . Сколько спирта вылили в первый раз и сколько во второй? Предполагается, что объем смеси равен сумме объемов спирта и воды.

491. Нужно прополоскать колбу, в которой находился жидкий реактив. Для этой цели отведено некоторое количество воды. В каком случае полоскание будет эффектив-

нее: если влить в колбу всю воду сразу или сначала прополоскать колбу половиной имеющейся воды, а затем второй половиной?

492. В кастрюле налито 10 л сиропа. Из нее отливают 1 л сиропа и доливают 1 л воды. Затем отливают 1 л смеси и снова доливают 1 л воды. Может ли сироп в результате нескольких таких переливаний оказаться разбавленным ровно в два раза?

493. В первом стакане налито некоторое количество черного кофе, а во втором - такое же количество молока. Разрешается переливать из одного стакана в другой любое количество жидкости, тщательно размешивая содержимое стаканов. Можно ли с помощью нескольких таких переливаний добиться того, чтобы в первом стакане молока стало больше, чем кофе?

494. В сосуд, содержащий A литров воды, сначала через одну трубу вливают a литров $p\%$ - го (по объему) раствора спирта, а затем после перемешивания, через другую трубу вливают a литров образовавшейся смеси. Сколько раз нужно повторить эту операцию, чтобы в сосуде получился раствор спирта крепостью не менее $q\%$ (по объему)?

495. Имеются три раствора спирта в воде: первый раствор содержит 70% спирта и 30% воды; второй раствор содержит 50% спирта и 50% воды; третий раствор содержит 20% спирта и 80% воды. Сколько кг третьего раствора следует долить к смеси из 5 кг первого раствора и 2 кг второго раствора, чтобы получить раствор, содержащий 40% спирта?

496. Имеются две смеси серной и азотной кислот и воды соответственно по 30%:20%:50% и 0:74%:26%. В каком отношении следует слить эти смеси, чтобы получить

смесь с 20%-ым содержанием серной кислоты? Каким будет процентный состав такой смеси?

497. Из полного бака, содержащего 729 л кислоты, отлили a литров и долили бак водой. После тщательного перемешивания отлили a литров раствора и снова долили бак водой. После того как такая процедура была повторена шесть раз, раствор в баке содержал 64 л кислоты. Определить величину a.

498. Два одинаковых сосуда наполнены спиртом. Из первого сосуда отлили a литров спирта и налили в него столько же литров воды. Затем из полученной смеси воды со спиртом отлили a литров и налили столько же литров воды. Из второго сосуда отлили $2a$ литров спирта и налили в него столько же литров воды. Затем из полученной смеси воды со спиртом отлили $2a$ литров и налили столько же литров воды. Определить, какую часть объема сосуда составляют a литров, если крепость окончательной смеси в первом сосуде в 25/16 раза больше крепости окончательной смеси во втором сосуде.

499. Сорок кг раствора соли разлили в два сосуда так, что во втором сосуде чистой соли оказалось на 2 кг больше, чем в первом сосуде. Если во второй сосуд добавить 1 кг соли, то количество соли в нем будет в два раза больше, чем в первом сосуде. Найти вес раствора, находящегося в первом сосуде.

500. Имеются два сосуда, содержащие 4 кг и 6 кг раствора кислоты разных концентраций. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 35% кислоты. Если же слить равные веса этих растворов, то получится раствор, содержащий 36% кислоты. Сколько кг кислоты содержится в каждом сосуде?

501. Сосуд, содержащий p%-ный раствор кислоты, долили доверху q%-ным раствором кислоты и после перемешивания отлили то же количество. Проделав эту операцию k раз, получили r%-ный раствор. Какую часть объема сосуда занимал первоначальный раствор.

502. В сосуде было 10 литров кислоты. Часть кислоты отлили и сосуд дополнили таким же количеством воды. Затем снова отлили такое же количество смеси и дополнили сосуд таким же количеством воды. Сколько литров отливали каждый раз, если в результате в сосуде оказался 64%-ный раствор кислоты.

§16. Задачи на сплавы

I. Пр́обой называется количество драгоценных металлов, содержащихся в данном сплаве.

Пример. Если золотое украшение имеет клеймо с цифрой 585, то это означает, что украшение изготовлено из сплава, 1000 частей которого /по массе/ состоит из 585 частей золота и 415 частей других металлов.

Приняты и действуют следующие пробы ювелирных украшений:

золото – 375, 500, 583, 585, 750, 958;
серебро – 750, 800, 875, 916, 925, 960;
платина – 950;
палладий – 500, 850.

В Англии и в США принята каратная система проб. Карат – единица массы драгоценных камней, равная 200 мг. По этой системе метрическая проба 1000 соответствует 24 каратам. Для перевода одной пробы в другую применяют формулу $24/1000=x/y$, где x – каратная проба, y – метрическая.

Выражая y из этой формулы, получаем $y/1000=x/24$.

Например, пробе 750 соответствует 18-каратная проба.

II. Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_k$ – количество драгоценного металла,

$p_1, p_2, \ldots, p_k$ – соответствующие пробы.

Тогда проба полученного сплава p вычисляется по формуле:

$$m_1 p_1 + m_2 p_2 + \cdots + m_k p_k = p \cdot (m_1 + m_2 + \cdots + m_k).$$

Пример. Сплавили 1 кг золота 600-й пробы и 2 кг золота 900-й пробы. Какой пробы получился сплав?

Решение. $p = \dfrac{1 \cdot 600 + 2 \cdot 900}{1+2} = 800$.

503. Выразить в каратной пробе стандартные метрические пробы золота: 375, 500, 583, 585, 750, 958.

504. Выразить в метрической пробе каратные пробы золота: 12, 15, 16, 18.

505. Сплавили 400 г 12-каратной пробы золота и 200 г 18-каратной пробы серебра. Определить пробу полученного сплава.

506. Сплавили 100 г 750-й пробы серебра и 150 г 15-каратной пробы золота. Определить пробу полученного сплава в метрической и каратной системах.

507. Сплавили золото трех сортов: 3 кг 700-й пробы, 2 кг 750-й пробы и 1 кг 600-й пробы. Сколько чистого золота будет содержать 1 кг сплава?

508. 8 кг серебра 840-й пробы сплавлены с 4 кг меди. Какой пробы получился сплав?

509. Сплавлено 0,2 кг золота 800-й пробы и 0,3 кг более высокой пробы. Сплав получился 860-й пробы. Определить пробу второго слитка.

510. Сколько серебра 875-й пробы выйдет из 35 кг 750-й пробы?

511. В ювелирной мастерской сплавлено 457 г золота 998-й пробы, 1354 г 750-й пробы, 613 г 850-й пробы и, кроме того, 1000 г меди. Какой пробы получится сплав?

512. Сплавили 2 кг серебра 600-й пробы, 4 кг 750-й пробы и 6 кг 900-й пробы. Определить пробу сплава.

513. Имеется слиток серебра 600-й пробы весом в 3 кг и другой слиток серебра 800-й пробы. Каков вес второго слитка, если сплав, полученный из этих слитков, был 750-й пробы?

514. Сплавили два слитка серебра 810-й и 925-й пробы и получили 575 г серебра 880-й пробы. По сколько граммов взяли каждого серебра?

515. Сколько меди надо прибавить к 810 г золота 900-й пробы, чтобы получить золото 750-й пробы?

516. Сплавили два слитка серебра 655-й и 710-й пробы. Какой пробы получился сплав, если вес сплава оказался 5 кг и известно, что серебра 710-й пробы было в 1,5 раза больше, чем серебра 655-й пробы?

517. Сплавили 3 слитка серебра 800-й, 600-й и 500-й пробы. Сплав получился весом 1 кг. Известно, что серебра 500-й пробы было взято 4/5 количества серебра 600-й пробы, а серебра 800-й пробы на 300 г больше, чем 500-й пробы. Какой пробы получился сплав?

518. Сплавили два слитка серебра 800-й и 500-й пробы с медью и получили сплав весом 3 кг. Известно, что серебра 800-й пробы было взято в 1,4 раза больше, а меди в 10 раз меньше, чем серебра 500-й пробы. какой пробы оказался сплав?

519. Найти пробу сплава, если в нем медь составляет 25% сплава; если медь составляет 25% серебра и если количество меди относится к количеству серебра, как 3:7.

520. Было 3 слитка серебра: 1 кг 600 г 600-й пробы, 2 кг 750-й пробы и 2 кг 400 г 800-й пробы. Взяли по одной четверти от первого и третьего слитка и половину второго слитка. Какой пробы получился сплав?

521. Сплавлены три куска серебра: 875-й, 750-й и 500-й пробы - и получено 1,159 кг 625-й пробы. Вычислить вес каждого куска, зная, что вес второго куска относится к весу третьего, как 5/12:0,91(6).

522. В слитке из золота и серебра количество золота относится к количеству серебра, как 0,(3):2,41(6). Сколько в нем серебра, если золота в слитке на 0,125 кг меньше, чем серебра?

523. В каких пропорциях нужно сплавить золото 375-й с золотом 750-й пробы, чтобы получить золото 500-й пробы?

524. Сплавили слитки золота пробы p_1 и серебра пробы p_2. Получили сплав пробы p. Найти отношение масс исходных слитков.

525. Имеется два сплава золота и серебра; в одном сплаве их количественное отношение, как 2:3, а в другом 3:7. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором бы золото и серебро относились, как 5:11?

526. Имеются два сплава золота и серебра; в одном сплаве их количественное отношение, как m:n, а в другом p:q. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить a кг нового сплава, в котором бы золото и серебро относились, как r:s?

527. Имеются три сплава золота, серебра и платины; в каждом сплаве их количественное отношение равно соответственно $m_1:n_1:k_1$; $m_2:n_2:k_2$ и $m_3:n_3:k_3$. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить a кг нового спла-

ва, в котором бы золото, серебро и платина относились бы как $m_0 : n_0 : k_0$?

528. От двух кусков сплава с различным процентным содержанием меди, весящих m кг и n кг, отрезано по куску равного веса. Каждый из отрезанных кусков сплавлены с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих сплавах стало одинаковым. Сколько весил каждый из отрезанных кусков?

529. Имеются два сплава серебра, меди и цинка, в каждом сплаве их количественное отношение равно соответственно $m_1 : n_1 : k_1$ и $m_2 : n_2 : k_2$. Из a кг первого сплава и b кг второго сплава получен сплав. Определить процентный состав этого сплава.

530. Имеются два вида серебряного припоя. Первый содержит 20% серебра, 50% меди и 30% цинка, а второй - 45% серебра, 30% меди и 25% цинка. Из 15 кг припоя первого вида и 10 кг припоя второго вида получен сплав. Определить процентный состав этого сплава.

531. Имеются два сплава k различных металлов, в каждом сплаве их количественное отношение равно соответственно $m_1 : m_2 : ... : m_k$ и $n_1 : n_2 : ... : n_k$. Из a кг первого сплава и b кг второго сплава получен сплав. Определить процентный состав этого сплава.

532. Имеется два разных сплава меди. В первом сплаве меди на 40% меньше, чем во втором. Оба сплава переплавили и получился новый сплав с содержанием меди 36%. В первом сплаве было меди 6 кг, во втором 12 кг. Определить процентное содержание меди в каждом из двух сплавов.

533. Некоторый сплав содержит металлы A и B в отношении $m:n$, другой – те же металлы в отношении $p:q$. Какое количество первого и второго сплавов нужно взять, что-

бы получить 1 кг третьего сплава с равным содержанием металлов *A* и *B*?

534. Из двух кусков сплавов с различным содержанием свинца массой 6 кг и 12 кг отрезали по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавили с остатком другого сплава, после чего процентное содержание свинца в обоих сплавах стало одинаковым. Каковы массы отрезанных кусков?

535. Один сплав содержит медь и олово в отношении 2:1, а другой – в отношении 3:2. По сколько частей нужно взять каждого из этих сплавов, чтобы получить третий сплав, в котором медь и олово содержатся в отношении 27:17?

536. Имеется два слитка золота с серебром. Процентное содержание золота в первом слитке в 2,5 раза больше, чем процентное содержание золота во втором слитке. Если сплавить оба слитка вместе, то получится слиток, в котором будет 40% золота. Найти во сколько раз первый слиток тяжелее второго, если известно, что при сплавлении равных по весу частей первого и второго слитков получится слиток, в котором содержится 35% золота.

537. Имеются три слитка. Первый слиток весит 5 кг, второй – 3 кг, и каждый из этих слитков содержит 30% меди. Если первый слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 60% меди. Найти вес третьего слитка и процент содержания в нем меди.

§18. Задачи на смешение разносортных товаров

I. Пусть m – некоторое количество товара. Предположим, что это количество товара разбивается на k частей $m_1, m_2, \ldots, m_k$, с целью продать товар соответственно по ценам: $c_1, c_2, ..., c_k$. Тогда средняя цена c вычисляется по формуле:

$$m_1c_1 + m_2c_2 + \cdots + m_kc_k = c \cdot (m_1 + m_2 + \cdots + m_k).$$

Пример. Продано 2 кг помидор по 100 за кг, 3 кг по 200 руб за кг и 4 кг по 250 руб за кг. Какова средняя цена продажи?

Решение. $2 \cdot 100 + 3 \cdot 200 + 4 \cdot 250 = c(2 + 3 + 4)$

c=200 (руб.).

II. В каких пропорциях нужно смешать фрукты ценой c_1 и c_2 соответственно, чтобы получить товар ценой c?

Решение. Пусть $m_1 : m_2$ – искомое отношение. Тогда из уравнения $m_1c_1 + m_2c_2 = c \cdot (m_1 + m_2)$ получаем

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{c - c_2}{c_1 - c}.$$

538. Куплено 25 кг яблок двух сортов, ценой по 4,5 руб, и по 3 руб за 1 кг. Средняя цена оказалась 3,7 руб. Сколько кг яблок каждого сорта было куплено?
539. Из двух сортов сухих яблок ценой по 8,7 руб и 7,75 руб за кг составлена смесь ценой 8,4 руб за кг. Сколько взято яблок каждого сорта, если яблок первого сорта в смесь вошло на 1,4 кг больше, чем второго сорта?
540. Смешали для компота яблоки двух сортов: по 5,4 руб и 3,6 руб за 1 кг и получили 18 кг смеси ценой по 4,4 руб за 1 кг. Сколько яблок каждого сорта взято для смеси?
541. Смешали два сорта сухих яблок за 24 руб и 18 руб за 1 кг, причем первого сорта взяли для смеси 13 кг. Вся смесь стоит 780 руб. Сколько сухих яблок второго сорта вошло в смесь?
542. Из двух сортов печенья ценой 1 руб 74 коп и 1 руб 55 коп за 1 кг составлена смесь ценой 1 руб 68 коп за 1 кг.

Сколько взято печенья каждого сорта, если печенья второго сорта вошло в смесь на 1 кг 400 г меньше, чем печенья первого сорта?

543. Для компота смешан чернослив по цене 2 руб за кг, урюк по цене 1,4 руб за кг и яблоки по цене 1,2 руб за кг. Количество взятого урюка относилось к количеству взятых яблок, как $1:\frac{2}{3}$, чернослива взято на 2,25 кг больше, чем урюка. Смесь обошлась по 1,8 руб за кг. Сколько смеси составлено?

544. Составили 24 кг компота из сухих фруктов: чернослива, яблок и урюка, ценой по 13,5 руб за 1 кг. 1 кг чернослива стоил 16 руб, яблок – 12 руб, урюка – 8 руб. Яблок и урюка вместе было взято столько, сколько взято чернослива. Сколько было взято для компота отдельно чернослива, яблок и урюка?

545. Куплено a кг сухих яблок по d руб за кг, b кг сухих груш по c руб за кг и некоторое количество сухих слив по f руб за кг, причем в среднем 1 кг сухих фруктов стоил n руб ($f > n$). Определить количество купленных сухих слив.

546. Индийский чай дороже грузинского в 5/4 раза. В каких пропорциях нужно смешать индийский чай с грузинским, чтобы получить чай, который дороже грузинского в 6/5 раза?

547. 2,5 л сиропа стоимостью по 5 руб. 70 коп. за литр добавили к 7 л воды. Сколько стоит 1 л полученной воды с сиропом?

548. Смешаны 3,5 куб. м сосновых, 1,5 куб. м березовых и 5 куб. м осиновых дров. Сколько стоит кубометр смеси дров, если кубометр сосновых дров стоит 12 руб., кубометр березовых на 3 руб. дороже кубометра сосновых, а

кубометр осиновых на 5 руб. дешевле кубометра березовых дров?

549. Куплено 18 куб. м березовых, сосновых и осиновых дров. Березовых дров куплено на 4 куб. м меньше, чем сосновых, а сосновых дров куплено 3/5 числа кубометров осиновых дров. Какова средняя цена кубометра дров, если 1 куб. м березовых дров стоил 15 руб., сосновых - 12 руб., а осиновых 10 руб.?

550. Куплено 13 т картофеля. Крупный картофель покупали по 1,5 руб за 1 кг, а средний по 1,2 руб за кг. Крупного картофеля было куплено на 1 т больше, чем среднего. Перевозка составила 1800 руб. Какова в среднем себестоимость 1 кг картофеля?

551. Из 3 кг груш ценой по 8 руб. за кг, 4 кг груш ценой по 9 руб за кг и 8 кг сахара по 13,5 руб за кг сварили варенье. Найти стоимость 1 кг варенья, если вес его составляет 0,8 веса сахара и очищенных груш. При очистке груш потери составляют 0,1 их веса.

552. Цена бриллианта пропорциональна квадрату его веса. Доказать, что если разделить бриллиант на несколько частей, то стоимость его уменьшится, причем понижение стоимости будет наибольшим, когда части будут равны.

553. Алмаз разбился на два куска. Изменилась ли при этом общая стоимость алмазов, и если она, например, уменьшилась, то в каком случае потеря стоимости самая большая? Известно, что стоимость алмаза пропорциональна квадрату его веса.

554. Цена бриллианта пропорциональна квадрату его веса. Бриллиант весом в p карат был разбит на две части, после чего его стоимость уменьшилась в k раз. Найти вес частей, на которые был разбит бриллиант?

§19. Задачи на движение

В задачах на движение присутствуют три величины: расстояние (S), скорость (V), время (t), которые связаны между собой соотношением:

$$S = V \cdot t.$$

1) Если скорость V – постоянна, то S и t прямо пропорциональны.
2) Если время t – постоянно, то S и V прямо пропорциональны.
3) Если расстояние S – постоянно, то V и t обратно пропорциональны.

I. Задача о встречном движении.

а) Расстояние между пунктами равно *S*. Одновременно навстречу друг другу движутся два тела, соответственно со скоростями V_1 и V_2. Найти время встречи.

Решение. Пусть t – время встречи. Тогда имеет место равенство: $V_1 t + V_2 t = S$, откуда следует, что $t = \dfrac{S}{V_1 + V_2}$.

б) Расстояние между пунктами равно *S*. Первое тело может пройти это расстояние за время t_1, а второе – за t_2. Найти время встречи, если тела движутся навстречу друг другу.

Решение. Пусть $V_1 = S/t_1$ – скорость первого тела, $V_2 = S / t_2$ – скорость второго тела, $V = S/t$ – совместная скорость.

Из равенства $V = V_1 + V_2$, получаем $\dfrac{S}{t} = \dfrac{S}{t_1} + \dfrac{S}{t_2}$.

Сокращая на S, получаем $\frac{1}{t} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}$ или $t = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}$.

Полезно сформулировать правило:

Для того, чтобы найти время встречи, нужно произведение времен разделить на их сумму.

Пример. Один пловец переплывает реку за 12 мин, второй – за 8 мин. Через сколько минут они встретятся, если будут плыть навстречу друг другу?

Решение. $t = \frac{12 \cdot 8}{12 + 8} = 4{,}8$ (мин).

Замечание. Справедлива пропорция: $\frac{t_1}{t} = \frac{t_1 + t_2}{t_2}$.

Другими словами, время первого тела во столько раз больше времени встречи, во сколько раз сумма времен первого и второго тела больше времени второго.

в) Задача о движении по реке.

Катер прошел по течению реки S_1 км, а против течения S_2 км, затратив на весь путь *t* часов. Найти собственную скорость катера, если скорость течения реки *a* км/час.

Решение. Пусть x – собственная скорость катера. Тогда имеет место уравнение $\frac{S_1}{x+a} + \frac{S_2}{x-a} = t$.

Решая это уравнение, получаем

$$x = \frac{S_1 + S_2 + \sqrt{(S_1 + S_2)^2 + 4ta(at - S_1 + S_2)}}{2t}$$

Частный случай. Если $S_1 = S_2 = S$, то $x = \frac{S + \sqrt{S^2 + a^2 t^2}}{t}$.

II. Задача об обгоне.

а) Расстояние между телами равно S_0. Первое тело движется со скоростью V_1, а второе – V_2. Через сколько времени первое тело догонит второе, если они движутся в одном направлении ($V_1 > V_2$) (рис. 11)

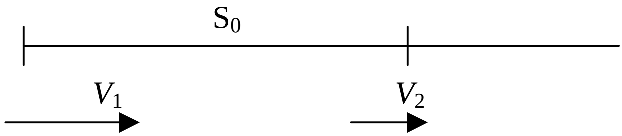

Рис. 11. Задача об обгоне.

Решение. Пусть t – время обгона. Тогда выполняется равенство: $V_1 t - V_2 t = S_0$, то есть $t = \dfrac{S_0}{V_1 - V_2}$.

Пример. Поезд длиной 1200 м идет со скоростью $10\dfrac{м}{с}$. Его обгоняет мотоциклист со скоростью $25\dfrac{м}{с}$. Через какое время мотоциклист обгонит поезд?

Решение. $t = \dfrac{S_0}{V_1 - V_2} = \dfrac{1200}{25-10} = 80$ (с.).

III. Задача о задержке.

а) Поезд был задержан на *t* ч. Увеличив скорость на *m* км/ч машинист на перегоне в *S* км ликвидировал опоздание. Определить, какую скорость должен был иметь поезд на этом перегоне, если бы не было задержки.

Решение. Пусть x км/ч – первоначальная скорость поезда; (x+m) км/ч скорость поезда после задержки. Тогда имеет место равенство $\dfrac{S}{x} - \dfrac{S}{x+m} = t$.

Откуда следует, что $x = \dfrac{-mt + \sqrt{mt(mt + 4S)}}{2t.}$.

555. Расстояние между поселками A и B равно S км. Из A отправились в B одновременно два автотуриста, которые должны были прибыть в B в одно и то же время. В действительности первый турист прибыл в B на n часов раньше срока, а второй - на $3n$ часа опоздал, так как последний проезжал за каждый час в среднем на r км меньше первого. Определить скорость этих автотуристов.

556. Дорога между поселками A и B сначала имеет подъем, а потом спуск. Велосипедист, двигаясь на спуске со скоростью, на a км/ч большей, чем на подъеме, затрачивает на путь от A до B ровно t часов, а на обратный путь от B до A - половину этого времени. Найти скорость велосипедиста на подъеме и на спуске, если расстояние между поселками b км.

557. Два автомобиля едут равномерно от пункта A по шоссе в одном и том же направлении. В некоторый момент времени первый автомобиль находился от A на расстоянии m км, а второй - на расстоянии n км. Через сколько часов после этого и на каком расстоянии от пункта A второй автомобиль догонит первый, если скорость первого a км/ч, а второго b км/ч?

558. Чтобы проплыть S метров по течению реки, пловец должен затратить времени на t минут меньше, чем он употребил бы, проплывая то же расстояние в стоящей воде. Какова скорость пловца в стоячей воде, если скорость течения реки V м/ч?

559. Два самолета вылетают одновременно из пункта A в пункт B, расстояние между которыми S км. Скорость первого самолета на m км/ч меньше скорости второго,

поэтому первый самолет прилетает в B на n часов позже другого. Найти скорость первого самолета и время, затраченное им на перелет из A в B.

560. Тело A движется по прямой линии от точки M к точке N со скоростью a м/с; когда оно прошло c метров, из N начало двигаться тело B, делая в секунду $\frac{1}{k}$ расстояния MN, и встретилось с A по прошествии стольких секунд, сколько метров в секунду проходит тело B. Определить расстояние MN.

561. Велосипедист вследствие препятствия на дороге мог продолжить свой путь со скоростью, на n км/ч меньшей первоначальной скорости, и опаздывает поэтому на a часов в конечный пункт. Если бы препятствие встретилось на b км далее, то он опоздал бы только на c часов. Сколько км первоначально проезжал велосипедист в час?

562. Из города A в город B, отстоящий от A на b км, отправился пешеход. Спустя час за ним по той же дороге отправился со скоростью, на a км/ч большей первого, другой пешеход, который успел догнать первого и возвратиться в A одновременно с прибытием первого пешехода в город B. Сколько км/ч проходил первый пешеход?

563. Из точки A начало двигаться тело по направлению к точке B. Спустя t минут из той же точки A двинулось другое тело, которое, догнав первое, стало двигаться обратно и возвратилось в точку A в тот момент, когда первое тело достигло точки B. Определить скорость первого тела, если известно, что скорость второго тела равна V м/мин и что расстояние AB равно d метрам.

564. Из двух пунктов A и B выехали одновременно два велосипедиста в пункт C. Первый приехал в C через a часов, а второй, чтобы попасть в C одновременно с первым,

должен проезжать каждый километр на c часов скорее первого, так как расстояние от B до C на b км больше расстояния от A до C. Определить расстояние от A до C.

565. Два поезда одновременно вышли из пунктов A и B навстречу друг другу. При встрече оказалось, что первый поезд прошел на a км больше второго. Продолжая путь с прежней скоростью, первый поезд пришел в B через m часов после встречи, а второй поезд пришел в A через n часов после встречи. Сколько км каждый поезд прошел до встречи?

