

ОЦЕНКА СВЕРХУ ЧИСЛА ПРЯМЫХ ИЗОКЛИН КУБИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо, Д.С. Ушхо

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Доказано, что число прямых изоклин плоского полиномиального векторного поля третьей степени не может превышать десяти. Приведены примеры, поясняющие полученные результаты.

Введение

В работах [1, 2] сделано утверждение о том, что кубическая дифференциальная система, имеющая не менее девяти прямых изоклин, обладает девятью особыми точками. Это положение существенно было использовано при доказательстве теоремы о числе прямых изоклин системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^3 a_{ij} x^i y^j, \\ \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^3 b_{ij} x^i y^j. \end{cases} \quad (1)$$

Однако, как будет показано ниже, данное утверждение о наличии девяти особых точек у системы (1), имеющей не менее девяти прямых изоклин, верно лишь в том случае, когда среди прямых изоклин системы нет двух параллельных, на которых индуцированы различные направления. Действительно, существуют системы вида (1) с девятью и десятью прямыми изоклинами, но с шестью и семью особыми точками.

Основная часть

Теорема 1. *Если система (1) имеет хотя бы одну особую точку и не менее девяти прямых изоклин, то число параллельных между собой прямых изоклин не более трех.*

Доказательство. Из [3] следует, что при наличии у системы (1) пяти параллельных между собой прямых изоклин и хотя бы одной особой точки, эта система имеет не более семи прямых изоклин. Поэтому в условиях данной теоремы система (1) имеет не более четырех параллельных между собой прямых изоклин.

Пусть вопреки утверждению теоремы система имеет четыре параллельные между собой прямые изоклины. Множество M , состоящее из этих четырех прямых изоклин согласно [1] может быть разбито на непустые непересекающиеся подмножества только следующими тремя способами:

- a) $M = \{l_1^{m_1}, l_2^{m_1}, l_3^{m_1}\} \cup \{l_4^{m_2}\}$, $m_1 \neq m_2$;
- b) $M = \{l_1^{m_1}, l_2^{m_1}\} \cup \{l_3^{m_2}\} \cup \{l_4^{m_3}\}$, $m_i \neq m_j$, если $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$;
- c) $M = \bigcup_{i=1}^4 l_i^{m_i}$, где все m_i — попарно различны.

Так как система (1) индуцирует одно и то же направление не более чем на трех прямых изоклинах, то из остальных не менее чем пяти прямых изоклин системы (1) найдется хотя бы одна, на которой индуцировано направление $m_0 \neq m_{1,2}$. Таким образом, найденная прямая изоклина в случае а) пересекает все четыре, параллельные между собой прямые изоклины, то есть система имеет на одной прямой не менее четырех особых точек, что недопустимо для системы (1). Тем самым доказано, что случай а) невозможен.

В случае разбиения множества M способом b) система (1) посредством подходящего линейного преобразования может быть приведена к системе:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)(y - kx - b_2)(Ax + By + C), \\ \frac{dy}{dt} = (y - kx - b_3)Q_2(x, y), \end{cases} \quad (2)$$

где $Q_2(x, y) = \sum_{i+j=0}^2 b_{ij}x^i y^j$.

Обозначим прямые $y - kx - b_1 = 0$, $y - kx - b_2 = 0$, $y - kx - b_3 = 0$ через l_1^∞, l_2^∞ и l_3^0 соответственно. Прямая $L : Ax + By + C = 0$ пересекает прямые l_1^∞, l_2^∞ и l_3^0 , так как иначе имели бы случай a). Система (2) имеет прямую изоклину $l_4^{m_3}$ ($m_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), параллельную прямым $l_1^\infty, l_2^\infty, l_3^0$. Поэтому система (2) имеет на прямых l_3^0 и $l_4^{m_3}$ по одной особой точке. Пусть $F = l_3^0 \cap L, G = l_4^{m_3} \cap L$.

Из не менее чем четырех остальных прямых изоклин системы (2) найдется хотя бы одна, на которой индуцировано направление, отличное от m_3 . Следовательно, эта прямая проходит через точку G (иначе на $l_4^{m_3}$ расположены не менее двух особых точек) и пересекает прямую l_3^0 в точке, отличной от F . Поэтому эта прямая является изоклиной нуля (в противном случае на l_3^0 , кроме F есть еще одна особая точка), обозначим ее l_G^0 . Согласно [1] не более чем на одной из остальных не менее чем трех прямых изоклин системы (2) индуцировано направление $m = 0$. Следовательно, не менее двух прямых изоклин системы (2), отличных от главных, пересекают l_3^0 в точке F . Эти две прямые и прямая l_G^0 пересекают хотя бы одну из двух параллельных прямых изоклин бесконечности l_1^∞ и l_2^∞ в трех особых точках. Но это невозможно, так как l_1^∞ и l_2^∞ пересекаются с кривой второго порядка $Q_2(x, y) = 0$ не более чем в двух точках. Тем самым доказана невозможность разбиения множества M способом b).

В случае разбиения множества M на непустые непересекающиеся подмножества способом c существует невырожденное линейное преобразование [1], переводящее систему (1) в систему вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)P_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = (y - kx - b_2)Q_2(x, y), \quad b_1 \neq b_2, \end{cases} \quad (3)$$

Далее учитывая, что система (3) имеет еще две прямые изоклины $l_3^{m_3} : y - kx - b_3 = 0, l_4^{m_4} : y - kx - b_4 = 0$, кроме прямых изоклин $l_1^\infty : y - kx - b_1 = 0, l_2^0 : y - kx - b_2 = 0$, где все $b_i (i = 1, 4)$ — попарно различны, системе (3) можно придать вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = (y - kx - b_1)[(y - kx - b_4)S_1(x, y) - \\ \quad -(y - kx - b_3)R_1(x, y)], \\ \frac{dy}{d\tau} = (y - kx - b_2)[\bar{m}_3(y - kx - b_4)S_1(x, y) - \\ \quad -\bar{m}_4(y - kx - b_3)R_1(x, y)], \end{cases} \quad (4)$$

где R_1 и S_1 — линейные функции.

Из (4) видно, что на каждой из прямых l_1^∞ и l_2^0 расположено не более одной особой точки. Аналогично на каждой из прямых $l_3^{m_3}$ и $l_4^{m_4}$ расположено не более одной особой точки. С другой стороны, каждая из не менее чем пяти прямых изоклин системы пересекает параллельные между собой четыре прямые изоклины. Следовательно, на каждой прямой $l_1^\infty, l_2^0, l_3^{m_3}, l_4^{m_4}$ система (4) имеет ровно одну особую точку. Рассмотрим одну из прямых изоклин системы (4), не принадлежащих множеству M , обозначим ее через $L_1^{M_1}$. Очевидно, на $L_1^{M_1}$ система (4) имеет три особые точки. Не уменьшая общности, считаем, что $M_1 = m_4$.

