2013 г. №18

Т р у д ы Ф О Р А

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В.А. Харченко, А.Б. Шишкин

Филиал ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный университет», г. Славянск-на-Кубани

В учебном пособии [1] развивается аксиоматический подход к определению основных элементарных функций действительной переменной. Этот подход допускает простое продолжение на случай однозначных элементарных функций комплексной переменной. Случай многозначных элементарных функций остается за рамками общей концепции, стоит особняком и требует отдельного самостоятельного исследования. В настоящей статье авторы устраняют этот пробел и развивают аксиоматику многозначных элементарных функций, основанную на понятии непрерывного представления многозначного отображения.

1 Многозначные отображения

1.1 Однозначные и многозначные отображения

С общих позиций (однозначное) *отображение* $f : X \to Y$ из множества X в множество Y определяется как непустое множество в декартовом произведении $X \times Y$, удовлетворяющее *условию однозначности*

$$(x, y_1), (x, y_2) \in f \implies y_1 = y_2.$$

При этом для любого $A \subseteq X$ множество $\{y : (x, y) \in f, x \in A\} \subseteq Y$ называется *образом* множества A и обозначается символом $f(A)$. Образ $f(X) = \{y : (x, y) \in f\}$ называется *полным образом* отображения f или *областью значений* отображения f и обозначается E_f. Если $E_f = Y$, то отображение f называют *сюръективным*. Для любого $B \subseteq Y$ множество $\{x : (x, y) \in f, y \in B\} \subseteq X$ называется *прообразом* множества B и обозначается символом $f^{-1}(B)$. Прообраз $f^{-1}(Y) = \{x : (x, y) \in f\}$ называется *полным прообразом* отображения f или *областью определения* отображения f и обозначается D_f. Если $D_f = X$, то отображение f называют *инъективным*[1].

Если $x \in X \setminus D_f$, то образ $f(x)$ точки x является пустым. Если $x \in D_f$, то образ $f(x)$ точки x содержит единственный элемент, который обозначают тем же символом $f(x)$. Этот элемент называют *значением* отображения f в точке x и говорят, что отображение f точке $x \in D_f$ ставит в соответствие точку $y := f(x) \in E_f$. Для того чтобы задать отображение $f : X \to Y$ достаточно указать его область определения D_f и его значения $f(x)$ в точках $x \in D_f$. В этом случае $f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\}$. Аналогично, если задана область значений E_f и прообразы $f^{-1}(y)$ точек $y \in E_f$, то $f = \{(x, y) : y \in E_f, x \in f^{-1}(y)\}$.

Если выполнено условие *взаимной однозначности*

$$(x_1, y), (x_2, y) \in f \implies x_1 = x_2,$$

то множество $f^{-1} := \{(y, x) : (x, y) \in f\} \subseteq Y \times X$ является отображением из множества Y в множество X, $D_{f^{-1}} = E_f$, $E_{f^{-1}} = D_f$. Это отображение называется *обратным* к отображению f. Само отображение f при этом называют *взаимно однозначным* (обратимым, однолистным). Обратное к взаимно однозначному отображению f в свою очередь является обратимым. При

[1] В традиционном смысле символ $f : X \to Y$ означает, что каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие элемент $y := f(x) \in Y$. Это уже означает, что $D_f = X$. С общих позиций символ $f : X \to Y$ предполагает лишь включения $D_f \subseteq X$ и $E_f \subseteq Y$. Кроме того, в традиционном смысле от инъективного отображения требуется еще и взаимная однозначность. Мы же этого не делаем, так как в противном случае это понятие потеряет смысл для многозначных отображений.

этом $(f^{-1})^{-1} = f$. Если взаимно однозначное отображение $f : X \to Y$ инъективно и сюръективно, то его называют *биективным* (биекцией X на Y). Для любого $A \subseteq X$ пересечение f с декартовым произведением $A \times Y$ называется *сужением* f на множество A и обозначается $f|_A$. Множество $A \subseteq D_f$ называется *множеством однолистности* для отображения f, если сужение $f|_A$ является биекцией A на образ $f(A)$.

Пусть X, Y — топологические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным*, если прообраз $f^{-1}(U) \subseteq X$ всякого открытого множества $U \subseteq Y$ является открытым множеством в подпространстве $D_f \subseteq X$. Отображение $f : X \to Y$ называется *гомеоморфным* (гомеоморфизмом пространства X на пространство Y), а сами пространства X и Y называются *гомеоморфными*, если оно биективно и *бинепрерывно*, то есть само отображение $f : X \to Y$ и его обратное отображение $f^{-1} : Y \to X$ являются непрерывными.

Если $X \times Y$ — топологическое произведение и отображение $f \subseteq X \times Y$ наделено индуцированной топологией, то подпространство $f \subseteq X \times Y$ и любое гомеоморфное ему топологическое пространство называется *графиком* отображения f.

Многозначное отображение[2] $F : X \to Y$ из множества X в множество Y определяется как непустое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Условие однозначности опускается. Если $Y \subseteq \bar{\mathbf{C}}$ и $X \subseteq \bar{\mathbf{C}}$, то многозначное отображение $F : X \to Y$ называется *многозначной функцией*. Для любого $A \subseteq X$ множество $\{y : (x, y) \in F, x \in A\} \subseteq Y$ называется *образом* множества A и обозначается символом $F(A)$. Образ $F(X) = \{y : (x, y) \in F\}$ называется *полным образом* многозначного отображения F или *областью значений* отображения F и обозначается E_F. Если $E_F = Y$, то отображение $F : X \to Y$ называют *сюръективным* или отображением множества X «на» множество Y. Для любого $B \subseteq Y$ множество $\{x : (x, y) \in F, y \in B\} \subseteq X$ называется *прообразом* множества B и обозначается символом $F^{-1}(B)$. Прообраз $F^{-1}(Y) = \{x : (x, y) \in F\}$ называется *полным прообразом* многозначного отображения F или *областью определения* многозначного отображения F и обозначается D_F. Если $D_F = X$, то отображение F называют *инъективным* или отображением множества X «в» множество Y.

Если $x \in X \backslash D_F$, то образ $F(x)$ точки x является пустым. Если $x \in D_F$, то образ $F(x)$ точки x не является пустым и его элементы называются *значениями* отображения F в точке x. Для того чтобы задать многозначное отображение $F : X \to Y$ достаточно указать его область определения D_F и образы $F(x)$ точек $x \in D_F$. В этом случае $F = \{(x, y) : x \in D_f, y \in F(x)\}$. Всякое многозначное отображение $F : X \to Y$ можно рассматривать как однозначное отображение $f_F : X \to \beta(Y) | x \to F(x)$, где $\beta(Y)$ — булеан Y. В этом случае образы $F(x)$ точек $x \in D_F = D_{f_F}$ совпадают со значениями $f_F(x)$ функции f_F.

Пусть X, Y — топологические пространства. Если $X \times Y$ — топологическое произведение и многозначное отображение $F \subseteq X \times Y$ наделено индуцированной топологией, то подпространство $F \subseteq X \times Y$ и любое гомеоморфное ему топологическое пространство называется *графиком* многозначного отображения F. Говорят, что многозначное отображение $F : X \to Y$ имеет *замкнутый график*, если F замкнуто в топологическом произведении $X \times Y$.

Уточним определение основных функциональных операций над многозначными отображениями. Пусть $F : X \to Y$ — многозначное отображение, $A \subseteq X$. Пересечение F с декартовым произведением $A \times Y \subseteq X \times Y$ называется *сужением* F на множество A и обозначается $F|_A$. В связи с этим обозначением образ точки $x_0 \in X$ иногда обозначают $F|_{x_0}$ или $F(x)|_{x=x_0}$. Условием существования сужения $F|_A$ служит условие $A \cap D_F \neq \varnothing$. При этом условии область определения сужения $F|_A$ непуста и совпадает с множеством $A \cap D_F \subseteq X$, а область значений совпадает с образом $F(A) \subseteq Y$.

Пусть $F_1 : X \to Y$ и $F_2 : Y \to Z$ — многозначные отображения. *Композицией* отображений F_1 и F_2 называют множество $F \subseteq X \times Z$, состоящее из пар (x, z), удовлетворяющих условию: существует $y \in Y$, такое, что $(x, y) \in F_1$ и $(y, z) \in F_2$. Композицию отображений F_1 и F_2 принято обозначать $F_2 \circ F_1$. Условием существования композиции $F_2 \circ F_1$ является условие $E_{F_1} \cap D_{F_2} \neq \varnothing$. При этом условии область определения композиции $F_2 \circ F_1$ непуста и совпадает с прообразом $F_1^{-1}(F_2^{-1}(Z)) \subseteq X$, а область значений совпадает с образом $F_2(F_1(X)) \subseteq Z$. Если X, Y, Z —

[2] Понятие многозначного отображения совпадает с алгебраическим понятием двузначного (бинарного) отношения.

топологические пространства, многозначные отображения $F_1 : X \to Y$, $F_2 : Y \to Z$ являются непрерывными и $E_{F_1} \cap D_{F_2} \neq \varnothing$, то композиция $F_2 \circ F_1$ непрерывна.

Всякое многозначное отображение имеет *обратное* многозначное отображение, так называется многозначное отображение $F^{-1} := \{(y,x) : (x,y) \in F\} \subseteq Y \times X$. Легко увидеть, что $D_{F^{-1}} = E_F$ и $E_{F^{-1}} = D_F$. При этом для любых $x \in D_F$ и $y \in E_F$ имеют место следующие теоретико-множественные соотношения

$$x \in F^{-1} \circ F(x) = \{x' \in X : F(x') \cap F(x) \neq \varnothing\},$$

$$y \in F \circ F^{-1}(y) = \{y' \in Y : F^{-1}(y') \cap F^{-1}(y) \neq \varnothing\}.$$

Далее рассмотрим определения алгебраических операций над многозначными функциями. При этом ограничимся лишь отображениями из $\bar{\mathbf{C}}$ в $\bar{\mathbf{C}}$. Сформулировать определения алгебраических операций над функциями из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}$ предоставляем читателю.

