

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ОКРЕСТНОСТИ ОСОБОЙ ТОЧКИ РАЗРЫВНОЙ СИСТЕМЫ

Д.К. Мамий

Адыгейский государственный университет, Майкоп

Рассматривается двумерная автономная система дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Даётся обобщение теоремы А.Ф. Филиппова о топологической структуре окрестности особой точки разрывной системы.

Пусть L -гладкая линия, например, линия разрыва вектор-функции $f(z) = (f_1(z), f_2(z)), z = (x, y)$, или линия, на которой $f(z) = 0$. Обозначим $f^-(z)$ и $f^+(z)$ предельные значения вектор-функции f при приближении к точке $z \in L$ из примыкающих к линии L областей G^- и G^+ непрерывности функции f , а $f_N^-(z)$ и $f_N^+(z)$ обозначим проекции векторов $f^-(z)$ и $f^+(z)$ на нормаль к линии L в точке z , направленную от G^- к G^+ .

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений на плоскости:

$$\dot{z} = f(z), z \in G \subset R^2, G \text{ конечна}, \quad (1)$$

удовлетворяющую следующим условиям ([1], стр. 134):

1⁰ f - кусочно-непрерывна и кусочно-гладкая в G , то есть область G конечным числом гладких линий конечной длины (которые могут иметь общие концы) делится на конечное число подобластей, в каждой из которых $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны вплоть до границы;

2⁰ в тех точках z линии разрыва L , где $f_N^-(z) \cdot f_N^+(z) \leq 0$ кроме, может быть, случая

$$f_N^-(z) = f_N^+(z) = 0, f^-(z) \neq f^+(z); \quad (*)$$

3⁰ случай $(*)$ допускается только в конечном числе точек.

4⁰ если $f^+(z) = 0$ (или $f^-(z) = 0$) на линии L , то вблизи каждой точки линии L может быть, кроме конечного числа точек в G^+ (соответственно в G^-) или $f(z) \neq 0$ и функция $g(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$ удовлетворяет условию Липшица, или $f(z) \equiv 0$.

Тогда, как показано в теореме I §16 [1] эта система в области G может иметь только конечное число линейных и точечных особенностей.

Пусть точка $O(z = 0)$ является стационарной точкой или точечной особенностью, и пусть у нее имеется проколотая окрестность, не содержащая:

- а) точечных особенностей;
- б) стационарных точек, за исключением кусков линейных особенностей типа AA_2 ;
- в) целых линейных особенностей;
- г) целых сепаратрис.

Замечание. Следуя [1] линейная особенность L называется особенностью типа AA_2 , если траектории разрывной системы вливаются в L при L при конечных t ; L состоит вся из стационарных точек.

В [1] §17 исследована топологическая структура особой точки уравнения (5) в случае, когда ее проколотая окрестность удовлетворяет условиям а), в), г) и не содержит стационарных точек. Приводимые ниже теоремы являются некоторым обобщением результатов §17 [1] для случая, когда проколотая окрестность особой точки удовлетворяет условиям а), б), в), г). Допущение кусков линейных особенностей типа AA_2 в пункте б) объясняется тем, что среди линейных особенностей, содержащих стационарные точки, только особенности типа AA_2 в классе систем $U_{G,L}^K$ могут быть грубыми. Остальные же имеют бесконечную степень негрубости.

Здесь $U_{G,L}^K$ - метрическое пространство систем вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x,y), \end{cases} \text{ где } f(x,y) = f_i(x,y), (x,y) \in G_i, i = 1,2$$

с метрикой $\max_{i=1,2} \|f_i - \tilde{f}_i\|_K$.

L - гладкая, класса C^K , имеющая конечную длину, линия разрыва функции f , делящая область G на две области G_1 и G_2 .