Введем обозначения для особых точек, лежащих на $L_1^{M_1} : A = l_1^\infty \cap L_1^{M_1}, B = l_2^0 \cap L_1^{M_1}, C = l_3^{m_3} \cap L_1^{M_1}$. В силу работы [3] среди не менее чем четырех прямых изоклин системы (4), не

принадлежащих множеству M , найдется прямая $L_2^{M_2}$, где $M_2 \neq M_1$. Тогда $L_2^{M_2}$ пересекает $L_1^{M_1}$ в одной из особых точек A, B и C системы (4). Это означает, что хотя бы на одной из прямых изоклинов l_1^∞, l_2^0 и $l_3^{m_3}$ система (4) имеет не менее двух особых точек. Пришли к противоречию с тем, что на любой прямой из множества M система (4) имеет ровно одну особую точку. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если система (1) имеет три параллельные между собой прямые изоклины, на которых индуцировано одно и то же направление, то любая особая точка расположена на одной из этих прямых.*

Систему (1) можно привести к виду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)(y - kx - b_2)(y - kx - b_3), \\ \frac{dy}{dt} = Q_3(x, y), \end{cases} \quad (5)$$

где $b_i (i = \overline{1, 3})$ — попарно различные числа.

Как видно из (5) любая особая точка расположена на одной из трех прямолинейных изоклинов бесконечности.

Теорема 3. *Пусть система (1) имеет три параллельные между собой прямые изоклины, на которых индуцировано одно и то же направление. Тогда эта система имеет не более семи прямых изоклинов, если хотя бы через одну из особых ее точек проходит не менее двух прямых изоклинов, на которых индуцировано одно и то же направление.*

Доказательство. Согласно условию теоремы существует аффинное преобразование, переводящее систему (1) в систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx)(y - kx - b_1)(y - kx - b_2), \\ \frac{dy}{dt} = (y - k_1x)(y - k_2x)(Ax + By + C), \end{cases} \quad (6)$$

где $b_1 \cdot b_2 \neq 0, b_1 \neq b_2, k_1 \neq k_2, k \neq k_i, i = 1, 2$.

Для удобства дальнейших рассуждений введем обозначения:

$$\begin{aligned} l_1^\infty : y - kx = 0; & l_2^\infty : y - kx - b_1 = 0; & l_3^\infty : y - kx - b_2 = 0; \\ l_4^0 : y - k_1x = 0; & l_5^0 : y - k_2x = 0; & l_6^0 : Ax + By + C = 0. \end{aligned}$$

Ни одна прямая изоклина системы (6), не являющаяся главной, не проходит через особую точку $O(0, 0)$.

В самом деле, если бы существовала прямая изоклина $y = k_3x$, не являющаяся для системы (6) главной, то выполнялось бы равенство

$$\begin{aligned} (k_3 - k_1)(k_3 - k_2)x^2[(A + Bk_3)x + C] &\equiv \\ \equiv m_3(k_3 - k)x[(k_3 - k)x - b_1][(k_3 - k)x - b_2], \end{aligned} \quad (7)$$

где $m_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Но равенство (7) не выполнимо в силу неравенства $b_1 \cdot b_2 \neq 0$.

Если $C = 0$, то система (7) не имеет прямой изоклины, отличной от главных. Предположим, что это не так, то есть пусть существует l_7^m — прямая изоклина системы (6), на которой индуцировано направление $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда приходим к невыполнимому равенству:

$$(k_7 - k_1)(k_7 - k_2)(A + Bk_7)x^3 \equiv (k_7 - k)[(k_7 - k)x - b_1][(k_7 - k)x - b_2]m,$$

полагая, что $y - k_7x = 0$ — уравнение изоклины l_7^m .

Таким образом, при $C = 0$ утверждение теоремы верно. Поэтому предположим, что $C \neq 0$, то есть прямая l_6^0 не проходит через начало координат $O(0, 0)$.

Легко видеть, что на каждой прямой изоклине l_4^0 и l_5^0 система (6) имеет три особые точки, причем каждая особая точка этой системы расположена на одной из прямых изоклинов бесконечности по теореме 2. Поскольку прямая l_6^0 при $C \neq 0$ проходит через любую точку плоскости,

кроме начала координат $O(0, 0)$, то можно предположить, что $l_6^0 \parallel l_1^\infty$. В этом случае система (6) имеет ровно шесть прямых изоклин, и все они главные изоклины системы. Действительно, допустив существование прямой изоклины, не являющейся главной для системы (6), мы тем самым приходим к противоречию с теоремой 2.

Рассмотрим последнюю возможность для прямой l_6^0 , а именно случай ее пересечения с прямыми изоклинами бесконечности, не проходящими через точку $O(0, 0)$. Очевидно, при этом $W = l_6^0 \cap l_1^\infty$ — особая точка системы (6). Из (6) видно, что на прямой l_1^∞ эта система имеет только две особых точки $O(0, 0)$ и W . Поэтому любая прямая изоклина системы (6), отличная от главных ее изоклин, непременно проходит через точку W .

Изобразим на рис. 1, 2 взаимное расположение главных изоклин системы (6), кроме прямой l_6^0 .

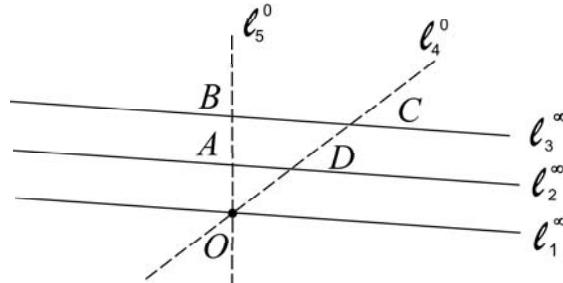


Рис. 1. Прямые ℓ_2^∞ и ℓ_3^∞ расположены в одной полуплоскости относительно ℓ_1^∞

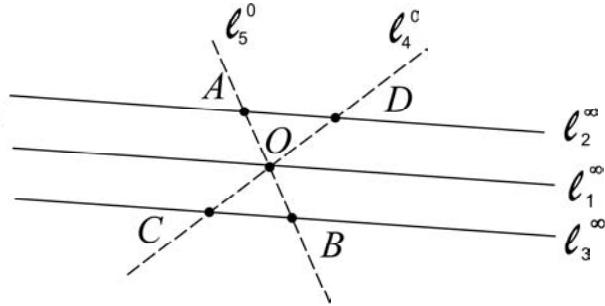


Рис. 2. Прямые ℓ_2^∞ и ℓ_3^∞ расположены в разных полуплоскостях относительно ℓ_1^∞

В зависимости от того расположена точка W слева или справа от точки O прямой изоклины системы (6), являющейся главной, может быть только прямая AC или BD , то есть система (6) имеет не более семи прямых изоклин. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть множество всех прямых изоклин системы (1) разбито на подмножества так, что элементами одного и того же подмножества являются прямые, на которых индуцировано одно и то же направление. Если среди этих подмножеств есть такое, которое состоит только из двух прямых, то число прямых изоклин у системы (1) при наличии у нее хотя бы одной особой точки не более шести.*

Доказательство. Пусть $M_1^{m_1}$ — подмножество множества M всех прямых изоклин системы (1), состоящее из двух прямых. Относительно остальных подмножеств M возможны следующие предположения:

- 1) существует хотя бы одно трехэлементное подмножество;
- 2) нет трехэлементного подмножества.

Если наряду с $M_1^{m_1}$ у системы (1) существует трехэлементное подмножество, тогда систему (1) посредством аффинного преобразования можно привести к виду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - k_1x - b_1)(y - k_2x - b_2)^2, \\ \frac{dy}{dt} = \alpha(y - k_3x - b_3)(y - k_4x - b_4)(y - k_5x - b_5), \end{cases} \quad (8)$$

где $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Введем обозначения:

$$l_1^\infty : y - k_1x - b_1 = 0, \quad l_2^\infty : y - k_2x - b_2 = 0, \quad l_3^\infty : y - k_3x - b_3 = 0,$$

$$l_4^0 : y - k_4x - b_4 = 0, \quad l_5^0 : y - k_5x - b_5 = 0.$$

Рассмотрим два случая: a) $l_1^\infty \parallel l_2^\infty$; b) $b_1^\infty \cap b_2^\infty \neq \emptyset$.