Суммой двух многозначных функций F_1 и F_2 называется многозначная функция $F_1 + F_2$, которая определяется следующим образом. Область определения $D_{F_1+F_2}$ этой функции совпадает с пересечением $D_{F_1} \cap D_{F_2}$, из которого удалено множество $\{z : F_1(z) = F_2(z) = \{\infty\}\}$. Образ $(F_1 + F_2)(z)$ точки $z \in D_{F_1+F_2}$ совпадает с множеством $F_1(z) + F_2(z)$, состоящим из всевозможных сумм вида $w_1 + w_2$, где $w_1 \in F_1(z)$, $w_2 \in F_2(z)$ и $\frac{1}{|w_1|} + \frac{1}{|w_2|} \neq 0$ (то есть w_1 и w_2 не равны ∞ одновременно). Сумма $F_1 + F_2$ имеет смысл только если выполнено условие существования: $D_{F_1+F_2} \neq \varnothing$.

Аналогичным образом определяются *произведение* F_1F_2 и *частное* $F_1 : F_2$ многозначных функций. Область определения $D_{F_1F_2}$ произведения F_1F_2 совпадает с пересечением $D_{F_1} \cap D_{F_2}$, из которого удалены множества $\{z : F_1(z) = \{0\}, F_2(z) = \{\infty\}\}$ и $\{z : F_1(z) = \{\infty\}, F_2(z) = \{0\}\}$, область определения $D_{F_1:F_2}$ частного $F_1 : F_2$ совпадает с пересечением $D_{F_1} \cap D_{F_2}$, из которого удалены множества $\{z : F_1(z) = F_2(z) = \{0\}\}$ и $\{z : F_1(z) = F_2(z) = \{\infty\}\}$. При этом образ $(F_1F_2)(z)$ точки $z \in D_{F_1F_2}$ совпадает с множеством $F_1(z)F_2(z)$, состоящим из всевозможных произведений вида w_1w_2, где $w_1 \in F_1(z)$, $w_2 \in F_2(z)$, $|w_1| + \frac{1}{|w_2|} \neq 0$ и $\frac{1}{|w_1|} + |w_2| \neq 0$, а образ $(F_1 : F_2)(z)$ точки $z \in D_{F_1:F_2}$ совпадает с множеством $F_1(z) : F_2(z)$, состоящим из всевозможных частных вида $w_1 : w_2$, где $w_1 \in F_1(z)$, $w_2 \in F_2(z)$, $|w_1| + |w_2| \neq 0$ и $\frac{1}{|w_1|} + \frac{1}{|w_2|} \neq 0$.

1.2 Непрерывные представления многозначных отображений

Пусть X, Y — топологические пространства. Символом $c[X,Y]$ обозначаем совокупность всех непрерывных отображений $f : X \to Y$. Если $f \in c[X,Y]$ и область определения $D_f \subseteq X$ отображения f открыта, то пишем $f \in c(X,Y)$. Легко увидеть, что отображение $f : X \to Y$ принадлежит совокупности $c(X,Y)$ тогда и только тогда, когда прообраз $f^{-1}(U) \subseteq X$ всякого открытого множества $U \subseteq Y$ является открытым множеством в X.

Выберем произвольное многозначное отображение $F : X \to Y$. Подмножество $\mathcal{F} \subseteq c[X,Y]$ будем называть *непрерывным представлением* многозначного отображения F, если

$$F = \bigcup\nolimits_{f \in \mathcal{F}} f.$$

В терминах образов последнее условие означает, что выполнены следующие условия:

1) область определения D_f любого отображения $f \in \mathcal{F}$ лежит в D_F и $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} D_f = D_F$;

2) для любых $f \in \mathcal{F}$ и $z \in D_f$ выполняется включение $f(z) \in F(z)$;

3) для любых $z \in D_F$ и $w \in F(z)$ найдется отображение $f \in \mathcal{F}$, такое, что $f(z) = w$.

Любое многозначное отображение F допускает непрерывное представление $\mathcal{F}$. Можно положить, например, что каждое отображение $f \in \mathcal{F}$ состоит из одной точки $(x,y) \in F$. Оно определено на одноточечном множестве $\{x\} \subseteq D_F$ и принимает свое единственное значение y, лежащее в множестве $F(x) \subseteq Y$. Тогда семейство $\mathcal{F} = \{f\}$ является непрерывным представлением F. Такое непрерывное представление многозначного отображения F называют *поточечным*. Верно и обратное, каждое семейство $\mathcal{F}$ непрерывных отображений $f : X \to Y$ определяет многозначное отображение $F := \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f \subseteq X \times Y$. Область определения D_F этого отображения совпадает с объединением $D_{\mathcal{F}} := \bigcup_{f \in \mathcal{F}} D_f$, область значений E_F этого отображения совпадает с объединением $E_{\mathcal{F}} := \bigcup_{f\in\mathcal{F}} E_f$, а образ $F(x)$ точки $x \in D_F = D_{\mathcal{F}}$ совпадает с множеством $\mathcal{F}(x) := \{f(x) : f \in \mathcal{F}, x \in D_f\}$.

Определим на булеане множества $c[X,Y]$ отношение $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$ по следующему правилу: $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$ тогда и только тогда, когда $\bigcup_{f\in\mathcal{F}_1} f = \bigcup_{f\in\mathcal{F}_2} f$. В терминах образов, последнее условие означает, что $D_{\mathcal{F}_1} = D_{\mathcal{F}_2}$ и $\mathcal{F}_1(x) = \mathcal{F}_2(x)$ для любого $x \in D_{\mathcal{F}_1} = D_{\mathcal{F}_2}$. Легко убедиться, что это отношение является отношением эквивалентности. Оно разбивает булеан множества $c[X,Y]$ на классы эквивалентности. Все семейства из отдельного класса эквивалентности представляют одно и то же многозначное отображение. С другой стороны, каждое многозначное отображение F определяет конкретный класс эквивалентности. Это класс, который содержит поточечное представление отображения F. Таким образом, любое многозначное отображение можно отождествить с конкретным классом эквивалентных семейств непрерывных отображений $f : X \to Y$. Задать многозначное отображение F можно с помощью выбора произвольного представителя этого класса, то есть указанием конкретного непрерывного представления $\mathcal{F}$ этого отображения. При этом, элементы непрерывного представления $\mathcal{F}$ многозначного отображения F называются *непрерывными ветвями представления* $\mathcal{F}$. Если непрерывное представление $\mathcal{F}$ конкретного многозначного отображения F является традиционным и задано по умолчанию, то его непрерывные ветви называют *непрерывными ветвями отображения* F.

Многозначное отображение $F : X \to Y$ называем *непрерывным* и пишем $F \in C(X,Y)$, если оно допускает непрерывное представление $\mathcal{F} \subseteq c(X,Y)$.

Уточним определения основных функциональных операций над непрерывными представлениями многозначных отображений. Пусть $F : X \to Y$ — многозначное отображение, $\mathcal{F}$ — непрерывное представление F, $A \subseteq X$, $F|_A$ — сужение F на множество A. Непрерывное представление $\mathcal{F}|_A$ сужения $F|_A$ определяется как совокупность сужений $f|_A$, где $f \in \mathcal{F}$ и $A \cap D_f \neq \varnothing$. Если множество $A \subseteq X$ и область определения D_f открыта, то область определения $D_{f|_A} = A \cap D_f$ тоже открыта. Значит, сужение $F|_A$ непрерывного многозначного отображения $F : X \to Y$ на открытое множество $A \subseteq X$ тоже является непрерывным многозначным отображением из X в Y.

Пусть $F_1 : X \to Y$ и $F_2 : Y \to Z$ — многозначные отображения, $\mathcal{F}_1$ — непрерывное представление отображения F_1, а $\mathcal{F}_2$ — непрерывное представление отображения F_2. Если $E_{F_1} \cap D_{F_2} \neq \varnothing$, то определена композиция $F_2 \circ F_1$. Непрерывное представление $\mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_1$ композиции $F_2 \circ F_1$ определяется как семейство композиций $f_2 \circ f_1$, где $f_1 \in \mathcal{F}_1$, $f_2 \in \mathcal{F}_2$ и $f_1^{-1}\left(f_2^{-1}(Z)\right) \neq \varnothing$. Если $f_1 \in c(X,Y)$ и $f_2 \in c(Y,Z)$, то область определения $f_1^{-1}\left(f_2^{-1}(Z)\right) \subseteq X$ композиции $f_2 \circ f_1$ открыта, то есть $f_2 \circ f_1 \in c(X,Z)$, значит, композиция $F_2 \circ F_1$ непрерывных многозначных отображений F_1 и F_2 является непрерывным многозначным отображением из X в Z.

Пусть F_1 и F_2 — многозначные функции и $D_{F_1+F_2} \neq \varnothing$. Если $\mathcal{F}_1$ — непрерывное представление многозначной функции F_1, а $\mathcal{F}_2$ — непрерывное представление многозначной функции F_2, то соответствующее непрерывное представление $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ многозначной функции $F_1 + F_2$ совпадает с семейством непрерывных функций $f_1 + f_2$, где $f_1 \in \mathcal{F}_1$, $f_2 \in \mathcal{F}_2$ и $D_{f_1+f_2} \neq \varnothing$. Если множества D_{f_1} и D_{f_2} открыты в $\bar{\mathbf{C}}$, то множество $D_{f_1+f_2} := (D_{f_1} \cap D_{f_2}) \setminus \left(f_1^{-1}(\infty) \cup f_2^{-1}(\infty)\right)$ тоже открыто в $\bar{\mathbf{C}}$. Отсюда вытекает, что сумма $F_1 + F_2$ непрерывных многозначных функций F_1 и F_2 тоже является непрерывной многозначной функцией.

