

МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЭКЛУНДА

Л.Ж. Паланджянц

Майкопский государственный технологический институт, Майкоп

Используя известную формулу мультипликативного интегрирования по частям, устанавливается связь между процессом мультипликативного интегрирования по частям и преобразованием Бэклунда для уравнения Кортевега-де Фриза и цилиндрического уравнения Кортевега-де Фриза.

Рассмотрим мультипликативный интеграл [1]

$$Y(t) = \int E + A(t)dt \quad (1)$$

где $A(t) = (a_{ij}(t))$ – гладкая матричная функция n-го порядка.

Известно, что первообразная $Y(t)$ удовлетворяет уравнению

$$Y' = A(t)Y \quad (2)$$

Формула мультипликативного интегрирования по частям имеет вид [3]:

$$\int E + (B + C)dt = \int E + Bdt \int E + Ad\left(\int E + Bds\right)\{C\}dt \quad (3)$$

где $Ad(g)\{f\} = g^{-1}fg$. Будем называть $B(t)$ - интегрируемой частью, $C(t)$ – остатком.

Формула (3) представляет собой интегральный аналог калибровочного преобразования уравнения (2), под которым понимается преобразование $A(t) \rightarrow ZA(t)Z^{-1} + Z'Z^{-1}$, где $Z(t)$ - неособая матричная функция.

В настоящей работе предлагается прием вычисления мультипликативного интеграла (1) при $n=2$, основанный на многократном применении формулы (3). Первый шаг интегрирования состоит в том, что подынтегральная функция $A(t)$ представляется в виде суммы интегрируемой части и остатка. После первого шага интегрирования снова получается мультипликативный интеграл. Может оказаться, что подынтегральная функция этого интеграла треугольная. Тогда, как известно, мультипликативный интеграл вычисляется в конечном виде. Иногда треугольная матрица получается на n-ом шаге мультипликативного интегрирования по частям. При этом существует конечное число способов представления подынтегральной функции в виде интегрируемой части и остатка. Это обстоятельство позволяет организовать содержательные процессы мультипликативного интегрирования по частям. Наиболее естественен способ представления подынтегральной функции в виде суммы верхних и нижних треугольных матриц. Заметим, что при этом каждая из слагаемых такой суммы интегрируется в конечном виде.

Специальным образом проведенное мультипликативное интегрирование по частям совпадает с преобразованием Бэклунда для некоторых уравнений нулевой кривизны, которые, естественным образом связаны с исходным мультипликативным интегралом.

1. Представим матрицу $A(t)$ в виде суммы мультипликативно интегрируемой части и остатка следующим образом:

$$1.1. A(t) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};$$

$$1.2. A(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для сокращения записи используем обозначение: $\int a_{ij}(t)dt = \int a_{ij}$

Рассмотрим случай 1.1.

$$\begin{aligned} & \int E + A(t)dt + \begin{pmatrix} 1 & \int a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \int E + Ad \begin{pmatrix} 1 & \int a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right\} dt = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \int a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \int E + \begin{pmatrix} a_{11} - a_{21} \int a_{12} & (a_{11} - a_{22}) \int a_{12} - a_{21} \int^2 a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + a_{21} \int a_{12} \end{pmatrix} dt = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \int a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \int E + \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} dt \end{aligned}$$

Условие $\tilde{a}_{12} = 0$ эквивалентно условию:

$$a_{12} = \left(\frac{a_{11} - a_{22}}{a_{21}} \right)' \quad (4)$$

При выполнении условия (4) мультипликативный интеграл (1) имеет вид:

$$\int E + A(t)dt = \begin{pmatrix} 1 & \int a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{\int \tilde{a}_{11}} & 0 \\ e^{\int \tilde{a}_{22}} \int \tilde{a}_{21} e^{\int (\tilde{a}_{11} - \tilde{a}_{22})} & e^{\int \tilde{a}_{22}} \end{pmatrix}$$

В случае, если условие (4) не выполняется, то процесс интегрирования по частям можно продолжить.

$$\int E + \tilde{A}dt = \begin{pmatrix} 1 & \int \tilde{a}_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \int E + \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} \end{pmatrix} dt$$

Условие $\tilde{b}_{12} = 0$ эквивалентно условию

$$2a_{12} + (a_{11} - a_{22}) \int a_{12} - a_{21} \int^2 a_{12} = \left(\frac{a_{11} - a_{22}}{a_{21}} \right)' \quad (5)$$