566. Расстояние между двумя городами равно a км. Два автомобиля, выехав из этих городов навстречу друг другу, встретятся на полпути, если первый выйдет на t часов раньше второго. Если же они выедут одновременно друг другу навстречу, то встреча произойдет через $2t$ часов. Сколько км/ч проезжает каждый автомобиль?

567. Из двух станций, расстояние между которыми d км, отправляются навстречу друг другу два поезда и встречаются на середине пути. Определить скорость каждого поезда, если первый поезд вышел на a часов позднее второго и со скоростью на b км/ч большей, чем скорость второго поезда.

568. Из двух точек M и N, расстояние между которыми d метров, одновременно начинают двигаться навстречу друг другу два тела, которые встречаются, когда первое тело прошло a метров. Определить скорость каждого тела, зная, что число метров, выражающее разность между скоростями первого и второго тел, равно числу секунд, прошедших от начала движения до встречи.

569. Расстояние между городами равно a км. Из города A отправились в город B одновременно по одной и той же дороге два туриста, которые должны были прибыть в B в

одно и то же время; но первый турист прибыл в B раньше срока на b часов, а второй на c часов опоздал, так как последний проезжал в каждый час на k км меньше первого. Определить скорость каждого туриста.

570. Из двух городов вышли два поезда. Первый поезд прошел n км, второй m км. Скорость первого поезда на a км/ч больше скорости второго. Определить скорость каждого поезда, если первый поезд затратил на свой путь на t часов меньше второго.

571. Из двух городов, расстояние между которыми равно S км, двигаются равномерно и навстречу друг другу два автомобиля. Первый автомобиль вышел a часами позже второго, и они встретились на середине пути. Сколько км/ч проходит каждый автомобиль, если известно, что первый проходит в час на b км больше второго?

572. Два туриста выходят одновременно навстречу друг другу из городов A и B и встречаются через t часов после выхода. За сколько времени каждый из туристов может пройти расстояние AB, если туристу, вышедшему из B, потребуется для этого на a часов меньше, чем туристу, вышедшему из A ?

573. Два туриста выходят одновременно из двух мест, первый из A и второй из B, друг другу навстречу и после встречи продолжают путь с прежними скоростями. Скорость второго туриста на a км/ч больше скорости первого. Первый турист приходит в B через m часов после встречи, а второй в A через n часов. Определить скорость каждого туриста.

574. Расстояние между пунктами A и B равно S км, причем $\frac{2}{3}$ этого расстояния – асфальтированное шоссе. Автомашина на асфальтированном шоссе имеет скорость, на V

км/ч большую скорости, с которой она проходит остальную часть пути – грунтовую дорогу. Определить скорость автомашины на асфальтированном шоссе и на грунтовой дороге, если все расстояние AB автомашина проходит за t часов.

575. Моторная лодка проехала по течению реки расстояние S км от пункта A до пункта B и повернула обратно к пункту A. Не доехав до пункта A p км, лодка остановилась. На весь путь от A до B и обратно до остановки лодка потратила t часов. Определить собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна a км/ч.

576. Из двух точек, расстояние между которыми равно d метрам, движутся друг другу навстречу два тела. Если первое начнет двигаться на a минут раньше второго, то они встретятся через p минут после начала движения второго. Если же второе начнет двигаться на b раньше первого, встреча произойдет через q минут после начала движения первого тела. Определить скорости движения тел.

577. От двух пристаней, удаленных одна от другой на $2l$ метров, выехали друг другу навстречу две лодки. Первая отчалила на a минут раньше второй и приходила в минуту на b метров меньше, чем вторая. Лодки встретились как раз на середине пути. Определить, сколько метров в минуту проходила вторая лодка и через сколько времени после своего отплытия она встретилась с первой.

578. Два тела, находящиеся одно от другого на расстоянии d метров, начинают одновременно двигаться друг другу навстречу (движение равномерное) и встречаются через a секунд. Если же они начали бы равномерно двигаться с теми же, что и прежде, скоростями оба одновременно по

одному и тому же направлению, то встретились бы через b секунд. Определить скорость каждого тела.

579. Два поезда выходят одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Они встречаются в пункте C, который на a км ближе к A, чем к B. Поезд, идущий из A, приходит в B через p часов после встречи, а поезд, идущий из B, приходит в A через q часов после встречи. Найти расстояние между A и B.

580. За сколько часов курьерский поезд пройдет расстояние в a км, если известно, что это расстояние он проходит на t часов быстрее, чем пассажирский поезд, скорость которого на b км/ч меньше скорости курьерского поезда?

581. Два велосипедиста выезжают одновременно из городов A и B навстречу друг другу и встречаются на расстоянии a км от B, а на обратном пути - на расстоянии b км от B. Найти расстояние между городами.

582. Из пункта A в пункт B выезжают одновременно автомобиль; мотоцикл и велосипед. Доезжая до B, автомобиль возвращается в A и встречает сначала мотоцикл на расстоянии a км от B, а затем велосипед на расстоянии b км от B. Мотоцикл на обратном пути встречает велосипед на расстоянии c км от B. Найти расстояние между A и B.

583. Колонна войск протяженностью d км движется маршем по шоссе со скоростью V км/ч. Вестовой выезжает из конца колонны в ее начало, передает приказание и возвращается обратно, затратив на всю поездку t минут. Определить скорость вестового, если она на всем пути одинакова.

584. Два мотоциклиста выехали одновременно один из пункта A в пункт B, другой – из B в A. Каждый ехал с постоянной скоростью и, приехав в конечный пункт, тут же

разворачивал обратно. Первый раз они встретились в p км от B, второй раз – в q км от A через t часов после первой встречи. Найти расстояние между A и B и скорости обоих мотоциклистов.

585. Три лыжника проходят дистанцию, двигаясь равномерно. Через m мин после старта третьего лыжника ему остается пройти часть дистанции, которую первый лыжник может пройти за n мин, второй – за p мин. Определить, за сколько минут может пройти всю дистанцию каждый из лыжников, если скорость третьего лыжника равна полу сумме скоростей первого и второго.

586. Поезд идет от станции A к станции B. На некотором участке пути, примыкающем к станции B, проводились ремонтные работы, и на этом участке поезду была разрешена скорость, составляющая только $1/n$ часть первоначальной скорости, вследствие чего поезд пришел на станцию B с опозданием на a ч. На другой день фронт ремонтных работ приблизился к станции B на b км и при тех же условиях поезд опоздал только на c ч. Найти скорость поезда.

587. Пловец плывет против течения реки и встречает по пути плывущую по течению пустую лодку. Он продолжает плыть еще m мин после момента встречи против течения, а затем поворачивает назад и догоняет лодку в S м от места встречи. Найти скорость течения реки.

588. Катер с постоянной скоростью, в k раз большей скорости парохода, отправляется одновременно с пароходом из одного пункта вниз по течению реки. Через сколько времени после отправления парохода они встретятся, если через t мин катер повернул назад и уменьшил скорость в два раза?

589. Пароход прошел a км по течению реки и вернулся обратно. Скорость парохода V км/ч, а скорость течения реки V_1 км/ч. ($V > V_1$). Доказать, что время, которое затратил пароход на движение туда и обратно, всегда больше того времени, которое он затратил бы на прохождение того же расстояния в стоячей воде.
590. Мальчики спорили о длине трубы, которую трактор тянул на полозьях. Чтобы выяснить, кто прав, мальчик с длиной шага 0,75 м пошел вдоль трубы. Когда он шел в направлении движения трактора, то сделал вдоль трубы 120 шагов. В другом направлении он сделал вдоль трубы 30 шагов. Какова длина трубы?
591. Лодка спускается по течению реки на расстояние a км, а затем поднимается на расстояние b км. Скорость течения реки равна V км/ч. Какова должна быть собственная скорость лодки, чтобы вся поездка продолжалась не более, чем t часов?
592. Два туриста вышли из пункта A в пункт B. Первый первую половину времени шел со скоростью V_1 км/ч, а вторую половину времени - со скоростью V_2 км/ч. Второй же первую половину пути шел со скоростью V_1 км/ч, а вторую половину пути - со скоростью V_2 км/ч. Кто из них затратил меньше времени на прохождение пути от A до B?
593. Два катера, имеющие одинаковую скорость в стоячей воде, проходят по двум рекам одинаковое расстояние по течению и возвращаются обратно в пункты, откуда они начали движение. В какой реке на это передвижение потребуется больше времени: в реке с быстрым течением или в реке с медленным течением?

§20. Задачи на производительность труда

В задачах на производительность труда присутствуют три величины: работа (A), производительность труда (N), время (t), которые связаны между собой соотношением:

$$A = N \cdot t$$

1) Если производительность труда N постоянна, то A и t прямо пропорциональны.
2) Если время t постоянно, то A и N прямо пропорциональны.
3) Если работа A постоянна, то N и t обратно пропорциональны.

I. Задача на совместную работу.

а) Первый рабочий выполняет работу за t_1 часов, второй – за t_2 часов. За сколько часов они выполнят всю работу совместно?

Решение. При совместной работе общая производительность труда N равна сумме производительностей труда каждого рабочего

$$N = N_1 + N_2,$$

$$\frac{A}{t} = \frac{A}{t_1} + \frac{A}{t_2}, \quad t = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}.$$

Пример. Пусть первый рабочий выполняет работу за 15 ч., а второй - за 10 ч. За сколько часов они выполнят всю работу совместно?

Решение. $t = \frac{15 \cdot 10}{15 + 10} = 6$ (ч.).

б) Первый рабочий выполняет работу за t_1 часов, второй – за t_2 часов, третий – за t_3 часов. За сколько часов они выполнят всю работу совместно?

Решение. $t = \dfrac{t_1\, t_2\, t_3}{t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3}$.

Задачи на производительность труда и задачи на движение математически описываются одними и теми же уравнениями.

При этом расстояние S соответствует объему работы A, скорость V – производительности труда N, время движения t – времени работы t.

Отличительным свойством этого соответствия является то обстоятельство, что в задачах на производительность труда реализуется возможность движения навстречу друг другу одновременно нескольких тел (то есть рабочих, совершающих одну работу).

в) Двое рабочих могут выполнить некоторую работу за p часов. Первый из них работая отдельно, может выполнить всю работу за q часов дольше, чем второй рабочий, работая отдельно. За сколько часов, работая отдельно, каждый из них выполнит эту работу?

Решение. Пусть за x часов выполнит работу второй рабочий. Тогда, первый рабочий выполнит всю работу за $(x+q)$ часов. Составим уравнение:

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+q} = \dfrac{1}{p}$, откуда находим x и $(x+q)$.

г) Двое рабочих могут выполнить некоторую работу за p часов. Первый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу в m/n раза дольше, чем второй рабочий, работая отдельно. За сколько часов, работая отдельно, каждый из них выполнит эту работу?

Решение. Пусть за x часов выполнит работу второй рабочий, за $\dfrac{m}{n}x$ часов выполнит работу первый рабочий.

Составим уравнение:

$$\frac{1}{x}+\frac{n}{mx}=\frac{1}{p}\text{, откуда находим } x \text{ и } \frac{m}{n}x.$$

594. Двое рабочих, из которых второй начинает работать n днями позже первого, могут выполнить работу в m дней. Если бы эту работу выполнял каждый отдельно, то первому потребовалось бы на a дней больше, чем второму. За сколько дней каждый из них отдельно выполнит эту работу?
595. Двое рабочих, работая вместе, выполняют некоторую работу за p часов. Первый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу на q часов скорее, чем второй рабочий, если этот последний будет работать отдельно. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, может выполнить работу?
596. Двое рабочих выполнили вместе некоторую работу за p часов. Если бы сначала первый сделал половину этой работы, а затем другой остальную часть, то вся работа была бы выполнена за q часов. За какое время мог выполнить эту работу каждый в отдельности.
597. Трое рабочих могут совместно выполнить некоторую работу за t час. Первый из них, работая один, может выполнить эту работу в m раз скорее третьего и на n часов скорее второго. За сколько времени каждый из них, работая отдельно, может выполнить эту работу?
598. В бассейн проведены две трубы: первая труба наполняет бассейн за a часов, вторая выливает из наполненного бассейна всю воду за b часов. За сколько времени наполнится пустой бассейн при одновременном действии труб?

599. Один рабочий изготовляет в день a деталей, другой - b деталей. Первый изготовил уже p деталей, второй - q деталей. Через сколько дней после этого число деталей, изготовленных каждым рабочим, при одновременной их работе, будет одинаково?

600. Две бригады построили железнодорожный путь между городами A и B длиной в S км. Первая бригада начала работу от города A и строила в день на m км пути больше второй, начавшей стройку от города B. При окончании постройки оказалось, что обе бригады построили поровну. Сколько км пути строила в день каждая бригада, если вторая бригада работала на t дней больше первой?

601. Два элеватора принимают зерно. Пропускная способность первого на k тонн в час больше второго. Определить, сколько тонн зерна принимает в час каждый элеватор, если для приема по m тонн зерна каждым, первому требуется на t часов меньше времени, чем второму.

602. Выполнение некоторой работы поручено двум бригадам рабочих. Работу начала первая бригада и проработала n дней, а оставшуюся часть работы закончила затем одна вторая бригада в m дней. За сколько дней каждая бригада, работая отдельно, может выполнить всю работу, если второй бригаде требуется для этого на t дней больше, чем первой?

603. Две бригады рабочих укладывают шпалы на железнодорожном полотне. Первая бригада работала на t дней больше второй бригады и за время работы уложила шпалы на S км полотна. Вторая бригада укладывала в день на m км пути больше первой и за время своей работы уложила на n км пути меньше, чем первая. Сколько км пути укладывает каждая бригада в один день?

604. Чтобы в n дней изготовить m штук некоторых деталей, надо их изготовление поручить или a рабочим высокой квалификации, или b рабочим средней квалификации. Требуется за p дней изготовить q штук этих деталей, причем для этой работы удалось выделить лишь c рабочих высокой квалификации. Сколько нужно еще занять рабочих средней квалификации, чтобы выполнить работу в требуемое время?

605. Бассейн наполняется четырьмя трубами за a часов. Первая, вторая и четвертая заполняют бассейн за b часов. Вторая, третья и четвертая за – c часов. За сколько времени заполняют бассейн первая и третья трубы?

606. Две бригады, работая одновременно, обработали участок земли за a часов. За какое время могли бы обработать этот участок каждая из бригад в отдельности, если скорости выполнения работы бригадами относятся, как $m:n$?

607. Бассейн для плавания имеет три трубы для отвода воды. Через первую и вторую трубы вместе при закрытой третьей трубе наполненный бассейн делается пустым за a мин. Через первую и третью вместе при закрытой второй трубе – за b мин, а через вторую и третью трубы при закрытой первой – за c мин. За какое время освобождается от воды наполненный бассейн через каждую трубу в отдельности?

608. A выполняет некоторую работу в срок на a дней больший, чем B, и на b дней больший чем C. А и В, работая вместе, выполняют эту работу за столько же дней, что и С. Определить время, за которое каждый выполняет эту работу отдельно. При каком соотношении между заданными величинами задача имеет решение?

609. На обработку одной детали рабочий А затрачивает на k мин меньше рабочего B. Сколько деталей обрабатывает каждый из них за t ч работы, если A обрабатывает за это время на n деталей больше, чем B?

610. Двум рабочим была поручена работа. Второй приступил к работе на a часов позже первого. Через t часов после того, как первый приступил к работе, им осталось выполнить m/n всей работы. По окончании работы оказалось, что каждый выполнил половину всей работы. За сколько часов каждый, работая отдельно, может выполнить свою работу?

611. Бригада лесорубов должна была по плану заготовить за несколько дней a куб. м древесины. Первые t дня бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день заготовляла n куб. м сверх нормы, поэтому за день до срока было заготовлено b куб. м древесины ($b>a$). Сколько куб. м древесины в день должна была бригада заготовлять по плану?

612. Мастеру и его ученику было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того как мастер проработал a ч, а ученик b часов ($b<a$), оказалось, что они выполнили m/n всей работы. Проработав совместно еще b часов, они установили, что остается выполнить $1/2n$ всей работы. За какой промежуток времени выполнил бы всю работу ученик, работая один?

613. В бассейн проведены две трубы, падающая и отводящая, причем через первую бассейн наполняется на a ч дольше, чем через вторую опорожняется. При заполненном на $1/n$ бассейне были открыты обе трубы, и бассейн оказался пустым спустя 8 ч. За сколько часов, действуя отдельно, первая труба наполняет, а вторая опорожняет бассейн?

614. Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей; после того как первый проработал a ч, а второй $0{,}6a$ ч, оказалось, что они выполнили $5/n$ всей работы. Проработав совместно еще $0{,}6a$ ч, они установили, что им осталось изготовить еще $1/n$ часть всей партии деталей. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, выполнит всю работу? Число n натуральное, найти его.

615. Водоем снабжен двумя каналами. Через первый вода выливается, через второй вливается. Узнать, за сколько часов через первый канал пройдет n л воды, если известно, что через второй вольется в два раза больше тогда, когда он будет открыт на a ч меньше того времени, за которое через первый канал пройдет n л. Если оба канала открыть одновременно, то в каждый час в водоеме прибывает a л воды.

§21. Задачи на расход материалов

616. Шины на передних колесах автомобиля стираются за n_1 километров пути, такие же шины на задних колесах автомобиля стираются за n_2 километров, причем $n_2 < n_1$. Как добиться того, чтобы шины на всех колесах стирались одновременно? На сколько при этом удается удлинить путь автомобиля без смены шин?
617. В городе n зданий, сумма возрастов которых T. Отчего город больше помолодеет, от того ли, что снесут старое здание или от того, что построят новое? Продолжительностью строительства или процессом сноса здания пренебречь.
618. Из некоторого пункта A в пункт B отправляется колонна из n грузовиков, каждый из которых с запасом горючего на T дней пути. Складов горючего на дороге нет. Каждый из грузовиков может по пути передавать любому другому грузовику или получать от него горючее. Как организовать движение грузовиков и передачу горючего, чтобы хотя бы один из грузовиков попал в пункт B, а каждый из остальных грузовиков смог вернуться в пункт отправления A, если расстояние между A и B составляет $1{,}9T$ дней пути? Каким должно быть значение n, чтобы задача имела решение?
619. В стране N продавался как местный, так и ввозимый уголь по p денежных единиц за тонну. После того как власти N начали налагать пошлину на ввозимый уголь по d денежных единиц на каждую тонну, уголь (как местный, так и иностранный начал продаваться по $\left(p+\dfrac{d}{n}\right)$ денежных единиц за тонну, а потребление угля настолько

уменьшилось, что выручка за проданный уголь сохранилась, причем местного угля продавалось за год столько же, сколько до введения пошлин на иностранный уголь. Найти такое значение y, чтобы доход N от пошлин был наибольшим (если угля продавалось столько же, сколько и до введения пошлин).

620. Ящик вмещает или a груш, или b яблок. Чтобы заполнить ящик, в него положили c груш и яблок. Сколько яблок и груш положили в отдельности?

621. Расфасовали p тонн муки в пакеты двух размеров; a пакетов первого размера и b пакетов второго размера весят c кг; a_1 пакетов первого размера и b пакетов второго размера весят c_1 кг ($a_1 > a$ и, следовательно, $c > c_1$). Сколько потребовалось всего пакетов, если в пакеты первого размера уложили в m раз больше муки, чем в пакеты второго размера?

622. Для изготовления a_1 тетрадей и b_1 блокнотов израсходовали c_1 листов бумаги, а для изготовления a_2 тетрадей и b_2 блокнотов требуется c_2 листов бумаги. Сколько тетрадей и сколько блокнотов изготовили из d листов бумаги, если на тетради израсходовали на n листов бумаги больше, чем на блокноты?

623. При ежедневной норме расходе по а кг на одну корову, заготовленного сена на стойловый период хватит на t дней и остается еще b т сена. Если же норму установить в размере c кг в день ($c>a$) на каждую корову, то необходимо заготовить еще d т сена. Определить количество необходимого сена при норме в c кг в день и число коров, исходя из которого сделан расчет.

624. Для кормления n лошадей и коров в течение t дней было израсходовано p ц сена. Для одной лошади на день

отпускается a кг сена, для коровы – b кг ($a>b$). Сколько было лошадей и сколько коров?

625. В фасовочный цех доставили n мешков соли по p кг в каждом. При расфасовке были сделаны пакеты по a г и b г ($a>b$). Всего получилось c пакетов. Сколько было тех и других пакетов?

626. Предприятие A, потребляющее лед, закупает его в пункте B по цене a руб за тонну. Иногда этому предприятию приходится закупать лед в другом пункте C по цене 1,5a руб за тонну. Оба изготовителя сами доставляют потребителю A закупленный лед, начисляя за перевозку одинаково по p руб за тонно-километр. Потеря в массе, происходящая при транспортировке от таяния льда, составляет n тысячных массы на километр пути. Предприятие A расположено между B и C, и каждая тонна фактически полученного льда обходится предприятию A одинаково (в рублях) при доставке как из пункта B, так и из пункта C. Во сколько рублей обходится предприятию A тонна получаемого льда, если известно, что расстояние от B до C через A равно S км?

627. Для отопления дома сделан запас угля, из которого ежедневно расходуется по одинаковому числу килограммов. Спустя m дней из этого запаса осталось a кг, а спустя n дней b кг. Как велик был запас угля и сколько кг угля израсходовали ежедневно?

628. Куплено m кг муки двух сортов на сумму k руб; кг муки первого сорта стоил a руб, кг муки второго сорта b руб. Сколько было куплено муки каждого сорта?

629. На расстоянии S км грузовой автомобиль расходует бензин на a л больше, чем легковой. Расходуя один литр бензина, грузовой автомобиль проходит по той же дороге

на b км меньше, чем легковой. Каков расход бензина каждого из этих автомобилей на расстоянии S км?

630. Перевозка тонны груза от пункта M до N по железной дороге обходится на 6 коп дороже, чем водным путем. Сколько тонн груза можно перевезти от M до N по железной дороге на сумму a руб., если водным путем на эту же сумму можно перевезти на k тонн больше, чем по железной дороге?

631. На покупку велосипедов спортивный клуб выделил n руб. Так как вследствие снижения цен стоимость каждого велосипеда уменьшилась на a руб., то велосипедов было куплено на b больше, чем предполагалось. Сколько купили велосипедов?

632. На одном складе a тонн угля, а на другом складе b тонн. Ежедневно на оба склада поступает по d тонн угля. Через сколько дней на первом складе будет угля в n раз больше, чем во втором?

633. В одном городе a жителей, а в другом городе b жителей. Население первого города ежегодно увеличивается на m человек, а население второго города увеличивается на n человек. Через сколько лет в обоих городах будет жителей поровну?

634. Для пошивки m простынь и n наволочек израсходовано N метров бельевого материала. На простынь шло в q раз больше материала, чем на наволочку. Определить расход материала на одну простыню и на одну наволочку.

635. За a метров сатина и b метров ситца уплачено S рублей. 1 м сатина на d руб дороже 1 м ситца. Определить цену 1 м той и другой ткани.

636. Один покупатель купил a м ситца и b м сатина и за всю покупку заплатил d рублей; другой покупатель по

той же цене взял m метров ситца и n метров сатина и заплатил также d рублей. Сколько стоит метр ситца и метр сатина отдельно?

637. В пустой ящик вкладывают n пустых ящиков поменьше. Затем в один из пустых ящиков кладут n пустых ящиков еще меньшего размера. Процедуру вкладывания продолжают снова и снова. Наполненным считается такой ящик, в который вложено хотя бы n ящиков. Всего в конце оказалось наполненных k ящиков. Сколько было пустых ящиков?

§ 22. Собрание наиболее трудных задач по математике, служивших во всех учебных округах России темами на испытаниях зрелости в гимназиях и на выпускных экзаменах в реальных училищах

638. (Тема Петербургского округа).

Три лица, получив наследство в 14700 рублей, разделили его на три части, пропорционально числам 9, 7, 5. Первый раз из наследников отдал доставшуюся ему сумму в рост по $5\frac{1}{2}$%; второй отдал свою часть в рост по столько %, что через два года и три месяца получил прибыли 661 руб 50 к. Деньги третьего, пущенные в оборот по 7% через некоторый промежуток времени доставили прибыли 441 рубль. Спрашивается: 1) в какую сумму обратился по прошествии $2\frac{1}{2}$ лет капитал первого наследника, 2) по сколько % отдал свой капитал второй наследник и 3) сколько времени были в обороте деньги третьего наследника?

639. (Тема Московского округа).

Некто составил $\dfrac{\left(4\frac{1}{2}-2{,}1666...\right)\cdot 18}{1{,}3+1\frac{2}{7}}+13\frac{137}{181}$ фунт смеси из двух сортов чаю и продал эту смесь за 260 рублей; причем получил $8\frac{1}{3}$% прибыли. Фунт чаю одного сорта стоил 6 рублей, фунт же чаю другого сорта стоил столько рублей, за сколько месяцев до срока учтен был вексель в 800 рублей; причем учет производился коммерческий, по 4% и составил сумму в 26 рублей 10 копеек. Узнать сколько фунтов чаю каждого сорта взято было для составления смеси?

640. (Тема Одесского округа).

У купца было сукно в 4 рубля за аршин; сукно это было в трех кусках; количество аршин в первом куске относилось к количеству аршин во втором как 0,1666...: $\frac{1}{3}$, а в третьем куске было втрое больше, чем в обоих первых вместе. Купец продал первый кусок за 21 руб. 60 к., получил 8% прибыли. За второй кусок он получил столько денег, как велик коммерческий учет векселя в 1900 рублей по 5% за полгода до срока; третий кусок он променял на бумажную материю в 30 и 50 коп аршин, причем она обошлась ему средним числом во столько коп. за аршин, сколько месяцев должен лежать в банке капитал по 6%, чтобы возрасти на 0,225 своей величины.