Аналогичным образом определяются непрерывные представления $\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_1 : \mathcal{F}_2$ произведения F_1F_2 и частного $F_1 : F_2$ многозначных функций F_1 и F_2 соответственно.

Упражнение 1. *Убедитесь, что произведение и частное непрерывных многозначных функций (при условии их существования) сами являются непрерывными многозначными функциями.*

Непрерывная многозначная функция $F : \bar{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ называется *аналитической*, если оно допускает непрерывное представление $\mathcal{F} \subseteq c(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$, состоящее из аналитических функций.

Упражнение 2. *Убедитесь, что сумма, произведение и частное аналитических многозначных функций (при условии их существования) сами являются аналитическими многозначными функциями.*

1.3 Фактор-пространства многозначных отображений

Пусть J — множество, наделенное дискретной топологией, X — топологическое пространство. Декартово произведение $X \times J$ можно рассматривать как объединение $\bigcup_{j\in J} X_j$ множеств $X_j := (X)_j := \{(x,j) : x \in X\}$. В этом случае топологическое произведение $X \times J$ называется *дизъюнктным объединением* (топологической суммой) копий (экземпляров) пространства X и обозначается $\coprod_{j\in J} X$. С другой стороны, декартово произведение $X \times J$ можно рассматривать как объединение $\bigcup_{x\in X} x_J$ множеств $x_J := (x)_J := \{(x,j) : j \in J\}$. В этом случае топологическое произведение $X \times J$ называется *кратным пространством* и обозначается X_J или $(X)_J$. Множества x_J называются *кратными элементами* пространства X_J. Мощность $|J|$ множества J называется *кратностью пространства* X_J. Элементы $x_j := (x)_j := (x,j) \in x_J$ называются *поднятиями элемента* $x \in X$. Если U — окрестность точки x в пространстве X, то множество $U_j := (U)_j := \{x_j : x \in U\} \subseteq X_j$ является окрестностью точки x_j в пространстве X_J и называется *поднятием окрестности* U. Подпространства $X_j \subseteq X_J$ называются *поднятиями пространства* X. Связные подпространства пространства X_J называют *листами* этого пространства. Если пространство X является связным, то поднятия X_j являются листами пространства X_J.

Пусть F — многозначное отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y, $\mathcal{F} = \{f_j : j \in J\}$ — его непрерывное представление. Можно считать, что каждая непрерывная ветвь $f_j \in \mathcal{F}$ определена на своем поднятии $X_j \subseteq X_J$ пространства X. В этом случае отображение $F : X \to Y$ можно рассматривать как однозначное отображение из кратного пространства X_J в пространство Y. Точке $x_j := (x)_j \in X_J$ оно ставит в соответствие точку $y := f_j(x) \in Y$. В этом случае область опредения отображения F совпадает с дизъюнктным объединением $\coprod_{j\in J} D_{f_j} := \{x_j : x \in D_{f_j}\} \subseteq X_J$.

Введем на подпространстве $\coprod_{j\in J} D_{f_j} \subseteq X_J$ отношение эквивалентности: $(x)_j \sim (x')_{j'}$ тогда и только тогда, когда $x = x' \in D_{f_j} \bigcap D_{f_{j'}}$ и $f_j(x) = f_{j'}(x)$. Фактор-пространство $X_{\mathcal{F}}$ пространства $\coprod_{j\in J} D_{f_j}$ по этому отношению эквивалентности называется *фактор-пространством* (пространством посредником) семейства непрерывных отображений $\mathcal{F}$ или многозначного отображения F, если непрерывное представление $\mathcal{F}$ отображения F задано традиционно или по умолчанию. В последнем случае пространство $X_{\mathcal{F}}$ обозначается X_F. Связные подпространства пространства $X_{\mathcal{F}}$ называют *листами* этого пространства. Говорят, что листы пространства $X_{\mathcal{F}}$ и само пространство $X_{\mathcal{F}}$ получены при помощи склейки листов кратного пространства X_J по эквивалентным точкам, то есть по точкам, в которых непрерывные ветви принимают одинаковые значения. Элементы пространства $X_{\mathcal{F}}$ обозначаются x_j или $(x)_j$ и называются *поднятиями элемента* $x \in X$. При этом символы x_j и $x_{j'}$ обозначают один и тот же элемент пространства $X_{\mathcal{F}}$, если $f_j(x) = f_{j'}(x)$. Для любого $x \in \coprod_{j\in J} D_{f_j}$ множество $x_{\mathcal{F}} := \{x_j : x_j \in X_{\mathcal{F}}\}$ называется *кратным элементом* или *слоем* (над x) пространства $X_{\mathcal{F}}$. Мощность $|x_{\mathcal{F}}|$ множества $x_{\mathcal{F}}$ называется *кратностью слоя* $x_{\mathcal{F}}$. Пространство X называется *проекцией* пространства $X_{\mathcal{F}}$, а отображение $p : X_{\mathcal{F}} \to X |\, x_j \to x$ называется *оператором проектирования* или *проектором*.

Понятно, что определенное таким образом топологическое пространство X_F зависит от выбора непрерывного представления $\mathcal{F}$ многозначного отображения F. В качестве примера рассмотрим многозначную функцию $F : X \to Y$, где $X = Y = \mathbf{R}$, образ $F(x)$ совпадает с множеством $\{-\sqrt{x}, \sqrt{x}\}$ при $x > 0$ и совпадает с множеством $\{0\}$ при $x = 0$. Область определения D_F этой функции совпадает с лучем $\mathbf{R}_+ := \{x : x \geqslant 0\}$, а область значений E_F совпадает с $\mathbf{R}$. Заметим, что это многозначное отображение не является непрерывным, то есть $F \notin C(\mathbf{R},\mathbf{R})$, но его сужение на луч $\mathbf{R}_+$ непрерывно, то есть $F \in C(\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$. Выберем в качестве непрерывного представления отображения F семейство $\mathcal{F} = \{f_j : j \in J\}$, где $J := \{1; 2\}$, f_1 определена на луче $\mathbf{R}_+$, $f_1(x) = \sqrt{x}$ при $x > 0$ и $f_1(x) = 0$ при $x = 0$, а функция f_2 определена на луче $\{x : x > 0\}$ и $f(x) = -\sqrt{x}$. В этом случае фактор-пространство $X_{\mathcal{F}}$ представляет собой дизъюнктное объединение двух листов. Первый совпадает с лучем $\mathbf{R}_+$, а второй совпадает с лучем $\{x : x > 0\} \subseteq \mathbf{R}$. Каждый из этих листов является открыто-замкнутым подмножеством $X_{\mathcal{F}}$. Из этого понятно не следует, что слой $0_{\mathcal{F}} = \{0_1\}$ является открыто-замкнутым. Открытой окрестностью точки 0_1 является, например, полуинтервал $[0,\varepsilon)_1 := \{x_1 : 0 \leqslant x < \varepsilon\}$. Кратность слоя 0_J равна 1, а кратность всех остальных слоев фактор-пространства $X_{\mathcal{F}}$ равна 2. Если доопределить f_2 в точке $x = 0$ и положить $f_2(0) = 0$, то фактор-пространство $X_{\mathcal{F}}$ будет состоять из одного листа, полученного склейкой двух копий луча $\mathbf{R}_+$ в точке $x = 0$. Открытой окрестностью точки $0_1 = 0_2 \in X_{\mathcal{F}}$ в этом случае является, например, объединение двух полуинтервалов $[0, \varepsilon)_1 := \{x_1 : 0 \leqslant x < \varepsilon\}$ и $[0, \varepsilon)_2 := \{x_2 : 0 \leqslant x < \varepsilon\}$. Как и прежде, кратность слоя $0_{\mathcal{F}}$ равна 1, а кратность остальных слоев равна 2. В первом случае пространство $X_{\mathcal{F}}$ не является гомеоморфным графику многозначного отображения F, а во втором случае оно гомеоморфно графику отображения F и, значит, само является графиком отображения F.

Пусть $F : X \to Y$ — произвольное многозначное отображение. Если в качестве $\mathcal{F}$ выбрать поточечное представление F, и в качестве множества индексов J выбрать само отображение $F \subseteq X \times Y$, то пространство X_F совпадет с множеством $F \subseteq X \times Y$, наделенным дискретной топологией. Если при этом пространства X и Y наделены дискретными топологиями, то пространство X_F совпадает с графиком отображения F.

1.4 Расслоения

В связи с исследованием многозначных отображений обратных к однозначным отображениям вводится понятие расслоения. Обратные к однозначным отображениям вполне характеризуются тем, что образы различных точек для таких отображений не пересекаются.

Пусть F — многозначное отображение из топологического пространства X в топологическое пространство Y. Если образы $F(x)$ различных точек из X не пересекаются, то отображение F называется *расслоением* над пространством X. При этом подпространство $E_F \subseteq Y$ называется *расслоенным* или *тотальным* пространством расслоения F, подпространство $F(x) \subseteq E_F$ называется *слоем* пространства E_F над элементом $x \in D_F$, а непрерывные ветви расслоения F называются *сечениями* этого пространства. Подпространство $D_F \subseteq X$ называется *базой* расслоения, а обратное отображение $p := F^{-1} : Y \to X$ является однозначным и называется *оператором проектирования*. Из определения обратного многозначного отображения вытекает, что $F = p^{-1}$, значит, слой $F(x)$ совпадает с прообразом $p^{-1}(x)$. Если все слои $p^{-1}(x)$, $x \in D_F$, дискретны в X, то расслоение F называется *накрытием* пространства X, а оператор проектирования p называется *накрывающим отображением*. Пусть X_F — какое-либо фактор-пространство какого-либо многозначного отображения F, $p : X_F \to X$ — его оператор проектирования. Тогда многозначное отображение $p^{-1} : X \to X_F$ является примером расслоения. При этом фактор-пространство X_F является расслоенным пространством, проекция X фактор-пространства X_F является базой расслоения p^{-1}, слои фактор-пространства X_F совпадают со слоями расслоения p^{-1}. Полный образ E_f сечения $f : X \to X_F$ расслоения p^{-1}, у которого D_f — связное подпространство X, является листом фактор-пространства X_F.