При выполнении условия (5) мультипликативный интеграл (1) имеет вид:

$$\int E + A(t)dt = \begin{pmatrix} 1 & \int a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \int \tilde{a}_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{\int \tilde{b}_{11}} & 0 \\ e^{\int \tilde{b}_{22}} \int \tilde{b}_{12} e^{\int \tilde{b}_{11}} - \tilde{b}_{22} & e^{\int \tilde{b}_{22}} \end{pmatrix}$$

Продолжая этот процесс, получаем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $A_n = \begin{pmatrix} a_{11,n} & a_{12,n} \\ a_{21,n} & a_{22,n} \end{pmatrix}$, $a_{ij,0} = a_{ij}$ есть подынтегральная матрица, получаемая

на n — шаге мультиплитикативного интегрирования по частям по правилу, определенному выше-указанным процессом.

Тогда при выполнении условий

$$a_{12,n} = \left(\frac{a_{11,n} - a_{22,n}}{a_{21,n}} \right)' \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11,n} &= a_{11,n-1} - a_{21,n-1} \int a_{12,n-1} dt, \\ a_{22,n} &= a_{22,n-1} + a_{21,n-1} \int a_{12,n-1} dt, \\ a_{21,n} &= a_{21,n-1}, \\ a_{12,n} &= (a_{11,n-1} - a_{22,n-1}) \int a_{12,n-1} dt - a_{21,n-1} \int a_{12,n-1} dt \end{aligned}$$

на $(n+1)$ - шаге мультиликативного интегрирования по частям матричная функция A_{n+1} становится треугольной и, следовательно, мультиликативный интеграл (1) вычисляется в конечном виде:

$$\int E + A(t) dt = \begin{pmatrix} 1 & \int a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & \int a_{12,n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{\int a_{11,n}} & 0 \\ e^{\int a_{22,n}} \int a_{21,n} e^{\int a_{11,n}} - a_{22,n} & e^{\int a_{22,n}} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим случай 1.2.

$$\begin{aligned} \int E + \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \right\} dt &= \begin{pmatrix} e^{\int a_{11}} & 0 \\ 0 & e^{\int a_{22}} \end{pmatrix} \cdot \int E + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} e^{\int a_{22} - a_{11}} \\ a_{21} e^{\int a_{11} - a_{22}} & 0 \end{pmatrix} dt = \\ &= \begin{pmatrix} e^{\int a_{11}} & 0 \\ 0 & e^{\int a_{22}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \int a_{12} e^{\int a_{22} - a_{11}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \int E + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} dt = \\ &= \begin{pmatrix} e^{\int a_{11}} & 0 \\ 0 & e^{\int a_{22}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \int b_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \int c_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \int E + \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} dt, \end{aligned}$$

где

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} - c_{21} \int c_{12} & (c_{11} - c_{22}) \int c_{12} - c_{21} \int c_{12} \\ c_{21} & c_{22} + c_{21} \int c_{12} \end{pmatrix}, \quad b_{12} = a_{12} e^{\int a_{22} - a_{11}}$$

Условие $d_{12} = 0$ эквивалентно условию $\int c_{12} = \frac{c_{11} - c_{22}}{c_{21}}$, или

$$\left(\int a_{12} e^{\int a_{22} - a_{11}} dt \right) \cdot \left(\int a_{21} e^{\int a_{11} - a_{22}} dt \right) = -2 \quad (7)$$

При выполнении условия (7) мультиликативный интеграл (1) имеет вид:

$$\int E + A(t) dt = \begin{pmatrix} e^{\int a_{11}} & 0 \\ 0 & e^{\int a_{22}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \int b_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \int c_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{\int d_{11}} & 0 \\ e^{\int d_{22}} \int d_{21} e^{\int d_{11} - d_{22}} & e^{\int d_{22}} \end{pmatrix}$$

В случае, если условие (7) не выполняется, то процесс интегрирования по частям можно продолжить.