Сколько процентов прибыли получил купец при продаже второго куска и сколько получил он аршин материи каждого сорта?

641. (Тема Оренбургского округа).

Купец разделил 759 руб. на три части так, что первая относится ко второй как $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}$, а вторая к третьей как $\frac{6}{11}:7\frac{1}{3}$. Первую часть он употребил на покупку 11 фунт. чая с уступкою 20% против его стоимости. Вторую поместил в банк по столько %, что через 2 года 3 месяца она обратилась в 59,52 руб. На третью же часть он купил дом, при продаже которого получил 5% убытка.

Определить: 1) стоимость фунта чая без уступки, 2) проценты, по которым помещена в банк вторая часть и 3) за какую сумму продан дом?

642. (Тема Московского округа).

Некто разделил между своими сыновьями 718 десятин земли так, что доля старшего относилась к доле среднего как

$0{,}625:\frac{5}{9}$, а отношение доли среднего к доле младшего было равно $0{,}8333...:\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{3}{5}}}$. Старший сын продал свою долю и часть денег употребил на покупку векселя в 10000 р. с коммерческим учетом по 8 процентов в 1 год 3 месяца до срока, а остальные деньги положил в банк по 5 процентов и через год этот капитал составил 18900 руб. Сколько десятин досталось каждому из братьев и почем за десятину продал свою землю старший брат?

643. (Тема Виленского округа).

A, *B* и *C* имели 64000 рублей. Капитал *A* составлял 40% капитала *B*, а капитал *B* - 20% капитала *C*. *B* купил на свои деньги имение, на устройство которого взял у *A* 0,5 его капитала, а у *C* 0,08 его капитала на вексель. По происшествии назначенного срока имение *B* было продано с аукциона за 5700 руб., а вырученные деньги пошли на удовлетворение *A* и *C*. Сколько получил каждый из них?

644. (Тема Сибирского округа).

A отдал свой капитал в рост по 6% и получил годовой прибыли 1935 р. *B* отдал свой капитал по столько процентов, сколько следует отдать в рост 0,1333... капитала *A* для того, чтобы в два года получить прибыли 602 р. Прибыль, полученная *B*, составляет сумму, вырученную от продажи векселя в 6510 руб., учтенного по 5% за 8 месяцев до срока. Каков был капитал *B*?

645. (Тема Петербургского округа).

Ценности двух металлов относятся между собой как $\frac{1}{0{,}33...}$ к 1,24999.... Кубок, сделанный из сплава этих металлов, весом в 14 фунтов, был продан за 322 рубля, причем получено 15% прибыли. Спрашивается: сколько фунтов каждого металла пошло на выделку кубка, если фунт первого металла вместе с фунтом второго стоил 34 рубля?

646. (Тема Одесского округа).

Произвести раздел участка земли, состоящего из 808 десятин 2160 саж., если известно, что:

в пользу лица A должно отчислить $\frac{1}{7}$ часть всего количества земли;

в пользу лица B – $\frac{1}{7}$ третьей части, оставшейся от выдела в пользу A;

в пользу лица C – половину земли, оставшейся за выделом в пользу A и B;

в пользу лица D – $\frac{1}{7}$ долю другой половины, и

в пользу лица E – остальное количество земли.

Кроме того, требуется определить, какая сумма из арендной платы за 2 года достанется на долю Е, если известно, что арендная плата за весь участок в первый год составила 300 руб, а во второй – 375 рублей?

647. (Тема Московского округа).

Продан серебряный слиток из 6-ти фунтов 72-ой пробы и 10 фунтов 80-ой пробы, причем золотник чистого серебра оценен в $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$ франка (77 франк.=13 р.). На вырученные деньги куплено два сорта чаю, по 12 руб. и по 5 руб. за фунт и полученная смесь – 56 фунтов чая – продана по

7 р. за фунт. Узнать: какой пробы был слиток, за сколько рублей он был продан и по сколько фунтов каждого сорта чая куплено?

648. (Тема Московского округа).

Купец продал слиток из 16 фунтов серебра 84-ой и $14\frac{2}{3}$ ф. серебра 72-ой пробы по 33 рубля за фунт чистого серебра и на вырученные деньги купил три куска сукна по $2\frac{3}{4}$ руб. за аршин; число аршин 1-го куска относится к числу аршин 2-го как 0,04:0,10666...; число аршин 2-го относится к числу аршин 3-го как $1:\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3}}}}$.

Требуется узнать: 1) сколько было аршин в каждом куске; 2) сколько стоит слиток самому купцу, если при продаже его он получил 10% прибыли?

649. (Тема Московского округа).

Имение, содержащее 120 десятин, состоит из пахотной земли, лугов и леса. Число десятин пахотной земли относится к числу десятин лугов, как $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}}}$ относится к 0,(12), а число десятин лугов относится к числу десятин леса как 4:15. Если продать $\frac{2}{7}$ пахотной земли по 40 р за десятину, о,25 лугов по 35 р. за десятину, 0,1444... леса по 150 р. за десятину и вырученную сумму отдать по 4%, то сколько ежегодно получится процентных денег?

650. (Тема Московского округа).

Купец занял 4860 руб по 6% на 5 месяцев и, спустя несколько времени, снова занял у того же лица 6400 руб по $7\frac{1}{2}$%, обязавшись уплатить второй заем одновременно с окончанием срока первого. Тогда по обоим займам пришлось уплатить всего 11501 руб 50 коп. Узнать, через сколько месяцев после первого займа был сделан второй?

651. (Тема Московского округа).

Купец, продав дом с убытком $2\frac{1}{2}$% против его стоимости, выручил 2925 руб. За 0,1333... долей этой вырученной суммы куплен им вексель, писанный на 400 рублей, но учтенный им коммерчески за 3 месяца до срока. Остальные деньги разделены на три части, относящиеся между собой как 2:6:7. Узнать: 1) что стоит дом, 2) по сколько % учтен был вексель и 3) означенные три части.

652. (Тема Петербургского округа).

Мастер имел кусок сплава из серебра и меди весом в $7\frac{1}{2}$ ф., в котором количество меди составляло 25% количества серебра. К этому куску мастер прибавил $1\frac{1}{2}$ фунта серебра 84 пробы и из всего полученного сплава сделал три подсвечника. Узнать: какой пробы вышли подсвечники и сколько фунтов весил каждый, если вес первого относился к весу второго как 1,1666... к $1\frac{2}{3}$, а вес второго к весу третьего как 0,625 к $1\frac{15}{16}$?

653. (Тема Петербургского округа).

Четыре работника в 14 дней вырыли яму, имеющую форму прямоугольного параллелепипеда, в 120 саж. длины, 9,8 саж. ширины и $3\frac{2}{3}$ саж. глубины. Во сколько дней те же работники выроют яму такой же формы, в 80 саж. длины, 7 саж. ширины и $5\frac{1}{2}$ саж. глубины, и сколько каждый из них получит, если вырытая каждым части относятся как $2\frac{1}{2}$:1,2:2,9:1,0999... и за вырытие одной кубической сажени земли платилось по $5\frac{7}{8}$ коп?

654. (Тема Петербургского округа).

Купец, продав вексель в 1500 р. за 9,9 месяца до срока с учетом по 6,4% годовых, на вырученные деньги купил чай двух сортов: по 3 руб. 50 коп и 3 руб. 80 коп за фунт. Смешав оба чая, купец нашел, что от продажи этой смеси по 3 руб. 60 коп за фунт получится прибыли на затраченный капитал 19руб. 20 коп. Сколько фунтов чая того и другого сорта куплено?

655. (Тема Сибирского округа).

Некто разделил капитал на две части, из которых первую, равную 40700 руб., оставил у себя, а вторую, составляющую 0,2666... всего капитала, положил на время в банк по 4,5%, с тем чтобы пожертвовать те процентные деньги, которые нарастут на эту сумму в течение такого времени, на какое нужно отдать 12900 руб. по $4\frac{1}{4}$%, чтобы получить 2924 рубля. Как велики были пожертвованные %-ые деньги?

656. (Тема Киевского округа).

На 0,9444... частей суммы, вырученной от продажи векселя в 9600 руб., учтенного по 15% за 8 месяцев до срока, было куплено несколько акций, причем каждая акция была куплена 30 руб. ниже ее номинальной цены. Затем все эти акции были проданы за 10579 р. 20 к, причем каждая акция была продана 20 р. 40 к. выше номинальной цены. Узнать: за сколько была куплена каждая акция, за сколько была продана и сколько % прибыли получено при продаже их?

657. (Тема Московского округа).

Купцу следовало получить деньги от трех своих должников A, B и C, всего 960 руб. Долг A относится к долгу B как 1:0,08333..., а отношение долга C к долгу B равно 1: $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}$.

A и B уплатили сполна, а C отдал только 80% своего долга. $\frac{13}{56}$ денег, полученных от A, купец отдал партии плотников в 6 человек, которых нанял по такой цене, что если бы их было 8 человек и работали бы они 3 дня, то им следовало бы получить 65 р. Остальные, полученные от A, деньги купец употребил на покупку чая двух сортов, в $3\frac{1}{4}$ руб. и 5 руб. за фунт. Весь этот чай он смешал и фунт смеси, без прибыли и убытка, может продавать по 4 р. 30 к. за фунт. На деньги же, полученные от B и C, купец приобрел вексель в 120 р. на 8 месяцев до срока, с коммерческим учетом по 8 годовых %. Требуется узнать: 1) сколько дней работали плотники, сколько было куплено каждого сорта чая и сколько осталось у купца денег из числа полученных им в уплату долга?

658. (Тема Петербургского округа).

Два работника A и B начали одновременно общую работу; через несколько часов A заболел, вследствие чего пришлось окончить работу одному B. Сколько целых часов каждый из них работал, если A мог исполнить всю работу во столько часов, сколько единиц содержит 1/10 целого корня уравнения: $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=10$, а работник *B* мог бы исполнить всю работу во столько часов, сколько членов в арифметической прогрессии, которой 10-й член равен 23, 16-й равен 35 и сумма членов равна 396?

659. Два поезда железной дороги, вышедшие в одно и то же время из двух городов А и В, между которыми 615 в., встретились на пути. Первый поезд делал в час столько верст, чему равен первый член арифметической прогрессии, последний член которой равен 49, а сумма 4 ее членов составляет 154. Второй поезд прошел в час число верст, равное корню уравнения: $\sqrt[5]{x}+4x^{-\frac{1}{5}}=4$. Сколько верст прошел каждый поезд до встречи с другим поездом?

660. Купец математически учитывает два векселя, – один в 3705 р. за столько месяцев до срока, чему равен корень биквадратного уравнения: $\sqrt[3]{x}+x^{-\frac{1}{3}}=2$, взятый 7 раз, другой же в 2075 руб. за столько месяцев до срока, чему равна сумма бесконечной прогрессии: 3:2:.... Учет с обоих векселей составляет сумму в 180 руб. По сколько % был произведен учет?

661. (Тема Оренбургского округа).

Пароход прошел в продолжении 7 часов 100 верст по течению и 45 верст против течения. В другой раз тот же пароход при тех же условиях прошел в продолжении 10 ч. 125 верст по течению и 75 верст против течения. Сколько верст проходил пароход независимо от течения в час и какова быстрота течения

662. (Тема Харьковского округа).

Вексель в 8778 рублей учтен за 9 месяцев до срока и вексель в 7488 руб. за 8 месяцев до срока; при этом за первый уплачено на 1200 руб. больше, чем за второй. По каким % сделан учет?

663. (Тема Сибирского округа).

Два игрока A и B, игравшие некоторое время считают свои деньги и находят, что A выиграл половину того, что первоначально имел, и что у него таким образом составилась сумма, большая тройного количества денег, оставшихся у B, на число рублей, равное положительному корню уравнения: $x^2-2x+\sqrt{x^2-2x+6}=6$, взятому 5 раз. При дальнейшем продолжении игры, B, выиграв столько рублей, чему равен первый член арифметической прогрессии, сумма членов которой составляет 96, последний член равен 22 и число членов равно 6, иметь вдвое более, чем осталось у A. Сколько было первоначально денег у каждого?

664. (Тема Виленского округа).

Из города C в город M отправился вниз по реке пароход, делавший 8 1/2 миль в каждые три часа. Часом раньше из города M отплыл против течения другой пароход, проходивший в каждые 4 часа по 5 миль. При встрече этих пароходов оказалось, что первый и них прошел пространство, вдвое большее того пути, который был пройден вторым. Определить расстояние по реке между городами M и C.

665. (Тема Варшавского округа).

Две трубы могут наполнить бассейн в число часов, равное числу членов арифметической прогрессии, первый член которой равен утроенному корню биквадратного уравнения $\sqrt[3]{x}+x^{-\frac{1}{3}}=2$, последний член равен 73 и разность равна 5. В продолжении 5 часов вода текла из обеих труб, затем первую трубу закрыли, и одна вторая наполнила бассейн в 40 часов. Во сколько часов каждая труба отдельно может наполнить бассейн?

666. (Тема Оренбургского округа).

Трое A, B, C отдали различные капиталы в рост на одинаковые проценты. A получает ежегодно на свой капитал 800 рублей, B – 1200 руб, а C – 2000 руб. Как велик капитал каждого лица и по сколько процентов были отданы капиталы в рост, если сумма всех капиталов равна 80000 руб?

667. (Тема Сибирского округа).

Сосуд вместимостью в число ведер, равное учетверенной сумме корней уравнения: $\left(4^{3-x}\right)^{2-x}=1$, наполнен спиртом. Из него выливают некоторое количество в другой сосуд равный ему и дополнив остальную часть второго сосуда водою, дополняют этой смесью первый сосуд. Наконец, из 1-го сосуда отливают $6\frac{2}{3}$ ведер во второй; после этого оба сосуда содержат одинаковое количество спирта. Сколько отлито спирта первоначально из 1-го сосуда во 2-ой?

668. (Тема Казанского округа).

Из двух мест, расстояние между которыми равно 81 верст, вышли навстречу друг другу два путешественника A и B. Если бы A вышел 3-мя часами раньше B, то они встретились бы через 7 часов после выхода B, а если бы B вышел 3-мя часами раньше A, то они встретились бы через 8 часов после выхода A. Сколько проходит в час каждый из них?

669. (Тема Московского округа).

Некто имел 2795 рублей; деньги эти он разделил на две части. Первая принесла столько процентов, сколько единиц в корне уравнения: $\frac{\sqrt{x+18}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+18}+\sqrt{x-3}}=\left(\frac{7}{3}\right)^{-1}$. Со второй части он получил проценты в размере, равном сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии, которой первый член равен 2, а второй 7/11. Всего он получил дохода 170 рублей. На какие части был разделен капитал?

670. (Тема Одесского округа).

Два путешественника отправились из двух мест A и B в одно и то же время; первый из места A в B, а второй из B в A. Встретившись на дороге после того как первый прошел более чем второй на число верст, равное корню уравнения: $\left(\frac{1}{64}\right)^{2-0,1x}=\sqrt[4]{0,125}$, они рассчитали, что, принимая в соображение скорости их хода, первый в 4 дня достигнет места B, а второй через 9 дней пройдет в место A. Требуется узнать - как велико расстояние от A до B?

671. (Тема Петербургского округа).

Два путешественника A и B выезжают из одного и того же места, второй два дня спустя после первого. Оба едут по одному и тому же направлению. A проезжает в первый день 4 версты, во второй 8, в третий 12 и т.д., в каждый 4-мя верстами более. B проехал в первый день 1 версту, во второй 6, в третий 11 и т.д., каждый день 5-ю верстами более. Через сколько дней после своего отъезда путешественник B догонит A?

672. (Тема Харьковского округа).

Два работника А и В взялись окончить некоторую работу в число дней, равное последнему члену арифметической прогрессии, число членов которой равно положительному корню уравнения: $x^2-7x+\sqrt{x^2-7x+18}=24$, первый член равен 8, разность равна 1. Но по прошествии четырехдневной совместной работы А отказался и В окончил ее в 36 дней. Во сколько дней каждый рабочий порознь мог бы окончить эту работу?

673. (Тема Виленского округа).

Некто купил акции двух железных дорог; число первых равно знаменателю геометрической прогрессии, 1-й член которой равен 3, а 5-й равен 12288; число вторых равно утроенному рациональному корню уравнения: $x^2 - 4x^{3/2} - 32 = 0$, причем за все акции заплатил 3400 руб. Через месяц, 1-ые поднялись на 15 руб., а 2-ые на 25 руб. Продав половину 1-х и все 2-ые, он не вернул только 140 руб. По сколько он платил за акции?

ОТВЕТЫ

§1. Задача о расфасовке товара

1. 26. **2.** 11. **3.** 11. **4.** 36. **5.** 40 подарков; 6 орехов, 4 конфеты, 9 пряников. **6.** 18 часов. **7.** 13,5 руб. **8.** 12 человек; 5 команд. **9.** 40 дней; 120 дней; 120 дней. **10.** 84. **11.** 2310 см. **12.** 120 м; 20 мест. **13.** Следы второго и третьего шагов. **15.** Через 4 оборота. **16.** 60 книг. **17.** 24см x 24 см. **18.** 20 отметок; 9 раз. **19.** 4.

§2. Задача о переливании

21. (12,0,0), (4,8,0), (4,3,5), (9,3,0), (9,0,3), (1,8,3), (1,6,5), (6,6,0). **22.** (10,0,0), (10,9,0), (1,4,5), (6,4,0), (6,0,4), (0,6,4). **23.** (5,0), (0,5), (5,5), (0,10), (5,10), (0,15), (5,15), (3,17), (3,0), (0,3), (5,3), (0,8), (5,8), (0,13). **24.** (12,0,0), (9,0,3), (9,3,0), (6,3,3), (6,6,0). **25.** Первый способ: (10,0,0), (3,5,2), (5,5,0). Второй способ: (10,0,0), (8,2,0), (8,0,2), (6,2,2), (6,0,4), (4,2,4), (4,0,6), (2,2,6), (2,1,7), (9,0,1), (7,2,1), (7,0,3), (5,2,3), (5,0,5). **26.** Первый способ: $4x-9y=6$, (4,0), (0,4), (4,4), (0,8), (4,8), (3,9), (3,0), (0,3), (4,3), (0,7), (4,7), (2,9), (2,0), (0,2), (4,2), (0,6). Второй способ: $9x-4y=6$, (9,0), (5,4), (5,0), (1,4), (1,0), (0,1), (9,1), (6,4). **27.** (9,0), (4,5), (4,0), (0,4), (9,4), (8,5), (8,0), (3,5).
28. $8+5x-3y=4$, (8,0,0), (5,0,3), (5,3,0), (2,3,3), (2,5,1), (7,0,1), (7,1,0), (4,1,3), (4,4,0).
29. Любое целое число литров. $12+9x-5y=6$, (12,0,0), (3,9,0), (3,4,5), (8,4,0), (0,8,4), (0,7,5), (5,7,0), (5,2,5), (10,2,0), (10,0,2), (1,9,2), (1,6,5), (6,6,0), (6,1,5), (11,1,0).

30. Можно. $11x-9y=10$. (11,0), (2,9), (2,0), (0,2), (11,2), (4,9), (4,0), (0,4), (11,4), (6,9), (6,0), (0,6), (11,6), (8,9), (8,0), (0,8), (11,8), (10,9).

31. (4,0), (0,4), (4,4), (3,5).

32. $10+7x-3y=5$. (10,0,0), (3,7,0), (3,4,3), (6,4,0), (6,3,1), (2,7,1), (2,5,3), (5,5,0).

33. Наклонив сосуды, набрать (3,2), затем (1,4).

34. (Бочка, ведро, ведро), (18,0,0), (14,4,0), (10,4,4), (6,7,5), (13,0,5), (9,4,5), (5,7,6), (бочка, ведро, черпак), (5,7,0), (12,0,0), (8,4,0), (4,7,1), (11,0,1), (11,1,0), (7,5,0), (3,7,2), (10,0,2), (10,2,0), (4,6,0).

35. Так как после наполнения бочки B в бочке A остается $\frac{m}{n}$ ее содержимого, то вместимость бочки B равна $1-\frac{m}{n}$ вместимости бочки A. Аналогично, вместимость бочки C равна $1-\frac{p}{q}$ вместимости бочки A.

Значит, вместимость бочек B и C равна $1-\frac{m}{n}+1-\frac{p}{q}=1+\left(1-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}\right)$ вместимости бочки A.

Из условия задачи следует, что $1-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}$ вместимости бочки A составляют a ведер, откуда, получаем, что вместимость бочки A $\frac{a\,n\,q}{nq-m-p}$, а тогда вместимость бочки B равна $\frac{a\,q(n-m)}{nq-m-p}$ ведра, а вместимость бочки C $\frac{a\,n(p-q)}{nq-m-p}$ ведра.

36. Так как после наполнения бочки C в бочке A остается $\frac{m}{n}$ ее содержимого, то вместимость бочки A равна $\frac{n}{n-m}$ вместимости бочки C. Аналогично, вместимость бочки B равна $\frac{q}{q-p}$ вместимости бочки D. Так как вместимость бочек C и D одинакова, то вместимость бочек A и B равна $\frac{n}{n-m}+\frac{q}{q-p}=2+\left(\frac{n}{n-m}+\frac{q}{q-p}-2\right)$ вместимости бочки C. Из условия задачи следует, что $\frac{n}{n-m}+\frac{q}{q-p}-2$ вместимости бочки C составляют a ведер, то вместимость бочки C равна: $\frac{(q-p)(n-m)\cdot a}{qm+pn-3pm}$ ведер, вместимость бочки A равна: $\frac{(q-p)n\cdot a}{qm+pn-3pm}$ ведер, вместимость бочки B равна: $\frac{(n-m)q\cdot a}{qm+pn-3pm}$ ведер.

37. После первого переливания в ведре останется 4 литра воды. Отливая из ведра 1 литр смеси, мы каждый раз отливаем $\frac{1}{5}$ часть содержащейся в смеси воды. Поэтому после второго переливания в ведре останется $4-\frac{1}{5}\cdot 4=\frac{16}{5}$ литра воды. После третьего переливания в ведре останется $\frac{16}{5}-\frac{1}{5}\cdot\frac{16}{5}=\frac{64}{25}$ литров воды.

38. После первого переливания в бочке останется 99 литров сока. Отливая из бочки 1 литр смеси, мы каждый раз отливаем $\frac{1}{100}$ часть содержащегося в смеси сока. Поэтому после второго переливания в бочке останется $99\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)$ литров сока. А после n переливаний в бочке останется $99\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)^{n-1}$ литров сока. Если бы после этого в бочке осталось 50 литров сока, то выполнялось бы неравенство $99\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)^{n-1}=50$, т.е. $99^n=50\cdot100^{n-1}$, что невозможно. Заметим, что $99\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)^{70}<50<99\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)^{69}$.

Поэтому после 69 переливаний в бочке будет несколько больше 50 литров сока, а после 70 переливаний - несколько меньше 50 литров.

39. 10.

41. $\frac{1}{3}l$, $\frac{2}{3}l$.

42. Очевидно, что в результате человек выпил ровно 1 чашку кофе, а молока выпил столько, сколько долил. Если в первый раз он выпил, а значит, долил p-ю часть чашки, то во второй раз он долил часть $p/2$ и т.д. Если всю операцию он проделал n раз, то молока долил

$$p+\frac{p}{2}+\frac{p}{4}+\dots+\frac{p}{2^{n-1}}=\frac{p}{2^{n-1}}(1+2+\dots+2^{n-1})=\frac{p}{2^{n-1}}(2^n-1)$$

Поэтому молока будет выпито меньше, чем кофе, если $p<2^{n-1}/(2^n-1)$.

43. Очевидно, что если в процессе переливаний мы смешаем спирт и воду в одном сосуде, то после этого получить 60%-ый раствор уже не удастся. И такое переливание мы рассматривать не будем.

Пусть после некоторого переливания в одном сосуде содержатся a л спирта и b л воды, в другом - c л спирта и d л воды, так что $a+c=b+d=1$. Тогда после переливания из второго сосуда в первый p л раствора, из $p<c+d$, концентрация раствора в первом сосуде будет равна $\left(a+\frac{c}{c+d}p\right)/(a+b+p)$ и мы докажем, что при $a>b$ эта концентрация больше $\frac{1}{2}$.

В самом деле,

$$2a(c+d)+2cp>(a+b+p)\cdot(c+d),$$
$$(a-b)(c+d)>p(d-c)$$
$$(a-b)(c+d)>p(a-b),\ \text{ т.е. } p<c+d,$$

а последнее неравенство верное.

Отсюда следует, что в сосуде , первоначально содержащем чистый спирт, концентрация раствора всегда будет больше $\frac{1}{2}$ и поэтому в сосуде, где была вода, получить раствор с концентрацией 60% невозможно.

44. 12 л, 8 л, 7 л.

45. 120, 90 и 70 ведер.

46. Если обозначить через w объем бака, а через x, y и z объемы бидонов, то получим соотношение: $\frac{w}{3}=\frac{x}{2}=\frac{2y}{3}=\frac{3z}{4}$ или $4w=6x=8y=9z$.

Наименьшее общее кратное чисел 4, 6, 8 и 9 равно 72, поэтому каждое из чисел в последней цепочке равенств должно быть кратно 72. Наименьший объем бака мы получим в том случае, когда каждое из них равно 72, откуда $w = 18, x = 12, y = 9, z = 8$.

47. Нельзя. В результате всех переливаний будет перелито $a = k(2-\sqrt{2}) + l\sqrt{2}$ литров, где k и l - целые числа. Если $l - k \neq 0$, то a иррационально; если же $l = k$, то $a = 2k$ - четное число ($a \neq 1$).