Расслоение $F : X \to Y$ называется *тривиальным*, если существует гомеоморфизм $h : E_F \to D_F \times E$, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
E_F \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & D_F \times E \arrow[dl, "p_E"] \\
& D_F &
\end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть $p_E \circ h(y) = p(y)$ для любого $y \in E_F$. Здесь E — некоторое топологическое пространство, называемое *пространством слоя* тривиального расслоения F, $D_F \times E$ — топологическое произведение пространств D_F и E, p_E — оператор проектирования $D_F \times E \to D_F | (x, e) \to x$. Коммутативность указанной диаграммы означает, что гомеоморфизм h является *послойным*, то есть для любого $x \in D_F$ сужение отображения h на слой $p^{-1}(x)$ является гомеоморфным отображением этого слоя на слой $p_E^{-1}(x)$. Сужение тривиального расслоения в свою очередь является тривиальным расслоением с тем же пространством слоя.

Расслоение $F : X \to Y$ называется *тривиальным в точке* $x \in D_F$, если сужение F_U расслоения F на некоторую окрестность $U \subseteq D_F$ точки x является тривиальным расслоением. При этом окрестность U называют *картой* расслоения F. Расслоение F называется *локально тривиальным*, если оно тривиально в каждой точке $x \in D_F$. Произвольное семейство карт $\{U_j : j \in J\}$ локально тривиального расслоения F называется его *атласом*, если оно образует покрытие подпространства $D_F \subseteq X$. Расслоение F является локально тривиальным тогда и только тогда, когда оно обладает хотя бы одним атласом.

Пусть X_J — кратное пространство, p — оператор проектирования $p : X_J \to X \,|\, x_j \to x$.

$$\begin{tikzcd} X_J \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & X \times J \arrow[dl, "p_J"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Обратное отображение $p^{-1} : X \to X_J$ является примером тривиального расслоения (накрытия). Роль гомеоморфизма h выполняет тождественное отображение. Пространством слоя этого расслоения является дискретное пространство J. Ниже рассмотрим примеры локально тривиальных, но не тривиальных расслоений.

1.5 Тригонометрическое расслоение

Пусть s — единичная окружность $\{\zeta : |\zeta| = 1\} \subset \mathbf{C}$, наделенная индуцированной из $\mathbf{C}$ топологией (метрикой). Рассмотрим однозначное инъективное отображение $t : \mathbf{R} \to s$, которое точке $\varphi \in \mathbf{R}$ ставит в соответствие точку $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \in s$. Обратное отображение $T : s \to \mathbf{R}$ является расслоением над пространством s и называется *тригонометрическим* расслоением. В роли тотального пространства выступает пространство $\mathbf{R}$, а в роли оператора проектирования само отображение t. База тригонометрического расслоения совпадает с окружностью s. Из определения аргумента комплексного числа вытекает, что для любого $\zeta \in s$

$$T(\zeta) = \operatorname{Arg}\zeta.$$

Так как слои тригонометрического расслоения дискретны, то это расслоение является накрытием.

Тригонометрическое расслоение (накрытие) не является тривиальным. Действительно, предположим, что существует послойный гомеоморфизм $h : \mathbf{R} \to s \times E$, где E — некоторое топологическое пространство. Это означает, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R} \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "t"'] & & s \times E \arrow[dl, "t_E"] \\ & s & \end{tikzcd}$$

Так как гомеоморфизм h является послойным, то пространство E является дискретным. Но пространство $\mathbf{R}$ является связным, что влечет связность топологического произведения $s \times E$. Значит, пространство слоя E не может иметь двух различных элементов. Следовательно слои $T(\zeta)$ должны быть одноэлементными. Это противоречие доказывает высказанное утверждение.

С другой стороны, обозначим символом u интервал $(-\pi, \pi)$, а символом v — окружность s с выколотой точкой $\zeta = -1$. Сужение расслоения T на дугу $v = t(u)$ является тривиальным расслоением. В роли тотального пространства выступает объединение $\mathbf{u}$ интервалов $u + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Так как эти интервалы попарно не пересекаются, то это пространство гомеоморфно кратному пространству $(u)_{\mathbf{Z}} := u \times \mathbf{Z}$. Роль послойного гомеоморфизма h выполняет отображение, которое точке $\varphi \in u + 2\pi k$ ставит в соответствие точку $(\varphi - 2\pi k)_k := (\varphi - 2\pi k, k)$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{u} \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "t"'] & & (u)_{\mathbf{Z}} \arrow[dl, "t_{\mathbf{Z}}"] \\ & v & \end{tikzcd}$$

Пусть $u_1 := u + \pi$, $v_1 := t(u_1)$ для любого целого k. Сужение расслоения T на дугу v_1 тоже является тривиальным расслоением. Так как $v \cup v_1 = s$, то дуги v и v_1 образуют атлас тригонометрического расслоения. Это означает, что тригонометрическое расслоение является локально тривиальным.

Пусть $u_k := u + \pi k$, $v_k := t(u_k)$ для любого целого k. Дуга v_k совпадает с носителем кривой (которую мы обозначаем тем же символом v_k), задаваемой уравнением $\lambda(t) = e^{i\varphi}$, $\varphi \in (-\pi, \pi) + \pi k$. Выберем в качестве непрерывного представления тригонометрического расслоения семейство

$$\mathcal{T} := \{T_k : k \in \mathbf{Z}\},$$

где непрерывная однозначная функция T_k определена на дуге v_k помощью интеграла с переменным верхним пределом по кривой v_k :

$$T_{2k}(\zeta) := \frac{1}{i}\int_1^\zeta \frac{dz}{z} + 2\pi k,$$

$$T_{2k+1}(\zeta) := \frac{1}{i}\int_1^\zeta \frac{dz}{z} + 2\pi k.^3$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$T_{2k}(\zeta) = \int_{2\pi k}^{\theta_{2k,\zeta}} d\varphi + 2\pi k = \varphi_{2k,\zeta},\ \zeta \in v_{2k},$$

$$T_{2k+1}(\zeta) = \int_{2\pi k}^{\theta_{2k+1,\zeta}} d\varphi + 2\pi k = \varphi_{2k+1,\zeta},\ \zeta \in v_{2k+1},$$

где $\theta_{k,\zeta}$ — единственный элемент $\operatorname{Arg}\zeta$, лежащий на полуинтервале $u_k := (-\pi, \pi] + \pi k$. Следовательно,

$$T_{2k}(\zeta) = \arg\zeta + 2\pi k,\ \zeta \in v_{2k},$$

$$T_{2k+1}(\zeta) = \arg_\pi \zeta + 2\pi k,\ \zeta \in v_{2k+1}.$$

Получим единообразное представление T_k для произвольного целого k. Так как $\arg\left(\zeta e^{-\pi k i}\right) + \pi k \in \operatorname{Arg}\left(\zeta e^{-\pi k i}\right) + \operatorname{Arg} e^{\pi k i} = \operatorname{Arg}\zeta$ и при этом $\arg\left(\zeta e^{-\pi k i}\right) + \pi k \in (-\pi, \pi] + \pi k$, то $\varphi_{k,\zeta} = \arg\left(\zeta e^{-\pi k i}\right) + \pi k$. Значит,

$$T_k(\zeta) = \arg\left(\zeta e^{-\pi k i}\right) + \pi k = \arg\left(\zeta \cos\pi k\right) + \pi k =$$

$$= \begin{cases} \arg\zeta + \pi k, & \text{если} \quad k \text{ — четное,} \\ \arg(-\zeta) + \pi k, & \text{если} \quad k \text{ — нечетное,} \end{cases}$$

для любого $\zeta \in v_k$.

Естественно считать, что каждая функция $T_k \in \mathcal{T}$ является отображением из отдельной копии s_k единичной окружности в пространство $\mathbf{R}$. Дуги v_k являются листами кратного пространства $s_{\mathbf{Z}}$. Фактор пространство $s_{\mathcal{T}}$ непрерывного представления $\mathcal{T}$ можно получить склейкой листов v_k, $k \in \mathbf{Z}$ по точкам, в которых непрерывные ветви T_k принимают одинаковые значения. Замечаем, что для любого $\zeta \in s$ имеет место соотношение

$$\arg(-\zeta) = \begin{cases} \arg\zeta - \pi, & \text{если} \quad \operatorname{Im}\zeta \geqslant 0, \\ \arg\zeta + \pi, & \text{если} \quad \operatorname{Im}\zeta < 0. \end{cases}$$

Значит, непрерывная ветвь T_{2k-1} склеивает листы v_{2k-2} и v_{2k}, то есть

$$T_{2k-1}(\zeta) = \begin{cases} T_{2k-1}(\zeta), & \text{если} \quad \operatorname{Im}\zeta \geqslant 0, \\ T_{2k}(\zeta), & \text{если} \quad \operatorname{Im}\zeta < 0. \end{cases}$$

Следовательно, при переходе от кратного пространства $s_{\mathbf{Z}}$ к фактор-пространству $s_{\mathcal{T}}$ все листы пространства $s_{\mathbf{Z}}$ склеиваются в один лист.

[3] Интеграл $\frac{1}{i}\int_1^\zeta \frac{dz}{z}$ представляет продолжение аргумента $\zeta \to \arg v_k(\zeta)$ по кривой v_k как функцию точки $\zeta \in v_k$, а не как функцию $\varphi \to \arg v_k(\varphi)$ параметра φ.