$$\begin{aligned}
\int E + \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} dt &= \begin{pmatrix} e^{\int d_{11}} & 0 \\ 0 & e^{\int d_{22}} \end{pmatrix} \cdot \int E + \begin{pmatrix} 0 & d_{12} e^{\int d_{22} - d_{11}} \\ d_{21} e^{\int d_{11} - d_{22}} & 0 \end{pmatrix} dt = \\
&= \begin{pmatrix} e^{\int d_{11}} & 0 \\ 0 & e^{\int d_{22}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \int e_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \int E + \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} e^{\int d_{11}} & 0 \\ 0 & e^{\int d_{22}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \int e_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \int f_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \\
&\quad \cdot \int E + \begin{pmatrix} f_{11} - f_{21} \int f_{12} & (f_{11} - f_{22}) \int f_{12} - f_{21} \int^2 f_{12} \\ f_{21} & f_{22} + f_{21} \int f_{12} \end{pmatrix} dt = \\
&= \begin{pmatrix} e^{\int d_{11}} & 0 \\ 0 & e^{\int d_{22}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \int e_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \int f_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \int E + \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} dt
\end{aligned}$$

Условие $g_{12} = 0$ эквивалентно условию $\int f_{12} = \frac{f_{11} - f_{22}}{f_{21}}$ или

$$\left(\int d_{12} e^{\int d_{22} - d_{11}} dt \right) \cdot \left(\int d_{21} e^{\int d_{11} - d_{22}} dt \right) = -2 \quad (8)$$

При выполнении условия (8) мультипликативный интеграл (1) имеет вид:

$$\begin{aligned}
\int E + A(t) dt &= \begin{pmatrix} e^{\int a_{11}} & 0 \\ 0 & e^{\int a_{22}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \int b_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \int c_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{\int d_{11}} & 0 \\ 0 & e^{\int d_{22}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \int e_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 1 & \int f_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{\int g_{11}} & 0 \\ e^{\int g_{22}} \int g_{21} e^{\int g_{11} - g_{22}} & e^{\int g_{22}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

В случае, если условие (8) не выполняется, таким образом процесс интегрирования по частям можно продолжить. Продолжая этот процесс, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $A_{3n} = \begin{pmatrix} a_{11,3n} & a_{12,3n} \\ a_{21,3n} & a_{22,3n} \end{pmatrix}$, $a_{ij,0} = a_{ij}$ есть подынтегральная матрица, полученная на n -шаге мультипликативного интегрирования по частям по правилу, определенному вышеуказанным процессом.

Тогда при выполнении условий $\left(\int a_{12,3n+1} dt \right) \cdot \left(\int a_{21,3n+1} dt \right) = -2$, где

$a_{12,3n+1} = a_{12,3n} e^{\int (a_{22,3n} - a_{11,3n}) dt}$, $a_{21,3n+1} = a_{21,3n} e^{\int (a_{11,3n} - a_{22,3n}) dt}$, на $(n+1)$ - шаге мультипликативного интегрирования по частям матричная функция A_{3n+3} становится треугольной и, следовательно, мультипликативный интеграл (1) вычисляется в конечном виде:

$$\begin{aligned}
\int E + A(t) dt &= \prod_{k=0}^n \left\{ \begin{pmatrix} e^{\int a_{11,3k}} & 0 \\ 0 & e^{\int a_{22,3k}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \int a_{12,3k+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \int a_{12,3k+2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \times \\
&\quad \times \begin{pmatrix} e^{\int a_{11,3n+3}} & 0 \\ e^{\int a_{22,3n+3}} \int a_{21,3n+3} e^{\int a_{11,3n+3} - a_{22,3n+3}} & e^{\int a_{22,3n+3}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Пример 1.

Рассмотрим уравнение $y'' = k(t)y$, которое эквивалентно системе уравнений

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k(t) & 0 \end{pmatrix} Y. \text{ Условие (8) принимает вид } k(t) = \frac{2}{(t+c)^2}$$

Следовательно, получаем интегрируемое уравнение Эйлера $y'' = \frac{2}{(t+c)^2} y$

Общее решение: $y = c_1(t+c)^2 + c_2(t+c)^{-1}$

2). Рассмотрим мультипликативный интеграл

$$\bar{\int} E + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} dt \quad (9)$$

Представим подынтегральную матрицу в виде суммы мультипликативно интегрируемой части и остатка следующими способами:

$$2.1. \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} - a_{12} & 0 \end{pmatrix};$$

$$2.2. \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} + a_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 2.1.