Рассмотрим следующий набор из 15 секторов. Считаем, что все траектории, входящие в этих секторах в особую точку, входят в нее за бесконечное время. В каждом секторе одна из точек границы (на рис. 1-нижняя) является особой точкой; границы секторов F_*, G_*, L_*, K_* содержат по одной линейной особенности, состоящей из стационарных точек, а граница сектора S_{**} содержит две такие линейные особенности. На рис. 1 эти особенности выделены жирной чертой. Других особых точек и точечных особенностей в секторах и на их границах нет. Направление движения на всех траекториях одновременно можно заменить на противоположное. В каждом секторе через каждую внутреннюю точку, а в секторах E, H, P и через граничную проходит только одна траектория.

Секторы E, F, G - эллиптические (все траектории, может быть, кроме идущих по границам сектора обоими концами стремятся к особой точке);

F_*, G_* - квазиэллиптические (все траектории, может быть кроме идущих по границам, одним концом входят в стационарную точку линейной особенности, а другим стремятся к особой точке);

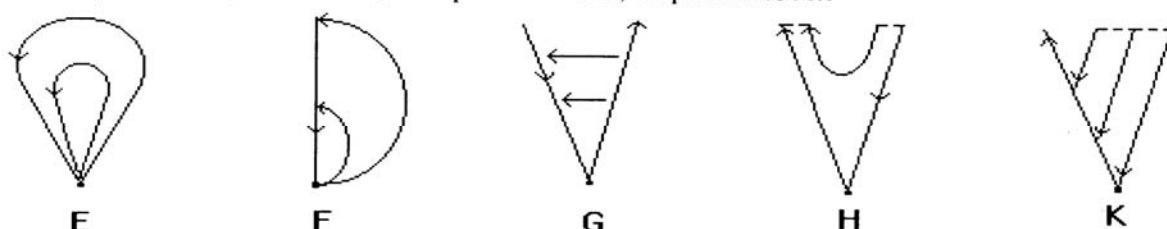
H, K, L - гиперболические (все траектории, кроме идущих по границе сектора, обоими концами выходят из окрестности особой точки);

K_*, L_* - квазигиперболические (все траектории, кроме идущих по границе сектора, одним концом входят в линейную особенность стационарных точек, а другим концом выходят из окрестности особой точки);

P, Q, R, S - параболические (все траектории одним концом входят в особую точку, а другим - выходят из ее окрестности);

S_{**} - стационарный (все траектории обеими концами входят в линейные особенности стационарных точек).

Каждый сектор ограничен простой замкнутой кривой, содержащей особую точку, конечное число дуг траектории, конечное число дуг без контакта I-го рода и кусков линейных особенностей стационарных точек. Дуги без контакта I-го рода и куски линейных особенностей, состоящих из стационарных точек, пересекаются