Геометрическую интерпретацию фактор-пространства $s_{\mathcal{T}}$ можно построить следующим образом. Для всякого $k \in \mathbf{Z}$ выберем отдельный экземпляр окружности s и удалим из каждого точку $\zeta = -1$. Получим линейно упорядоченное семейство $\{d_k := v_{2k} : k \in \mathbf{Z}\}$ окружностей с разрезами. Совместим эти кривые пространственно и затем склеим (отождествим) конец кривой d_k с началом кривой d_{k+1}, а начало кривой d_k с концом кривой d_{k-1}. Проделаем эту операцию с каждой кривой семейства $\{d_k : k \in \mathbf{Z}\}$ и мыслим всю процедуру законченой. В результате мы получили окружность s, наделенную внутренней структурой. Каждая точка окружности приобрела бесконечную кратность. Листы кратного пространства $s_{\mathbf{Z}}$ удобно интерпретировать как витки спирали. Это означает, что фактор-пространство $s_{\mathcal{T}}$ можно представлять себе как бесконечную спираль, все витки которой пространственно совмещены и имеют единичный радиус.

Тригонометрическое расслоение T можно рассматривать как однозначное отображение спирали $s_{\mathcal{T}}$ на прямую $\mathbf{R}$. При этом оно является биективным и взаимно непрерывным. Это означает, что тригонометрическое расслоение является гомеоморфизмом спирали $s_{\mathcal{T}}$ и прямой $\mathbf{R}$.

Параметрическое представление $\mathbf{R} \to s_{\mathcal{T}}$ построенной кривой (спирали) имеет следующий вид

$$(\zeta)_k = e^{i\varphi}, \ \varphi \in \mathbf{R},$$

где номер $k = k(\varphi)$ листа (витка спирали) находится из условия $-\pi + 2\pi k < \varphi \leqslant \pi + 2\pi k$ с помощью формулы $k = -\left[\frac{\pi - \varphi}{2\pi}\right]$, где $[x]$ — это целая часть действительного числа x. Обратное отображение $s_{\mathcal{T}} \to \mathbf{R}$ имеет вид

$$\varphi = \arg(\zeta)_k, \ (\zeta)_k \in s_{\mathcal{F}},$$

где $\arg(\zeta)_k := \arg\zeta + 2\pi k$.

1.6 Полярное расслоение

Пусть $\mathbf{R}_+$ — множество положительных действительных чисел, $\mathbf{R}_+^2$ — декартово произведение $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}^2$. Рассмотрим однозначное отображение $p : \mathbf{R}_+^2 \to \dot{\mathbf{C}}$, которое точке $(\rho, \theta) \in \mathbf{R}_+^2$ ставит в соответствие точку $\rho t(\varphi) = \rho e^{i\varphi} \in \mathbf{C}$. Обратное отображение $P : \mathbf{C} \to \mathbf{R}_+^2$ является расслоением над пространством $\mathbf{C}$ и называется *полярным расслоением.* В роли тотального пространства выступает пространство $\mathbf{R}_+^2$, а в роли оператора проектирования само отображение p. Базой полярного расслоения является плоскость с выколотой точкой $\dot{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Из определения аргумента комплексного числа вытекает, что для любого $z \in \dot{\mathbf{C}}$

$$P(z) = (|z|, \operatorname{Arg} z) := \{(r, \varphi) : r := |z|, \ \varphi \in \operatorname{Arg} z\}.$$

Так как слои полярного расслоения дискретны, то это расслоение является накрытием.

Сужение полярного расслоения на окружность s совпадает с тригонометрическим расслоением. Тригонометрическое расслоение не является тривиальным, значит и полярное расслоение тоже не является тривиальным.

С другой стороны, обозначим символом U полуполосу $\mathbf{R}_+ \times u = \{(r, \varphi) : r > 0, -\pi < \varphi < \pi\} \subseteq \mathbf{R}_+^2$, символом l — луч $\{re^{-i\pi} : r \geqslant 0\}$, а символом $V := p(U) = \mathbf{R}_+ v$ — плоскость с разрезом $\mathbf{C} \setminus l$ вдоль луча l. Сужение полярного расслоения на область V является тривиальным расслоением. В роли тотального пространства выступает объединение $\mathbf{U}$ полуполос $U + (0, 2\pi k) = \mathbf{R}_+ \times u_{2k}$, $k \in \mathbf{Z}$. Так как эти полуполосы попарно не пересекаются, то это пространство гомеоморфно кратному пространству $(U)_{\mathbf{Z}} := U \times \mathbf{Z}$. Роль послойного гомеоморфизма h выполняет отображение, которое точке $(r, \varphi) \in U + (0, 2\pi k)$ ставит в соответствие точку $(r, \varphi - 2\pi k)_k := ((r, \varphi - 2\pi k), k)$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{U} \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & (U)_{\mathbf{Z}} \arrow[dl, "p_E"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

Пусть $U_k := U + (0, \pi k) = \mathbf{R}_+ \times u_k$, $V_k := p(U_k) = \mathbf{R}_+ v_k$ для любого целого k. Сужение полярного расслоения на область $V_1 = p(U_1)$ тоже является тривиальным расслоением. Так как

$V_0 \cup V_1 = \dot{\mathbf{C}}$, то области V_0 и V_1 образуют атлас полярного расслоения. Это означает, что полярное расслоение является локально тривиальным.

Выберем в качестве непрерывного представления полярного расслоения P семейство $\mathcal{P} := \{P_k : k \in \mathbf{Z}\}$, где векторная функция P_k определена на области V_k по правилу:

$$P_k(z) := \left(|z|, T_k\left(\tfrac{z}{|z|}\right)\right), \; T_k \in \mathcal{T}.$$

По свойствам тригонометрического расслоения T функция P_k осуществляет взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение области V_k на полуполосу U_k. Естественно считать, что каждая функция $P_k \in \mathcal{P}$ является отображением из отдельной копии $\dot{\mathbf{C}}$ плоскости с выколотой точкой в пространство $\mathbf{R}^2_+$. Области V_k являются листами кратного пространства $\dot{\mathbf{C}}_{\mathbf{Z}}$. Фактор пространство $\dot{\mathbf{C}}_{\mathcal{P}}$ непрерывного представления $\mathcal{P}$ можно получить склейкой листов V_k, $k \in \mathbf{Z}$ по точкам, в которых непрерывные ветви $P_k \in \mathcal{P}$ принимают одинаковые значения. По свойствам функций T_k, $k \in \mathbf{Z}$, непрерывная ветвь P_{2k-1} склеивает листы V_{2k-2} и V_{2k}. Следовательно, при переходе от кратного пространства $\dot{\mathbf{C}}_{\mathbf{Z}}$ к фактор-пространству $\dot{\mathbf{C}}_{\mathcal{P}}$ все листы пространства $\dot{\mathbf{C}}_{\mathbf{Z}}$ склеиваются в один лист. Полярное расслоение P можно рассматривать как однозначное отображение фактор-пространства $\dot{\mathbf{C}}_{\mathcal{P}}$ на полуплоскость $\mathbf{R}^2_+$. При этом оно является биективным (инъективным, сюръективным, взаимно однозначным) и взаимно непрерывным. Это означает, что полярное расслоение является гомеоморфизмом фактор-пространства $\dot{\mathbf{C}}_{\mathcal{P}}$ на полуплоскость $\mathbf{R}^2_+$.

Геометрическую интерпретацию фактор-пространства $\dot{\mathbf{C}}_{\mathcal{P}}$ можно построить следующим образом. Для любого $k \in \mathbf{Z}$ выберем отдельный экземпляр комплексной плоскости и удалим из каждого точки луча l. Получим линейно упорядоченное семейство плоскостей с разрезами $\{D_k := V_{2k} : k \in \mathbf{Z}\}$. Совместим эти области пространственно и затем склеим (отождествим) левый край разреза области D_k с правым краем разреза области D_{k+1} (находимся на луче l и видим начало). Проделаем эту операцию с каждой из областей семейства $\{D_k : k \in \mathbf{Z}\}$ и мыслим всю процедуру законченой. В результате мы получили плоскость, наделенную внутренней (винтовой, ветвлящейся) структурой. Каждая точка плоскости $z \neq 0$ приобрела бесконечную кратность. Точка $z = 0$ является особой. Ее называют *точкой ветвления* (бесконечного порядка).

Построенная поверхность называется *римановой поверхностью* полярного расслоения. Важно заметить, что представление о римановой поверхности полярного расслоения, сформированное на основе этого рисунка, остается далеким от истинного. Достаточно сообразить, что все листы этой поверхности совершенно равноправны. Лист D_{k+1} не лежит выше листа D_k, а лист D_{k-1} не лежит ниже листа D_k.

Параметрическое представление $\mathbf{R}^2_+ \to \dot{\mathbf{C}}_{\mathcal{P}}$ римановой поверхности полярного расслоения имеет следующий вид

$$(z)_k = re^{i\varphi}, \; (r, \varphi) \in \mathbf{R}^2_+,$$

где номер $k = k(\varphi)$ листа римановой поверхности не зависит от r и находится из условия $-\pi + 2\pi k < \varphi \leqslant \pi + 2\pi k$ по правилу $k = -\left[\frac{\pi - \varphi}{2\pi}\right]$. Обратное отображение $\dot{\mathbf{C}}_{\mathcal{P}} \to \mathbf{R}^2_+$ имеет вид

$$(r, \varphi) = (|z|, \arg(z)_k), \; (z)_k \in \dot{\mathbf{C}}_{\mathcal{P}},$$

где $\arg(z)_k := \arg z + 2\pi k$.

2 Элементарные многозначные функции комплексной переменной

2.1 Линейная многозначная функция

Пусть $h := (h_1, ..., h_k)$ — фиксированный набор комплексных чисел. Символом $\langle h, \mathbf{Z}^k \rangle$ обозначим дискретное множество

$$\left\{\langle h, m\rangle := h_1 m_1 + \ldots + h_k m_k : m := (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbf{Z}^k\right\}$$

точек в комплексной плоскости. Легко увидеть, что это множество удовлетворяет условию $\langle h, \mathbf{Z}^k\rangle + \langle h, \mathbf{Z}^k\rangle = \langle h, \mathbf{Z}^k\rangle - \langle h, \mathbf{Z}^k\rangle = \langle h, \mathbf{Z}^k\rangle$.