48. Если баллон с давлением p_1 подсоединить к баллону с давлением p_2, то в обоих баллонах давление станет равным $\frac{1}{2}(p_1 + p_2) = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2$. Если затем первый баллон подсоединить к баллону с давлением p_3, то в них обоих давление станет равным

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_3\right) = \frac{1}{4}p_1 + \frac{1}{4}p_2 + \frac{1}{2}p_3$$

Продолжая этот процесс, если затем последовательно подсоединить первый баллон к баллонам с давлением $p_4, p_5, \ldots, p_n$, то в итоге давление в первом баллоне станет равным

$$\frac{1}{2^{n-1}}p_1 + \frac{1}{2^{n-1}}p_2 + \cdots + \frac{1}{4}p_{n-1} + \frac{1}{2}p_n .$$

Анализируя эту сумму, можно заметить, что наибольший вклад в нее дает величина p_n, которая входит в сумму с наибольшим коэффициентом $\frac{1}{2}$. Поэтому для того, чтобы эта сумма была максимальна, нужно, чтобы давление p_n было наибольшим из давлений всех баллонов. Действительно, если, напротив, наибольшее давление p отсутствует в списке $p_2, p_3, \ldots, p_n$, то заменим p_n числом p, отчего сумма увеличится на $\frac{1}{2}(p-p_n)$. Если же наибольшее давление p совпадает с некоторым давлением p_m, не равным p_n, то поменяем местами в сумме величины p_m и p_n, отчего она увеличится на $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{m-1}}\right)(p-p_n)$.

Итак, в любом случае, если $p_n < p$, то итоговое давление можно увеличить.

Аналогично получаем, что давление p_{n-1} должно быть наибольшим из оставшихся давлений и т.д.

Вообще, давления $p_2, p_3, \ldots, p_n$ должны образовывать возрастающую последовательность наибольших из имеющих давлений. Кроме того, каждый баллон должен однажды быть подключенным к первому баллону. В самом деле, если например, давление p не участвует в указанной выше сумме, то эту сумму можно еще увеличить на $\frac{1}{2^{m-1}}(p-p_1)$, заменив слагаемое $\frac{1}{2^{m-1}}p_1$ суммой $\frac{1}{2^{m-1}}p_1+\frac{1}{2^{m-1}}p$.

Таким образом, наибольшее значение давления в первом баллоне можно получить, подсоединив его поочередно к каждому баллону в возрастающей последовательности их давлений.

Можно доказать, что большего давления по сравнению с давлением, полученным указанным способом, нельзя достичь, даже если разрешить соединить сразу несколько любых баллонов и использовать их более чем по одному разу.

49. Первый способ. Можно вывести искомые формулы, пользуясь методом математической индукции. Легко видеть, что эти формулы имеют вид при n=1. Так как

$a_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, то, предполагая формулы справедливыми при индексе, равном n-1, докажем справедливость их при индексе, равном n. По предположению имеем

$$a_{n-1} = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 - \frac{1}{4^{n-1}}\right),\ \ \mathrm{b}_n = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 + \frac{1}{2\cdot 4^{n-1}}\right)$$

Тогда

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 - \frac{1}{4^{n-1}}\right),$$

И, следовательно, формула для a_n имеет место при любом целом положительном n. Остается доказать, что формула для b_n точно так же справедлива при любом целом положительном n.

Имеем:

$$b_n = \frac{a_n + b_{n-1}}{2} = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 - \frac{1}{2\cdot 4^{n-1}}\right)$$

и доказательство закончено.

Второй способ. Легко видеть, что

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2};\ b_n = \frac{a_{n-1} + 3b_{n-1}}{4}.$$

Умножая правые и левые части этих равенств на некоторый множитель λ, получаем

$$a_n + \lambda b_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\lambda\right)a_{n-1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\lambda\right)b_{n-1}.$$

Подберем λ так, чтобы

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\lambda = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\lambda\right)\lambda,$$

т.е. $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -1$

Итак, при этих значениях λ имеет место равенство

$$a_n + \lambda b_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\lambda\right)\left(a_{n-1} + \lambda b_{n-1}\right),$$

справедливое при всех положительных значениях *n*.
Полагая здесь *k* последовательно равным 1, 2,...,*n*, получим

$$a_k + \lambda b_k = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\lambda\right)\left(a_{k-1} + \lambda b_{k-1}\right)$$

Перемножая эти равенства почленно, найдем:

$a_n + \lambda b_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\lambda\right)^n (a + \lambda b)$ при любом целом положительном *n* и при $\lambda = 2$ и $\lambda = -1$.

Подставляя эти значения λ, найдем

$$a_n + 2b_n = a + 2b, \quad a_n - b_n = \frac{1}{4^n}(a - b).$$

Отсюда имеем искомые формулы.
Третий способ: При *n*=1 формулы верны.
Предположим, что они верны для *n*=*k*, и докажем, что они верны для *n*=*k*+1:

$$a_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2} = \frac{1}{4}\left(2a + \frac{2}{3}(b - a)\left(2 - \frac{1}{2\cdot 4^k}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(2a + \frac{2}{3}(b - a)2\left(1 - \frac{1}{4^{k+1}}\right)\right) = a + \frac{2}{3}(b - a)\left(1 - \frac{1}{4^{k+1}}\right).$$

$$b_{k+1} = \frac{b_k + a_{k+1}}{2} = \frac{1}{2}\left(2a + \frac{2}{3}(b - a)\left(2 + \frac{1}{2\cdot 4^k} - \frac{1}{4^{k+1}}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(2a + \frac{2}{3}(b - a)\left(2 + \frac{4 - 2}{2\cdot 4^{k+1}}\right)\right) = a + \frac{2}{3}(b - a)\left(1 + \frac{1}{2\cdot 4^{k+1}}\right).$$

Замечание. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}=0$, то предел последовательности равен $\frac{a+2b}{3}$.

§3. *Задача о размене*

50. а) (6,0,0), (4,1,0), (2,2,0), (0,3,0), (3,0,1), (1,1,1), (0,0,2).

б) (8,0,0,0), (6,1,0,0), (5,0,1,0), (4,2,0,0), (4,0,0,1), (3,1,1,0), (2,3,0,0), (2,1,0,1), (2,0,2,0), (1,2,1,0), (1,0,1,1), (0,4,0,0), (0,2,0,1), (0,1,2,0), (0,0,0,2).

51. Очевидно, что монет по 3 копейки должно быть нечетное число. Значит, для размена 25 копеек можно взять 1 монету в 3 копейки и 11 монет по 2 копейки, или 3 монеты по 3 копейки и 8 монет по 2 копейки, или 5 монет по 3 коп. и 5 монет по 2 копейки, или 7 монет по 3 коп. и 2 монеты по 2 коп. Следовательно, размен можно осуществить 4 способами: (1,11), (3,8), (5,5), (7,2).

52. (7,8).

53. (1,4,17), (3,1,18).

54. Составим уравнение $15x+20y=500$, т.е. $3x+4y=100$, которое имеет решение $x=4t$, $y=25-3t$, где $t=0, 1, ..., 8$. Следовательно, можно разменять 9 способами.

55. Система уравнений $3x+5y=25$, $x+y=10$ не имеет целых положительных решений.

56. Уравнение $3x+5y=13$ имеет решение $x=1+5t$, $y=2-3t$, где $t=0$.

57. Задачу можно сформулировать так: «Доказать, что любое натуральное число $n>7$, можно представить в виде $3x+5y$, где x и y - натуральные числа.» Всякое натуральное число n можно представить в виде: 0) $n=3k$; 1) $n=3k+1$; 2) $n=3k+2$.

0) Нужно k монет достоинством 3 копейки.

1) Пусть k=m+3, тогда
$n = 3(m+1)+1 = 3m+10 = 3m+2\cdot 5$.
Следовательно, нужно m=k-3 монет по 3 копейки и 2 монеты по 5 копеек.

2) Пусть k=m+6, тогда
$n = 3(m+6)+2 = 3m+20 = 3m+4\cdot 5$.
Следовательно, нужно m=k-6 монет по 3 копейки и 4 монеты по 5 копеек.

58. Составим уравнение 3x-5y=n. Возможны случаи:
0) n=3k; 1) n=3k+1; 2) n=3k+2. соответственно с решениями: 0) $x = k+5t, y = 3t$;
1) $x = (k+2)+5t, y = 1+3t$,
2) $x = (k+4)+5t, y = 2+3t$.

Достаточно иметь две пятирублевые купюры.

59. Составим систему уравнений $x+10y+100z = 1000$, $x+y+z = 40$, откуда следует, что $3(y+z) = 320$, что невозможно.

60. Да. (2,4,1).

61. Составим систему уравнений $15x+20y+25z = 420$, $x+y+z = 27$, откуда следует, что $x = 24+z, y = 3-2z$. Так как $y > 0$, то $2z < 3$, т.е. $z = 1$. Следовательно, $x = 25$, $y = 1$.

62. Составим уравнение $60x+80y = 1000$, т.е. $3x+4y = 50$, которое имеет решение $x = 10+4t, y = 5-3t$, где $t = 0$ и $t = 1$. При $t = 0$ понадобится 15 мешков.

63. Составим уравнение $7x+9y = 205$, которое имеет решение $x = 28+9t, y = 1-7t$, где $t = 0,-1,-2,-3$. Наименьшее количество банок 23.

64. Составим уравнение $17x+19y=300$, которое имеет решение $x=2+19t, y=14-17t$, где $t=0$.

65. Составим систему уравнений $x+y+z=20$, $x+4y+6z=40$, которая имеет решение $x=16-2t, y=5t, z=4-3t$, где $t=0;1$. По смыслу задачи нужно выбрать $t=1$, так как все виды предметов были куплены.

66. 15; 10+3+2; 10+2+2+1; 10+3+1+1; 10+2+1+1+1; 3+3+3+2+2+1+1.

67. Составим систему уравнений $x+y=50, \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=19$, которая имеет решение $x=14, y=36$. Значит, в кошельке 2 руб 22 коп.

68. Составим систему уравнений $4x+7y=17n, x+6y=17m$, где n, m - натуральные числа. Решая систему, получаем $x=-7m+6n, y=4m-n$.

69. Поскольку десятикопеечная монета сюда обязательно входит, то, взяв по одной из имеющихся у школьника медных монет, мы получим 5 копеек. Если у школьника есть однокопеечные монеты, то оставшиеся 4 копейки можно получить либо как 2+2, либо как 1+3. И тот и другой способ не годится, так как в наборе, составляющем 5 копеек, будут две одинаковые монеты. Для медных монет остаются две возможности: либо у школьника только пятикопеечные монеты, либо монеты достоинством в 2 и 3 копейки.

Во втором варианте медных монет может быть либо 4, либо 8, иначе десятикопеечных монет будет меньше, чем медных. Оба случая не годятся, так как в первом десятикопеечных монет будет 9, а во втором 8. Следовательно, у школьника есть только 8 десятикопеечных и 4 пятикопеечных монет.

70. Составим уравнение $3x+5y=45$, которое имеет решение $x=5t, y=9-3t$, где $t=0,1,2,3$.

71. Пассажиры оставили в кассе не менее $\frac{4n\cdot 5}{20}=n$ монет: кроме того, у каждого из них осталась хотя бы одна монета. Следовательно, у пассажиров было не менее $4n+n=5n$ монет.

74. Составим систему уравнений $3x+5y=46$, $x+y=10$, которая имеет решение $x=2$, $y=8$.

75. Составим систему уравнений $x+y+z=40$, $x+4y+12z=100$, которая имеет решение $x=20-8t$, $y=20+11t$, $z=-3t$, где $t=0$; -1. По смыслу задачи нужно выбрать $t=-1$.

76. 8 способов.

77. Смотри задачу о размене.

78. Обозначим число целых положительных решений уравнения $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ через $N_n(m)$. Очевидно, что $N_1(m)=1$. Вычислим $N_2(m)$, т.е. число решений уравнения $x_1+x_2=m$.

В этом уравнении x_1 может принимать следующие значения: 1, 2, ..., m-1 и, следовательно, уравнение имеет следующую систему решений:

$(1,m-1),(2,m-2),...,(m-1,1)$, т.е., $N_2(m)=m-1$. Перейдем теперь к вычислению $N_3(m)$, т.е. к определению числа решений уравнения: $x_1+x_2+x_3=m$. Будем давать x_3 значения 1, 2, ..., m-2. Очевидно, что

$$N_3(m)=N_2(m-1)+N_2(m-2)+\cdots+N_2(2)=(m-2)+$$

$$+(m-3)+\ldots+1=\frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}=C_{m-1}^2$$

Докажем по индукции, что

$$N_n(m) = C_{m-1}^{n-1} = \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{(n-1)!}$$

Очевидно, что

$$N_n(m) = N_{n-1}(m-1) + N_{n-1}(m-2) + \cdots + N_{n-1}(n-1).$$

Предполагая, что $N_{n-1}(m) = C_{m-1}^{n-2}$, имеем по свойству сочетаний

$$N_n(m) = C_{m-2}^{n-2} + C_{m-3}^{n-2} + \cdots + C_{n+2}^{n-2} = C_{m-1}^{n-1}.$$

79. Первый способ. Общий вид рассматриваемых уравнений

$$kx + (k+1)y = n - k + 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n+1. \quad (1)$$

Перепишем это уравнение следующим образом

$k(x + y + 1) = n + 1$ и положим $x + y + 1 = z$.

Тогда $y = n + 1 - kz, x = (k+1)z - (n+2)$.

Каково бы ни было z, эти выражения дают решения уравнения (1). Посмотрим, какие значения должно принимать z для того, чтобы x и y были целыми и неотрицательными.

Итак, должны иметь место неравенства:

$(n+1) - kz \geq 0, (k+1)z - (n+2) \geq 0$ отсюда

$$\frac{n+2}{k+1} \leq z \leq \frac{n+1}{k}$$

и z должно быть целым. Если n+2 не делится на k+1, то z может принимать значения:

$$\left[\frac{n+2}{k+1}\right] + 1, \left[\frac{n+2}{k+1}\right] + 2, \ldots, \left[\frac{n+1}{k}\right]$$

Обозначим число решений уравнения (1) через N_k.

Тогда в этом случае $N_k = \left[\frac{n+1}{k}\right] - \left[\frac{n+2}{k+1}\right]$.

Если же n+2 делится на k+1, то

$$N_k = \left[\frac{n+1}{k}\right] - \frac{n+2}{k+1} + 1.$$

Но если n+2 не делится на k+1, то

$$\left[\frac{n+2}{k+1}\right]=\left[\frac{n+1}{k+1}\right];$$

если же n+2 делится на k+1, то

$$\frac{n+2}{k+1}-1=\left[\frac{n+1}{k+1}\right].$$

Итак, во всех случаях:

$$N_k=\left[\frac{n+1}{k}\right]-\left[\frac{n+1}{k+1}\right].$$

Полное же число решений равно:

$$N_1+N_2+\cdots+N_k=\left[\frac{n+1}{1}\right]-\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]-\left[\frac{n+1}{3}\right]+$$

$$+\cdots+\left[\frac{n+1}{n}\right]-\left[\frac{n+1}{n+1}\right]+\left[\frac{n+1}{n+1}\right]-\left[\frac{n+1}{n+2}\right]=$$

$$=\left[\frac{n+1}{1}\right]-\left[\frac{n+1}{n+2}\right]=n+1.$$

Второй способ. Имеем

$$\frac{1}{1-q^k}=\sum_{x=0}^{\infty}q^{kx};\quad \frac{1}{1-q^{k+1}}=\sum_{y=0}^{\infty}q^{(k+1)y}$$

Поэтому

$$\frac{q^{k-1}}{(1-q^k)(1-q^{k+1})}=\sum_{x=0}^{\infty}\ \sum_{y=0}^{\infty}q^{kx+(k+1)y+k-1}$$

Если правую часть этого равенства развернуть по степеням q, то легко видеть, что коэффициент при q^n в этом разложении будет равен N_k, т.е. равен числу решений уравнения: $kx+(k+1)y=n-k+1$.

Таким образом, величина $N_1+N_2+\cdots+N_{n+1}$ будет коэффициентом при q^n в следующем разложении.

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q}{(1-q^2)(1-q^3)}+\cdots+\frac{q^{n+1}}{(1-q^{n+2})(1-q^{n+3})}+\cdots=$$

$$=\frac{1}{q(1-q)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1-q^{k+1}}-\frac{1}{1-q^{k+2}}\right)=\frac{1}{q(1-q)}\cdot\left(\frac{1}{1-q}-1\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n.$$

Отсюда и следует, что $N_1+N_2+\cdots+N_{n+1}=n+1$.

80. Общий вид уравнений будет

$k^2x+(k+1)^2y=((k+1)^2-k^2)n-k^2,\ k=1,2,...,n$.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что одно решение будет: $x=-(n+1), y=n$.

Тогда, как известно, все решения будут получаться из выражений

$x=-(n+1)+(p+1)^2t, y=n-p^2t$, где p есть одно из значений, принимаемых k.

Для того, чтобы x и y были неотрицательными, необходимо и достаточно, чтобы t принимало целые значения, удовлетворяющие неравенствам

$$\frac{n+1}{(p+1)^2}\le t\le\frac{n}{p^2}.$$

Далее, рассматривая отдельно два случая ($n+1$ делится на $(p+1)^2$ и $n+1$ на $(p+1)^2$ не делится), приходим к искомому результату.

81. Числа $x_1,x_2,...,x_n$ удовлетворяют уравнению

$$x_1+2x_2+...+nx_n=a \quad (1)$$

в том и только том случае, если числа $y_1=x_1-1$, $y_2=x_2-1,...,y_n=x_n-1$ удовлетворяют уравнению

$$(y_1+1)+2(y_2+1)+...+n(y_n+1)=a,$$

которое, как нетрудно видеть, преобразуется к виду

$$y_1+2y_2+\ldots+ny_n=a-\frac{n(n+1)}{2}. \qquad (2)$$

Следовательно, x_i будут положительными целыми числами в том и только в том случае, если y_i - неотрицательные числа. Таким образом, любому набору значений ($x_1,x_2,\ldots,x_n$), удовлетворяющие уравнению (1), соответствует некоторый набор значений ($y_1,y_2,\ldots,y_n$), удовлетворяющих уравнению (2). Более того, никакие наборы значений ($y_1,y_2,\ldots,y_n$), кроме тех, которые соответствую наборам значений ($x_1,x_2,\ldots,x_n$), удовлетворяющих уравнению (1), не являются решениями уравнения (2). Следовательно, уравнения (1) и (2) обладают одинаковым числом решений.

82. а) n-k должно быть нечетно; б) единственный исключительный набор (при нечетном n-k) $a_1=a_2=\ldots=a_k=1/2$.

Пусть $a_1=a_2=\ldots=a_k$ - исключительный набор. Положим $n_1=n-k+1$, $n_2=n_3=\ldots=n_k=1$; тогда $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$ и одно из чисел a_in_i должно быть целым. Но при $i\geq 2$ числа $a_in_i=a_i$ - не целые, поэтому $a_1(n-k+1)$ - целое, то есть число $a_1(n-k)$ - не целое. Положим теперь $n_1=n-k$, $n_2=2, n_3=\ldots=n_k=1$. Единственное из произведений a_in_i, которое может быть целым для этих n_i, - это $a_2n_2=2a_2$, следовательно, $a_2=1/2$.

Точно так же доказывается, что $a_i=1/2$ при всех i.

Но мы уже видели, что число $a_1(n-k+1)=(n-k+1)/2$ - целое; значит, $n-k$ - нечетное число.

83. а) Разбиение числа n в сумму натуральных слагаемых будем называть отмеченным, если одно из слагаемых выделено среди остальных (подчеркнуть); отмеченные разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, мы будем считать одинаковыми (Например, все отмеченные разбиения числа 4; выделенные элементы записаны первыми: $4=\underline{4}$; $4=\underline{3}+1$; $4=\underline{2}+2$; $4=\underline{2}+1+1$; $4=\underline{1}+3$; $4=\underline{1}+2+1$; $4=\underline{1}+1+1+1$).

Заметим, что если k - разброс некоторого разбиения (неотмеченного), то из этого разбиения можно получить ровно k отмеченных разбиений. Поэтому общее количество отмеченных разбиений числа n равно $q(n)$. С другой стороны, если из любого отмеченного разбиения, кроме разбиения, состоящего из единственного слагаемого, выкинуть подчеркнутый элемент, получится разбиение некоторого числа, меньшего чем n. И наоборот, если $m<n$, то по любому разбиению числа m можно однозначно восстановить отмеченное разбиение числа n:

надо к разбиению числа m добавить слагаемое n-m и подчеркнуть его (взаимно - однозначное соответствие между отмеченными разбиениями числа 4, кроме разбиения $4=\underline{4}$, и разбиениями чисел, меньших 4, изображается следующим образом:

$4=\underline{3}+1 \quad\leftrightarrow\quad 1=1$
$4=\underline{2}+2 \quad\leftrightarrow\quad 2=2$
$4=\underline{2}+1+1 \quad\leftrightarrow\quad 2=1+1$
$4=\underline{1}+3 \quad\leftrightarrow\quad 3=3$
$4=\underline{1}+2+1 \quad\leftrightarrow\quad 3=2+1$
$4=\underline{1}+1+1+1 \quad\leftrightarrow\quad 3=1+1+1$.)

Но количество разбиений чисел, меньших n, равно $p(1)+p(2)+...+p(n-1)$.

Следовательно, $q(n)-1=p(1)+p(2)+...+p(n-1)$

Другими словами идею этого решения можно изложить так: если к каждому из $p(1)+p(2)+...+p(n-1)$ разбиений чисел $m=1,2,...,n-1$ добавить одно слагаемое n-m, то мы получим каждое разбиение числа n (кроме тривиального $n=n$) столько раз, каков его разброс.

б) Достаточно доказать, что разброс любого разбиения числа n в сумму натуральных слагаемых не превосходит $\sqrt{2n}$. Докажем это утверждение.

Пусть $a_1,\ldots,a_k$ - все различные слагаемые, причем $0 < a_1 < \ldots < a_k$. Тогда, с одной стороны, $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \le n$, а с другой стороны, $a_1 \ge 1, a_2 \ge 2, \ldots, a_k \ge k$ (действительно, $a_1 \ge 1, a_2 > a_1 > 1$, следовательно, $a_3 \ge 3$, и т.д.). Поэтому $n \ge a_1 + a_2 + \ldots + a_k \ge 1 + 2 + \ldots + k = k(k+1)/2 \ge k^2/2$, то есть $k \le \sqrt{2n}$.

84. Доказательство проведем индукцией по n. Для n=1 очевидно. Допустим, что наше утверждение верно для всех значений параметра, меньших n, и рассмотрим множество $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Если m=n, то (n+1)/2=k - целое и нужное разбиение таково:
$\{n\}, \{1, n-1\}, \{2, n-2\}, \ldots, \{(n+1)/2, (n+1)/2\}$;
если m=n+1, то n четно и разбиение имеет вид
$\{1, n\}, \{2, n-1\}, \ldots, \{n/2, n/2+1\}$.

Теперь рассмотрим три случая.

1) $n+1 < m < 2n, m$ - нечетно. Выделим из набора S_n набор S_{m-n-1}; остальные 2n-m+1 чисел можно разбить на пары с суммой m:
$\{m-n, n\}, \{m-n+1, n-1\}, \ldots, \{(m-1)/2, (m+1)/2\}$.
Сумма чисел набора S_{m-n+1} равна
$$\frac{1}{2}(m-n-1)(m-n) = \frac{1}{2}(m^2 - m(2n+1) + n(n+1)) =$$
$$= m\left(\frac{m-2n-1}{2} + k\right)$$ и делится на m,

причем $m \geq m - n - 1$, поэтому эти числа по предположению индукции также можно разбить на группы с суммой m в каждой группе.

2) $n + 1 < m < 2n$, m - четно. Здесь мы тоже выделим набор S_{m-n-1}; а остальные числа разобьем на пары с суммой m: $\{m - n, n\}, \{m - n + 1, n - 1\}, \ldots, \{m/2 - 1, m/2 + 1\}$ и еще одно число $m/2$. Сумму чисел набора S_{m-n+1} представим в виде $(m - 2n - 1 + 2k)(m/2)$. Она делится на $m/2$, причем $m/2 \geq m - n - 1$, так как $m/2 < n$. Поэтому набор S_{m-n-1} можно разбить на нечетное число $m - 2n - 1 + 2k$ групп с суммой $m/2$, к одной из них присоединить $m/2$, а остальное объединить попарно - получатся группы с суммой m.

3) $m \geq 2n$. Будем разбивать набор S_n на k групп с равной суммой, которая уже автоматически будет равна m. Заметим, что $k = n(n+1)/2m \leq (n+1)/4$ и поэтому $n - 2k \geq 2k - 1 > 0$.

Выделим из S_n набор S_{n-2k}. Сумма чисел этого набора

$$\frac{1}{2}(n - 2k)(n - 2k + 1) = \frac{1}{2}n(n+1) - k(2n+1) + 2k^2$$

делится на k, причем частное от этого деления не меньше n-$2k$ так как $(n - 2k)(n - 2k + 1)/2 = (n - 2k + 1)/2 \geq k$.

Следовательно, S_{n-2k} можно разбить по предположению индукции на k равных по сумме групп. Остальные $2k$ чисел разбиваются на k пар с равной суммой: $\{n - 2k + 1, n\}, \{n - 2k + 2, n - 1\}, \ldots$ Остается объединить каждую группу с одной из пар.

85. Составим систему уравнений $x+y+z=10$, $8x+4y+3z=57$, которая имеет решение $x=5+t$, $y=2-5t$, $z=3+4t$, где $t=0$.