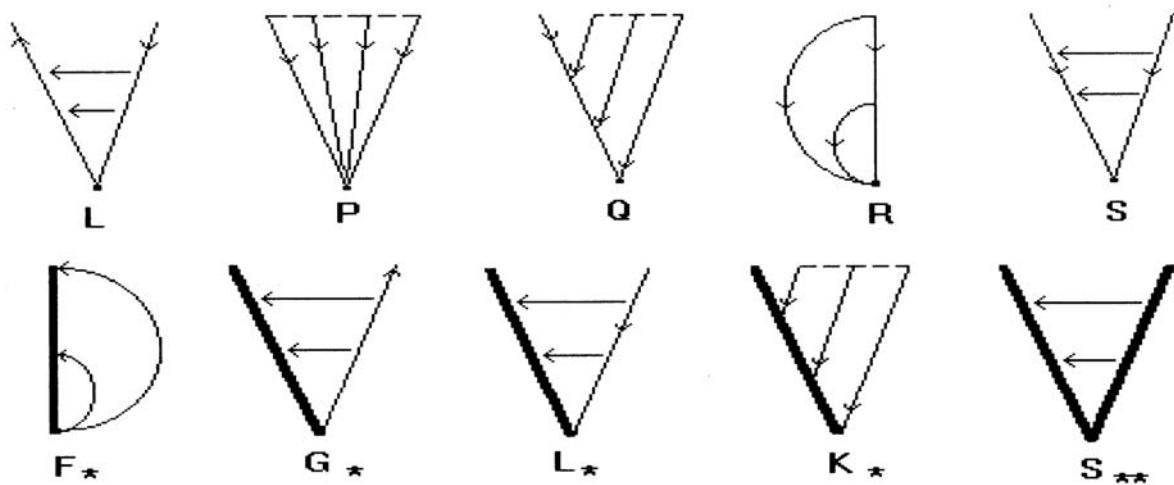


Рис. 1

траекториями без касания и только в одном направлении. Граница сектора E содержит одну траекторию, стремящуюся обоими концами к особой точке, граница каждого из остальных секторов, кроме $F_*, G_*, K_*, L_*, S_{**}$, содержит две полураектории, стремящиеся к особой точке и называемые боковыми границами сектора. Боковыми границами секторов также называются границы каждого из секторов F_*, G_*, K_*, L_* , состоящие из одной полураектории, стремящейся к особой точке, и отрезка линейной особенности стационарных точек, а также границы сектора S_{**} , состоящие из двух отрезков линейных особенностей стационарных точек.

В секторах F, R, F_* две боковые границы имеют общую точку и замыкают сектор.

Секторы $G, L, S, G_*, L_*, S_{**}$ замыкаются одной другой траектории с концами на боковых границах; сектор P - дугой без контакта I-го рода; секторы K, Q, K_* - другой без контакта I-го рода и одной дугой траектории; сектор H - двумя дугами без контакта I-го рода и одной дугой траектории. На рис. 1 дуги без контакта I-го рода обозначены пунктиром.

У секторов F, K, Q, R одна граничная траектория, а у секторов F_*, K_* - отрезок стационарных точек являются линейными особенностями. У секторов G, L, S - две граничные траектории, а у секторов G_*, L_* отрезок стационарных точек и одна траектория, у сектора S_{**} два отрезка стационарных точек являются линейными особенностями. В эти линейные особенности вливаются, соответственно одним концом или двумя, все траектории, проходящие через внутренние точки сектора. В секторе E все траектории - петли, обоими концами входящие в особую точку, причем из каждой 2-х петель одна лежит внутри другой. Вся окрестность особой точки может состоять из одного сектора P, Q . Такой сектор P будем обозначать P_0 , сектор $Q - Q_0$. В силу условий $1^0 - 4^0$ окрестность особой точки не может состоять из одного сектора S . Особые точки типа центр будем обозначать O_0 .

В силу условия б) линейные особенности, куски которых содержаться в окрестности особой точки и состоят из стационарных точек могут быть только типа AA_2 . Поэтому в секторах $F_*, G_*, L_*, K_*, S_{**}$ траектории входят в стационарные точки, лежащие на боковых сторонах, за конечное время.

Требует пояснения, почему в указанный список секторов не включены секторы, получающиеся из H и P при замене хотя бы одной из боковых сторон на кусок линейной особенности, состоящей из стационарных точек. Также не включены сюда и секторы, получающиеся из K и Q при замене боковой полураектории на кусок линейной особенности, состоящей из стационарных точек. Все эти секторы исключаются условием б).

В рассмотренных секторах траектории входили в особую точку, за бесконечное время. Однако часть граничных траекторий может входить в особую точку и за конечное время. Введем следующие обозначения для возникающих в этом случае секторов. Изображение

секторов дано на рис. 2,3, где двойной линией обозначены траектории, входящие в особую точку за конечное время. Секторы, граничные траектории которых входят в точку O за бесконечное время, будем обозначать также как и раньше. Если у секторов F, R, G_*, L_*, K_* боковая граничная траектория, являющаяся линейной особенностью, входит в особую точку за конечное время, то будем обозначать их $F^1, R^1, G_*^1, L_*^1, K_*^1$ соответственно.