$$\begin{aligned} \bar{\int} E + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} dt &= \bar{\int} E + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} dt \cdot \bar{\int} E + Ad \left(\bar{\int} E + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{pmatrix} dS \right) \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} - a_{12} & 0 \end{pmatrix} \right\} dt \\ \bar{\int} E + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{pmatrix} dt &= \begin{pmatrix} ch \int a_{12} & sh \int a_{12} \\ sh \int a_{12} & ch \int a_{12} \end{pmatrix} \\ Ad \left(\bar{\int} E + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{pmatrix} dt \right) \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} - a_{12} & 0 \end{pmatrix} \right\} &= (a_{21} - a_{12}) \cdot \begin{pmatrix} ch \int a_{12} sh \int a_{12} & -sh^2 \int a_{12} \\ ch^2 \int a_{12} & sh \int a_{12} ch \int a_{12} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Если применить случай 1.1., то получаем, что при выполнении условия

$$(a_{12} - a_{21})sh^2 \int a_{12} = \left(\frac{2ch \int a_{12} sh \int a_{12}}{ch^2 \int a_{12}} \right) \text{ или } a_{21} = \frac{8a_{12}}{sh^2 2 \int a_{12}} + a_{12} \text{ мультипликативный интеграл (9) вычисляется в конечном виде:}$$

$$\begin{aligned} \bar{\int} E + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} dt &= \begin{pmatrix} ch \int a_{12} & sh \int a_{12} \\ sh \int a_{12} & ch \int a_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \int (a_{12} - a_{21})sh^2 \int a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} e^{\int \frac{1}{2}(a_{21} - a_{12})sh^2 \int a_{12}} & 0 \\ e^{\int \frac{1}{2}(a_{12} - a_{21})sh^2 \int a_{12}} \int ch^2 \int a_{12} e^{\int (a_{21} - a_{12})sh^2 \int a_{12}} & e^{\int \frac{1}{2}(a_{12} - a_{21})sh^2 \int a_{12}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Пример 2.

При $a_{12} = 1$, $a_{21} = k(t)$ получаем уравнение, $y'' = k(t)y$, $k(t) = \frac{8}{sh^2 2t} + 1$, интегрируемое в квадратурах.

Рассмотрим случай 2.2.

$$\begin{aligned} \hat{\int} E + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} dt &= \hat{\int} E + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} dt \cdot \hat{\int} E + Ad\left(\hat{\int} E + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} ds\right) \times \\ &\quad \times \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} + a_{12} & 0 \end{pmatrix} \right\} dt; \\ \hat{\int} E + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} dt &= \begin{pmatrix} \cos \int a_{12} & \sin \int a_{12} \\ -\sin \int a_{12} & \cos \int a_{12} \end{pmatrix}; \\ Ad\left(\hat{\int} E + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} dt\right) \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} + a_{12} & 0 \end{pmatrix} \right\} &= (a_{21} + a_{12}) \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \sin \int a_{12} \cos \int a_{12} & -\sin^2 \int a_{12} \\ \cos^2 \int a_{12} & -\sin \int a_{12} \cos \int a_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Если применить случай 1.1., то получаем, что при выполнении условия $(a_{12} + a_{21}) \sin^2 \int a_{12} = \left(\frac{2 \sin \int a_{12} \cos \int a_{12}}{\cos^2 \int a_{12}} \right)$ или $a_{21} = \frac{8a_{12}}{\sin^2 2 \int a_{12}} - a_{12}$ мультипликативный интеграл (9) вычисляется в конечном виде:

$$\begin{aligned} \hat{\int} E + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} dt &= \begin{pmatrix} \cos \int a_{12} & \sin \int a_{12} \\ -\sin \int a_{12} & \cos \int a_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \int (a_{21} + a_{12}) \sin^2 \int a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} e^{\int \frac{1}{2}(a_{21} + a_{12}) \sin 2 \int a_{12}} & 0 \\ e^{-\int \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21}) \sin 2 \int a_{12}} \int \cos^2 \int a_{12} e^{\int (a_{12} + a_{21}) \sin 2 \int a_{12}} & e^{-\int \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21}) \sin 2 \int a_{12}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Пример 3.

При $a_{12} = 1$, $a_{21} = k(t)$ получаем уравнение $y'' = k(t)y$, $k(t) = \frac{8}{\sin^2 2t} - 1$, интегрируемое в квадратурах.

Здесь устанавливается связь между мультипликативным интегрированием по частям и преобразованием Бэклунда для уравнения Кортевега-де Фриза и цилиндрического уравнения Кортевега-де Фриза.

1) Уравнение Кортевега-де Фриза.