86. Составим систему $8x$-$5y$=13, $x+y \leq 20$, которая имеет решение x=6, y=7.

87. Составим уравнение $13x+16y=300$, которое имеет решение $x=12+16t$, $y=9-13t$, где t=0.

88. Составим уравнение $13x+7y=218$, которое имеет решение $x=6+7t$, $y=20-13t$, где t=0; -1. Таким образом, задача имеет два решения: можно взять 6 труб по 13 м и 20 труб по 7 м, либо 13 труб по 13 м и 7 труб по 7 м.

89. Составим уравнение $19x+37y=300$, которое имеет решение $x=8+37t$, $y=4-19t$, где t=0.

90. $x = mn,\ y = nk,\ z = mk,\ n(k-m) = mk-1.$

Положив k-m=1, получаем $x = m(m^2 + m - 1)$,

$y = (m+1)(m^2 + m - 1),\ z = m(m+1)$.

91. Да.

92. На билет в кино школьник истратил не менее 30 коп; за обед он заплатил в 2 раза больше, то есть не менее 60 коп. Но так как обед был оплачен тремя монетами, получаем, что обед стоил ровно 60 коп, а билет в кино 30 коп. Учитывая теперь, что двадцатикопеечных монет у школьника было больше, чем пятнадцатикопеечных, находим, что у него было две монеты по 15 коп. и 6 монет по 20 коп.

93. Заметим, что 15-копеечная монета входит в сумму 1 руб 25 коп в нечетном количестве. Кроме того, так как 20-копеечная монета при размене дает одну 15-копеечную монету, то возможны следующие случаи:

$$125 = 1 \cdot 15 + 11 \cdot 10,$$
$$125 = 3 \cdot 15 + 8 \cdot 10,$$
$$125 = 5 \cdot 15 + 5 \cdot 10,$$
$$125 = 7 \cdot 15 + 2 \cdot 10,$$
$$125 = 3 \cdot 15 + 4 \cdot 20.$$

94. Задачу нужно решать с конца, отправляясь от числа 1979, платя за каждое деление на 3 по 5 коп, а за каждое вычитание 4 - по 2 коп, стараясь за минимальную сумму получить число 1. Разумнее предположить, что выгоднее делить, если это возможно. Это правило дает последовательность чисел 1979, 1973, 1971, 657, 219, 73, 69, 23, 19, 15, 5, 1, что обойдется в 37 коп. Полученная сумма действительно минимальна из всех возможных.

96. Так как тремя монетами нельзя уплатить более 150 копеек и цена альбома делится на 50, то альбом стоил либо 59, либо 118 копеек. В первом случае ученик уплатил бы всего 60 коп., но это нельзя сделать тремя разными монетами, и поэтому альбом стоил 1 руб. 18 коп.

97. Пусть x - стоимость 1 л молока; если бы он стоил на 1 коп дороже, то сдача бы не потребовалась, и поэтому х-1 является, как следует из второго условия задачи, нечетным делителем числа 100, т.е. x+1=5 или x+1=25. Следовательно, x=4 или x=24. Легко проверить, что оба эти значения удовлетворяют условию задачи.

98. Решим задачу, приемом предположительной замены.

1) $3\cdot 138 = 414$
2) 540 – 414=126
3) 5 – 3=2
4) 126:2=63 аршин синего сукна.
5) 138 – 63=75 аршин черного сукна.

99. 4562.

100. 108.

101. Пусть $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, тогда

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)} = \frac{1}{6(1-z)^3} + \frac{1}{4(1-z)^2} +$$

$$+\frac{17}{72(1-z)} + \frac{1}{8(1+z)} + \frac{1}{9(1-\omega z)} + \frac{1}{9(1-\omega^2 z)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(n+3)^2}{12}-\frac{7}{12}+\frac{(-1)^n}{8}+\frac{2}{9}\cos\frac{2n\pi}{3}\right) z^n .$$

Имеем: $\left|-\frac{7}{12}+\frac{(-1)^n}{8}+\frac{2}{9}\cos\frac{2n\pi}{3}\right| \le \frac{32}{72} < \frac{1}{2}$.

102. [88] стр. 186.

103. Разложением на простейшие дроби, получаем для

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = (1-z^{a_1})^{-1}(1-z^{a_2})^{-1}...(1-z^{a_k})^{-1}$$

«главный член» $\frac{1}{a_1 a_2 ... a_k}\frac{1}{(1-z)^k}$.

Так как $a_1, a_2, ..., a_k$ не имеют общего делителя, то знаменатели остальных членов будут самое большее степени l-1. Отсюда и вытекает утверждение.

104. C_2^{n-2} .

105. Пусть k - целое неотрицательное. Число решений уравнения $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_p| = k$ равно коэффициенту a_k при z^n в разложении

$$(1+2z+2z^2+2z^3+...)^p = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^p = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k .$$

Следовательно, искомое число будет равно коэффициенту $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ при z^n в разложении

$$\frac{(1+z)^p}{(1-z)^{p+1}} = \frac{(2z+1-z)^p}{(1-z)^{p+1}} = (2z)^p(1-z)^{-p-1} +$$
$$+ C_1^p (2z)^{p-1}(1-z)^{-p} + C_2^p (2z)^{p-2}(1-z)^{-p+1} + \cdots,$$

т.е. равно

$$2^p C_p^n + 2^{p-1} C_1^p C_{p-1}^n + 2^{p-2} C_2^p C_{p-2}^n + \cdots + 1 .$$

106. Так как $z=n-x-y$, то $x+y<n$, $x>0$, $y>0$; далее, $x \le n-x, y-x \le n-x-y \le x+y$.

Отсюда следует, что искомое число равно числу решений неравенств $1 \le x \le \frac{n}{2}, \frac{n}{2} - x \le y \le \frac{n}{2}, y > 0, x+y < n$.

107. а) да; б) нет; в) да.

108. Интересующими нас числами являются $a, 2a, 3a, \ldots, ka$, где $ka \le n < (k+1)a$, следовательно, $k = \left[\frac{n}{a}\right]$.

109. $\left[f(a)\right] + \left[f(a+1)\right] + \left[f(a+2)\right] + \cdots + \left[f(b-1)\right] + \left[f(b)\right]$.

110. Левая часть дает число целых точек в области $1 \le x \le p-1, 0 \le y \le \frac{q}{p}x$. Во всем прямоугольнике $1 \le x \le p-1, 0 \le y \le q-1$ лежит $(p-1)(q-1)$ целых точек. Они расположены симметрично относительно точки $x = \frac{p}{2}$, $y = \frac{q}{2}$ и находятся как выше, так и ниже прямой $y = \frac{q}{p}x$ в одинаковом числе; на самой же прямой их нет ни одной, ибо точка этой прямой может быть целой, лишь когда x- целое кратное p.

111. Речь идет о целых точках в прямоугольнике $1 \le x \le p'$, $1 \le y \le q'$.

Общее количество их равно $p'q'$. Первые p' членов в левой части дают число целых точек, лежащих ниже прямой $y = \frac{q}{p}x$, последние q' членов - число целых точек, лежащих выше этой прямой.

§4. Задача о взвешивании

112. Требуется 5 взвешиваний.

113. Требуется 3 взвешивания.

114. Занумеруем мешки числами от 1 до n, из каждого мешка взяв столько монет, каков его номер и взвесим вместе монеты, всего их s=1+2+...+n штук. Если вес настоящей монеты равен a, а фальшивые монеты содержатся в мешке с номерами k, то весы покажут

$$P_1 = a + 2a + \ldots + k(a-1) + \ldots + na = s \cdot ak .$$

Взвесим теперь s монет из первого мешка. Если все они фальшивые, то их общий вес P_2 окажется меньше P_1; если все настоящие, то $P_2 > P_1$. Поэтому если $P_2 < P_1$, то фальшивые монеты в первом мешке. В противном случае, мы узнаем вес sa настоящих монет, и разность $P_2 - P_1$ даст число k фальшивых монет, т.е. номер мешка, который их содержит. Таким образом, найти мешок с фальшивыми монетами, можно двумя взвешиваниями. Очевидно, что одним взвешиванием обойтись не удастся.

115. Сравним вначале по весу первую пару предметов, затем вторую пару, и, наконец, - предмет, который оказался более тяжелом в первой паре, с более тяжелым предметом второй пары. Мы можем записать результаты этих взвешиваний как *A*<*B*<*C*<*D*.

Пятый предмет *E* может быть включен в ряд *A*-*B*-*C*, для чего надо сравнить его сперва с *B*; если он окажется тяжелее *B*, мы сравним его с *C*, а если *E* легче *B*, мы сравним его с *A*. Таким способом, с помощью двух взвешиваний мы включим *E* в последовательность *A*-*B*-*C* и придем к одной из следующих четырех систем:

1) $A < B < C < E > D$, 2) $A < B < E < C > D$,
3) $E < A < B < C > D$, 1) $A < E < B < C > D$.

Сделано 5 взвешиваний. Если в результате мы пришли к 1), сравним далее D с A, если окажется, что $D<A$, то задача решена; если же окажется, что $A<D$, мы сравним D с B - это седьмое взвешивание завершит процесс, и мы получим $A<D<B<C<E$ или $A<B<D<C<E$. Если первые 5 взвешиваний дадут 2), то мы можем включить D в ряд с помощью двух взвешиваний, начиная сравнения D с B - всего мы используем опять 7 взвешиваний. Системы 3) и 4) отличаются от 2) только обозначениями, так что здесь рассуждения по существу, не отличаются от относящихся к случаю 2). Следовательно, семи взвешиваний всегда достаточно для упорядочения пяти предметов.

116. Смотри предыдущую задачу.

118. Составим уравнение $100x+450y=2500$, откуда $2x+9y=50$, которое имеет решение $x=7+9t$, $y=4-2t$, где $t=0$; 1. По смыслу задачи выбираем $t=0$.

120. Можно. Десять гирь с массами $n+1, n+2, ..., n+10$ граммов можно разделить на 5 групп так, чтобы в каждую группу попали две гири с общей массой $2n+11$.

Номер группы	I	II	III	IV	V
	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$	$n+5$
Массы гирь	$n+10$	$n+9$	$n+8$	$n+7$	$n+6$.

Распределим в соответствии с этой схемой гири массой от 16 г до 25 г, от 26 г до 35 г,..., от 1976 г до 1985 г. Оставшиеся 15 гирь можно расположить следующим образом:

Номер группы	I	II	III	IV	V
	1	2	3	4	5
Массы гирь	10	7	9	6	5
	13	15	12	14	11

Существуют и другие схемы распределения гирь.

122. Пусть плечи весов равны l_1 и l_2 соответственно. Тогда первый раз продавец отпустил $\frac{l_2}{l_1}$ кг товара, а во второй раз он отпустил $\frac{l_1}{l_2}$ кг. Таким образом, он отпустил покупателю товар в количестве

$$p = \frac{l_2}{l_1} + \frac{l_1}{l_2}$$

В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{l_2}{l_1} + \frac{l_1}{l_2} \geq 2\sqrt{\frac{l_2 \cdot l_1}{l_1 l_2}} = 2,$$

где равенство достигается лишь при $l_1 = l_2$. Таким образом, продавец отпустил больше товара, чем следовало.

123. Если отношение плеч весов было a:b, то вес x, полученный при первом взвешивании, из соотношения $a \cdot x = 1 \cdot b$ равен b/a, а вес y, полученный при втором взвешивании, равен a/b. Но сумма $b/a + a/b > 2$, если $a \neq b$, так как эта сумма равна $(a-b)^2/ab + 2$.

Правильно же взвесить 1 кг орехов можно так: уравновесить гирю орехами, а потом снять гирю и положить на ее место орехи до уравновешивания.

124. 4.

125. 20.

126. Возьмем от первой машины один мяч, от второй - два, от третьей - три... от десятой - десять. Найдем их общую массу. Это взвешивание будет единственным. Если бы все мячи были массой по 10 г, то весы показали бы $10 \cdot (1 + 2 + ... + 10) = 550$ г. Если первая машина выпускает брак, то общая масса всех взятых мячей окажется на 5 г меньше. Если вторая, то на 10 г... если 10-я, то на 50 г. Нужно только запомнить, сколько мячей брали от каждой машины.

127. Смотри задачу о фальшивой монете.

Покажем, что при определении легкой монеты из 12 достаточно трех взвешиваний. Все монеты разделим на 4 кучки по 3 монеты в каждой. Из этих четырех кучек двумя взвешиваниями (двумя - в худшем случае, может оказаться достаточным одного) выделим наиболее легкую. Из трех монет одну, наиболее легкую можно определить с помощью одного взвешивания.

Если бы в условии задачи не было оговорено, что фальшивая монета более легкая, а известно бы было только, что она отличается от стандартных по массе, то определение того, является ли она более легкой или более тяжелой, можно провести при еще одном дополнительном взвешивании. Например, когда нестандартная по массе монета останется среди трех проверяемых.

129. Достаточно сделать 5 поездок, так как за каждую поездку, кроме последней, можно увести не менее 2 тонн. Меньше 5 поездок может не хватить, например, если весь груз расфасовать поровну в 13 ящиков.

130. Достаточно четырех взвешиваний. Сначала взвешиваем 1 кг песку, затем еще 2 кг (положив на одну чашку весов уже взвешенный песок и гирю.), затем еще 3 кг (сложив на одной чашке 1+2=3 кг взвешенного песка) и, наконец, еще 7 кг (сложив на одной чашке весь песок и гирю). Меньшим числом взвешиваний обойтись нельзя, так как за три взвешивания можно набрать максимум 1+2+4=7 кг песку.

131. Если гири можно класть только на одну чашку весов, то необходимо иметь, как минимум, четыре гири. Годится, например, набор гирь в 1, 2, 4, 8 кг. Если же разрешить класть гири на обе чашки, то необходимо иметь три гири. Так, из трех гирь в 1, 3, 9 кг можно скомбинировать любой вес от 1 до 13 кг.

132. а) 3; б) 5; в) 7.

§5. *Обыкновенные дроби*

133. 7. **134.** 19. **135.** 20. **136.** $x=\dfrac{ad-bc}{c-d}$ **137.** $x=\dfrac{ad-bc}{d-c}$

138. $x=\dfrac{bc-ad}{c+d}$ **139.** $x=\dfrac{ad-bc}{c+d}$ **140-146.** [37]

147. Допустим, что НОД(a+b, ad)=d>1. Обозначим через p простой делитель числа d (если число d само простое, то p=d). Тогда $(a+b)\vdots p$ и $(ab)\vdots p$; последнее возможно в трех случаях:

1) $a\vdots p$, а b не $\vdots p$;

2) $b\vdots p$, а a не $\vdots p$;

3) $a\vdots p$ и $b\vdots p$.

Первые два случая противоречат тому, что $(a+b)\vdots p$, а третий противоречит условию (a и b взаимно просты.). Следовательно, наше допущение неверно.

148. Пусть $n-6=15p, n-5=24q$, тогда имеем 15p+6=24q+5, 3(8q-5p)=1, что невозможно при целом p и q.

149. Пусть все дроби расположены в возрастающем порядке:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_1}{b_1},\quad a_1=b_1\cdot\frac{a_1}{b_1}$$

$$\frac{a_2}{b_2}>\frac{a_1}{b_1},\quad a_2>b_2\cdot\frac{a_1}{b_1}$$

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{a_1}{b_1}, \quad a_n > b_n \cdot \frac{a_1}{b_1}$$

Следовательно, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n > \frac{a_1}{b_1}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$, откуда

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} > \frac{a_1}{b_1}.$$

Аналогично доказывается и второе утверждение.

150. При n, представимых в виде $5s$-3, s - натуральное. Если $3n + 4 = 5k$, то $3(n+3) = 5(k+1)$, а потому n+3 должно делиться на 5.

151. Ни при каких.

152. Если $(a+b, a-b) = d > 1$, то $2a$ делится на d, $2b$=(a+b)-(a-b) и $2a$=(a+b)-(a-b), т.е. a делится на d и b делится на d, если (2, d)=1 или a и b делятся на $\frac{d}{2}$, если (2, d)=2.

153. Если (14a+3, 21a+4)=d, то 7a+1=(21a+4)-(14a+3) делится на d; 14a+2 делится на d и 14a+3 делится на d, т.е. (14a+3)-(14a+2)=1 делится на d, что возможно, если d=1, т.е. исходная дробь несократима.

154. При любом четном натуральном n дробь несократима, так как при этом значении n несократима дробь $\frac{n^3 - n}{n^2 + 1} = n - \frac{2n}{n^2 + 1}$, так как $(2n, n^2 + 1) = 1$.

155. $\frac{2n^2 - 1}{2n + 1} = n - \frac{n+1}{2n+1} = n - \frac{n+1}{2(n+1) - 1}$ и $(n+1, 2(n+1) - 1) = 1$

156. $5n^2+1$ по условию делится на 2, следовательно, (n, 2)=1; $5n^2+1$ делится на 3, поэтому $6n^2-(n^2-1)$ делится на 3, т.е. $n^2-1=(n-1)(n+1)$ делится на 3, значит (n, 3)=1.

157. $a^2-nab+b^2=(a+b)^2-(n+2)ab$. (см. 147).

158. а) Если $\frac{a}{b}+\frac{k}{p}=A$, где A - целое число и (a, b)=1, (k, p)=1, то ap+bk=Abp, ap делится на b; но (a, b)=1, следовательно, p делится на b; аналогично устанавливается, что b делится на p, значит b=p, отсюда a+k делится на b.

б) См. пункт а) данной задачи.

в) $\frac{a}{b}$ и $\frac{k}{p}$ - данные дроби, искомое условие: a должно делиться на p, а k должно делиться b.

г) $\frac{a}{b}$ и $\frac{k}{p}$ - данные дроби, искомое условие: a должно делиться на k, а p должно делиться b.

159. Пусть данные дроби есть $\frac{a}{b}$ и $\frac{k}{p}$, причем (a, b)=1, (k, p)=1 и (b, p)=1. Имеем $\frac{a}{b}+\frac{k}{p}=\frac{ap+bk}{bp}$.

Допустим, что (ap+kb, bp)=d>1, тогда bp должно делится на d, следовательно, b и p должны делиться на d, так как (b, p)=1. Если b делится на d, то bk и ap делятся на d, т.е. (b, ap) делится на d, но (b, ap)>1, так как (a, b)=1 и (b, p)=1, следовательно, наше предположение, что d>1, неверное, т.е. (ap+kb, bp)=1.

160. См.**153**.

161. Предположим, что дробь – целое число, т.е. n нечетно. Тогда дробь равна $a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-...+b^{n-1}$ (n слагаемых). Докажем, что любые два соседних слагаемых $a^{n-k}b^k$ и $a^{n-k-1}b^{k+1}$ при делении на n дают одинаковый остаток. Действительно их разность, равная $a^{n-k-1}b^k(a+b)$, делится на n. Следовательно, сумма остатков от деления на n всех слагаемых делится на n.

162. См. **161**.

163. Преобразовав наше соотношение так, чтобы выразить n, мы видим, что $n = m^2 - \dfrac{(m-1)^2}{d+1}$. Поэтому, положив m=d+2, мы найдем целое n, удовлетворяющее условию при $d \neq -1$, а n произвольное.

164. Необходимость очевидна. В самом деле, если предположить, что b и d имеют общий делитель, то этот же делитель имеют числа bc и ad и, следовательно, сумма ad+bc. Тогда дробь $\dfrac{ad+bc}{bd}$ сократима, что противоречит условию. Покажем, что если b и d не имеют общего делителя, отличного от единицы, то дробь $\dfrac{ad+bc}{bd}$ несократимая. Предположим противное. Тогда сумма ad+bc имеет общий множитель либо с b, либо с d. Примем для определенности, что ad+bc имеет общий натуральный делитель с b. Но это невозможно, поскольку число bc кратно b, а число ad - взаимно простое с b (сомножитель a - числитель несократимой дроби $\dfrac{a}{b}$, d и b не имеют общих множителей по условию). Точно так же показываем, что сумма ad+bc не имеет общего натурального делителя с d.

Таким образом, достаточность доказана.

165. Если первое число равно m, то второе равно $2(a^{m-1} + a^{m-2} + \cdots + a + 1)$, где $a = 2^n$.

166. Воспользуемся тождеством

$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

Пусть a^2+b^2 и $ac+bd$ делятся на m ($m \neq 1$).

Тогда $(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2=(ad-bc)^2-1$, также делится на m, а это невозможно.

167. Пусть дробь сократима. Пусть $2n+1$ и $2n(n+1)$ делятся на простое число p ($p>2$). Так как числа $2n+1$ и $2n+2$ взаимно просты, то n и $2n+1$ делятся на p, т.е. $n=kp$, $2n+1=sp$, где k и s целые числа. Следовательно, $p(s\text{-}ks)=1$, что невозможно.

168. Числа n-1 и n, а также n и n+1 взаимно просты.

169. Можно использовать признаки делимости на 2 и на 3.

170. Можно использовать признак делимости на 3.

171. Пусть $\dfrac{a}{b}+\dfrac{a'}{b'}=k$ - целое число, тогда $ab'+a'b=kb'b$; из этого равенства получаем: $ab'=b(kb'-a')$, следовательно, $b' \vdots b$. Из того же равенства имеем: $ab'=b'(kb-a)$, следовательно, $b=b'$.

172. Пусть $\dfrac{a}{b},\dfrac{a'}{b'}$ и $\dfrac{a''}{b''}$ - несократимые дроби, причем $b \vdots d$, ab' и b'' не делятся на d и, несмотря на это, оказалось, что сумма $\dfrac{a}{b}+\dfrac{a'}{b'}+\dfrac{a''}{b''}=q$ - целое число. Тогда $ab'b''+a'bb''+a''bb'=qbb'b''$.

Очевидно, что сумма и последние два слагаемые делятся на d, следовательно, и $(ab'b'') \vdots d$.

Если d - простое число, то по крайней мере один из сомножителей a, b' или b'' должен делиться на d, что противоречит условию.

Если же d - составное число, тогда $d = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$, где $p_1, p_2, ..., p_k$ - простые числа; из того, что $d \vdots p_1$, имеем: $(ab'b'') \vdots p_1$, а это приводит к противоречию с условием.

173. $\dfrac{n+2}{n-1} = 1 + \dfrac{3}{n-1}$ - целое число при n=2 и n=4.

174. $a^n \vdots p_1$ только в том случае, когда $a \vdots p_1$. Но если $a \vdots p_1$, то $a^n \vdots p_1^n$.

Аналогично убеждаемся, что $a^n \vdots p_1^n, a^n \vdots p_2^n, ..., a^n \vdots p_k^n$. А так как $p_1^n,\ p_2^n, ...,\ p_k^n$ - числа попарно взаимно простые, то a^n разделится и на их произведение.

175. Если $\dfrac{a}{b} + \dfrac{a'}{b'} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a'}{b'}$, то $ab' + a'b = aa'$, откуда

$\dfrac{b'}{a'} + \dfrac{b}{a} = 1$ и, следовательно $\dfrac{b'}{a} = \dfrac{a-b}{a}$ или $\dfrac{a'}{b'} = \dfrac{a}{a-b}$.

176. См. **175.**

177. Подставим n=2k, получим

$$\frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24} = \frac{k}{6} + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Остается доказать, что числитель всегда делится на 6. Так как одно из двух последовательных целых чисел k и k+1 четное, то делимость на 2 очевидно. Если ни k ни k+1 не делятся на 3, то k=3m+1, k+1=3m+2.

Тогда 2k+1=2(3m+1)+1=6m+3, т.е. 2k+1 делится на 3.

Тем самым доказательство закончено.

178. Первый способ. Если дробь сократима, то 5x+7=qr, 2x+3=pr. Исключая из этих равенств x, получим

$1 = (5p - 2q)r$ или $\dfrac{1}{r} = (5p - 2q)$.

Если дробь $\frac{2x+3}{5x+7}$ сократима на целое число $r \neq \pm 1$, то в последнем равенстве справа стоит целое число, а слева - не целое. Таким образом, это равенство противоречиво, и данная дробь не сократима.

Второй способ. Если данная дробь сократима, то сократима и дробь

$$\frac{5x+7}{2x+3} = 2 + \frac{x+1}{2x+3}.$$

Таким образом, должна быть сократимой дробь, стоящая в правой части и, следовательно, дробь $\frac{2x+3}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}$.

Дробь $\frac{1}{x+1}$ не сократима ни при каком x, так как в числителе стоит 1. Итак данная дробь не сократима ни при каких x.

179. Если $\frac{k}{n}$ – несократимая дробь, то и $\frac{n-k}{n}$ - также несократимая; при этом k не может равняться $n/2$ (n - четное).

180. Если сократима дробь $\frac{3n-m}{5n+2m}$, то сократима и дробь $\frac{5n+2m}{3n-m} = \frac{11n}{3n-m} - 2$. Значит, сократима также дробь $\frac{11n}{3n-m}$. Последняя дробь не может быть сокращена на множитель, на который делится n, она может быть сокращена лишь на 11. Нужный пример легко получить $\frac{1}{4} (m = 1,\ n = 4)$, тогда $\frac{5n+2m}{3n-m} = \frac{11}{22} = \frac{1}{2}$.

181. Применить признак делимости на 9.

182. $\dfrac{x^2-3x+4}{49}=\left(\dfrac{x+2}{7}\right)^2-\left(\sqrt{\dfrac{7x}{49}}\right)^2$; $x+2$ может делиться на 7 только в том случае, когда x не делится на 7, а $7x$ может делиться на 49 в том случае, если x делится на 7. Аналогично доказывается в остальных случаях.