Пусть имеет место случай a). Тогда можно утверждать, что никакая прямая изоклина системы (8), отличная от главных изоклин, не параллельна ни одной из главных изоклин этой

системы. Предположим противное, то есть пусть l_6^m — прямая изоклина системы (8), на которой индуцировано направление $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и которая задана уравнением $y - k_6x - b_6 = 0$, причем $k_6 = k_1$. Поскольку хотя бы одна из прямых изоклин нуля пересекает обе прямые изоклины бесконечности системы (8), то согласно [3] на прямой l_6^m эта система имеет хотя бы одну особую точку. Приходим к противоречию с тем, что все особые точки системы (8) расположены на изоклинах l_1^∞ и l_2^∞ . Таким образом, $k_6 \neq k_1$. Отсюда и из вида правых частей уравнений системы (8) следует, что $k_6 \neq k_i, \forall i \in \{3, 4, 5\}$.

Так как в случае a) любая прямая изоклина системы (8), не являющаяся главной, непременно пересекает все ее главные изоклины, то предположим, что l_6^m — одна из таких изоклин. Обозначим точки пересечения l_6^m с прямыми l_1^∞ и l_2^∞ через A и B соответственно. В силу того, что l_6^m пересекает все изоклины нуля, а система (8) не имеет особых точек, лежащих вне прямых l_1^∞ и l_2^∞ , каждая из прямых l_3^0, l_4^0, l_5^0 проходит через одну из точек A и B . Прямые l_3^0, l_4^0, l_5^0 — попарно различные, поэтому две из них проходят через одну из точек A и B , а третья — через вторую особую точку (см. рис. 3).

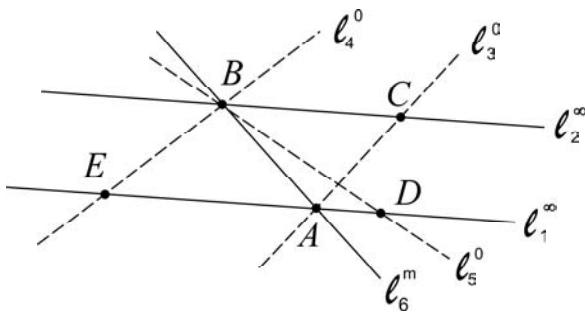


Рис. 3. Прохождение прямых изоклин через особые точки

Очевидно, через точку B не проходит никакая прямая изоклина, отличная от изображенных на рис. 3, так как в противном случае система имела бы на прямой l_1^∞ четыре особые точки, что недопустимо для кубической системы. Именно по этой причине любая прямая изоклина, отличная от изображенных на рис. 3, должна проходить через точку E , A или D . Вместе с тем каждая такая прямая пересекает, как нами установлено выше, все три изоклины нуля. При этом одна из этих точек пересечения расположена вне прямых l_1^∞ и l_2^∞ , что противоречит свойству системы (8) иметь все особые точки на прямых l_1^∞ и l_2^∞ .

Если бы точки E и D лежали по одну сторону от A или точка C лежала левее точки B , мы рассуждали бы аналогично и пришли бы к такому противоречию. Тем самым доказано, что система (8) в случае a) не может иметь более шести прямых изоклин.

Пусть далее имеет место случай b). Предположим, что существуют прямые изоклины системы (8), отличные от главных изоклин, и одной из них является прямая l_6^m . Относительно расположения l_6^m существуют две возможности: l_6^m пересекает обе изоклины бесконечности; l_6^m пересекает только одну из прямых l_1^∞ и l_2^∞ . Из вида правых частей уравнений системы (8) следует, что если l_6^m пересекает l_1^∞ и l_2^∞ , то никакая прямая изоклина нуля не параллельна прямой l_6^m . Поэтому система (8) имеет не более шести прямых изоклин.

Пусть l_6^m пересекает только одну из прямых l_1^∞ и l_2^∞ . Если $l_1^\infty \cap l_6^m = A, l_6^m \parallel l_2^\infty$, то две прямые изоклины нуля параллельны прямой l_6^m , а третья прямая изоклина нуля пересекает ее. Очевидно, что на l_6^m система (8) имеет единственную особую точку A . Поэтому любая другая прямая изоклина (8) проходит через точку A и пересекает две прямые изоклины нуля, параллельные прямой l_6^m . Пришли к противоречию с тем, что система (8) не имеет особых точек вне прямых l_1^∞ и l_2^∞ . Если $l_2^\infty \cap l_6^m = A, l_1^\infty \parallel l_6^m$, то рассуждения аналогичны.

Рассмотрим теперь случай 2) отсутствия трехэлементного подмножества множества M . Здесь необходимо различать случаи: с) существует хотя бы одно двухэлементное подмножество множества M , отличное от $M_1^{m_1}$; д) нет ни одного двухэлементного подмножества множества M , отличного от $M_1^{m_1}$.

В случае с) систему (1) приводим к виду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(y - k_1x - b_1)(y - k_2x - b_2)^2, \\ \frac{dy}{dt} = \beta(y - k_3x + b_3)(y - k_4x - b_4)^2. \end{cases} \quad (9)$$

При наличии трех и меньшего числа особых точек системы (9) отсутствие прямой изоклины, отличной от главных изоклинов, очевидно. Поэтому, пусть система имеет четыре особые точки. Тогда прямая изоклина системы (9), отличная от главной изоклины, должна проходить через вершины четырехугольника (выпуклого или невыпуклого). Следовательно, число прямых изоклин системы (9) и в этом случае не более шести.

Пусть имеет место случай d). Тогда систему (1) приводим к виду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - k_1x - b_1)(y - k_2x - b_2)^2, \\ \frac{dy}{dt} = (y - k_3x - b_3)Q_2(x, y), \end{cases} \quad (10)$$

где $Q_2(x, y)$ — неприводимый многочлен второй степени.

Если $k_1 = k_2 = k_3$, то на прямой $l_3^0 : y - k_3x - b_3 = 0$ нет особых точек системы (10), поэтому любая прямая изоклина, отличная от главных изоклинов, если она есть, параллельна трем прямым l_3^0 , $l_1^\infty : y - k_1x - b_1 = 0$, $l_2^\infty : y - k_2x - b_2 = 0$. Согласно [3] система (10) имеет не более пяти параллельных между собой прямых изоклин.

Пусть далее $k_1 = k_2$, $k_1 \neq k_3$. Тогда на прямой l_3^0 система (10) имеет две особые точки. Легко видеть, что при этом система не имеет прямой изоклины, параллельной изоклине нуля l_3^0 . Следовательно, какая бы прямая изоклина системы (10), отличная от ее главных изоклинов, ни существовала, она обязательно проходит через одну из особых точек $A = l_3^0 \cap l_1^\infty$ и $B = l_3^0 \cap l_2^\infty$.

Предположим, что система (10) имеет более шести прямых изоклин. Тогда учитывая, что через особую точку кубической системы проходит не более пяти прямых изоклин, можно утверждать: либо через одну из особых точек A и B проходят три прямые изоклины, отличные от главных изоклинов, а через другую — не менее одной прямой изоклины, либо через каждую из этих двух точек проходят по две прямые изоклины. В результате приходим к противоречию, которое состоит в том, что либо на одной из изоклин бесконечности l_1^∞ и l_2^∞ расположены четыре особые точки, либо система (10) имеет особые точки вне прямых l_1^∞ и l_2^∞ .