Если у секторов S, P, L, G, H одна из граничных траекторий, (а именно, изображенная на рис. 2,3) входит в особую точку за конечное время, то будем обозначать их S^1, P^1, L^1, G^1, H^1 , если за конечное время в особую точку входит вторая траектория, а первая за бесконечное, то очевидно, что эти сектора получаются из S^1, P^1, L^1, G^1, H^1 при топологическом отображении, меняющем ориентацию, и поэтому должны обозначаться $\bar{S}^1, \bar{P}^1, \bar{L}^1, \bar{G}^1, \bar{H}^1$ соответственно.

Если обе граничные траектории секторов S, P, L, G, H входят в особую точку за конечное время, то эти секторы будем обозначать S^2, P^2, L^2, G^2, H^2 , соответственно.

Если в особую точку за конечное время входит только граничная траектория секторов K и Q , не являющаяся линейной особенностью, то обозначим их K^1, Q^1 , если же наоборот, только траектория, являющаяся линейной особенностью, то обозначения будут следующими $K^{1\wedge}, Q^{1\wedge}$. Если же обе боковые граничные траектории входят в точку O за конечное время, то обозначим их K^2, Q^2 . Итак, мы рассмотрели все секторы, траектории которых могут входить в особую точку за конечное время.

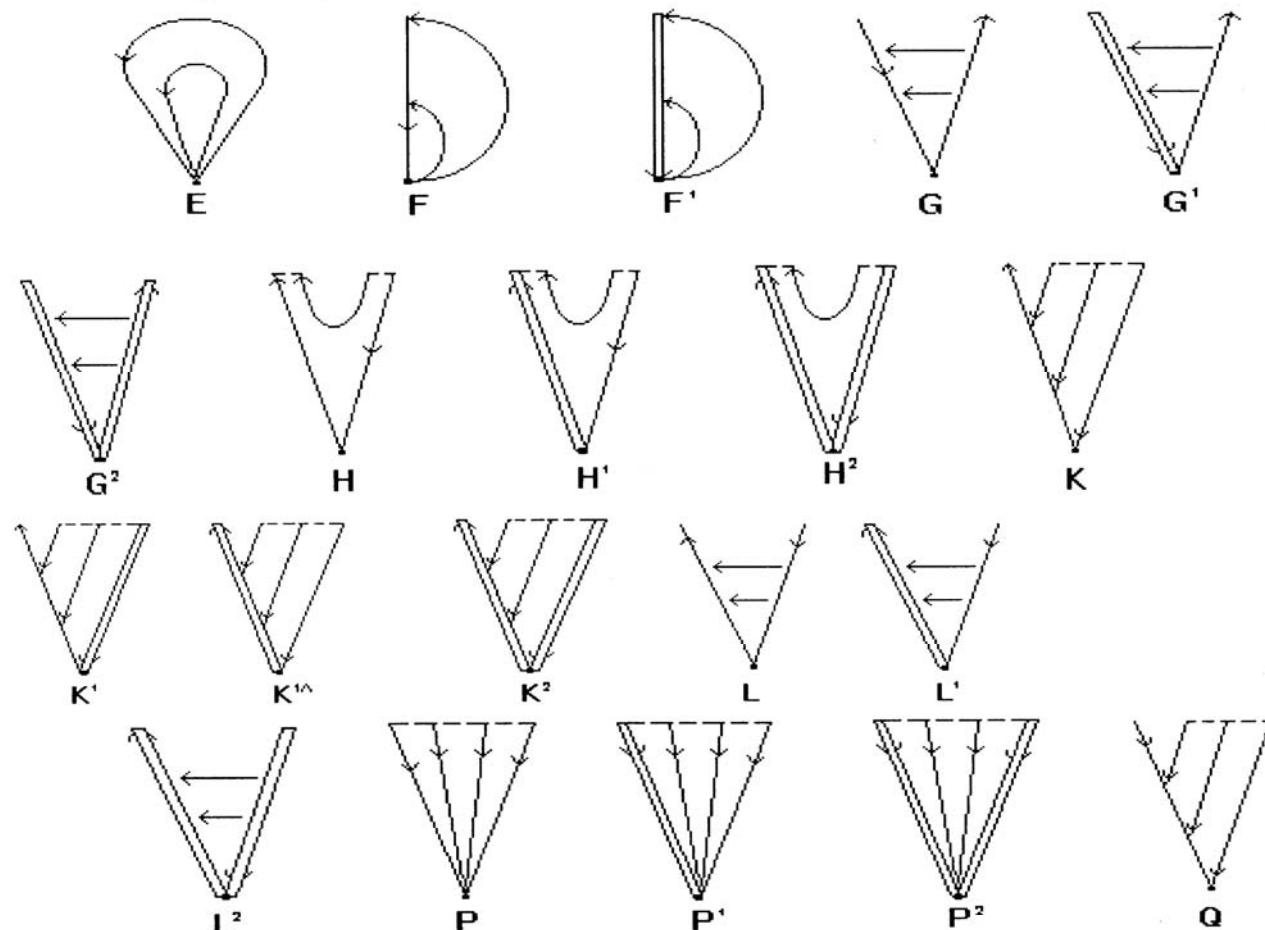


Рис.2

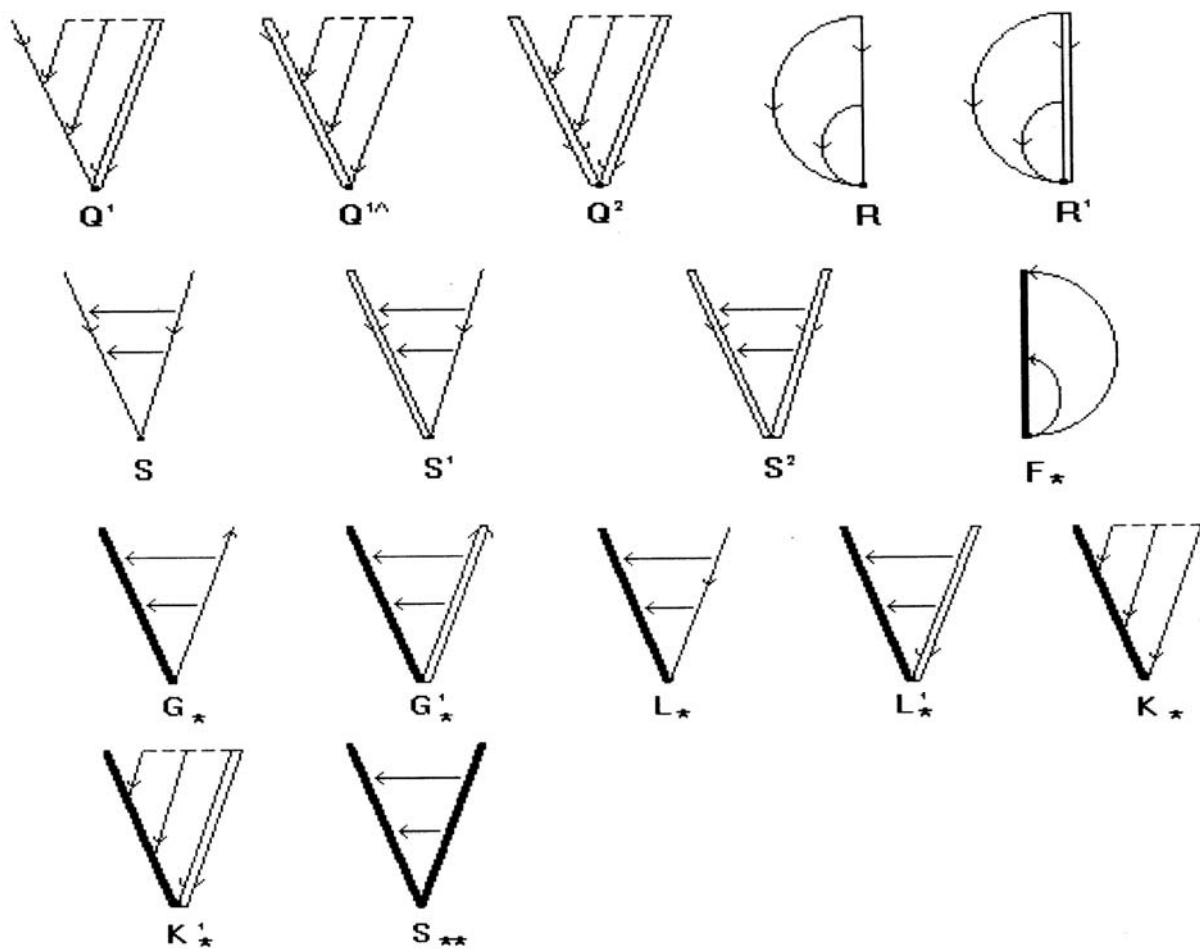


Рис.3