183. По условию $\dfrac{1}{b}=\dfrac{b+1}{9a+2}$, $9a=b(b+1)-2$; $9a$ делится на 3, следовательно, $b(b+1)-2$ делится на 3, т.е.
$b(b+1)=3k+2$, и, следовательно,
$b=3n+1$ $(b\neq 3k;\ b\neq 3k+2$, так как тогда b+1 делилось бы на 3), $b+1=3n+2$. Но b - число однозначное, следовательно, оно может иметь вид 1, 4, 7.
$b(b+1)=(3n+1)(3n+2)=9n^2+9n+2$, т.е.
$9a+2=9n(n+1)+2$ и $a=n(n+1)$, но a - число однозначное, значит, a=2 или a=6. $b\neq 1$, так как
$9a+2=b(b+1)>2;$ $b\neq 4$, так как тогда $\dfrac{a}{b}=\dfrac{2}{4}$ и $\dfrac{a}{b}=\dfrac{6}{4}$ сократимые дроби, значит, b=7; $a\neq 2$, так как $9a$+2=20 не делится на 7, значит a=6 и искомая дробь 6/7.

184. Несократима, так как (2a+b, a)=1 и (2a+b, a+b)=1.

185. Найти суммы и произведения указанных дробей и сравнить их.

186. Выполнить указанные преобразования.

187. $\dfrac{a}{3}+\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^3}{6}=\dfrac{a(a+1)(a+2)}{6}$

В числителе получим произведение трех последовательных целых чисел, которое делится на 6.

$$2)\ \frac{a^4}{24}+\frac{a^3}{4}+\frac{11a^2}{24}+\frac{a}{4}=\frac{a(a+1)(a+2)(a+3)}{24}$$

В числителе получим произведение четырех последовательных целых чисел, которое делится на 24.

188. По условию $11a+2b\equiv 0$ (mod 19) или $30a+2b\equiv 0$ (mod 19), откуда $b\equiv 4a$ (mod 19).

Таким образом, $18a+5b\equiv 18a+20a=38a\equiv 0$ (mod 19), т.е. исходное число целое.

189. Это тождество может быть проверено непосредственно.

190. Найти сумму данных дробей и преобразовать ее к виду $\dfrac{x^2+2x-2}{x^2-x+1}$; найти сумму кубов данных дробей и преобразовать ее к такому же виду.

191. а) Если $n=p^k$, то $\varphi(n)=(p-1)p^{k-1}$. Это утверждение легко доказывается по индукции.

б) Если n и m взаимно просты, то $\varphi(n,m)=\varphi(n)\varphi(m)$. Чтобы доказать это, рассмотрим выражение $\psi(n)=n-\varphi(n)$. Очевидно, что $\psi(n)$ - число сократимых дробей вида k/n, при $k\le n$. Соотношение $\varphi(nm)=\varphi(n)\varphi(m)$ эквивалентно соотношению $n\psi(m)+m\psi(n)-\psi(m)\psi(n)=\psi(mn)$,

где m и n несократимы. Но $\psi(mn)$ равно числу сократимых дробей со знаменателем mn. Подсчитаем число таких дробей. Число дробей, числитель которых сократим с m, как легко показать, равна $\psi(m)n$.

Аналогично, имеется $\psi(n)m$ дробей, числитель которых сократим с n. Но мы два раза учли дроби, числитель которых имеет общие делители как с m, так и с n.

Таких дробей имеется $\psi(m)\psi(n)$. Итого получается $n\psi(m)+m\psi(n)-\psi(n)\psi(m)$ сократимых дробей вида k/mn, где $k\le mn$,

т.е. $\psi(mn)=n\psi(m)+m\psi(n)-\psi(m)\psi(m)$.

192. Если числитель и знаменатель делятся на k, то на k делятся также $a(cl+d)$ и $c(al+b)$, а следовательно, и их разность ad-bc.

§6. Разложение доли в сумму долей

193. $\frac{1}{15}=\frac{1}{24}+\frac{1}{40}$; $\frac{1}{20}=\frac{1}{28}+\frac{1}{70}$

$\frac{1}{24}=\frac{1}{40}+\frac{1}{60}$; $\frac{1}{35}=\frac{1}{60}+\frac{1}{84}$.

194. 7/12=1/3+1/4.

195. Каждый должен получить 5/6 яблока, но 5/6=1/2+1/3. Три яблока нужно разрезать пополам, и два яблока - каждое на три равные части.

196. Первый способ. Выберем натуральное число k так, чтобы выполнялось неравенство $n \le 2^k$.

Пусть q и r - частное и остаток от деления числа $2^k m$ на n, то есть пусть $2^k m = qn + r$, где $0 \le r < n$. Тогда

$$\frac{m}{n}=\frac{2^k m}{2^k n}=\frac{q}{2^k}+\frac{r}{2^k n} \qquad (1)$$

Так как m/n<1, то $qn < qn + r = 2^k m < 2^k n$, откуда $q < 2^k$. Следовательно, запись числа q в двоичной системе имеет вид

$q = q_0 + q_1 2 + q_2 2^2 + \cdots + q_{k-1} 2^{k-1}$,

где двоичные цифры q_i равно 0 или 1. Но тогда

$$\frac{q}{2^k}=q_0\frac{1}{2^k}+q_1\frac{1}{2^{k-1}}+q_2\frac{1}{2^{k-2}}+\cdots+q_{k-1}\frac{1}{2} \qquad (2)$$

Числа r и k по определению удовлетворяют неравенству $r < n < 2^k$. Таким образом, двоичная запись числа r имеет вид $r = r_0 + r_1 \cdot 2 + r_2 2^2 + \cdots + r_{k-1} 2^{k-1}$, где цифры r_i равны 0 или 1, откуда

$$\frac{r}{2^k n} = r_0 \frac{1}{2^k n} + r_1 \frac{1}{2^{k-1} n} + \cdots + r_{k-1} \frac{1}{2n} \qquad (3)$$

Кроме того, поскольку $r < n$, то при j=0, 1,..., k-1 выполняется неравенство $r_i \frac{1}{2^k n} = \frac{r_j 2^j}{2^k n} \le \frac{r}{2^k n} < \frac{1}{2^k}$.

Таким образом, каждое отличное от нуля слагаемое в сумме (3) меньше любого отличного от нуля слагаемого в сумме (2). Это означает, что суммы (2) и (3) содержат различные слагаемые.

Итак, из соотношений (1), (2) и (3) мы получаем представление числа m/n в виде суммы неповторяющихся дробей вида $1/t$, где t - натуральное число.

Второй способ. Докажем методом математической индукции по m, что каждую дробь m/n, где (m, n)=1, принадлежащую интервалу (0, 1), можно представить в виде суммы величин, обратных неповторяющимся натуральным числам.

При m=1 утверждение верно: $\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$.

Пусть m>1 и утверждение верно для натуральных чисел, меньших m. Докажем, что тогда оно верно и для m.

Пусть q и r - частное и остаток от деления на m, то есть пусть $n = qm + r$, где $0 \le r < m$. (4)

Поскольку $0 \le \frac{m}{n} < 1$, то m<n и q>0. Если бы r=0, то из соотношения (4) следовало бы, что n делится на m>1. Это противоречит тому, что(m,n)=1.

Отсюда мы заключаем, что r>0 и m-r<m. Запишем соотношение (4) в виде $n=(q+1)m-(m-r)$. Тогда

$$\frac{m}{n}-\frac{1}{q+1}=\frac{(q+1)m-n}{n(q+1)}=\frac{m-r}{n(q+1)} \qquad (5)$$

Поскольку m-r<m, то по предположению индукции число $\frac{m-r}{n(q+1)}$ представимо в виде суммы величин, обратных попарно различным натуральным числам

$$\frac{m-r}{n(q+1)}=\frac{1}{t_1}+\ldots+\frac{1}{t_k} \qquad (6)$$

(Строго говоря, в предположение индукции входит еще несократимость. Но если $(m-r)/n(q+1)=m_1/n_1$, где (m_1,n_1)=1, то $m_1<m-r<m$, и, воспользовавшись предположением индукции, получаем (6)).

Поскольку n>m>1, то из соотношения (6) получаем, что при i=1, 2, ..., k выполняется неравенство $t_1>q+1$. Подставляя в соотношение (5) разложение (6) для $\frac{m-r}{n(q+1)}$, запишем дробь m/n в виде

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{q+1}+\frac{1}{t_1}+\ldots+\frac{1}{t_k}$$

Итак, мы получили разложение дроби m/n в сумму величин, обратных попарно различным натуральным числам. Тем самым в силу принципа математической индукции утверждение задачи доказано для любого натурального m.

197. Пусть a/b - правильная дробь. Найдем наименьшее целое число q_1, для которого $q_1\cdot\frac{a}{b}\geq 1$.

Обозначим $\frac{a_1}{b_1}=q_1\frac{a}{b}-1$, найдем наименьшее целое q_2, для которого $a_2\frac{a_1}{b_1}\ge 1$. Введем дробь $\frac{a_2}{b_2}=a_2\frac{a_1}{b_1}-1$ и определим тем же способом целое число q_3, затем дробь $\frac{a_3}{b_3}$ и т.д.

Заметим, что $\frac{a}{b}>\frac{a_1}{b_1}>\frac{a_2}{b_2}>...$; знаменатели этих дробей не превосходят *b*. Поэтому описанный процесс прервется через конечное число шагов, т.е. найдется такое *n*, что $q_n\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}=1$. Легко видеть, что тогда $\frac{a}{b}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_1q_2}+...+\frac{1}{q_1q_2...q_n}$.

Такое представление не единственно. Например $\frac{13}{50}=\frac{1}{4}+\frac{1}{100}=\frac{1}{5}+\frac{1}{17}+\frac{1}{50\cdot 17}$.

198. Здесь *n* – наименьшее число, для которого *n*! делится на *q*, так что данное рациональное число *p*/*q* может быть представлено в виде дроби $\frac{m}{n!}$ (возможно, сократимой). Числа $x_1, x_2,..., x_n$ определяются последовательным делением; так x_n есть остаток от деления *m* на *n*; x_{n-1} есть остаток от деления числа $\frac{m-x_n}{n}$ на *n*-1 и т.д.

199. Индукция по *n*. Для *n*=3 все такие числа легко выписать: $\frac{0}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{3}$, а затем проверить справедливость утверждения. Пусть утверждение верно для *n*-1. Новый набор из *n* чисел получится из предыдущего набора добавлением некоторых чисел. Если соседние числа в новом наборе являются соседним и в старом, то для них все доказано. Если же дробь *k*/*p* оказалась соседней с дробями *a*/*b* и *c*/*d* старого набора, то докажем, что, $A = kb - ap = 1$ и

$B = cp - kd = 1$ $\left(\frac{a}{b} < \frac{k}{p} < \frac{c}{d}\right)$. Предположим противное:

пусть максимальное из чисел *A* и *B* больше 1. Тогда

$$b + d < b \cdot B + d \cdot A = p(bc - ad) = p;\ b + d < p$$

Следовательно, во всяком случае, $\frac{a+c}{b+d} \neq \frac{k}{p}$. Но

$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ и поэтому *k*/*p* - не соседняя дробь с *a*/*b* и *c*/*d* – противоречие.

200. Заметим, что число *p*-1 четное, и преобразуем дробь *m*/*n* к виду

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{p-1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p-2}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{2}{p-1} + \frac{2}{p+2}\right) = p\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{2(p-2)} + \ldots + \frac{4}{(p-1)(p+1)}\right)$$

Приводя полученные выражения к общему знаменателю

$$1 \cdot (p-1) \cdot 2(p-2) \cdot 3(p-3) \ldots \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2} = (p-1)!$$

получаем соотношение $\frac{m}{n} = p\frac{q}{(p-1)!}$, $q \in N$, из которого вытекает равенство $m(p-1)! = pqn$.

Поскольку ни одно из чисел 1, 2,..., *p*-1 не делится на простое число *p*, то $m \vdots p$. Утверждение доказано.

201. Если $\dfrac{2n+1}{n(n+1)}=\dfrac{x}{n}+\dfrac{y}{n+1}$, где x и y - натуральные числа, то $(n+1)x+ny=2n+1$, откуда $(n+1)x=2n+1 \pmod{n}$ и $x=1+nq$, $q=0, 1, 2,\ldots$ Подставляя эти значения x в уравнение, получаем $y=1-(n+1)q$, откуда находим единственное натуральное значение y при $q=0$. Итак, имеем единственное представление: $\dfrac{2n+1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}$.

203. $(2a, 2a)$, $(a+1, a(a+1))$, $(a(a+1), a+1)$.

Кроме того, это уравнение имеет столько решений, сколько делителей у числа a^2.

Для доказательства достаточно переписать это уравнение в виде $a^2=(x-a)(y-a)$ и заметить, что количество разложений числа a^2 на два сомножителя равно числу его делителей.

204. Очевидно, $\dfrac{1}{x}\geq\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{1}{z}$. Предположим вначале, что $x>3$.

Тогда $\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{x}\geq\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{1}{z}$, откуда $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}<\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}$, что противоречит условию. Итак, x не может равняться ничему иному, кроме 1, 2 и 3.

1) $x=1$. Тогда $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$ чего быть не может.

2) $x=2$. Тогда $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$.

Если $y>4$, то $\dfrac{1}{4}>\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{1}{z}$, откуда $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}<\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}$, чего быть не может. Итак, у не может равняться ничему иному, кроме 2, 3 и 4.

Подставляя каждое из этих значений, убеждаемся, что y=2 не годится, а два другие значения дают два ответа: (2,3,6) и (2,4,4).

3) x=3. Тогда $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$.

Если y>3, то $\frac{1}{3}>\frac{1}{y}\geq\frac{1}{z}$, откуда $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ чего не может быть. Итак, в данном случае надо рассмотреть для y только одно значение 3, что дает еще один ответ: (3,3,3). Все случаи разобраны.

205. (2,3,6), (2,6,3), (3,2,6), (3,6,2), (6,2,3), (6,3,2), (2,4,4), (4,2,4), (4,4,2), (3,3,3).

206. (3,4,5,6,20).

207. [9] (2,3,7,42); (2,3,8,24); (2,3,9,18); (2,3,10,15); (2,3,12,12); (2,4,5,20); (2,4,6,12); (2,4,8,8); (2,5,5,10); (2,6,6,6); (3,3,4,12); (3,3,6,6); (3,4,4,6); (4,4,4,4).

208. [9] Для каждого натурального числа s наше уравнение имеет по крайней мере одно решение в натуральных числах, например $x_1 = x_2 = ... = x_s = s$.

Чтобы доказать, что оно имеет конечное число решений для каждого натурального числа s, докажем более общую теорему, что для каждого рационального числа w и для каждого натурального числа s уравнение

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_s}=w$$

имеет конечное ≥ 0 число решений в натуральных числах $x_1, x_2, ..., x_s$. Доказательство этой теоремы проведем индукцией по s.

При s=1 теорема верна.

Пусть теперь s означает данное натуральное число, предположим, что теорема верна для s.

Пусть теперь натуральные числа $x_1, x_2, ..., x_s, x_{s+1}$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_s}+\frac{1}{x_{s+1}}=u \qquad (1)$$

где u есть данное положительное рациональное число.

Полагая, что $x_1 \le x_2 \le ... \le x_s \le x_{s+1}$ на основании (1) найдем, что $\frac{s+1}{x_1} \ge u$, откуда $x_1 \le \frac{s+1}{u}$; таким образом, число x_1 может принимать лишь конечное число различных натуральных значений.

Выберем для x_1 какое-нибудь из этих значений; тогда для s чисел $x_2, x_3, ..., x_{s+1}$ имеем уравнение

$$\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+...+\frac{1}{x_s}+\frac{1}{x_{s+1}}=u-\frac{1}{x_1} \qquad (2)$$

где при выбранном уже x_1, правая часть есть данное рациональное число, и, значит, по предположению о справедливости теоремы для s чисел оно имеет конечное ≥ 0 число решений в натуральных числах $x_1, x_2, ..., x_s, x_{s+1}$.

Но так как x_1 может принимать только конечное число натуральных значений, то отсюда вытекает справедливость теоремы для s+1 чисел. Этим и завершается индуктивное доказательство теоремы.

209. См. [98].

210. См. [98].

211. Умножив данное уравнение на xyp, получим $(x-p)(y-p)=p^2$. При простом p отсюда следует, что 1) $x-p=1; y-p=p^2$ или 2) $x-p=p; y-p=p$, или

2) $x-p=p^2;\ y-p=1$. Если же p составное, то p^2 раскладывается на множители и другими способами.

212. Очевидно, что ни одно из натуральных чисел a, b, c, d не может быть равно 1. Если хотя бы одно из них будет больше 2, то

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}<1.$$

Следовательно, остается единственная возможность $a=b=c=d=2$.

213. Предположим, что такое равенство возможно

$$1=\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\ldots+\frac{1}{a_n^2}$$

где $a_1<a_2<\ldots<a_n$. Из $a_1>2$ получаем $a_k>k+1$, поэтому

$$1=\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\ldots+\frac{1}{a_n^2}\le\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2}<$$

$$<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{n-1}<1.,$$

что невозможно.

215. Индукция по n. При n=2: $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ - несократимая дробь. Пусть утверждение верно при n=k, т.е.

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\frac{a}{b}$ - несократимая дробь.

Тогда при n=k+1: $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}=\frac{a}{b}+\frac{1}{k+1}$ не равно целому числу, так как дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{1}{k+1}$ несократимы. (См. 158 и 163).

216. Возвести в степень n неравенство

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2>1+\frac{1}{n}.$$

217. [24] По формуле бинома Ньютона

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{1}{n^n}=$$

$$=2+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\ldots\cdot k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+$$

$$+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\ldots\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Отсюда $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2$ и, кроме того,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<3.$$

218.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}<$$

$$<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}=2$$

219. [14, с.17].

220. [103, с.104].

221. [62, с.293].

222. [62, с.118].

223. [71, с.5].
224. [3, с.140].
225. [47, с.28].
226. [47, с.30].

§7. *Десятичные дроби*

227. Нет. **228.** Конечной. **229.** Частное от деления двух конечных десятичных дробей выразите конечной десятичной дробью в том и только в том случае, если делитель будет иметь множителями, отличными от множителей делимого, только 2 или 5 и их степени.

231. Да. **232.** $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\frac{3n^2+6n+2}{n(n+1)(n+3)}$; знаменатель делится на 3, а числитель не делится на 3, следовательно, дробь обращается в бесконечную периодическую; если n - нечетное число, то числитель не делится на 2, но знаменатель делится на 2, значит, дробь обращается в смешанную периодическую; если же n - четное число, то знаменатель делится на 4, а числитель не делится на 4, т.е. дробь опять обращается в смешанную периодическую.

233. $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{2}{2n+1}=\frac{6n^2+6n+1}{n(n+1)(2n+1)}$; числитель не делится на 6, знаменатель делится на 6.

234. $2n^2+1$ - число нечетное при любом натуральном n. Показать, что у числа $2n^2+1$ не может быть множителем число 5, рассмотрев случаи $n=5k$, $n=5k\pm 2$.

235. Представив данные дроби в виде обыкновенных дробей и сократив их, получим обыкновенные дроби с разными знаменателями, а такие дроби в сумме не могут дать целое число. (см. 170)

236. (См. 234).

237. $\frac{a}{b}=A,\left(\overline{a_1a_2...a_k}\right)=A+\frac{\overline{a_1a_2...a_k}}{99...9}$

$A\overline{b99...9} + \overline{a_1 a_2 ... a_k b} = \overline{99...9a}$, ’” $(b,9) = 1$. Следовательно, $\overline{a_1 a_2 ... a_k}$ делится на 9.

238. Превратить в обыкновенную дробь и сравнить.

239. Представим дробь $\frac{1}{N}$ в виде периодической дроби: $\frac{1}{N} = A,\quad a_1 a_2 ... a_k \left(b_1 b_2 ... b_m\right)$, откуда следует, что

99...9 00...0= $N \cdot \overline{Aa_1 a_2 ... a_k b_1 b_2 ... b_m}$.

240. Знаменатели обыкновенных дробей состоят из 1, 2,..., *n* девяток.

241. $\frac{3}{7} = 0,\left(428\,571\right)$; 4+5=2+7=8+1=9.

$\frac{3}{13} = 0,\left(153\,846\right)$; 1+8=5+4=3+6=9.

242. $\frac{5}{7} = 0,\left(714\,285\right)$; 714285:11=64935.

$\frac{9}{13} = 0,\left(692\,307\right)$; 692307:11=62937.

243. $\frac{2}{7} = 0,\left(285\,714\right)$; $\quad \frac{3}{7} = 0,\left(428\,571\right)$.

$\frac{4}{7} = 0,\left(571\,428\right)$; $\quad \frac{5}{7} = 0,\left(714\,285\right)$.

244. $\frac{a}{b} = A, \overline{a_1 a_2 \ldots a_k \left(b_1 b_2 \ldots b_m\right)} = A + \frac{\overline{a_1 a_2 \ldots a_k b_1 b_2 \ldots b_m} - \overline{a_1 a_2 \ldots a_k}}{99..^{(m)}.900..^{(k)}.0}$

откуда следует, что $a \cdot 99...900...0 =$

$b \cdot A \cdot 99...900...0 + (\overline{a_1 a_2 \ldots a_k b_1 b_2 \ldots b_m} - \overline{a_1 a_2 \ldots a_k})b$, но сумма делится на 5, первое слагаемое тоже делится на 5, значит, и второе слагаемое должно делиться на 5; но (5, *b*)=1, следовательно, $\overline{a_1a_2\ldots a_kb_1b_2\ldots b_m}-\overline{a_1a_2\ldots a_k}$ делится на 5, т.е. оканчивается на 0 или 5.

245. См. **244.**

246. Пусть A - нечетное число, не оканчивающееся на 5, тогда (A, 10)=1 и дробь $\frac{1}{A}$ обращается в чистую периодическую дробь, т.е. $\frac{1}{A}=\overline{0,(abc\ldots k)}=\frac{\overline{abc\ldots k}}{99\ldots 9}$ и $A\cdot\overline{abc\ldots k}=9\cdot 11\ldots 1$, откуда $9\cdot 11\ldots 1$ делится на A. Если (9, A)=1, то 11...1 делится на A. Если (9, A)=p>1, то A должно быть кратно 3 или 9, т.е. A=9B, тогда $9\cdot 11\ldots 1$ должно делиться на 3B или 9B, т.е. 1...11 должно делиться на B, где B - нечетное число, не оканчивающееся на 5.

247. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_p, a_{p+1}, \ldots, a_{2p}$ - цифры периода дроби, причем $a_{p+1}+a_1=a_{p+2}+a_2=\ldots=a_{2p}+a_p=9$. Составим обыкновенную дробь, соответствующую данной периодической:

$$\frac{1}{n}=\frac{a_1 10^{2p-1}+a_2 10^{2p-2}+\ldots+a_p 10^p+a_{p+1}10^{p-1}+\ldots+a_{2p-1}10+a_{2p}}{10^{2p}-1}=$$

$$=\frac{\left(10^p-1\right)\left(a_1 10^{p-1}+a_2 10^{p-2}+\ldots+a_{p-1}10+a_p\right)}{10^{2p}-1}+$$

$$+\frac{9\left(10^{p-1}+10^{p-2}+\ldots+10+1\right)}{10^{2p}-1}=$$

$$=\frac{a_1 10^{p-1}+a_2 10^{p-2}+\ldots+a_p+1}{10^p+1},$$

т.е. $10^p+1=n\left(a_1 10^{p-1}+a_2 10^{p-2}+\ldots+a_{p-1}10+a_p+1\right)$.

248. Допустим, данная бесконечная дробь - периодическая и пусть a - число цифр в периоде. Цифры периода могут быть либо все одинаковы, либо различны. Если все цифры периода одинаковы, то получим, что только одна цифра повторяется бесконечное число раз (цифра периода), а остальные девять цифр повторяются конечное число раз (цифры до периоды), что противоречит закону составления данной дроби.

Если цифры периода различны, то пусть некоторая цифра b до периода повторяется не более a-1 раз, так как по допущению не все цифры периода одинаковы. Таким образом, при сделанном допущении цифра b может повторяться не более A раз, где A - наибольшее из чисел n и a-1. По закону же образования данной дроби цифра b может повторяться в ней неограниченное число раз.

250. 3; 5; 3; 5.

253. 4.

254. $\frac{1}{27} = 0,(037)$.

255. 11, 33, и 99 - делители 99, не делящие 9.

256. 5; 6; 21; 96; 6; 2; 176; 754.

§8. Задачи на процентные вычисления

257. 400%; 32%; 157,1428(571428)%; 1825%; 76,8%.

258. 0,005; 0,0175; 0,000075; 1,203; 0,004375; 0,03(142857).

259. $\frac{1}{20}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{5}{4}$.

260. $\frac{1}{25}; \frac{1}{10}; \frac{1}{5}; \frac{1}{200}; \frac{1}{1000}$.

261. 1) 120%; 2) 75%; 3) 124%; 4) 50%.

262. а) 25%; б) 18,75%; в) 26,4%; г) 240%.

263. а) 80% б) 75%; в) 14%; г) 44%.

264. 17%; 30%; 24,5%; 0,2%; 12,5%; 18,75%; 33,(3)%; 28,5714(285714)%.
265. 1100%. **266.** 51%. **267.** 12%. **268.** 34,28571(428571)%.
269. 21,(3)%. **270.** 66,(6)%. **271.** 41,(6)%. **272.** 1,08; 15; 115,2; 0,6. **273.** 23,4 млн.руб.; 7,26 см; 16,8 кг; 11,622 млн.м^2. **274.**748,8; 747; 960; 1800. **275.** 273,6; 268,8; 284,4; 93,6. **276.**Второе больше. **277.** Равны. **278.** Равны. **279.** 195 кг.
280. 1,5 г. **281.** 7,5 г**. 282.** 8,625 г. **283.** 213,84 кг меди; 108,24 кг цинка; 7,92 кг свинца. **284.** На 24%. **285.** 48 кг. **286.** 1,44 ц белков, 360 кг жиров, 8,64 ц углеводов. **287.** 1600; 960; 400; 192; 320. **288.** 1500; 750, 40, 25. **289.** 95. **290.** 80. **291.** 40 руб. **292.** 80 руб. **293.** 2000 деталей. **294.** 0,04 л. **295.** 400 млг.
296. 5ц. **297.** 416 машин. **298.** 427 руб; 342 руб.