Линейной многозначной функцией действительной переменной (с комплексными коэффициентом a и шагом h) называется непрерывная многозначная функция $F : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, определчнная на множестве всех действительных чисел и удовлетворяющая аксиомам:

1) $F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$;
2) $F(x_1 - x_2) = F(x_1) - F(x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$;
3) $F(1) = a + \langle h, \mathbf{Z}^k\rangle$.

Легко проверить, что многозначная функция

$$x \to ax + h\mathbf{Z}^k$$

удовлетворяет условиям 1)–3). Далее убедимся, что не существует двух различных непрерывных многозначных функций, определчнных на множестве всех действительных чисел и удовлетворяющих условиям 1)–3).

Из равенства $F(0) = F(1) - F(1)$ вытекает, что $F(0) = \langle h, \mathbf{Z}^k\rangle$. Из равенства $F(x) - F(x) = F(0)$ вытекает, что $F(x) = f(x) + \langle h, \mathbf{Z}^k\rangle$, где f — произвольная однозначная ветвь функции F, определенная всюду на $\mathbf{R}$. Считаем, что $f(1) = a$. Из равенств $F(-x) = F(0) - F(x) = -F(x)$ вытекает, что функцию f мы вправе считать нечетной. Более того, из очевидного равенства $F(n) = nf(1) + \langle h, \mathbf{Z}^k\rangle = na + \langle h, \mathbf{Z}^k\rangle$ вытекает правомочность определения $f(n) := na$ для любого натурального n. В то же время $F(m) = F(n\frac{m}{n}) = nf(\frac{m}{n}) + \langle h, \mathbf{Z}^k\rangle$. Это позволяет считать, что $f(\frac{m}{n}) := \frac{1}{n}f(m) = \frac{m}{n}a$ для любых натуральных m и n. В силу нечетности функции f имеем $f(r) := ar$ для любого рационального r. Это означает, что $F(r) = ar + \langle h, \mathbf{Z}^k\rangle$ для любого рационального r. В силу непрерывности многозначной функции F имеем

$$F(x) = ax + \langle h, \mathbf{Z}^k\rangle$$

для любого вещественного x. Действительно пусть $x \in \mathbf{R}$, $y \in F(x)$, f_x — произвольная непрерывная ветвь функции F, которая принимает значение y в самой точке x. Тогда для любой последовательности рациональных чисел $r_n \to x$ имеем $f_x(r_n) = ar_n + h_1 m_{1,n} + \ldots + h_k m_{k,n} \to y$. Значит, $y = ax + h_1 m_1 + \ldots + h_k m_k \in ax + \langle h, \mathbf{Z}^k\rangle$, где $m_j := \lim m_{j,n} \in \mathbf{Z}$. Следовательно, $F(x) = y + \langle h, \mathbf{Z}^k\rangle = ax + \langle h, \mathbf{Z}^k\rangle$.

Линейной многозначной функцией комплексной переменной (с коэффициентом $a \in \mathbf{C}$ и шагом $h \in \mathbf{C}^k$) называется непрерывная многозначная функция $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, определчнная на множестве всех комплексных чисел и удовлетворяющая аксиомам:

1)′ $F(z_1 + z_2) = F(z_1) + F(z_2)$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$;
2)′ $F(z_1 - z_2) = F(z_1) - F(z_2)$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$;
3)′ $F(1) = a + \langle h, \mathbf{Z}^k\rangle$, $F(i) = ia + \langle h, \mathbf{Z}^k\rangle$.

Легко проверить, что многозначная функция

$$z \to az + \langle h, \mathbf{Z}^k\rangle$$

удовлетворяет условиям 1)′–3)′. Далее убедимся, что не существует двух различных непрерывных многозначных функций, определчнных на множестве всех комплексных чисел и удовлетворяющих условиям 1)′–3)′.

Действительно, пусть F удовлетворяет указанным аксиомам, $z \in \mathbf{C}$ и $x := \operatorname{Re} z$, $y := \operatorname{Im} z$. Тогда $F(z) = F(x) + F(iy) = F_1(x) + F_2(y)$, где F_1 — многозначная функция $\mathbf{R} \to \mathbf{C} | x \to F(x)$, а F_2 — многозначная функция $\mathbf{R} \to \mathbf{C} | y \to F(iy)$. Многозначные функции F_1, F_2 являются непрерывными многозначными функциями вещественной переменной. Они определены всюду на $\mathbf{R}$ и удовлетворяют аксиомам 1)–2). При этом $F_1(1) = a + \langle h, \mathbf{Z}^k\rangle$, $F_2(1) = ia + \langle h, \mathbf{Z}^k\rangle$. Из определения линейной многозначной функции вещественной переменной вытекает, что $F_1(x) = ax + \langle h, \mathbf{Z}^k\rangle$, $F_2(y) = iay + \langle h, \mathbf{Z}^k\rangle$. Значит, $F(z) = az + \langle h, \mathbf{Z}^k\rangle$.

Естественным непрерывным представлением линейной многозначной функции комплексной переменной является множество $\{f_m : m \in \mathbf{Z}^k\}$, где

$$f_m(z) := az + \langle h, m\rangle.$$

Все однозначные ветви $f_{m,n}$ определены на $\mathbf{C}$ и являются аналитическими (целыми) функциями. Это означает, что линейная многозначная функция комплексной переменной является аналитической (целой).

2.2 Аксиоматическое определение аргумента

Аксиоматическое определение многозначной линейной функции позволяет осуществить аксиоматический подход к определению аргумента комплексного числа $z \to \operatorname{Arg} z$, основанное на использовании его характеристических свойств:

$$\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \ \operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$$

для любых $z_1, z_2 \in \dot{\mathbf{C}}$. Точнее, *аргументом комплексного числа* называется непрерывная многозначная функция $F : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$, определчнная на множестве $\dot{\mathbf{C}}$ всех отличных от нуля комплексных чисел и удовлетворяющая аксиомам:

1) $F(z_1 z_2) = F(z_1) + F(z_2)$ для любых $z_1, z_2 \in \dot{\mathbf{C}}$;
2) $F\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = F(z_1) - F(z_2)$ для любых $z_1, z_2 \in \dot{\mathbf{C}}$;
3) $F(e) = 2\pi\mathbf{Z}$, $F(e^i) = 1 + 2\pi\mathbf{Z}$.

Убедимся, что не существует двух различных непрерывных многозначных функций, определчнных на множестве $\dot{\mathbf{C}}$ и удовлетворяющих условиям 1)–3). Предположим, что непрерывная многозначная функция F определена на $\dot{\mathbf{C}}$ и удовлетворяет аксиомам 1)–3). Пусть $F_1(x) := F(e^x)$, $F_2(x) := F(e^{ix})$ для любого вещественного x. Многозначные функции F_1, F_2 определены на $\mathbf{R}$ и непрерывны. Они удовлетворяют аксиомам линейной многозначной функции вещественной переменной. При этом $F_1(1) = F(e) = 2\pi\mathbf{Z}$, $F_2(1) = F(e^i) = 1 + 2\pi\mathbf{Z}$. Значит, $F_1(x) = 2\pi\mathbf{Z}$, $F_2(x) = x + 2\pi\mathbf{Z}$. Так как

$$z = |z| \tfrac{z}{|z|} = e^{\ln|z|}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = e^{\ln|z|} e^{i\varphi},$$

где φ — произвольное решение системы уравнений

$$\cos\varphi = \tfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \ \sin\varphi = \tfrac{\operatorname{Im} z}{|z|}, \tag{1}$$

то $F(z) = F_1(\ln|z|) + F_2(\varphi)$. Это означает, что

$$\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi\mathbf{Z},$$

то есть $\operatorname{Arg} z$ совпадает с множеством решений системы уравнений (1) (что согласуется с данным ранее определением).

Сужение аргумента на окружность s является расслоением над s, так как это сужение совпадает с тригонометрическим расслоением. Сам аргумент не является расслоением над $\dot{\mathbf{C}}$ так как значения аргумента в различных точках плоскости могут совпадать.

По определению полярного расслоения $P : \dot{\mathbf{C}} \to \mathbf{R}^2_+$

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Pr}_2 P(z),$$

где Pr_2 — оператор проектирования $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ на вторую компоненту. Это означает, что аргумент комплексного числа можно рассматривать как непрерывную однозначную функцию, определенную на римановой поверхности полярного расслоения $\dot{\mathbf{C}}_{\mathcal{P}}$. При этом точке $(z)_k \in D_k$ соответствует действительное число $\arg(z)_k = \arg z + 2\pi k = T_{2k}\left(\frac{z}{|z|}\right)$. В разных точках слоя $(z)_{\mathcal{P}}$ эта функция принимает разные значения. Следовательно, фактор-пространство непрерывного представления аргумента

$$\left\{T_k\left(\frac{z}{|z|}\right) : T_k \in \mathcal{T}\right\}$$

(*риманова поверхность аргумента*) совпадает с римановой поверхностью полярного расслоения.

Рассмотрим более общий пример непрерывного представления аргумента. Пусть $k \in \mathbf{Z}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$ и $z \in \dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta$, где l_θ — луч $\{z \in \dot{\mathbf{C}} : \arg(-z) = \theta\}$. Для любого $z \in \dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta$ символом $(\operatorname{Arg} z)_{\theta,0}$ обозначим действительное число $\arg_\theta z$, а символом $(\operatorname{Arg} z)_{\theta,k}$ обозначим сумму $\arg_\theta z + 2\pi k$. Легко увидеть, что

$$T_{2k}\left(\frac{z}{|z|}\right) = (\operatorname{Arg} z)_{0,0} + 2\pi k, \; T_{2k+1}\left(\frac{z}{|z|}\right) = (\operatorname{Arg} z)_{\pi,0} + 2\pi k$$

для любого целого k. Значит, рассмотренное выше непрерывное представление аргумента может быть записано следующим образом

$$\left\{(\operatorname{Arg} z)_{\theta,k} : (\theta, k) \in \{0; \pi\} \times \mathbf{Z}\right\}. \tag{2}$$

Множество

$$\left\{(\operatorname{Arg} z)_{\theta,k} : (\theta, k) \in (-\pi, \pi] \times \mathbf{Z}\right\} \tag{3}$$

тоже является непрерывным представлением аргумента. Это следует из очевидного соотношения

$$(\operatorname{Arg} z)_{\theta,k} := \frac{1}{i}\int\limits_{1}^{\frac{z}{|z|}} \frac{d\zeta}{\zeta} + 2\pi k, \; z \in \dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta,$$

где интегрирование с переменным верхним пределом осуществляется по кривой, задаваемой уравнением $\lambda = e^{it}$, $t \in (\theta - \pi, \theta + \pi)$.