Лемма. Любые два сектора, принадлежащие разным классам имеют различную топологическую структуру, а принадлежащие одному и тому же классу - одинаковую структуру.

Теорема 1. Пусть особая точка O системы (I) имеет проколотую окрестность, удовлетворяющую условиям а), б), в), г). Тогда либо особая точка является центром или центрофокусом, либо у нее есть окрестность, состоящая или из одного сектора класса P_0 или Q_0 , или из конечного числа секторов, которые могут принадлежать только следующим 36 классам: $E, F, F^1, G, G^1, G^2, H, H^1, H^2, K, K^1, K^{1\wedge}, K^2, L, L^1, L^2, P, P^1, P^2, Q, Q^{1\wedge}, Q^1, Q^2, R, R^1, S, S^1, S^2, F_*, G_*, G_*^1, L_*, L_*^1, K_*, K_*^1, S_{**}$.

Все секторы особой точки O расположены также в циклическом порядке и для описания структуры особой точки надо перечислить классы секторов, встречающиеся при обходе вокруг особой точки в положительном направлении, начиная с любого сектора. Если при этом встречается сектор, являющийся образом стандартного сектора класса: $F, F^1, G^1, H^1, K, K^1, K^{1\wedge}, K^2, L^1, P^1, Q, Q^{1\wedge}, Q^1, Q^2, R, R^1, S, S^1, S^2, F_*, G_*, G_*^1, L_*, L_*^1, K_*, K_*^1$ при топологическом отображении, меняющем ориентацию, то над обозначением класса ставится черта.

Определение. Канонической окрестностью особой точки называется окрестность, граница которой простая замкнутая кривая, состоящая только из:

1) дуг траекторий, идущих по границам секторов E, F, F^1, R, R^1, F_* и не доходящих до особой точки.

2) дуг траекторий, замыкающих секторы

$G, G^1, G^2, L, L^1, L^2, S, S^1, S^2, G_*, G_*^1, L_*, L_*^1, S_{**}$

3) дуг без контакта 1-го рода и дуг траекторий, замыкающих секторы классов $H, H^1, H^2, K, K^1, K^{1\wedge}, K^2, P, P^1, P^2, Q, Q^1, Q^{1\wedge}, Q^2, K_*, K_*^1$.

Теорема 2. Для того чтобы у двух особых точек системы (1), удовлетворяющих условиям теоремы 1 и не являющихся центрофокусами, существовали канонические окрестности одинаковой топологической структуры необходимо и достаточно, чтобы они имели (может быть после зеркального отражения одной из окрестностей), одну и ту же циклическую последовательность секторов, а в случае наличия только секторов классов $G, L, S, G_*, L_*, S_*, G^1, G^2, G_*^1, S^1, S^2, L_*^1$ еще, чтобы обобщенные функции последования были эквивалентны.

Л и т е р а т у р а

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. - М.:Наука, 1985.

The topological structure of a neighborhood of a discontinuous system's singular point.

D.K. Mami

The autonomous two-dimensional system of differential equations with discontinuous right-hand side is considered. A generalisation of Filippov's theorem of topological structure of singular point's neighborhood is given.