Далее рассмотрим случай $k_1 \neq k_2$, но $k_2 = k_3$ либо $k_1 = k_3$. Для определенности считаем, что $l_3^0 \cap l_1^\infty = A$ — единственная на прямой l_3^0 особая точка системы (10). Так как все прямые изоклины, отличные от главных изоклинов системы (10), являются элементами одноэлементных подмножеств множества M , то любая такая прямая либо параллельна прямой l_3^0 , либо пересекает ее в точке A . Но прямых изоклин, параллельных прямой l_3^0 , не более двух, так как иначе на прямой l_1^∞ более трех особых точек. Через точку A проходит также не более двух прямых изоклин, так как в противном случае на прямой l_2^∞ система имеет не менее трех особых точек. Это противоречит тому, что прямая l_2^∞ пересекается с кривой второго порядка $Q_2(x, y)$ не более чем в двух точках.

Рассмотрим последнюю возможность взаимного расположения прямых l_1^∞ , l_2^∞ и l_3^0 , а именно, $A = l_3^0 \cap l_1^\infty$ и $B = l_3^0 \cap l_2^\infty$ — особые точки системы (10). Если $A \equiv B$, то согласно [3] через точку A проходит не более пяти прямых изоклин, а других система не имеет. Поэтому рассмотрим случай, когда A и B — несовпадающие особые точки. Если через одну из особых точек A и B проходят две прямые изоклины, отличные от главных, то через другую не проходит ни одна такая прямая изоклина. В самом деле, если через A проходят две прямые изоклины, отличные от l_1^∞ и l_3^0 , а через точку B проходит хотя бы одна прямая изоклина, не являющаяся главной, то из этих трех прямых хотя бы две пересекаются в точке, не лежащей на изоклине l_1^∞ и l_2^∞ . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. Если система (1) имеет не менее семи прямых изоклин и хотя бы одну особую точку, то во множестве всех ее прямых изоклин содержатся лишь трехэлементные и одноэлементные подмножества.

Пример 1 [4]. Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y-1)(y-a)}{x(x-1)(x-a)}, \quad a > 1, \quad a \neq 2,$$

имеет ровно семь прямых изоклин (они же интегральные прямые): $x = 0, x = 1, x = a, y = 0, y = 1, y = a$. Причем все множество прямых изоклин разбито на два трехэлементных подмножества:

$M_1^\infty = \{x = 0; x = 1; x = a\}$ — множество изоклин бесконечности,

$M_2^0 = \{y = 0; y = 1; y = a\}$ — множество изоклин нуля,

$M_3^1 = \{y = x\}$ — одноэлементное множество, состоящее из одной изоклины, на которой индуцировано направление $t = 1$.

Следствие 2. Если дифференциальное уравнение траекторий системы (1) имеет восемь интегральных прямых, то во множестве его прямых изоклин содержится не менее двух трехэлементных подмножеств.

Пример 2 [5]. Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y-1)(3x-2y-2)}{x(x-1)(x-2)}$$

имеет десять прямых изоклин, в том числе три трехэлементных подмножества:

$M_1^\infty = \{x = 0; x - 1 = 0; x - 2 = 0\}$,

$M_2^0 = \{y = 0; y - 1 = 0; 3x - 2y - 2 = 0\}$,

$M_3^1 = \{y = x; y = x-1; y = -\frac{1}{2}x+1\}$ и одно одноэлементное подмножество $M_4^{\frac{1}{2}} = \{y = \frac{1}{2}x\}$.

Пример 3 [5]. Для дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y-1)(y-2)}{x(x-1)(x-2)}$$

интегральными являются следующие прямые: $x = 0, x = 1, x = 2, y = 0, y = 1, y = 2, y = x, y = -x + 2$.

Множество всех прямых изоклин данного уравнения исчерпывается указанными восемью интегральными прямыми. Оно имеет два трехэлементных подмножества: множество изоклин бесконечности и множество изоклин нуля, а также два одноэлементных подмножества $\{y = x\}$ и $\{y = -x + 2\}$.

Теорема 5. Если система (1) имеет три прямые изоклины, на которых индуцировано одно и то же направление, то любая ее особая точка расположена хотя бы на одной из этих прямых.

Доказательство для данной теоремы аналогично доказательству теоремы 2.

Лемма 1. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (A_1x + B_1y + C_1) \cdot P_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = (A_2x + B_2y + C_2) \cdot Q_2(x, y), \end{cases} \quad (11)$$

где $P_2(x, y)$ и $Q_2(x, y)$ — неприводимые над полем \mathbb{R} многочлены, имеет менее девяти прямых изоклин, если эта система имеет хотя бы одну особую точку.

Доказательство. Предположим, что число прямых изоклин системы (11) не менее девяти.

Рассмотрим два случая:

1) Изоклина бесконечности $l_1^\infty : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и изоклина нуля $l_2^0 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ параллельны;

2) $l_1^\infty \cap l_2^0 \neq \emptyset$.

Пусть имеет место случай 1). Тогда согласно [3] система (11) имеет на каждой из прямых l_1^∞ и l_2^0 не более двух особых точек. Так как по предположению система имеет не менее девяти прямых изоклин, то она, кроме l_1^∞ и l_2^0 , имеет еще не более одной прямой изоклины, параллельной этим двум прямым. Поэтому l_1^∞ и l_2^0 пересекают не менее шести прямых изоклин системы (11).

В силу [3] через особую точку системы (11) проходит не более пяти прямых изоклин. Таким образом, делаем вывод: а) на каждой из прямых l_1^∞ и l_2^0 система (11) имеет хотя бы одну особую точку; в) на каждой из прямых l_1^∞ и l_2^0 найдется особая точка, которой инцидентны не менее трех прямых изоклин. Пусть $A \in l_1^\infty$ и A — особая точка системы (11), через которую проходят не менее трех прямых изоклин. Так как, кроме l_2^0 система (11) не имеет ни одной прямой изоклины нуля, то согласно [3] на l_2^0 эта система имеет более двух особых точек. Пришли к противоречию с тем, что на l_2^0 система (11) имеет не более двух особых точек.

Пусть далее имеет место случай 2). Так как на каждой прямой система (11) имеет не более трех особых точек, то в сумме на прямых l_1^∞ и l_2^0 система имеет не более пяти. Изобразим на рисунках все возможные конфигурации особых точек, расположенных на прямых l_1^∞ и l_2^0 .

Вставить рис 23-32

В случаях конфигураций, изображенных на рисунках 23, 24, 26, 27 любая прямая изоклина системы (11), отличная от l_1^∞ и l_2^0 , проходит только через особую точку A . Если это не так, прямая изоклина, проходящая через точки B и D , параллельна прямой l_2^0 , то есть имеем уже рассмотренный случай 1). Но через особую точку A проходит не более пяти прямых изоклин, и общее число прямых изоклин системы (11) не более пяти.

Так как прямая изоклина системы (11), проходящая через особую точку B , не параллельна прямой l_2^0 , а прямая изоклина, проходящая через C , не параллельна прямой l_1^∞ , то в случае конфигурации, изображенной на рис. 25, кроме прямой BC , которая, быть может, является изоклиной, система (11) может иметь не более пяти прямых изоклин, то есть общее число прямых изоклин системы (11) не превосходит шести.