Упражнение 3. *Убедитесь, что фактор-пространство семейства непрерывных функций (2) совпадает с фактор-пространством семейства непрерывных функций (3).*

Отметим, что однозначная функция $z \to (\operatorname{Arg} z)_{0,0}$ является сужением функции $z \to \arg z$ на плоскость с разрезом $\dot{\mathbf{C}} \setminus l_0$ вдоль отрицательной части действительной оси. Функция $z \to \arg z$ называется *главной* ветвью аргумента, а функция $z \to (\operatorname{Arg} z)_{0,0}$ называется *главной непрерывной* ветвью аргумента. Главная ветвь аргумента не является непрерывной. Она испытывает скачок 2π при переходе через луч l_0 по часовой стрелке. Функция $z \to (\operatorname{Arg} z)_{\theta,0}$, в свою очередь, является сужением функции $z \to \arg_\theta z$ на плоскость с разрезом $\dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta$. Значит, для любого $z \in \dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta$

$$(\operatorname{Arg} z)_{\theta,k} = (\operatorname{Arg} z)_{\theta,0} + 2\pi k = \arg_\theta z + 2\pi k =$$

$$= \begin{cases} \arg z + 2\pi(k+1), & \text{если} \quad \arg z \leqslant \theta - \pi, \\ \arg z + 2\pi k, & \text{если} \quad \theta - \pi < \arg z \leqslant \theta + \pi, \\ \arg z + 2\pi(k-1), & \text{если} \quad \theta + \pi < \arg z. \end{cases}$$

2.3 Логарифмическая функция комплексной переменной

Логарифмическая функция комплексной переменной является многозначной функцией. Она относится к основным элементарным функциям комплексной переменной и поэтому тоже требует аксиоматического определения. Подобно аргументу эта функция определяется как непрерывная многозначная функция $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, определчнная на множестве $\dot{\mathbf{C}}$ всех отличных от нуля комплексных чисел и удовлетворяющая следующим условиям:

1) $F(z_1 z_2) = F(z_1) + F(z_2)$ для любых $z_1, z_2 \in \dot{\mathbf{C}}$;

2) $F\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = F(z_1) - F(z_2)$ для любых $z_1, z_2 \in \dot{\mathbf{C}}$;

3) $F(e) = 1 + 2\pi i\mathbf{Z}$, $F(e^i) = i + 2\pi i\mathbf{Z}$.

Убедимся, что не существует двух различных непрерывных многозначных функций, определчнных на $\dot{\mathbf{C}}$ и удовлетворяющих условиям 1)–3). Предположим, что непрерывная многозначная функция F определена на $\dot{\mathbf{C}}$ и удовлетворяет аксиомам 1)–3). Воспользуемся показательной формой записи комплексного числа. Тогда $F(re^{i\varphi}) = F(r) + F\left(e^{i\varphi}\right) = F_1(\ln r) + F_2(\varphi)$, где

$F_1(r) := F(\exp r)$, $F_2(\varphi) := F\left(e^{i\varphi}\right)$. Комплексные многозначные функции F_1 и F_2 определены на $\mathbf{R}$ являются непрерывными и удовлетворяют условиям: $F_1(r_1 + r_2) = F_1(r_1) + F_1(r_2)$ для любых $r_1, r_2 \in \mathbf{R}$ и $F_1(1) = 1 + 2\pi i\mathbf{Z}$; $F_2(\varphi_1 + \varphi_2) = F_2(\varphi_1) + F_2(\varphi_2)$ для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{R}$ и $F_2(1) = i + 2\pi i\mathbf{Z}$. По определению линейной многозначной функции действительной переменной $F_1(r) = r + 2\pi i\mathbf{Z}$ и $F_2(\varphi) = i\varphi + 2\pi i\mathbf{Z}$ для любых $r, \varphi \in \mathbf{R}$. Значит, $F(re^{i\varphi}) = F_1(\ln r) + F_2(\varphi) = \ln r + i\varphi + 2\pi i\mathbf{Z} = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$. Таким образом, условия 1)–3) определяют многозначную функцию F вполне однозначно.

Логарифмическую функцию комплексной переменной принято обозначать символом Ln. При этом образ точки $z \neq 0$ обозначается $\operatorname{Ln} z$ и называется *логарифмом* комплексного числа z. Согласно этим обозначениям

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$$

для любого $z \in \dot{\mathbf{C}}$. Непосредственно из определения логарифмической функции комплексной переменной вытекает, что

$$\operatorname{Ln} z_1 z_2 = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2,\ \operatorname{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$$

для любых $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$. При этом

$$\operatorname{Re}\operatorname{Ln} z = \ln|z|,\ \operatorname{Im}\operatorname{Ln} z = \operatorname{Arg} z,\ \overline{\operatorname{Ln} z} = \operatorname{Ln}\bar{z}.$$

Логарифмическая функция $z \to \operatorname{Ln} z$ является расслоением над $\dot{\mathbf{C}}$. Действительно, если $z_1, z_2 \in \dot{\mathbf{C}}$ и $z_1 \neq z_2$, то в силу свойства единственности тригонометрической формы записи комплексного числа либо $|z_1| \neq |z_2|$ и тогда $\ln|z_1| \neq \ln|z_2|$, либо $\operatorname{Arg} z_1 \cap \operatorname{Arg} z_2 = \varnothing$. В обоих случаях $\operatorname{Ln} z_1 \cap \operatorname{Ln} z_2 = \varnothing$. Это означает, что логарифмическая функция является обратной функцией к некоторой однозначной комплексной функции. Покажем, что этой функцией является экспоненциальная функция $w \to \exp w$. Действительно, пусть $\exp^{-1} z$ — прообраз точки $z \in \dot{\mathbf{C}}$ при отображении $w \to \exp w$. Выберем произвольный элемент $w \in \exp^{-1} z$. Тогда $z = \exp w$. При этом, с одной стороны, $z = |z|e^{i\varphi}$, где $\varphi \in \operatorname{Arg} z$. С другой стороны, $z = e^u e^{iv}$, где $u = \operatorname{Re} w$, $v = \operatorname{Im} w$. Из свойства единственности показательной формы записи комплексного числа вытекает, что $|z| = e^u$, $\frac{\varphi - v}{2\pi} \in \mathbf{Z}$. Следовательно, $u = \ln|z|$, $v \in \operatorname{Arg} z$, то есть $w = u + iv \in \operatorname{Ln} z$. Это означает, что $\exp^{-1} z \subseteq \operatorname{Ln} z$. В то же время, если $w \in \operatorname{Ln} z$, то $w = \ln|z| + i\varphi$, где $\varphi \in \operatorname{Arg} z$. Следовательно, $\exp w = |z|e^{i\varphi} = z$, а это означает, что $\operatorname{Ln} z \subseteq \exp^{-1} z$.

Таким образом, логарифмическая функция комплексной переменной может быть определена как обратная многозначная функция к экспоненциальной функции комплексного переменного. При этом для любых $z \in \dot{\mathbf{C}}$ и $w \in \mathbf{C}$ выполняются следующие теоретико-множественные равенства

$$\operatorname{Ln} z = \exp^{-1} z,\ \operatorname{Ln}^{-1} w = \exp w,$$

$$\exp(\operatorname{Ln} z) = z,\ \operatorname{Ln}(\exp w) = w + 2\pi i\mathbf{Z}.$$

По определению полярного расслоения для любого $z \in \dot{\mathbf{C}}$

$$\operatorname{Ln} z = \ln \operatorname{Pr}_1 P(z) + i\operatorname{Pr}_2 P(z),$$

где $\operatorname{Pr}_1, \operatorname{Pr}_2$ — операторы проектирования $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ на первую и вторую компоненту соответственно. Следовательно, логарифмическую функцию комплексной переменной можно рассматривать как непрерывную однозначную функцию, определенную на римановой поверхности полярного расслоения $\dot{\mathbf{C}}_{\mathcal{P}}$. При этом точке $(z)_k \in D_k$ соответствует комплексное число

$$\ln|z| + i\arg(z)_k = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k) = \ln|z| + i(\operatorname{Arg} z)_{0,k}.$$

В разных точках слоя $(z)_{\mathcal{P}}$ эта функция принимает разные значения. Следовательно, фактор-пространство непрерывного представления логарифмической функции

$$\left\{z \to \ln|z| + i(\operatorname{Arg} z)_{\theta,k} : (\theta, k) \in \{0; \pi\} \times \mathbf{Z}\right\}$$

(*риманова поверхность логарифмической функции*) совпадает с римановой поверхностью полярного расслоения. Однозначная функция

$$z \to (\operatorname{Ln} z)_{\theta,k} := \ln|z| + (\operatorname{Arg} z)_{\theta,k}\,;\ z \in \dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta,$$

где $(\theta, k) \in (-\pi, \pi] \times \mathbf{Z}$, тоже является непрерывной ветвью логарифмической функции. При этом совокупность

$$\left\{z \to (\operatorname{Ln} z)_{\theta,k} : (\theta, k) \in (-\pi, \pi] \times \mathbf{Z}\right\}$$

тоже является непрерывным представлением логарифмической функции. Легко увидеть, что фактор-пространства этих непрерывных представлений логарифмической функции совпадают.