Рассмотрим мультипликативный интеграл

$$\hat{\int} E + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} dx \tag{10}$$

где $a_{12}(x)$, $a_{21}(x)$ - некоторые гладкие функции.

Как следует из формулы (7) достаточным условием интегрируемости мультипликативного интеграла (1) в конечном виде является условие

$$\int a_{12}(x)dx \cdot \int a_{21}(x)dx = -2 \tag{11}$$

Для криволинейного мультипликативного интеграла $\hat{\int} 1 + Pdt + Lds$, где $L = -\partial_x^2 + U$, $P = -4\partial_x^3 + 6U\partial_x + 3U_x$, условием нулевой кривизны является уравнение Кортевега-де Фриза

$$U_t + U_{xxx} - 6UU_x = 0 \tag{12}$$

Установим связь между условием (11) и преобразованием Бэкунда для уравнения (12). Преобразование Бэкунда для уравнения (12) состоит в следующем [2].

Пусть $\tilde{U} = \tilde{\omega}_x$ - известное решение уравнения (12). При данном $\tilde{\omega}_x$ строятся два других решения $U_1 = \omega_{1x}$, $U_2 = \omega_{2x}$ с помощью уравнений:

$$\begin{aligned}\omega_{1x} + \tilde{\omega} &= -m_1 + \frac{1}{2}(\omega_1 - \tilde{\omega})^2; \\ \omega_{2x} + \tilde{\omega} &= -m_2 + \frac{1}{2}(\omega_2 - \tilde{\omega})^2,\end{aligned}$$

где m_1 , m_2 - некоторые постоянные.

Далее, по трем известным решениям \tilde{U} , U_1 , U_2 строится четвертое решение $U_{12} = \omega_{12x}$, а именно

$$\omega_{12} = \tilde{\omega} + \frac{2(m_1 - m_2)}{\omega_1 - \omega_2} \quad (13)$$

Тот факт, что U_{12} - решение легко проверяется.

Соотношение (13) получается из равенства (11) при $a_{12} = \frac{U_1 - U_2}{m_2 - m_1}$, $a_{21} = U_{12} - \tilde{U}$.

В самом деле, из равенства (11) получаем, что $\int(U_1 - U_2)dx \int(U_{12} - \tilde{U})dx = 2(m_1 - m_2)$,

$$\int U_{12} dx = \int \tilde{U} dx + \frac{2(m_1 - m_2)}{\int(U_1 - U_2)dx}, \text{ откуда следует соотношение (13).}$$

Таким образом, соотношение (13), полученное с помощью преобразования Бэкунда для уравнения (12), есть следствие интегрируемости в конечном виде мультипликативного интеграла

$$\int E + \begin{pmatrix} 0 & \frac{U_1 - U_2}{m_2 - m_1} \\ U_{12} - \tilde{U} & 0 \end{pmatrix} dx.$$

Пример 4.

Для мультипликативного интеграла $\int E + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ U & 0 \end{pmatrix} dx$ условие интегрируемости (11) принимает вид

$$\int U dx = -\frac{2}{x+c}, \quad U = \frac{2}{(x+c)^2} \quad (14)$$

Легко проверить, что (14) является решением уравнения (12).

Пример 5.

Рассмотрим мультипликативный интеграл $\int E + \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{2} \\ \frac{2}{k}U & 0 \end{pmatrix} dx$, $k = const$.

Применяя формулу мультиликативного интегрирования по частям (3) получаем, что

$$\begin{aligned} \int E + \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{2} \\ \frac{2}{k} U & 0 \end{pmatrix} dx = \int E + \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{k} U - \frac{k}{2} & 0 \end{pmatrix} \right\} dx = \begin{pmatrix} ch \int \frac{k}{2} dx & sh \int \frac{k}{2} dx \\ sh \int \frac{k}{2} dx & ch \int \frac{k}{2} dx \end{pmatrix} \int E + \\ + \left(\frac{2}{k} U - \frac{k}{2} \right) ch^2 \int \frac{k}{2} dx \begin{pmatrix} -cth \int \frac{k}{2} dx & cth^2 \int \frac{k}{2} dx \\ 1 & cth \int \frac{k}{2} dx \end{pmatrix} dx \end{aligned}$$

Введем обозначение:

$$\tilde{a}_{21} = \left(\frac{2}{k} U - \frac{k}{2} \right) ch^2 \int \frac{k}{2} dx, \quad \int \tilde{a}_{12} dx = cth \int \frac{k}{2} dx.$$