В случае конфигураций, изображенных на рис. 28 и 29 возможными прямыми изоклинами системы (11) являются прямые BC , DC и те прямые, которые инцидентны точке A , то есть общее число прямых изоклин системы не более семи. Если имеет место взаимное расположение пяти особых точек системы (11) (см. рис. 30-32), то общее число прямых изоклин системы меньше девяти. Действительно, возможными прямыми изоклинами системы являются прямые BE , BC , DE , DC , l_1^∞ , l_2^0 и еще три прямые изоклины, условно их обозначим через L_1 , L_2 , L_3 , проходящие через особую точку A . На всех трех прямых L_i , $i = \overline{1, 3}$, не может быть индуцировано одно и то же направление, так как в противном случае все особые точки системы по теореме 5 расположены на этих трех прямых, что невозможно.

Пусть на двух прямых, например, L_1 и L_2 индуцировано одно и то же направление. Тогда, хотя бы на одной из прямых BE , BC , DE , DC система имеет не менее четырех особых точек, что недопустимо для кубической дифференциальной системы.

Наконец, пусть на всех трех прямых L_1 , L_2 , L_3 индуцированы попарно различные направления. Тогда имеем ситуацию, когда через особую точку A проходят пять прямых изоклин, на которых индуцированы попарно различные направления. А так как эта система (11) не имеет двух параллельных прямых изоклин, то система имеет на прямых BE , BC , DE , DC пять особых точек. Это невозможно.

Теорема доказана.

Теорема 6. *Если система (1) имеет не менее девяти прямых изоклин и хотя бы одну особую точку, то во множестве ее прямых изоклин не может быть более одного одноэлементного подмножества.*

Доказательство. Пусть вопреки утверждению теоремы во множестве прямых изоклин системы (1) имеется не менее двух одноэлементных подмножеств. Выберем из них любые два подмножества и обозначим их $\{l_1^{m_1}\}$ и $\{l_2^{m_2}\}$, где $m_1 \neq m_2$. С помощью преобразования [1] система (1) может быть приведена к виду (3), где $P_2(x, y)$ и $Q_2(x, y)$ — неприводимые над полем действительных чисел многочлены второй степени. По лемме 1 такая система имеет менее девяти прямых изоклин. Следовательно, теорема доказана.

Теорема 7. *Если система (1) имеет ровно девять прямых изоклин и хотя бы одну особую точку, то множество всех ей прямых изоклин состоит из трех непересекающихся подмножеств, в каждом из которых три прямые изоклины.*

Доказательство. Пусть n — число всех прямых изоклин системы (1), k — число одноэлементных подмножеств множества M , состоящего из n прямых изоклин. Тогда в силу следствия

1 и теоремы 6 имеет место сравнение

$$n \equiv k(\text{mod}3), k = \overline{0;1}. \quad (12)$$

Из (12) при $n = 9$ следует, что $k = 0$, то есть число трех элементных подмножеств множества M равно 3. Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 8. *Если система (1) имеет десять прямых изоклин и хотя бы одну особую точку, то множество этих десяти прямых изоклин состоит из трех трехэлементных подмножеств и одного одноэлементного подмножества.*

Теорема 9. *Пусть $M_1^{m_1}$ и $M_2^{m_2}$ — подмножества множества всех прямых изоклин системы (1), состоящие из трех прямых, причем m_1 и m_2 — различные направления, индуцированные на прямых из множеств $M_1^{m_1}$ и $M_2^{m_2}$ соответственно. Если система (1) имеет менее девяти особых точек, то либо существуют прямые $l_1^{m_1} \in M_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2} \in M_2^{m_2}$, такие, что $l_1^{m_1} \parallel l_2^{m_2}$, либо хотя бы в одном из множеств $M_1^{m_1}$ и $M_2^{m_2}$ найдутся две прямые, пересекающиеся в особой точке.*

Доказательство. Так как по условию существуют два трех элементных подмножества $M_1^{m_1}$ и $M_2^{m_2}$ множества всех прямых изоклин системы (1), то она может быть преобразована в систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(y - k_1x - b_1)(y - k_2x - b_2)(y - k_3x - b_3), \\ \frac{dy}{dt} = \beta(y - k_4x - b_4)(y - k_5x - b_5)(y - k_6x - b_6), \end{cases} \quad (13)$$

где $\alpha \cdot \beta \neq 0$. Предположим, что нет двух параллельных прямых, одна из которых является изоклиной нуля, а другая — изоклиной бесконечности, и нет двух прямых изоклин нуля или изоклин бесконечности, непересекающихся в особой точке. Тогда на каждой прямой изоклине системы (13) имеется три особые точки, среди которых нет общих для двух изоклин бесконечности (изоклин нуля), т.е. число особых точек системы (13) равно девяти. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теорема 10. *Пусть система (1) имеет хотя бы одну особую точку и не менее девяти прямых изоклин, в том числе две параллельные прямые $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$, на которых система индуцирует различные направления m_1 и m_2 соответственно. Тогда существует прямая изоклина $l_3^{m_3}$, параллельная прямым $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$, на которой система (1) индуцирует направление m_3 , отличное от m_1 и m_2 .*

Доказательство. По условию система (1) имеет не менее девяти прямых изоклин, поэтому множество M всех ее прямых изоклин содержит не более одного одноэлементного подмножества и не менее трех элементных подмножеств.

Относительно $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$ возможны два предположения:

1) одна из них принадлежит одноэлементному подмножеству;

2) обе прямые принадлежат различным трехэлементным подмножествам множества M .

Пусть имеет место первый случай, а именно, $l_1^{m_1}$ — элемент одноэлементного подмножества множества M , а $l_2^{m_2} \in M_2^{m_2}$, где $M_2^{m_2}$ — трехэлементное подмножество множества M . С помощью преобразования [1] переведем $l_1^{m_1}$ в изоклину бесконечности, а прямые множества $M_2^{m_2}$ — в изоклину нуля системы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)P_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = (y - kx - b_2)(y - k_3x - b_3)(y - k_4x - b_4), \end{cases} \quad (14)$$

где $b_1 \neq b_2$, $P_2(x, y)$ — неприводимый над полем \mathbb{R} многочлен второй степени.

Введем обозначения: $L_1^\infty : y - kx - b_1 = 0$, $L_2^0 : y - kx - b_2 = 0$, $L_3^0 : y - k_3x - b_3 = 0$, $L_4^0 : y - k_4x - b_4 = 0$.

Ни одна из прямых L_3^0 и L_4^0 не параллельна прямой L_1^∞ . Допустим, что это не так, то есть пусть $L_3^0 \parallel L_1^\infty$. Тогда в силу теоремы 1 $L_4^0 \cap L_1^\infty \neq \emptyset$, то есть на прямой L_1^∞ система

(14) имеет одну особую точку. Согласно следствию 1 и теореме 6 во множестве M всех прямых изоклин системы (14), кроме $M_2^{m_2}$ имеются по крайней мере два трехэлементных подмножества (обозначим их через $M_3^{m_3}$ и $M_4^{m_4}$), $m_i \neq m_j$, если $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Рассмотрим два подмножества $\{l_1^{m_1}\}$ и $M_3^{m_3}$ множества M . Как и ранее переведем прямую $l_1^{m_1}$ в изоклину бесконечности, а прямые из множества $M_3^{m_3}$ в изоклину нуля системы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)\tilde{P}_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = (y - k_5x - b_5)(y - k_6x - b_6)(y - k_7x - b_7), \end{cases} \quad (15)$$

где $\tilde{P}_2(x, y)$ — неприводимый над полем \mathbb{R} многочлен второй степени.