§9. Наценки и скидки

299. 600 руб. **300.** 625 руб. **301.** 540 руб. **302.** 500 руб. **303.** 25%. **304.** 20%. **305.** q=1, $p=\frac{11}{12}$. **306.** q=k-1, p=1-1/k. **307.** 25% и 20%. **308.** 107 руб. **309.** 10%. Указание. (1+p)(1-p)=0,99. **310.** 780 руб. **311.** 892,86 руб. **312.** 1771,56 руб. **313.** 1881,67 руб. **314.** 100%. **315.** 50%. **316.** 15%. **317.** $a(1+p/100)^m$ руб. **318.** Пусть банк дает x% годовых. Тогда первоначально было $\frac{100a}{x}$ руб. В начале второго года на счету вкладчика $\left(\frac{100a}{x}+a+b\right)$ руб. В конце второго года эта сумма обратится в $\left(\frac{100a}{x}+a+b\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)$ руб.

Получаем уравнение $\left(\frac{100a}{x}+a+b\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)=c$ или

$(a+b)x^2+100(2a+b-c)+10000a=0$.

321. $800\cdot 1{,}05^{0{,}75}$ руб; $1200\cdot 1{,}03^{2/3}$ руб.

322. 1 год.

323. $x\% = \left(\left(\frac{2p}{q}\right)^{\frac{1}{m-n}}-1\right)$; $a=p\cdot\left(\frac{2p}{q}\right)^{\frac{m-n}{n}}$.

324. $180/(0{,}05)^{3/4}$ руб.

325. 6%. **326.** $b=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^T$. **327.** 3000 руб по 3%. **328.** 8640 руб.

331. 1480 фунтов. **332.** 300 руб, 5%. **333.** 3%. **334.** 200 руб. **336.** Если начислять проценты раз в месяц.

338. 400 руб. **339.** 500 руб. **340.** 800 руб. **341.** 750 руб. **342.** $\frac{1}{10};\frac{1}{11}$. **343.** $\frac{1}{7};\frac{1}{8}$. **344.** 780 руб. **345.** 300 руб. **346.** 1097,39 руб. **347.** 1064,8 руб. **348.** 50%. **349.** 100%. **350.** 9%. **351.** 781,25 руб. **352.** 60%. **353.** 37,5%. **354.** 857,14 руб. **355.** 300 руб. **356.** 36%. **357.** 56,25%. **358.** 426,67 руб. **359.** 60%. **360.** 64,26%. **361.** 61,2%. **362.** Убавилось бы на 4 служащих. **363.** 500 руб. **364.** 625 руб. **365.** 640 руб. **366.** 666,67 руб. **367.** 7,2 руб; 20 коп; 45 коп. **368.** 6,25%. **369.** $33\frac{1}{3}$%. **370.** 27,5%. **371.** 20%.

§10. *Пропорции*

372. Умножить второй средний член пропорции на 4.

373. Умножить один из крайних членов на 20.

374. Крайний член разделить на 12.
375. а) нет; б) да.
376. а) да; б) да; в) да; г) нет.
377. 1) да; 2) да.
378. да; да; нет.

§11. *Величины прямо пропорциональные*

379. 22,5 ведра. **380.** 2000 ц. **381.** $56\frac{1}{3}$. **382.** 120° и 10°; 135° и 11,25°; 45° и 3,75°. **383.** 3,2 ч; 4 часа 4 мин. **384.** 2,56 см. **385.** $33\frac{1}{3}$ кг. **386.** 22. **387.** 2866,5 кг.

§12. *Величины обратно пропорциональные*

388. 20 зубцов. **389.** 210 дней. **390.** 60 стр. **391.** 16 м. **392.** 80 чел. **393.** 135 км в день.

§13. *Величины прямо пропорциональные одним величинам и обратно пропорциональные другим*

394. 0,5 час. **395.** 32 км. **397.** 95 бутылок. **398.** 25 дней. **399.** 68 руб. **400.** 324 деталей. **401.** 120 стр. **402.** 30 дней. **403.** 7 час. **404.** 32 дня. **405.** 14 дней. **406.** 15. **407.** 175000 л. **408.** 6 рабочих. **409.** 8 рабочих. **410.** 21 рабочих. **411.** 14 рабочих. **412.** 3 часа. **413.** 7 л. **414.** 9 дней. **415.** $a-abc(d-1)/def$ **416.** $ac(b-d+1)/ef$ **417.** $(am+bn)cd/(lm+fn)\cdot k$.

§14. *Простое пропорциональное деление*

418. 40, 60, 135, 225. **419.** 8; 3,75; 26,25. **420.** 3,125 кг; 78,125 кг; 6,25 кг. **421.** 120°; 96°; 144°. **422.** 8 кг; 7,5 кг; 46 кг. **423.** 6,5 кг. **424.** 300 руб., 480 руб., 600 руб. **425.** 150; 120; 100. **426.** 100; 50; 150. **427.** 36; 27; 18. **428.** 756 руб; 630 руб; 540 руб. **429.** 12 кг; 16 кг; 24 кг. **430.** 12000 м; 7875 м; 8400 м. **431.** 19,2 км.

§15. *Сложное пропорциональное деление*

432. 80; 240; 320. **433.** 30 т. **434.** 8365. **435.** 620 га. **436.** 210. **437.** 36; 20; 12. **438.** 3600 руб; 2600 руб.; 3000 руб. **439.** 1800 руб.; 800 руб.; 3200 руб.; 2400 руб.

§16. *Задачи на смешение жидкостей*

440. 2 л. **441.** 15°. **442.** 33°. **443.** 53°. **444.** 79°. **445.** 126 л. **446.** 12 л. **447.** $50\frac{2}{3}$ градуса. **448.** 30°. **449.** 30°. **450.** 20°. **451.** 52°. **452.** 39,5°. **453.** 96 л. **454.** 38°. **455.** 37,5°. **456.** 44°. **457.** 72°. **458.** 28°. **459.** 2,5 л; 3,5 л. **460.** 50%. **461.** 125 г. **462.** 48%. **463.** 6%. **464.** 20%. **465.** 300 г; 150 г. **466.** 0,6 л; 0,9 л. **467.** 3 л. **468.** 600 г. **469.** 60%. **470.** 2 л. **471.** 910 г. **472.** 200 г. **473.** 16°, 24°. **474.** 1:1. **475.** 1 л. **476.** 71°. **477.** 20 л. **478.** 4 л. **479.** 60%. **480.** 60°. **481.** 9 кг, 6 кг. **482.** 70°. **483.** 48°. **484.** 72°. **485.** 9 и 3. **486.** 10 л. Перелив x_1 спирта и дополнив сосуд водой, будем иметь во втором сосуде $x / 20$ л спирта на каждый литр смеси. Обратно переливается $x_л$ смеси; в них содержится $x^2/20$ л спирта.

После обратного переливания количество спирта в первом сосуде составляет $\left(20-x+x^2/20\right)$ л.

Теперь из первого сосуда отливается $6\frac{2}{3}$ л, т.е. $6\frac{2}{3}$:20 составляет 1/3 всего количества этой смеси. Вместе с тем на $\frac{1}{3}$ уменьшается и количество спирта, т.е. в первом сосуде остается $\frac{2}{3}\left(20-x+x^2/20\right)$ л спирта. Так как количество спирта в обоих сосудах неизменно равняется 20 л, а по условию в обоих сосудах теперь содержится одинаковое количество спирта (т.е. по 10 л), то $\frac{2}{3}\left(20-x+x^2/20\right)$=10.

487. См. предыдущую задачу.

488. Рассмотреть систему уравнений.

$$\begin{cases} ax+by=(x+y)k \\ bx+ay=(x+y)t. \end{cases}$$

489. В первый раз вылили 8 л спирта, второй раз 7 л. Если первый раз вылили x л спирта, то осталось(64- x) л спирта; второй раз отлито $\frac{(64-x)}{64}\cdot x$ л чистого спирта. Осталось $64-x-\frac{64-x}{64}\cdot x=\frac{1}{64}(64-x)^2$ л чистого спирта. Получаем уравнение $\frac{1}{64}(64-x)^2=49$.

490. См. предыдущую задачу.

491. Эффективнее полоскать два раза меньшим количеством воды, чем один раз большим.

492. После первого разбавления из кастрюли будет отлит 1л сиропа, а его концентрация станет равна 0,9. После второго разбавления из кастрюли будет отлита десятая часть оставшегося сиропа, концентрация которого станет равна $0{,}9^2$. Вообще, после очередного *n*–го разбавления опять будет отлита десятая часть сиропа, а его концентрация станет равна $0{,}9^n$. Ни при каком натуральном *n* не будет выполнено равенство $0{,}9^n = 0{,}5$. Но тем не менее после достаточно большого количества переливаний сироп обязательно окажется разбавленным по меньшей мере в два раза. В данном случае этот момент впервые наступит после <u>седьмого</u> разбавления, поскольку справедливы оценки $0{,}9^6 > 0{,}5 > 0{,}9^7$

493. Докажем, что независимо от проведенных переливаний в первом стакане кофе будет не меньше, чем молоко. Действительно, в самом начале в первом стакане был только кофе, т.е. сформулированное утверждение справедливо. Теперь, если перед каким-то переливанием в первом стакане кофе было не меньше, чем молока, то возможны два варианта: а) жидкость переливается из первого стакана во второй, и тогда, конечно, в первом стакане кофе останется не меньше, чем молока; б) жидкость переливается из второго стакана в первый, а тогда перед переливанием во втором стакане кофе было не больше, чем молока (ведь общее количество кофе равно количеству молока), что сохранится и после переливания, а, значит, в первом стакане снова станет не меньше, чем молока. Таким образом, в любом случае, после любого количества переливаний в первом стакане молока не может оказаться больше, чем кофе.

494. При каждой операции вливания в сосуд поступало *ap*/100л спирта, а после каждой операции выливания в сосуде сохранялось $A/(A+a)$ того количества спирта, которое было в сосуде в момент, предшествующий этому выливанию. Пусть x_n – количество спирта в сосуде после n-го выливания; тогда $x_n = \frac{AP}{100}\left(1-\left(\frac{A}{A+a}\right)^n\right)$

Согласно условию задачи должно быть $x_n \geq \frac{Aq}{100}$,

следовательно, $\frac{AP}{100}\left(1-\left(\frac{A}{A+a}\right)^n\right) \geq \frac{Aq}{100}$, откуда

$\left(\frac{A+a}{A}\right)^n \geq \frac{p}{p-q}$, $p>q$.

Далее $n\log\left(\frac{A+a}{A}\right) \geq \lg\frac{p}{p-q}$, откуда $n \geq \lg\frac{p}{p-q}\Big/\log\left(\frac{A+a}{A}\right)$.

495. 8,5 кг.

496. Смеси нужно взять в соотношении 1:2; 20% H_2SO_4, 38% HNO_3, 42% H_2O.

497. 243 л. **498.** $\frac{1}{6}$. **499.** 15 кг. **500.** 1,64 кг; 1,84 кг.

501. $\sqrt[k]{\frac{r-q}{p-q}}$, где $r>q$, $p>q$, либо $r<q$, $p<q$.

502. 2 л.

§17. Задачи на сплавы

503. 9; 12; 13,99; 14,04; 18; 22,99. **504.** 500; 625; 666,7; 750.
505. 14. **506.** 675; 16,2. **507.** 700. **508.** 560. **509.** 900. **510.** 30 кг.
511. 581,96. **512.** 800. **513.** 9 кг. **514.** 225 г, 350 г. **515.** 16,2 г.

516. 688. **517.** 690. **518.** 648. **519.** 750; 800; 700. **520.** 735. **521.** 183 г; 0,305 г; 0,671 г. **522.** $\frac{3}{14}$ кг. **523.** 2:1. **524.** $\left(p_2 - p\right) / \left(p - p_1\right)$. **525.** 1 кг и 7 кг. **526.** $\frac{m+n}{r+s}\frac{rq-sp}{mq-np}a$; $\frac{p+q}{r+s}\frac{rn-sm}{pn-qm}a$.

527. Решить систему уравнений:

$$\frac{m_1}{m_1+n_1+k_1}x_1+\frac{m_2}{m_2+n_2+k_2}x_2+\frac{m_3}{m_3+n_3+k_3}x_3=\frac{m_0a}{m_0+n_0+k_0},$$

$$\frac{n_1}{m_1+n_1+k_1}x_1+\frac{n_2}{m_2+n_2+k_2}x_2+\frac{n_3}{m_3+n_3+k_3}x_3=\frac{n_0a}{m_0+n_0+k_0},$$

$$\frac{k_1}{m_1+n_1+k_1}x_1+\frac{k_2}{m_2+n_2+k_2}x_2+\frac{k_3}{m_3+n_3+k_3}x_3=\frac{k_0a}{m_0+n_0+k_0}.$$

528. Каждый кусок весил $\frac{mn}{m+n}$ кг.

529.

$$\left(\frac{m_1a}{m_1+n_1+k_1}+\frac{m_2b}{m_2+n_2+k_2}\right):\left(\frac{n_1a}{m_1+n_1+k_1}+\frac{n_2b}{m_2+n_2+k_2}\right):$$

$$:\left(\frac{k_1a}{m_1+n_1+k_1}+\frac{k_2b}{m_2+n_2+k_2}\right).$$

530. 15:21:14.

531. См задачу **529**.

532. 20% и 60%.

533. Решить систему уравнений:

$$\frac{m}{m+n}x+\frac{p}{p+q}y=\frac{1}{2};\quad \frac{n}{m+n}x+\frac{q}{p+q}y=\frac{1}{2}.$$

534. См. задачу 526.

535. Первого сплава 9 частей, второго 35.
536. В два раза.
537. 10 кг; 69%.

§18. Задачи на смешение разносортных товаров

538. $11\frac{2}{3}$ кг; $13\frac{1}{3}$ кг. **539.** 2,6 кг I сорта. **540.** 8 кг и 10 кг. **541.** 26 кг. **542.** 2,6 кг и 1,2 кг. **543.** 4,25 кг. **544.** 12 кг чернослив, 3 кг яблок, 9 кг урюка. **545.** $\left((ad+bc)-n(a+b)\right)/\left(f-n\right)$.

546. 4:1. **547.** 1,5 руб. **548.** 11, 45 руб. **549.** $11\frac{2}{9}$ руб. **550.** 1,5 руб. **551.** 14,69 руб. **552.** Пусть вес бриллианта p каратов. Разделим его на n частей, веса которых $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Таким образом $p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$. Пусть стоимость бриллианта до разлома $c = kp^2$, где k - коэффициент пропорциональности. Стоимость после разлома $c_1 = k\left(p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2\right)$. Докажем, что $c > c_1$.

Действительно,

$$c = k\left(p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2\right) + 2k\left(p_1 p_2 + p_1 p_3 + \ldots + p_{n-1} p_n\right) >$$

$$> k\left(p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2\right) = c_1$$

Итак, доказано, что стоимость всех частей бриллианта меньше стоимости целого.

Далее, пусть

$$p_1 = \frac{p}{n} + x_1, p_2 = \frac{p}{n} + x_2, \ldots, p_n = \frac{p}{n} + x_n$$

где $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$,

так как $p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = n \cdot \frac{p}{n} + \left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right)$.

Таким образом, стоимость после разлома равна

$$k\left(\left(\frac{p}{n} + x_1\right)^2 + \left(\frac{p}{n} + x_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{p}{n} + x_n\right)^2\right) \text{ или}$$

$$k\left(n \cdot \frac{p^2}{n^2} + 2\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right) \cdot \frac{p}{n} + \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)\right) \text{ или}$$

$$k\left(\frac{p^2}{n} + \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)\right).$$

Отсюда заключаем, что наименьшая стоимость всех частей бриллианта будет, когда $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0$, т.е. при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Следовательно, $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$, что и требовалось доказать.

553. Стоимость двух кусков разбитого алмаза меньше стоимости одного неразбитого, причем проигрыш в стоимости будет наибольшим, если обе части разбитого алмаза равны между собой. Если алмаз раскололся на два равных куска, то потеря стоимости составляет половину его первоначальной стоимости.

554. $\frac{1}{2}p\left(1 - \sqrt{\frac{2}{k} - 1}\right); \frac{1}{2}p\left(1 + -\sqrt{\frac{2}{k} - 1}\right), \quad 1 < k \le 2$

§19. *Задачи на движение*

555. $\frac{-nr + \sqrt{nr(nr + s)}}{2n}$ км/ч; $\frac{nr + \sqrt{nr(nr + s)}}{2n}$ км/ч.

556. $\frac{4b \pm 3at + \sqrt{16b^2 + 9a^2t^2}}{6t}$ км/ч; $4b > 3at$.

557. $\dfrac{n-m}{a-b}$ час; $\dfrac{an-bm}{a-b}$ км.

558. $\dfrac{-tv+\sqrt{t^2v^2+240stv}}{120t}$ м/мин.

559. Найти x из уравнения $\dfrac{s}{x}+n=\dfrac{s}{x+m}$.

560. Рассмотреть уравнение $\dfrac{x^2}{k^2}+\dfrac{ax}{k}+c=x$.

561. Составить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{s_1}{x}+\dfrac{s_2}{x-a}=\dfrac{s_1+s_2}{x}+a \\ \dfrac{s_1+s_2}{x}-\dfrac{s_1+b}{x}-\dfrac{s_2-b}{x-a}=c \end{cases}$$

откуда получаем, что $x(x-a)=\dfrac{ab}{a+c}$.

562. $\dfrac{-a+\sqrt{a^2+8ab}}{4}$ км/ч.

563. $\dfrac{vd}{2d+vt}$ м/мин. **564.** $\dfrac{-bc+\sqrt{b^2c^2+4abc}}{2c}$ км.

565. Составить систему уравнений:

$\dfrac{x+a}{v_1}=\dfrac{x}{v_2}$; $\dfrac{x+a}{v_2}=n$, $\dfrac{x}{v_1}=m$

и найти $x+a$ и x.

566. $\dfrac{a\left(\sqrt{5}-1\right)}{4t}$ км/ч. $\dfrac{a\left(3-\sqrt{5}\right)}{4t}$ км/ч.

567. Рассмотреть уравнение $\dfrac{d}{2}:(x+b)=\left(\dfrac{d}{2}-ax\right):x$.

568. $\dfrac{a\sqrt{2a-d}}{2a-d}$ м/с; $\dfrac{(d-a)\sqrt{2a-d}}{2a-d}$ м/с.

569. Рассмотреть уравнение $\dfrac{a}{x-k}-\dfrac{a}{x}=b+c$.

570. $\dfrac{n-m-at+\sqrt{(n-m-at)^2+4ant}}{2t}$ км/ч.

571. $\dfrac{ab+\sqrt{a^2b^2+2abs}}{2a}$ км/ч.

572. $\dfrac{2t\pm a+\sqrt{(2t-a)^2+4at}}{2}$ час.

573. $\dfrac{a\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$ км/ч; $\dfrac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$ км/ч.

574. $\dfrac{3(s\pm tv)+\sqrt{9(s-tv)^2+12stv}}{6t}$ км/ч.

575. $\dfrac{(2s-p)+\sqrt{(2s-p)^2+4t(a^2t-ap)}}{2t}$ км/ч.

576. $\dfrac{d(q+b-p)}{aq+bp+ab}$ м/мин; $\dfrac{d(p+a-q)}{bp+ab+aq}$ м/мин.

577. $\dfrac{ab+\sqrt{a^2b^2+4abl}}{2a}$ м/мин; $\dfrac{-ab+\sqrt{a^2b^2+4abl}}{2b}$ мин.

578. $\dfrac{d(a+b)}{2ab}$ м/с; $\dfrac{d(b-a)}{2ab}$ м/с.

579. $\dfrac{a(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}$.

580. Рассмотреть уравнение $\dfrac{a}{x-b}-\dfrac{a}{x}=t$.

581. Составить систему уравнений

$$\frac{s-a}{v_1}=\frac{a}{v_2};\ \frac{b}{v_1}=\frac{s-b}{v_2},$$

откуда следует, что $(s-a)(s-b)=ab$.

582. Составить систему уравнений

$$\frac{s-a}{v_м}=\frac{s+a}{v_a};\quad \frac{s-b}{v_b}=\frac{s+b}{v_a};\quad \frac{s-c}{v_b}=\frac{s+c}{v_м}$$

откуда следует, что $(s-a)(s+b)(s-c)=(s+a)(s-b)(s+c)$.

583. Рассмотреть уравнение $\dfrac{d}{x-v}+\dfrac{d}{x+v}=t.$

584. Составить систему уравнений

$$\frac{s-p}{v_1}=\frac{p}{v_2};\ \frac{p+s-q}{v_1}=\frac{p+s-q}{v_2}.$$

585. $\dfrac{m(p+n)+2np}{2p}$ мин; $\dfrac{m(p+n)+2np}{2n}$ мин; $\dfrac{m(p+n)+2np}{p+n}$ мин.

586. $b(n-1)/(a-c)$ км/ч. ($n>1;\ a>c$).

587. Рассмотреть уравнение $m+\dfrac{m(v_n-v_p)+s}{v_p+v_n}=\dfrac{s}{v_p}$, откуда следует, что $v_p=\dfrac{s}{2}$.

588. Составить систему уравнений $\dfrac{s_1}{v_n}=t+\dfrac{2s_2}{v_k};\ s_1+s_2=kv_nt,\ v_k=kv_n$, откуда следует, что $\dfrac{s_1}{v_n}=\dfrac{kt}{2-k}$.

589. Решая неравенство $\dfrac{a}{v+v_1}+\dfrac{a}{v-v_1}>\dfrac{a}{v_1}$ получаем, что $v^2+v_1^2>0$.

590. 56,25 м.

591. Рассмотреть неравенство $\dfrac{a}{x+v}+\dfrac{b}{x-v}\le t$, откуда следует, что $x\ge\dfrac{a+b+\sqrt{(a+b)^2-4vt(a-b)+4t^2v^2}}{2t}$ км/ч.

592. Пусть a км расстояние от A до B. Если первый турист затратил t часов, то $\dfrac{t}{2}v_1+\dfrac{t}{2}v_2=a$, откуда следует, что $t=\dfrac{2a}{v_1+v_2}$. Время движения второго туриста $T=\dfrac{a}{2v_1}+\dfrac{a}{2v_2}=\dfrac{a(v_1+v_2)}{2v_1v_2}$.

Имеем $T-t=\dfrac{a(v_1-v_2)^2}{2v_1v_2(v_1+v_2)}$.

Так как $v_1\ne v_1$, то $T>t$. Следовательно, первый турист прибыл в B раньше второго.

593. Имеем

$$t_1=\frac{s}{x+y}+\frac{s}{x-y}=\frac{2sx}{x^2-y^2},$$

$$t_2=\frac{s}{x+z}+\frac{s}{x-z}=\frac{2sx}{x^2-z^2}.$$

Так как y>z, то $x^2-y^2<x^2-z^2$, следовательно, $t_1>t_2$. Время движения по реке с быстрым течением больше, чем время движения по реке с медленным течением.

§20. Задачи на производительность труда

594. Рассмотреть уравнение $\frac{m}{x+m}+\frac{m-a}{x}=1$.

595. Рассмотреть уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+q}=\frac{1}{p}$.

596. Решить систему уравнений
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}$; $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=q$.

597. Рассмотреть уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+n}+\frac{1}{mx}=\frac{1}{t}$.

598. $\frac{ab}{b-a}$ час.

599. $\frac{q-p}{a-b}$ дней.

600. $\frac{tm+\sqrt{t^2m^2+2tms}}{2t}$ км; $\frac{-tm+\sqrt{t^2m^2+2tms}}{2t}$ км.

601. $\frac{\pm tk+\sqrt{t^2k^2+4tmk}}{2t}$ тонн.

602. $\frac{n+m\pm t+\sqrt{(n+m-t)^2+4nt}}{2}$ дней.

603. $\frac{(n\pm mt)+\sqrt{(n-mt)^2+4mts}}{2t}$ км.

604. $\frac{abnq-bcmp}{amp}$ рабочих.

605. Составить систему уравнений:
$x+y+z+u=\frac{1}{a}$; $x+y+u=\frac{1}{b}$; $y+z+u=\frac{1}{c}$.

606. Составить систему уравнений: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$; $x:y=n:m$.

607. За $\frac{2abc}{ab+bc-ac}$ мин, $\frac{2abc}{ac+bc-ab}$ мин, $\frac{2abc}{ab+ac-bc}$ мин.

608. $b+\sqrt{b(b-a)}$; $b-a+\sqrt{b(b-a)}$; $\sqrt{b(b-a)}$ дней, $b>a$.

609. $\frac{-kn+\sqrt{k^2n^2+240ktn}}{2k}$ и $\frac{kn+\sqrt{k^2n^2+240ktn}}{2k}$.

610. Составить систему уравнений $\frac{a+t}{x}+\frac{t}{y}=1-\frac{m}{n}$; $\frac{1}{x}+\frac{T}{x}=\frac{1}{2}$; $\frac{T}{y}=\frac{1}{2}$, где T - время совместной работы.

611. Рассмотреть уравнение $\left(\frac{a}{x}-t-1\right)(x+n)=b$.

612. Составить систему уравнений $ax+by=\frac{m}{n}A$, $bx+by=\frac{2n-2m-1}{2n}A$ и найти $\frac{A}{y}$.