Тогда получаем, что

$$\int E + \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{2} \\ \frac{2}{k} U & 0 \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} ch \int \frac{k}{2} dx & sh \int \frac{k}{2} dx \\ sh \int \frac{k}{2} dx & ch \int \frac{k}{2} dx \end{pmatrix} \int E + \tilde{a}_{21} \begin{pmatrix} -\int \tilde{a}_{12} dx & -\int \tilde{a}_{12} dx \\ 1 & \int \tilde{a}_{12} dx \end{pmatrix} dx \quad (15)$$

Воспользуемся тождеством

$$\int E + \tilde{a}_{21} \begin{pmatrix} -\int \tilde{a}_{12} dx & -\int \tilde{a}_{12} dx \\ 1 & \int \tilde{a}_{12} dx \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} 1 & -\int \tilde{a}_{12} dx \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \int E + \begin{pmatrix} 0 & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & 0 \end{pmatrix} dx$$

Тогда равенство (15) примет вид

$$\int E + \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{2} \\ \frac{2}{k} U & 0 \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} ch \int \frac{k}{2} dx & sh \int \frac{k}{2} dx \\ sh \int \frac{k}{2} dx & ch \int \frac{k}{2} dx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\int \tilde{a}_{12} dx \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \int E + \begin{pmatrix} 0 & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & 0 \end{pmatrix} dx \quad (16)$$

Из условия $\int \tilde{a}_{12} dx \int \tilde{a}_{21} dx = -2$, обеспечивающего интегрируемость в конечном виде мультиликативного интеграла (16) следует, что

$$cth \int \frac{k}{2} dx \int \left(\left(\frac{2}{k} U - \frac{k}{2} \right) ch^2 \int \frac{k}{2} dx \right) dx = -2, \quad U = \frac{2k^2}{sh^2 2 \int \frac{k}{2} dx} + \frac{k^2}{4} \quad (17)$$

Для нахождения решения уравнения (12) воспользуемся равенством

$$\int \frac{k}{2} dx = \frac{k}{2} (x - f(t)) \quad (18)$$

где $f(t)$ - некоторая гладкая функция.

Подставляя равенство (18) в уравнение (12), получаем, что $f(t) = -\frac{5}{2} k^2 t + c$, $c = const$.

Следовательно, $U = \frac{2k^2}{sh^2 k \left(x - \frac{5}{2} k^2 t + c \right)} + \frac{k^2}{4}$ есть решение уравнения (12).

Пример 6.

Рассмотрим мультиликативный интеграл

$$\int E + \begin{pmatrix} 0 & k \\ \frac{2}{k}U & 0 \end{pmatrix} dx = \int E + \left\{ \begin{pmatrix} 0 & k \\ -\frac{k}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2}{k}U + \frac{k}{2} & 0 \end{pmatrix} \right\} dx \quad (19)$$

Используя рассуждения, аналогичные для примера 5 получаем, что достаточным условием интегрируемости в конечном виде мультиликативного интеграла (19) является равенство

$$U = \frac{2k^2}{\sin^2 k(x + f(t))} - \frac{k^2}{4} \quad (20)$$

Подставляя равенство (20) в уравнение (12), получаем, что $f(t) = \frac{5}{2}k^2t + c$, $c = const.$

Следовательно, $U = \frac{2k^2}{\sin^2 k\left(x + \frac{5}{2}k^2t + c\right)} - \frac{k^2}{4}$ есть решение уравнения (12).

2) Цилиндрическое уравнение Кортевега-де Фриза.

Рассмотрим криволинейный мультиликативный интеграл $\int 1 + Pdt + Lds$, где $L = 12t\partial_x^2 + x - 12tU$, $P = -4\partial_x^3 + 6U\partial_x + 3U_x$.

Условием нулевой кривизны для этого интеграла является цилиндрическое уравнение Кортевега-де Фриза

$$U_t = U_{xxx} - 6UU_x - \frac{U}{2t} \quad (21)$$

Покажем, что для уравнения (21) существует процедура, аналогичная той, которая описана для уравнения Кортевега-де Фриза, позволяющая с помощью мультиликативного интегрирования по частям получать соответствующие решения уравнения (21).

Пример 7.

Рассмотрим мультиликативный интеграл $\int E + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ U - \frac{x}{12t} & 0 \end{pmatrix} dx$.