По теореме 1 все три прямые изоклины нуля системы (15) проходят через единственную особую точку на прямой L_1^∞ . Но это противоречит теореме 12 [6]. Таким образом, прямой L_1^∞ параллельна только одна прямая изоклина нуля L_2^0 системы (14). Так как через одну и ту же особую точку системы (14) в условиях данной теоремы проходит только одна прямая изоклина нуля и одна прямая изоклина бесконечности (см. теорему 12 [6]), то на прямой L_1^∞ система (14) имеет две особые точки. Именно по этой причине одна из прямых изоклин нуля системы (15) параллельна L_1^∞ и во множестве $M_4^{m_4}$ также найдется одна прямая, параллельная прямой L_1^∞ . Это означает, что система (1), имеющая не менее одной особой точки и не менее девяти прямых изоклин, обладает более чем тремя параллельными между собой прямыми изоклинами. Пришли к противоречию с теоремой 1.

Тем самым доказано, что случай, когда одна из параллельных прямых $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$ является элементом одноэлементного подмножества множества M , не реализуется.

Пусть далее имеет место случай 2), то есть $l_1^{m_1} \in M_1^{m_1}, l_2^{m_2} \in M_2^{m_2}$, где $M_1^{m_1}(M_2^{m_2})$ — трехэлементное подмножество множества M , на трех прямых которого индуцировано направление $m_1(m_2)$, причем $m_1 \neq m_2$.

С помощью невырожденного преобразования [1] переведем прямые множества $M_1^{m_1}$ в изоклины бесконечности, а прямые множества $M_2^{m_2}$ — в изоклины нуля системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(y - kx - b_1)(y - k_2x - b_2)(y - k_3x - b_3) \\ \frac{dy}{dt} = \beta(y - kx - b_4)(y - k_5x - b_5)(y - k_6x - b_6), \end{cases}$$

Введем обозначения: $L_1^\infty : y - kx - b_1 = 0, L_2^\infty : y - k_2x - b_2 = 0, L_3^\infty : y - k_3x - b_3 = 0, L_4^0 : y - kx - b_4 = 0, L_5^0 : y - k_5x - b_5 = 0, L_6^0 : y - k_6x - b_6 = 0$.

Как и в случае 1), можно показать, что ни одна из прямых $L_2^\infty, L_3^\infty, L_5^0, L_6^0$ не параллельна прямым L_1^∞ и L_4^0 . Рассматривая пару множеств $M_1^{m_1}$ и $M_3^{m_3}$, где $M_3^{m_3}$ является также трехэлементным подмножеством множества M , $m_1 \neq m_3$, убедимся в том, что одна прямая изоклина из $M_3^{m_3}$ параллельна прямым L_1^∞ и L_4^0 , а остальные две прямые изоклины из $M_3^{m_3}$ пересекают эти две параллельные прямые изоклины. Теорема доказана.

Из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 10 вытекает, что в условиях этой теоремы число трехэлементных подмножеств множества M не менее трех.

Пример 4. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x - 3)(y - 2)x, \\ \frac{dy}{dt} = y\left(y + \frac{2}{3}x - 3\right)(y - x - 1). \end{cases}$$

Кроме шести прямолинейных главных изоклин данная система имеет еще три прямые изоклины: $y = 1, y = -x + 3, y = \frac{4}{3}x$, на которых индуцировано направление $m = \frac{2}{3}$. Заметим, что на трех параллельных между собой прямых изоклинах $y = 0, y = 1, y = 2$ индуцированы попарно различные направления, и система удовлетворяет условиям теоремы 10.

Пример 5. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(y+x-1)(y-x-2), \\ \frac{dy}{dt} = (y-1)(y+x-2)(y+2x), \end{cases}$$

имеет десять прямых изоклин, в том числе: три изоклины нуля, три изоклины бесконечности, три изоклины: $y = 1$, $y = -x + 3$, $y = \frac{4}{3}x$, на которых индуцировано направление $m_1 = -1$, и одна прямая $x = 0$, на которой индуцировано направление $m_2 = 1$. В отличие от системы предыдущего примера данная система имеет две тройки параллельных между собой прямых изоклин, удовлетворяющих условиям теоремы 10. Заметим также, что число особых точек системы равно семи.

В связи с последним примером уместно поставить вопрос о максимальном числе троек параллельных между собой прямых изоклин системы (1), взятых по одной из трех различных подмножеств множества M .

Под символом $M_i^{m_i}$, который нами неоднократно упоминался, будем понимать подмножество множества M всех прямых изоклин системы (1), где m_i — направление, индуцированное этой системой на прямых из множества $M_i^{m_i}$.

Множество, состоящее из трех параллельных между собой прямых изоклин, взятых по одной из множеств $M_i^{m_i}, M_j^{m_j}, M_k^{m_k}$, обозначим через M_{ijk}^S , причем считаем, что $M_{ijk}^{S_1} \neq M_{ijk}^{S_2}$, если $s_1 \neq s_2, s_1, s_2 \in \mathbb{N}$.

Теорема 11. Пусть система (1) имеет не менее девяти прямых изоклин и хотя бы одну особую точку. Тогда число подмножеств вида M_{ijk}^S множества M не превосходит трех.

Доказательство. Прежде всего, покажем, что существуют системы вида (1), имеющие три тройки параллельных между собой прямых изоклин, взятых по одной из трех трехэлементных подмножеств множества M всех прямых изоклин этой же системы. Для этого рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(y - k_1x - b_1)(y - k_2x - b_2)(y - k_3x - b_3), \\ \frac{dy}{dt} = \beta(y - k_1x - b_4)(y - k_2x - b_5)(y - k_3x - b_6), \end{cases} \quad (16)$$

где $\alpha \cdot \beta \neq 0, (b_1 - b_4)(b_2 - b_5)(b_3 - b_6) \neq 0$.

Введем обозначения: $L_1^\infty : y - k_1x - b_1 = 0$, $L_2^\infty : y - k_2x - b_2 = 0$, $L_3^\infty : y - k_3x - b_3 = 0$, $L_4^0 : y - k_1x - b_4 = 0$, $L_5^0 : y - k_2x - b_5 = 0$, $L_6^0 : y - k_3x - b_6 = 0$.

Так как система (16) имеет не менее девяти прямых изоклин и хотя бы одну особую точку, то по теореме 10 существует прямая изоклина $L_7^{m_k} \in M_k^{m_k}$, такая, что $L_7^{m_k} \parallel L_1^\infty$, то есть во множестве M существует подмножество M_{ijk}^1 , состоящее из параллельных между собой прямых изоклин $L_1^\infty, L_4^0, L_7^{m_k}$. Аналогично, рассматривая изоклины L_2^∞ и L_5^0 , а затем L_3^∞ и L_6^0 , в силу теоремы 10 приходим к выводу о том, что существуют такие множества M_{ijl}^2 и M_{ijr}^3 , где M_{ijl}^2 состоит из прямых $L_2^\infty, L_5^0, L_8^{m_l}$, а M_{ijr}^3 — из множеств $L_3^\infty, L_6^0, L_9^{m_r}$. Система (16) не имеет множества вида M_{ijk}^S , отличного от трех множеств $M_{ijk}^1, M_{ijl}^2, M_{ijr}^3$, существование которых нами установлено. В противном случае по теореме 1 любая прямая из множества M_{ijk}^S пересекает все прямые множеств $M_{ijk}^1, M_{ijl}^2, M_{ijr}^3$.