613. Решить систему уравнений $y-x=a$, $\frac{b}{x}-\frac{b}{y}=\frac{1}{n}$.

614. $\frac{0{,}4an}{11-n}$; $\frac{0{,}24an}{n-9}$; $n=10$.

615. За $\frac{a^2+n+\sqrt{a^4+6a^2n+n^2}}{2a}$ часов.

§21. Задачи на расход материалов

616. Скорость износа передних шин автомобиля составляет $\frac{1}{n_1}$. Скорость износа задних $\frac{1}{n_2}$. После того, как машина проехала x км, износ передней шины составил $\frac{x}{n_1}$, износ задней – $\frac{x}{n_2}$. Длину промежуточного пробега машины x выберем так, чтобы, поменяв шины местами, то есть из них, которые раньше были на передних колесах, поставить на задние, а те, которые были на задних, – на передние, добиваемся того, чтобы они стерлись одновременно. Для этого длина x должна составлять половину возможного пробега. Полный износ шины, естественно, принимаем за 1. В результате получаем, что $x\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)=1$ или

$$x=\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}.$$

До второй остановки (когда шины сотрутся совсем), автомобиль пройдет $2x$ км, т.е. $\frac{2n_1 n_2}{n_1+n_2}$. Путь автомашины удлинится на $\frac{2n_1 n_2}{n_1+n_2}-n_2=\frac{n_1 n_2-n_2}{n_1+n_2}$ км.

617. Средний возраст одного здания составляет T/n. Пусть возраст снесенного здания равен t. Тогда общий возраст оставшихся домов составит T-t. Средний возраст одного здания теперь равен $(T-t)/(n-1)$. Если построить новый дом, то общий возраст домов не изменится и будет равен T, а средний возраст составит $T/(n-1)$.

Сравним $(T-t)/(n-1)$ и $T/(n-1)$.

Если больше окажется первая из величин, то город больше помолодеет от постройки, если вторая, то от сноса, если они равны, то город помолодеет в обоих случаях одинаково. Определим, например, при каких значениях t город больше молодеет от сноса старого здания:

$\frac{T-t}{n-1} < \frac{T}{n-1}$, откуда $t > 2T/(n+1)$.

Итак, если $t > 2T/(n+1)$ город больше помолодеет от сноса старого здания, при $t < 2T/(n+1)$ город больше помолодеет от постройки нового.

618. В общей сложности n грузовиков могут истратить горючего не больше, чем запасенного на T n дней. Пусть все машины на первом этапе проедут от пункта A расстояние, соответствующее $T/(n+1)$ дням пути. После этого пусть одна из машин передаст каждой из (n-1) остальных машин горючее, соответствующее $T/(n+1)$ дням пути, т.е. всего (n-1)$T/(n+1)$ дней пути. Тогда у каждой машины останется горючего на $T/(n+1)$ дней пути, которого достаточно для не медленного возвращения ее в пункт A. Остальные (n-1) грузовиков продолжают свой путь в направлении к пункту B еще на расстоянии, соответствующее $T/(n+1)$ дням пути. Затем второй грузовик передает каждому из (n-2) грузовиков горючее, соответствующее $T/(n+1)$ дням пути, и немедленно отправляется назад в пункт A. Во втором грузовике останется горючего на T-(n-1)$T/(n+1)$=2$T/(n+1)$ дней пути, которого ему хватит для возвращения. К этому моменту колонной грузовиков будет пройден путь, соответствующий $2T/(n+1)$ дням пути. Оставшиеся машины колонны продолжают свой путь к пункту B и передача горючего происходит по той же схеме. Когда настанет время отправлять назад к пункту A k-й грузовик $(2<k\le n-1)$, колонна пройдет расстояние, соответствующее $kT/(n+1)$ дням пути, и k-й грузовик передает из $(n-k)$ продолжающих путь грузовиков горючее на $T/(n+1)$ дней пути. На последнем участке пути он израсходовал горючего на $T-T/(n+1)-(n-k)/(n+1)=kT/(n+1)$ дней пути, что достаточно для его возвращения к пункту отправления. Остальные n-k грузовиков продолжают путь, имея каждый на T дней горючего.

В частности, если k=n-1, то один из грузовиков, которые двигались в направлении пункта B, отдает горючее на $T/(n+1)$ дней другому, у которого в результате оказывается горючего еще на T дней пути, а сам возвращается. У него горючего остается на $nT/(n+1)-T/(n+1)=(n-1)T/(n+1)$ дней, чего вполне хватит для его возвращения.

Итак, последний грузовик может проехать расстояние, соответствующее $T+(n-1)T/(n+1)$ дням пути. Это расстояние по условию задачи должно быть не меньше 1,9T.

Следовательно, $(n-1)/(n+1)\ge 0{,}9$, откуда $n\ge 1{,}9$.

619. Положим, что до введения пошлин за год было продано a тонн местного и b тонн иностранного. Следовательно, до введения пошлин выручка составила $p(a+b)$ денежных единиц. Число тонн угля, ввозимого в течение года, ввозимого в течение года, после наложения пошлин равно $\dfrac{p(a+b)}{p+\dfrac{d}{n}}-a=\dfrac{npb-ad}{np+d}$.

Поскольку за каждую тонну ввозимого угля власти получили по d денежных единиц, то весь их доход за год составляет $x=\dfrac{npb-ad}{np+d}\cdot d$ денежных единиц. Перепишем последнее равенство в виде $ad^2-(npb-x)d+npx=0$, откуда

$$d=\frac{npb-x\pm\sqrt{(npb-x)^2-4anpx}}{2a}.$$

Чтобы d было вещественным, необходимо, чтобы $(npb-x)^2-4anpx\geq 0$. Следовательно, наибольшее значение x получится из условия $4anpx=(npb-x)^2$.

Следовательно, $d=\dfrac{npb-x}{2a}$.

Исключая x, получаем $d=np\left(\sqrt{1+\dfrac{b}{a}}-1\right)$.

620. Составить систему уравнений $x+y=c$; $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$, где x – количество груш, y – количество яблок.

621. $\dfrac{1000p(a_1-a)}{m+1}\left(\dfrac{m}{c_1-c}+\dfrac{b}{ca_1-c_1a}\right)$.

622. $\dfrac{(d+n)(a_2b_1-a_1b_2)}{2(c_1a_2-c_2a_1)}$.

623. $\dfrac{(b+d)1000}{(c-a)\,t}$ кг.

624. 1) $\frac{100p}{t}$ кг – расход сена в один день.

2) an кг – расход в день в предположении, что были только лошади.

3) an-$\frac{100p}{t}$ кг – настолько фактический расход меньше предположенного.

4) (a-b) кг – настолько расход на одну корову в день меньше, чем на одну лошадь.

5) $\frac{ant-100p}{(a-b)t}$ – количество коров.

625. $\frac{ac-1000pn}{a-b}$ – пакетов по b граммов.

626. $\frac{1000(2{,}5a+sp)}{2000-sn}$; $sn<2000$.

627. $\frac{an-bm}{n-m}$ кг; $\frac{a-b}{n-m}$ кг.

628. $\frac{k-bm}{a-b}$ кг; $\frac{am-k}{a-b}$ кг.

629. $\frac{-ab+\sqrt{a^2b^2+4abs}}{2b}$ л; $\frac{ab+\sqrt{a^2b^2+4abs}}{2b}$ л.

630. Рассмотреть уравнение $\frac{s}{x+b}+k=\frac{s}{x}$.

631. $\frac{ab+\sqrt{ab(ab+4n)}}{2a}$; a, b, n>0.

632. $\frac{a-bn}{d(n-1)}$ дней.

633. $\frac{b-a}{m-n}$ лет.

634. $\frac{Nq}{mq+n}$ м на 1 простыню.

635. $\frac{S+bd}{a+b}$ руб цена 1 м сатина.

636. $\frac{d(a-m)}{an-bm}$ руб; $\frac{d(n-b)}{an-bm}$ руб.

637. Вначале был один пустой ящик. После каждого вкладывания число пустых ящиков убывает на 1 (за счет того ящика, в который вложена новая порция ящиков) и возрастает на *n*. Таким образом, число пустых ящиков после каждого вкладывания увеличивается на *n*-1. Число наполненных ящиков равно числу вкладываний ящиков *k*. Поэтому число пустых ящиков после *k* вкладываний равно 1+ *k*(*n*-1).

§22. *Собрание наиболее трудных задач по математике, служивших во всех учебных округах России темами на испытаниях зрелости в гимназиях и на выпускных экзаменах в реальных училищах*

638. 1) 7166,25 руб.; 2) 6%; 3) 1 год 9 мес. 18 дн.

639. 10 фунтов и 20 фунтов.

640. Прибыль на 100 рублей составляет 18,75 рублей; 100 аршин и 300 аршин.

641. 1) 5 руб.; 2) 8,996%; 3) 632 руб. 22,5 коп

642. 270 десятин, 240 десятин, 208 десятин; 100 рублей.

643. 1900 руб., 3800 руб.

644. Капитал *B* составляет 89900 рублей.

645. 10 фунтов и 4 фунта.

646. 115 дес. 3337 саж; 33 дес. 39,2 саж; 330 дес. 392,1 саж; 47 дес. 398,6 саж; 282 дес. 2393,1 саж.

647. 77-я проба; 392 руб.; 16 фунтов и 40 фунтов.

648. 1) 54 аршина; 144 аршина; 102 аршина. 2) 750 руб.

649. 72 руб.

650. 2 месяца.

651. 1) 3000 руб.; 2) 10%; 3) 338 руб., 1014 руб., 1183 руб.

652. 78 пробы; 1 фунт 10 л, 1 фунт 28 л; 1 фунт 26 л.

653. 10 дней; 508,75 руб, 244,2 руб., 590,15 руб., 223,85 руб.

654. $330\frac{2}{3}$ фунта и $69\frac{1}{3}$ фунта.

655. 3552 руб.

656. 1) 170 руб.; 2) 220 руб 40 коп. 3) $29\frac{11}{17}$%.

657. 1) 12 дней; 2) 70 частей и 105 частей; 3) 4 руб 40 коп.

658. 5 часов и 9 часов. **659.** 287 верст и 328 верст. **660.** 5%. **661.** 20 верст/час и 5 верст/час. **662.** 6%. **663.** 10 руб. и 5 руб. **664.** $31\frac{7}{8}$ миль. **665.** 20 час и 60 час. **666.** 16 000 руб, 24000 руб, 40000 руб; 5%. **667.** 10 ведер.(см. 484.) **668.** 6 верст/час; 3 верст/час. **669.** 1085 руб и 1710 руб. **670.** 150 верст. **671.** 24 дня. **672.** 24 дня и 48 дней. **673.** 125 руб. и 200 руб.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агапов Д.В. Собрание наиболее трудных задач по математике, служивших во всех учебных округах России темами на испытаниях зрелости в гимназиях и на выпускных экзаменах в реальных училищах. - Оренбург, Типо-литография Б.А.Бреслина, 1894.
2. Александров Б.И., Лурье М.В. Пособие по математике для учащихся заочных подготовительных курсов естественных факультетов МГУ. – М.: МГУ, 1979.
3. Александров Б.И., Моденов П.С. Пособие по математике для подготовительных курсов МГУ. - М.: МГУ, 1967.
4. Андронов И.К. Арифметика. Развитие понятия числа и действия над числами. - М.: 1962.
5. Андронов И.К., Окунев А.К. Арифметика рациональных чисел. – М.: Просвещение, 1971.
6. Антонов Н.П., Выгодский М.Я., Никитин В.В., Санкин А.И. Сборник задач по элементарной математике. - М.: Гос. издательство ТТЛ, 1957.
7. Анцыферов С. Математика. - М.: М. Государственное издательство, 1929.
8. Арнольд И.В. Теоретическая арифметика. – М.: Учпедгиз, 1938.
9. Арнольд И.В. Теория чисел. М.: Учпедгиз, 1939.
10. Баврин И.И., Фрибус Е.А. Старинные задачи. - М.: Просвещение, 1994.
11. Балк М.Б. Геометрические приложения понятия о центре тяжести. – М.: Физматгиз, 1959.
12. Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс. – М.: Наука, 1987.
13. Бельский Н.В. Курс теоретической арифметики. – М.: Издательство “Г.Лисснера и Ф. Собко”, 1909.

14. Березин В.Н., Березина Л.Ю., Никольская И.Л. Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике. – М.: Просвещение, 1985.
15. Бескин Н.М. Деление отрезка в данном отношении. – М.: Наука, 1973.
16. Боболович Ф.А. Задачник коммерческой арифметики в двух частях, с 6 отделами общих задач. Для торговых школ и коммерческих училищ, применение к программе Министерства торговли и промышленности. Издание 5-ое, Т-во В.В.Думнов, наск. бр. Салаевых, 1915.
17. Боболович Ф.А. Задачник, составленный в связи с “Полным учебником коммерческой арифметики”. Издание 3-е, М.:-тип. Г.Лисснера и Д.Собко, 1905.
18. Боболович Ф.А. Коммерческая арифметика с примерами, задачами и упражнениями. Составлена применительно к программе торговой школы, ч. 1-3, М.:- 1901 - 1902.
19. Боболович Ф.А. Коммерческая арифметика. – М.: 1916.
20. Боболович Ф.А. Полный учебник коммерческой арифметики с связи с задачником, заключающем до 600 задач, примеров и упражнений с указаниями для решения и ответов в трех частях. Издание 2-е. М.: – тип. Г.Лесснера и А. Гешеля, преемн. Э.Лесснера и Ю.Романа, 1902.
21. Болтянский В.Г., Виленкин Н.Я. Симметрия в алгебре. – М.: Наука, 1967.
22. Болтянский В.Г., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. Лекции и задачи по элементарной математике. – М.: Наука, 1972.
23. Боярский А.Я. Математика для экономистов. – М.: Госстатиздат, 1957.
24. Брадис В.М. Теоретическая арифметика. – М.: Учпедгиз, 1954.

25. Брокгауз Ф.А., Ефрон И.А. Россия, Энциклопедический словарь. – Лениздат, 1991
26. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л. Пары чисел и действия с ними. – М.: Издательство АПН СССР, 1985
27. Васильев-Яковлев Н.П. Коммерческая арифметика в связи с коммерческой экономикой. Курс реальных училищ. Издание 5-е, тип. И.И.Голокова Киев, , 1895.
28. Васильев-Яковлев Н.П. Сборник задач по коммерческой арифметики для коммерческих и реальных училищ, издание 4-е. – Киев, 1894.
29. Ваховский Е.Б., Рывкин А.А. задачи по элементарной математике. – М.: Наука, 1969.
30. Виленкин Н.Я. Индукция. Комбинаторика. – М.: Просвещение, 1976.
31. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. – М.: Наука, 1975.
32. Виноградов И.М. Основы теории чисел. – М.: Наука, 1981.
33. Воробьев Н.Н. Признаки делимости. – М.: Наука, 1988.
34. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1986.
35. Гельфонд А.О. Решение уравнений в целых числах. – М.: Наука,1978.
36. Гонин Е.Г. Теоретическая арифметика. – М.: Учпедгиз, 1959.
37. Гребенча М.К., Ляпин С.Е. Арифметика. – М.: Учпедгиз, 1952.
38. Двойная бухгалтерия (италянская). Для коммерческих и реальных училищ и самообразования. – Киев, 1882.
39. Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. – М.: Наука, 1976.

40. Дынкин Е.Б., Успенский В.А. Математические беседы. – М.-Л.: Гос. Издательство ТТЛ, 1952.
41. Жанэ З.К. Химия: ключевые факты. – Майкоп, 1994.
42. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа. – М.: Просвещение, 1993.
43. Заочные математические олимпиады. – М.: Наука, 1981.
44. Зорин В.В. Пособие по математике для поступающих в вузы. – М.: Высшая школа, 1969.
45. Игнатьев В.А., Игнатьев Н.И., Шор Я.А. Сборник задач по арифметике для педучилища. – М.: Учпедгиз, 1952.
46. Избранные вопросы математики. 9кл. Факультативный курс. – М.: Просвещение, 1979.
47. Избранные задачи. – М.: Мир, 1977.
48. Кагазежев М.Н. Диофантовы уравнения и задачи, приводящие к ним. – Майкоп, изд-во Дебют, 1993.
49. Калнин Р.А. Алгебра и элементарные функции. – М.: Наука, 1975.
50. Катлер Э., Мак-Шейн Р. Система быстрого счета по Трахтенбергу. – М.: Просвещение, 1967.
51. Журнал «Квант», 1970-1997.
52. Кириллов А.А. Что такое число? – М.: Наука, 1993.
53. Коммерческая арифметика (для самообучения). С приложениями задач на все виды коммерческих вычислений с подробными решениями и объяснениями. Т-во “Благо”, Выпуски 1,2,3. СПб., 1895-1896 гг.
54. Коммерческая арифметика с примерами, задачами и упражнениями, ч. 1, 1901, М.: тип. Г.Лесснера и А Гешеля. Составил применительно к программе торговых школ, окончивший курс математических наук Императорского Московского университета преподаватель торговой школы Ф.Боболович.

55. Коммерческий задачник. “Счетоводство” Н.Е.Лукьянова, Харьков, тип. С.А.Шмерковича, б.г.
56. Коммерческое образование в последние три года. Тип. Министерства финансов (В.Киршбаум). Из №№ 253 и 254 “Торгово-Промышленной газеты”, 1899.
57. Коммерческое образование в России. Высочайше утвержденные Положения.(Издания Мариинской торговой школы в Москве). Из собрания Узак. и Расп. Провит. 1896, № 70, с. 775.
58. Кордемский Б.А. Математическая смекалка. – М.: Физматгиз, 1958.
59. Кордемский Б.А., Русалев Н.В. Удивительный квадрат. - М.: АО “Столетие”, 1994.
60. Котлер Ф. Основы маркетинга. – М.: Прогресс, 1990.
61. Кочович Е. Финансовая математика. – М.: Финансы и статистика, 1994.
62. Кречмар В.А. Задачник по алгебре – М.: Наука, 1872.
63. Кудреватов Г.А. Сборник задач по теории чисел. – М.: Просвещение, 1970.
64. Кудрявцев Л.Д. Современная математика и её преподавание. – М.: Наука, 1980.
65. Ларичев П.А. Сборник задач по алгебре для 10 класса средней школы. – М.: Госучпед. Издательство, 1958.
66. Лебег А. Об измерении величин. – М.: Учпедгиз, 1960.
67. Литвиненко Н.В., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике. Алгебра, тригонометрия. – М.: Просвещение, 1991.
68. Лоповок Л.М. Тысяча проблемных задач по математике. – М.: Просвещение, 1995.
69. Ляпин С.Е., Баранова И.В. Сборник задач по элементарной математике. – М.: Госучпед. издательство, 1960.

70. Мазаник А.А. Делимость чисел и сравнения. – Минск: Издательство “Народная асвета”, 1971.
71. Манин Ю.И. Кубические формы. – М.: Наука, 1972.
72. Мантуров О.В., Солнцев Ю.К., Соркин Ю.И., Федин Н.Г. Толковый словарь математических терминов. – М.: Просвещение, 1965.
73. Математика в современном мире. – М.: Мир, 1967.
74. Журнал «Математика в школе». 1979-1997.
75. Математическое просвещение, вып. 1-6, 1957-1961; третья серия, вып. 1, 1995.
76. Мирошникова Н.М., Ожегов В.Б., Черкас Л.А. Контроль знаний по математике с применением ЭВМ. – М.: Высшая школа, 1990.
77. Михелович Ш.Х. Теория чисел. – М.: Высшая школа, 1967.
78. Нагибин Ф.Ф., Канин Е.С. Математическая шкатулка. – М.: Просвещение, 1988.
79. Нивен А. Числа рациональные и иррациональные. – М.: Мир, 1966.
80. Никольская И.Л., Семенов Е.Е. Учимся рассуждать и доказывать. – М.: Просвещение, 1989.
81. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников М.Н., Шевкин А.В. Арифметика. – М.: Наука, 1988.
82. Новиков В.П., Павлов В.С.. Ручное изготовление ювелирных изделий. – Ленинград, Политехника, 1991.
83. Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В., Потапов М.К. старинные занимательные задачи. – М.: Наука, 1985.
84. Олимпиады, алгебра, комбинаторика. – Новосибирск: Наука, 1979.
85. Островский А.И. 75 задач по элементарной математике - простых, но ... – М.: Просвещение, 1966.

86. Островский А.И., Кордемский Б.А. Геометрия помогает арифметике. – М.: АО «Столетие», 1994.
87. Паланджянц Л.Ж. Об элементах коммерческих знаний в курсе математики./ Материалы первой научно-практической конференции МГТИ. – Майкоп, 1996, с. 108 - 110.
88. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа, ч. 1,2. – М.: Наука, 1978.
89. Пономарев С.А., Сырнев Н.И. Сборник задач и упражнений по арифметике. – М.: Просвещение, 1968.
90. Пособие по математике для поступающих в вузы (под ред. Г.Н. Яковлева). – М.: Наука, 1981.
91. Прокофьев А.В. Коммерческая арифметика и торговые операции, издание 10-е для фундаментальных и ученических библиотек при реальных училищах, а также в виде пособия для 5-го класса коммерческого отделения и в 8-м в качестве учебного пособия для промышленных училищ. – М.: тип. П.П.Рябушинского, 1910.
92. Садовничий В.А., Подколзин А.С. Задачи студенческих олимпиад по математике. – М.: Наука, 1978.
93. Сборник задач Московских математических олимпиад./ Под редакцией В.Г.Болтянского/. – М.: Просвещение, 1965.
94. Сборник задач по коммерческой арифметике. Руководство для коммерческих учебных заведений. Издание 4-е, – М.: кн. маг. Спиридонова и Михайлова, 1908.
95. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. (под ред. А.И. Прилепко). – М.: Высшая школа, 1989.
96. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы (под редакцией М.И. Сканави) – М.: Высшая школа, 1978.

97. Сергеев И.Н., Олехник С.Н., Гашков С.Б. Примени математику. – М.: Наука, 1989.
98. Серпинский В. 250 задач по элементарной теории чисел. – М.: Просвещение, 1968.
99. Сивашинский И.Х. Неравенства в задачах. – М.: Наука, 1967.
100. Скопец З.А. Дополнительные главы по курсу математики 10 класса для факультативных занятий. – М.: Просвещение, 1969.
101. Совайленко В.К. Система обучения математике в 5-6 классах. – М.: Просвещение, 1991.
102. Сорок вузов Москвы. (под ред. Л.В. Малюковой и А.М. Усковой) – М.: Центр Нуклеон, 1991.
103. Страшевич С., Бровкин Е. Польские математические олимпиады. – М.: Мир, 1978.
104. Сушкевич А.К. Теория чисел. – Харьков. Изд-во ХГУ, 1956.
105. Учебник коммерческой арифметики. Руководство для коммерческих учебных заведений. Составитель Ф.Боболович. Издание 4-е, М.: кн. маг. Спиридонова и Михайлова, 1908.
106. Учебники по алгебре, по алгебре и началам анализа. 8,9.10,11 кл. – М.: Просвещение, 1992.
107. Ученые записки Грозненского государственного педагогического института, № 6, вып. 3, 1951.
108. Факультативный курс по математике. Учебное пособие для 7-9 кл. сред. шк. / Сост. И.Л.Никольская/. – М.: Просвещение, 1991._
109. Фомин С.В. Системы счисления. – М.: Наука, 1980.
110. Фридман Л.М., Турецкий Е.М. Как научиться решать задачи. – М.: Просвещение, 1989.
111. Холл М. Комбинаторика. – М.: Мир, 1970.

112. Худобин А.И., Худобин Н.И., Шурмалов М.Ф. Сборник задач по алгебре и элементарным функциям. – М.: Просвещение, 1973.
113. Чекмарёв Я.Ф., Тулинов Б.А. Арифметика для педучилищ. – М.: Просвещение, 1962.
114. Чекмарёв Я.Ф., Филичев С.В. Сборник арифметических задач. – М.: Просвещение, 1968.
115. Четверухин Н.Ф. Проективная геометрия. – М.: Просвещение, 1969.
116. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учебное пособие для 10 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1989.
117. Шашкин Ю.А. Эйлерова характеристика. – М.: Наука, 1984.
118. Штейнгауз Г. Сто задач. – М.: Наука, 1986.
119. Эндрюс Г. Теория разбиений. – М.: Наука, 1982.
120. Яглом И.М. Математические структуры и математическое моделирование. – М.: Советское радио, 1980.

Оглавление

Предисловие 3
§ 1.Задача о расфасовке товара 6
§ 2.Задача о переливании 10
§ 3.Задача о размене 27
§ 4.Задача о взвешивании 42
§ 5.Обыкновенные дроби..48
§ 6.Разложение доли в сумму долей 59
§ 7.Десятичные дроби 67
§ 8.Задачи на процентные вычисления 76
§ 9.Наценки и скидки 84
§ 10. Пропорции 121
§ 11. Величины прямо пропорциональные 124
§ 12. Величины обратно пропорциональные 125
§ 13. Величины прямо пропорциональные одним величинам и обратно пропорциональные другим 127
§ 14. Простое пропорциональное деление 133
§ 15. Сложное пропорциональное деление 139
§ 16. Задачи на смешение жидкостей 143
§ 17. Задачи на сплавы 153
§ 18. Задачи на смешение разносортных товаров 158
§ 19. Задачи на движение 162
§ 20. Задачи на производительность труда 173
§ 21. Задачи на расход материалов 180
§ 22. Собрание наиболее трудных задач по математике, служивших во всех учебных округах России темами на испытаниях зрелости в гимназиях и на выпускных экзаменах в реальных училищах 185
Ответы..198
Литература...273