Запишем достаточное условие (11) интегрируемости в конечном виде для этого интеграла. Тогда получаем, что

$$U = \frac{2}{(x - f(t))^2} + \frac{x}{12t} \quad (22)$$

где $f(t)$ - некоторая гладкая функция.

Подстановка равенства (22) в уравнение (21) показывает, что $f(t) = \sqrt{t} + c$, $c = const.$

Следовательно, $U = \frac{2}{(x + \sqrt{t} + c)^2} + \frac{x}{12t}$ есть решение уравнения (21).

Пример 8.

Рассмотрим мультиликативный интеграл $\int E + \begin{pmatrix} 0 & k \\ \frac{2}{k}\left(U - \frac{x}{12t}\right) & 0 \end{pmatrix} dx$, $k = k(t)$.

Для мультиликативного интеграла $\int E + \left\{ \begin{pmatrix} 0 & k \\ \frac{k}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2}{k}\left(U - \frac{x}{12t}\right) - \frac{k}{2} & 0 \end{pmatrix} \right\} dx$ используя рассуждения, аналогичные в примере 5 в случае уравнения Кортевега-де Фриза, получаем,

что достаточным условием интегрируемости в конечном виде этого мультипликативного интеграла является равенство $U = \frac{2k^2}{sh^2 k(x+f)} + \frac{x}{12t} + \frac{k^2}{4}$.

Подставляя значение U в уравнение (21), получаем, что

$$\begin{aligned} & \frac{cthk(x+f)}{sh^2 k(x+f)} \left(\left(4k^2 k' + 2 \frac{k^3}{t} \right) x + 4k^2 (kf)' - 10k^5 \right) + \\ & + \frac{1}{sh^2 k(x+f)} \left(-4kk' - \frac{2k^2}{t} \right) - \frac{kk'}{2} - \frac{k^2}{4t} = 0 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $k' + \frac{k}{2t} = 0$, $2(kf)' - 5k^3 = 0$, $k = c_1 \sqrt{t}$, $f = \sqrt{t} - 5c_1^2 + c_2$.

Следовательно,

$$U = \frac{2c_1^2}{tsh^2 \frac{2c_1}{\sqrt{t}} \left(x + \sqrt{t} - 5c_1^2 + c_2 \right)} + \frac{(x + 3c_1^2)}{12t} \quad (23)$$

есть решение уравнения (21).

Пример 9.

Для мультипликативного интеграла $\int E + \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{2} \\ \frac{2}{k} \left(U - \frac{x}{12t} \right) & 0 \end{pmatrix} \right\} dx$ ис-

пользуя вышеуказанные рассуждения, получаем, что достаточным условием интегрируемости в конечном виде является равенство $U = \frac{2k^2}{\sin^2 k(x+f)} + \frac{x}{12t} - \frac{k^2}{4}$.

Подставляя значение U в уравнение (21), получаем, что

$$\begin{aligned} & \frac{ctgk(x+f)}{\sin^2 k(x+f)} \left(\left(4k^2 k' + \frac{2k^2}{t} \right) x + 4k^2 (fk)' - 10k^5 \right) + \frac{1}{\sin^2 k(x+f)} \left(-4kk' - \frac{2k^2}{t} \right) + \\ & + \frac{kk'}{2} + \frac{k^2}{4t}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $k' + \frac{k}{2t} = 0$, $2(fk)' - 5k^3 = 0$, $k = c_1 \sqrt{t}$, $f = \sqrt{t} - 5c_1^2 + c_2$.

Следовательно, $U = \frac{2c_1^2}{t} \sin^{-2} \frac{c_1}{\sqrt{t}} \left(x + \sqrt{t} - 5c_1^2 + c_2 \right) + \frac{(x - 3c_1^2)}{12t}$ есть решение уравнения (21).

Л и т е р а т у р а :

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1988. - 552 с.
2. Солитоны в действии. Сборник статей. - М.: Мир, 1981. - 312 с.
3. Dollard J.D., Friedman Ch.N. Productintegration with applications to differential equations. - London: Addisonwesley Publ. Comp., 1979. - 254 с.

Multiplicative piecemeal integration and Bäcklund transformation**L.Zh. Palandzhants**

Direct link is established between the process of multiplicative piecemeal integration and Bäcklund's transformation for Korteweg-de Vries equation and cylindrical Korteweg-de Vries equation using the well known formula of multiplicative piecemeal integration.