Вместе с тем теорема 12 [6] не допускает существование у системы (16) особой точки, через которую проходят две прямые изоклины, на которых индуцировано одно и то же направление. Следовательно, приходим к противоречию с тем, что на прямых из множеств $M_{ijk}^1, M_{ijl}^2, M_{ijr}^3$ система (16) имеет две особые точки. Теорема доказана.

Пример 6. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y-1)(y-x)(x-1), \\ \frac{dy}{dt} = y(x-2)(y-x-1), \end{cases}$$

имеет три тройки параллельных между собой прямых изоклинов

$$\{y = 0; y = 1; y = 2\}, \{y - x = 0; y - x - 1 = 0; y - x + 1 = 0\}, \{x = 0; x = 1; x = 2\}.$$

Эти прямые взяты из множеств прямых изоклинов — бесконечности, нуля и направления $t = 2$. Система имеет шесть особых точек.

Теорема 12. *Если система (1) имеет параллельные между собой прямые изоклины l_1, l_2, l_3 , то в случае существования у этой системы хотя бы одной особой точки и не менее девяти прямых изоклинов все три прямые $l_i, i = \overline{1, 3}$, либо принадлежат одному и тому же подмножеству $M_j^{m_j}$ множества M всех прямых изоклинов системы (1), либо они принадлежат трем таким различным множествам.*

Данная теорема непосредственно следует из теоремы 10.

Лемма 2. *Если множество M всех прямых изоклинов системы (1) содержит три подмножества типа M_{ijk}^S , то M содержит три трехэлементных подмножества таких, что каждая прямая изоклина, принадлежащая одному из них, параллельна двум прямым изоклинам, взятым по одной из двух других подмножеств.*

Доказательство. Пусть $M_{abc}^\alpha, M_{def}^\beta, M_{ghu}^\gamma$ — подмножества множества M всех прямых изоклинов системы (1). Рассмотрим прямую изоклину $l_1^{m_a} \in M_{abc}^\alpha$. Очевидно $l_1^{m_a} \in M_a^{m_a}$, где $M_a^{m_a}$ — трехэлементное подмножество множества M , причем на всех прямых множества $M_a^{m_a}$ индуцировано направление m_a . По теореме 1 $l_1^{m_a}$ пересекает все прямые из множеств M_{def}^β и M_{ghu}^γ . Но так как на прямой изоклине, принадлежащей множеству вида M_{ijk}^S , система имеет только две особые точки, то в силу [3] в каждом из множеств M_{def}^β и M_{ghu}^γ найдется по одной прямой изоклине, на которой индуцировано направление m_a . Таким образом, $M_a^{m_a} = \{l_1^{m_a}, l_2^{m_a}, l_3^{m_a}\}$, $l_1^{m_a} \in M_{abc}^\alpha, l_2^{m_a} \in M_{def}^\beta, l_3^{m_a} \in M_{ghu}^\gamma$.

Аналогичными рассуждениями доказывается, что $M_b^{m_b} = \{l_4^{m_b}, l_5^{m_b}, l_6^{m_b}\}, l_4^{m_b} \in M_{abc}^\alpha, l_5^{m_b} \in M_{def}^\beta, l_6^{m_b} \in M_{ghu}^\gamma; M_c^{m_c} = \{l_7^{m_c}, l_8^{m_c}, l_9^{m_c}\}, l_7^{m_c} \in M_{abc}^\alpha, l_8^{m_c} \in M_{def}^\beta, l_9^{m_c} \in M_{ghu}^\gamma$.

В силу введенного нами обозначения множества $M_{i,j,k}^S$ имеем: $l_1^{m_a} \parallel l_4^{m_b} \parallel l_7^{m_c}; l_2^{m_a} \parallel l_5^{m_b} \parallel l_8^{m_c}; l_3^{m_a} \parallel l_6^{m_b} \parallel l_9^{m_c}$. Лемма доказана.

Теорема 13. *Пусть множество M всех прямых изоклинов системы (1) содержит три подмножества типа $M_{i,j,k}^S$. Тогда число прямых изоклинов системы равно девяти, а количество особых точек (1) равно шести.*

Доказательство. В силу леммы 2 систему (1) можно преобразовать в систему (16) посредством неособого преобразования [1]. Вместе с тем предположение о существовании прямой изоклины L системы (16), не принадлежащей ни одному из подмножеств $M_{ijk}^1, M_{ijk}^2, M_{ijk}^3$, допускает наличие на L трех особых точек этой системы. При этом хотя бы через одну из этих трех особых точек проходит прямая изоклина, принадлежащая множеству $M_{ijk}^1 \cup M_{ijk}^2 \cup M_{ijk}^3$ и проходящая через три особые точки системы (16). Но это противоречит свойству системы (16) иметь только две особые точки на прямых изоклинах из подмножеств $M_{ijk}^S, S = \overline{1, 3}$. Теорема доказана.

Теорема 14. *Пусть система (1) имеет хотя бы одну особую точку, а множество M всех ее прямых изоклинов содержит хотя бы одно множество вида $M_{i,j,k}^S$. Тогда число прямых изоклинов системы (1) множества M не превосходит десяти.*

Доказательство. Если у системы множеств вида $M_{i,j,k}^S$ три, то по теореме 13 число прямых изоклинов равно девяти. Поэтому полагаем, что число подмножеств $M_{i,j,k}^S$ множества M не более двух. Допустим, что система (1) имеет более десяти прямых изоклинов. Тогда согласно следствию 1 и теореме 6 все три подмножества $M_i^{m_i}, M_j^{m_j}, M_k^{m_k}$ множества M являются трехэлементными.

Следовательно, множество M , кроме трех попарно непересекающихся подмножеств $M_i^{m_i}, M_j^{m_j}, M_k^{m_k}$, имеет еще хотя бы одно трехэлементное подмножество, обозначим его через $M_r^{m_r}$. В силу определения множество вида M_{ijk}^S содержит три параллельные между собой прямые изоклины, взятые по одной из множеств $M_i^{m_i}, M_j^{m_j}, M_k^{m_k}$. Поэтому каждая прямая из множеств $M_r^{m_r}$ пересекает все три прямые множества M_{ijk}^S , и согласно [3] проходит через три особые точки. По теореме 12 [6] никакие две прямые изоклины из множества $M_r^{m_r}$ не проходят через одну

и ту же особую точку. Это означает, что система (1) имеет девять особых точек. Пришли к противоречию с [3]. Теорема доказана.

Теорема 15. *Пусть система (1) имеет не менее девяти прямых изоклин. Тогда число особых точек этой системы равно девяти, если во множестве M всех ее прямых изоклин нет двух трехэлементных подмножеств $M_1^{m_1}$ и $M_2^{m_2}$, элементы которых — прямые $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$ соответственно параллельны.*

Доказательство. Так как система имеет не менее девяти прямых изоклин, то по теореме 12 [6] нет двух прямых изоклин, проходящих через одну и ту же особую точку, и на которых индуцировано одно и то же направление. По условию нет двух параллельных прямых изоклин $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$, на которых индуцированы различные направления, т.е. $m_1 \neq m_2$. Таким образом, не выполняются условия теоремы 9, откуда и следует справедливость утверждения теоремы.

Теорема 16. *Пусть никакие две прямые изоклины системы (1), на которых индуцированы различные направления, не параллельны. Тогда число трехэлементных подмножеств¹ множества M всех прямых изоклин системы (1) не превосходит трех.*

Доказательство. Предположим, что система (1) не имеет двух параллельных прямых изоклин, на которых индуцированы различные направления, но при этом множество M содержит не менее четырех трехэлементных подмножеств. Пусть $M_1^{m_1}, M_2^{m_2}, M_3^{m_3}, M_4^{m_4}$ трехэлементные подмножества множества M . Здесь m_i — направление, индуцированное системой (1) на прямых множества $M_i^{m_i}, i = 1, 2, 3, 4$.

В силу [3] $m_i \neq m_j$, если $i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. По теореме 15 система

$$\left(\frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \right)_{(x, y) \in L} = m, \quad m \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

имеет девять особых точек. Поэтому каждая прямая изоклина системы (17) проходит через три особые точки (см. [3]). Отметим также, что по теореме 12 [6] у системы (17) нет особой точки, через которую проходят две прямые изоклины из одного и того же подмножества множества M .

Таким образом, через каждую из девяти особых точек проходят не менее четырех прямых изоклин (по одной прямой из множеств M_1, M_2, M_3, M_4).

Рассмотрим произвольную прямую изоклину из множества M_4 , обозначив ее через $L_1^{m_4}$. Она проходит через три особые точки A, B, C . Условимся обозначать через A_i, B_i и C_i прямую изоклину, проходящую через особую точку A, B и C соответственно и принадлежащую подмножеству $M_i^{m_i}, i = \overline{1, 3}$ множества M . Тогда каждой особой точке системы (1), не принадлежащей прямой изоклине $L_1^{m_4}$ соответствует упорядоченная тройка символов A_i, B_j, C_k , где i, j, k — попарно различные числа из множества $\{1, 2, 3\}$. Очевидно, число особых точек системы (1), не принадлежащих прямой $L_1^{m_4}$ равно $3! = 6$, что подтверждает выше отмеченный факт о наличии девяти особых точек системы (1).

Рассмотрим прямые изоклины C_1 и C_2 , а также A_1, A_2, A_3 (рис. 33).

На рис.33 видно, что $W_1 = A_1 \cap C_2, W_2 = A_3 \cap C_2, W_3 = A_3 \cap C_1, W_4 = A_2 \cap C_1$ — особые точки системы (1). Таким образом, особая точка W_1 определяется тройкой (A_1, B_3, C_1) , особая точка W_4 тройкой (A_2, B_3, C_1) . Поэтому прямая B_3 вполне определяется особыми точками W_1 и W_4 , и сама определяет однозначно положение особой точки $B = B_3 \cap L_1^{m_4}$. Особая точка W_2 определяется тройкой (A_3, B_1, C_2) . Проводя прямую W_2B , мы найдем особую точку (A_2, B_1, C_3) как точку пересечения прямых изоклинов B_1 и A_2 . Соединяя эту точку с точкой C , определяем изоклину C_3 , которая также проходит через точку пересечения прямых A_1 и B_2 .

Далее рассмотрим прямую изоклину $L_2^{m_4}$. Она пересекает каждую прямую $A_i, B_i, C_i, i = \overline{1, 3}$ в особой точке, лежащей вне прямой $L_1^{m_4}$ (две прямые из одного и того же подмножества множества M не инцидентны одной и той же особой точке).

Для определенности рассмотрим прямую изоклину A_1 . Если $L_2^{m_4}$ пересекает A_1 в точке (A_1, B_3, C_2) , то $L_2^{m_4}$ пересекает A_3 только в точке (A_3, B_2, C_1) . Следовательно, прямая $L_2^{m_4}$ пересекается с прямыми B_1 и C_3 в точках, заведомо не являющихся особыми для системы (1).

Согласно [3] это означает, что на прямых B_1 и C_3 система (1) индуцируется то же направление, что и на $L_2^{m_4}$. Пришли к противоречию с тем, что по предположению прямые B_1 и C_3

¹На всех прямых трехэлементного подмножества множества M индуцировано одно и то же направление.

принадлежат различным трехэлементным подмножествам множества M всех прямых изоклинов системы (1).

Если бы мы поменяли порядок расположения точек пересечения прямых A_1, A_2, A_3 с прямой C_2 , то в рассуждениях ничего не изменилось бы, разве что могло бы измениться положение особой точки B относительно точек A и C . Теорема доказана.

Теорема 17. *Если никакие две прямые изоклины системы (1), на которых индуцированы различные направления, не параллельны, то число прямых изоклинов этой системы не более десяти.*

Доказательство. Пусть система (1) имеет более десяти прямых изоклинов. Согласно следствию 1 во множестве M всех прямых изоклинов системы (1) содержатся только трех элементные и одноэлементные подмножества. По теореме 6 во множестве M не может быть более одного одноэлементного подмножества. Так как по предположению система (1) имеет более десяти прямых изоклинов, то число трехэлементных подмножеств множества M более трех.

Пришли к противоречию с теоремой 16. Теорема доказана.

Пример 7. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - 3x)(y - 3x - 3)(2y + 3x - 3), \\ \frac{dy}{dt} = (y + 3x)(y + 3x - 3)(2y - 3x - 3), \end{cases}$$

кроме шести главных изоклинов имеет еще три прямые изоклины $y = 0; y = 1, 5; y = 3$, на которых индуцировано направление $m_1 = -1$ и одну прямую изоклину $x = 0$, на которой индуцировано направление $m_2 = 1$.

Из теорем 14 и 17 непосредственно следует

Теорема 18. *Система (1) при наличии у нее хотя бы одной особой точки имеет не более десяти прямых изоклинов.*

Заключение

Таким образом, нами показано, что полиномиальное векторное поле третьей степени не может иметь более десяти прямых изоклинов.

Литература

1. Ушхо Д.С. О прямых изоклинах кубической дифференциальной системы // Труды ФОРА. — 2003. — № 8. — С. 7–21. (URL: <http://fora.adygnet.ru>)
2. Ушхо Д.С. Прямые изоклины и канонические формы полиномиальных дифференциальных систем на плоскости. — Майкоп: АГУ, 2007. — 93 с.
3. Ушхо А.Д. Полиномиальные дифференциальные системы на плоскости: прямолинейные изоклины, оси симметрии, особые точки на экваторе сферы Пуанкаре / Автореф. диссер. к. ф.-м. н. — Воронеж: ВГУ, 2011. — 16 с.
4. Любимова Р.А. Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми // Дифференциальные и интегральные уравнения. Межвуз. Сб. — Горький, 1984. — С. 66–69.
5. Любимова Р.А. Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми // Дифференциальные и интегральные уравнения. Межвуз. Сб. — Горький: Горьк. гос. ун-т, 1977. — С. 19–22.
6. Тлячев В.Б. Прямые изоклины и особые точки кубических дифференциальных систем на плоскости / В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо, Д.С. Ушхо // Вестник АГУ. Серия «Естественно-математические и технические науки». — 2010. — № 1(53). — С. 32–57.

The upper estimate of the number of straight-line isoclines of cubic differential system in general form

V.B. Tlyachev, A.D. Ushkho, D.S. Ushkho

It is proved that the number of direct isoclines plane polynomial vector field of degree may not exceed ten. The examples illustrating the results.