Комплексное число $\ln|z| + i \arg z$ называется *главным значением* логарифма $\operatorname{Ln} z$ и обозначается $\ln z$. Однозначная функция

$$z \to \ln z := \ln|z| + i \arg z$$

называется *главной ветвью* логарифмической функции. Непрерывная функция

$$z \to (\operatorname{Ln} z)_{0,0} = \ln|z| + i\,(\operatorname{Arg} z)_{0,0}$$

является сужением главной ветви логарифмической функции на плоскость с разрезом $\dot{\mathbf{C}} \setminus l_0$ вдоль отрицательной части действительной оси и называется *главной непрерывной ветвью* логарифмической функции. Для других непрерывных ветвей логарифмической функции справедливы следующие очевидные представления:

$$(\operatorname{Ln} z)_{\theta,k} = (\operatorname{Ln} z)_{\theta,0} + 2\pi k i = \ln|z| + i \arg_\theta z + 2\pi k i =$$
$$= \begin{cases} \ln z + 2\pi\,(k+1)\,i, & \text{если} \quad \arg z \leqslant \theta - \pi, \\ \ln z + 2\pi k i, & \text{если} \quad \theta - \pi < \arg z \leqslant \theta + \pi, \\ \ln z + 2\pi\,(k-1)\,i, & \text{если} \quad \theta + \pi < \arg z, \end{cases}$$

для всех $z \in \dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta$. Важным является *интегральное представление* непрерывных ветвей логарифмической функции:

$$(\operatorname{Ln} z)_{\theta,k} : z \to \int\limits_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} + 2\pi k i,$$

где интегрирование осуществляется по любой спрямляемой кривой l с началом в точке 1 и концом в точке z, лежащей в плоскости с разрезом $z \in \dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta$ (если $\theta = \pi$, то нижний предел интегрирования понимается в несобственном смысле). Справедливость интегрального представления непрерывных ветвей логарифмической функции вытекает из следующих соотношений

$$\int\limits_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \int\limits_1^{\frac{z}{|z|}} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int\limits_{\frac{z}{|z|}}^z \frac{d\zeta}{\zeta} = i\,(\operatorname{Arg} z)_{\theta,0} + \ln|z|\,,$$

где интегирование от 1 до $\frac{z}{|z|}$ осуществляется по кривой задаваемой уравнением $\lambda(\varphi) = e^{i\varphi}$, $\varphi \in (\theta - \pi, \theta + \pi)$, а интегрирование от $\frac{z}{|z|}$ до z осуществляется по кривой $\lambda(r) = r\frac{z}{|z|}$, $r \in [0, +\infty)$.

Непрерывная ветвь $z \to (\operatorname{Ln} z)_{\theta,k}$ отображает плоскость с разрезом $D_\theta := \dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно на открытую полосу

$$G_{\theta,k} := \{w := u + iv : u \in \mathbf{R},\ v \in (\theta - \pi, \theta + \pi) + 2\pi k\}\,.$$

При этом функция $z \to w = (\operatorname{Ln} z)_{\theta,k}$ является обратной к сужению функции $w \to z = e^w$ на область $G_{\theta,k}$. По теореме о производной обратной функции

$$((\operatorname{Ln} z)_{\theta,k})' = \frac{1}{(e^w)'}\bigg|_{(\operatorname{Ln} z)_k} = \frac{1}{e^w}\bigg|_{(\operatorname{Ln} z)_k} = \frac{1}{z}.$$

Таким образом, непрерывная ветвь $z \to (\operatorname{Ln} z)_{\theta,k}$ является аналитической функцией, ее производная функция отлична от нуля в любой точке области D_θ. Отсюда вытекает, в частности, что отображение $D_\theta \to G_{\theta,k}$, осуществляемое этой функцией, является конформным.

2.4 Степенная функция комплексной переменной

Степенная функция комплексной переменной (с показателем $\alpha \in \dot{\mathbf{C}}$) является многозначной функцией и определяется как непрерывная многозначная функция $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, определчнная на множестве $\dot{\mathbf{C}}$ всех отличных от нуля комплексных чисел и удовлетворяющая следующим условиям:

1) $F(z_1 z_2) = F(z_1)F(z_2)$ для любых $z_1, z_2 \in \dot{\mathbf{C}}$;

2) $F\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{F(z_1)}{F(z_2)}$ для любых $z_1, z_2 \in \dot{\mathbf{C}}$;

3) $F(e) = e^{\alpha \operatorname{Ln} e}$, $F(e^i) = e^{\alpha \operatorname{Ln} e^i}$.

Убедимся, что не существует двух различных непрерывных многозначных функций, определчнных на $\dot{\mathbf{C}}$ и удовлетворяющих условиям 1)–3). Предположим, что непрерывная многозначная функция F определена на $\dot{\mathbf{C}}$ и удовлетворяет аксиомам 1)–3). Из аксиомы 2) вытекает, что $F(z) \neq 0$, то есть $F(z) \subseteq \dot{\mathbf{C}}$ для любого $z \in \dot{\mathbf{C}}$. Пусть $z = re^{i\varphi}$. Тогда $\frac{1}{\alpha} \operatorname{Ln} F(z) = F_1(\ln r) + F_2(\varphi)$, где $F_1(r) := \frac{1}{\alpha} \operatorname{Ln} F(e^r)$, $F_2(\varphi) := \frac{1}{\alpha} \operatorname{Ln} F(e^{i\varphi})$. При этом комплексные многозначные функции F_1 и F_2 определены на $\mathbf{R}$, являются непрерывными и удовлетворяют условиям: $F_1(r_1 + r_2) = F_1(r_1) + F_1(r_2)$ для любых $r_1, r_2 \in \mathbf{R}$ и $F_1(1) = 1 + 2\pi i\mathbf{Z} + \frac{1}{\alpha} 2\pi i\mathbf{Z}$; $F_2(\varphi_1 + \varphi_2) = F_2(\varphi_1) + F_2(\varphi_2)$ для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{R}$ и $F_2(1) = i + 2\pi i\mathbf{Z} + \frac{1}{\alpha} 2\pi i\mathbf{Z}$. По определению линейной многозначной функции действительной переменной $F_1(r) = r + 2\pi i\mathbf{Z} + \frac{1}{\alpha} 2\pi i\mathbf{Z}$ и $F_2(\varphi) = i\varphi + 2\pi i\mathbf{Z} + \frac{1}{\alpha} 2\pi i\mathbf{Z}$ для любых $r, \varphi \in \mathbf{R}$. Значит, $\frac{1}{\alpha} \operatorname{Ln} F(re^{i\varphi}) = F_1(\ln r) + F_2(\varphi) = \ln r + i\varphi + 2\pi i\mathbf{Z} + \frac{1}{\alpha} 2\pi i\mathbf{Z} = \operatorname{Ln} z + \frac{1}{\alpha} 2\pi i\mathbf{Z}$. Следовательно, $\operatorname{Ln} F(z) = \alpha \operatorname{Ln} z + 2\pi i\mathbf{Z}$. Логарифмическая функция комплексной переменной является обратной многозначной функцией к экспоненциальной функции комплексной переменной, значит, $F(z) = \exp(\alpha \operatorname{Ln} z + 2\pi i\mathbf{Z}) = \exp(\alpha \operatorname{Ln} z)$ для любого $z \in \dot{\mathbf{C}}$. Таким образом, условия 1)–3) определяют многозначную функцию F вполне однозначно.

Образ точки $z \neq 0$ при отображении степенной функцией принято обозначать $\operatorname{Deg}^\alpha z$ и называть *степенью* комплексного числа z с комплексным показателем $\alpha \neq 0$. Согласно этим обозначениям

$$\operatorname{Deg}^\alpha(z_1 z_2) = \operatorname{Deg}^\alpha z_1 \operatorname{Deg}^\alpha z_2, \ \operatorname{Deg}^\alpha \frac{z_1}{z_2} = \frac{\operatorname{Deg}^\alpha z_1}{\operatorname{Deg}^\alpha z_2}$$

для любых $z_1, z_2 \in \dot{\mathbf{C}}$. При этом для любого $z \in \dot{\mathbf{C}}$

$$\operatorname{Deg}^\alpha z := \exp(\alpha \operatorname{Ln} z) = \exp(\alpha \ln|z| + i\alpha \operatorname{Arg} z),$$

$$|\operatorname{Deg}^\alpha z| = e^{a \ln|z| - b \operatorname{Arg} z}, \ \operatorname{Arg} \operatorname{Deg}^\alpha z = b \ln|z| + a \operatorname{Arg} z + 2\pi\mathbf{Z},$$

$$\operatorname{Deg}^a z = e^{a \ln|z| + ia \operatorname{Arg} z}, \ \operatorname{Deg}^{ib} z = e^{ib \ln|z| - b \operatorname{Arg} z},$$

где $a := \operatorname{Re}\alpha$, $b := \operatorname{Im}\alpha$.

Замечаем, что $\operatorname{Deg}^a z \operatorname{Deg}^{ib} z = e^{a \ln|z| + ia \operatorname{Arg} z} e^{ib \ln|z| - b \operatorname{Arg} z} = e^{\alpha \ln|z| + i(a \operatorname{Arg} z + ib \operatorname{Arg} z)} \neq \operatorname{Deg}^\alpha z$, так как $a \operatorname{Arg} z + ib \operatorname{Arg} z \not\subseteq \alpha \operatorname{Arg} z + 2\pi\mathbf{Z}$, если $ab \neq 0$. Это означает, что привычное для степенной функции действительной переменной правило $z^{\alpha+\beta} = z^\alpha z^\beta$ не выполняется для степенной функции комплексной переменной.

Если $b := \operatorname{Im}\alpha \neq 0$, то степенная функция комплексной переменной $z \to \operatorname{Deg}_\alpha z$ не является расслоением над $\dot{\mathbf{C}}$, так как образы различных точек из $\dot{\mathbf{C}}$ могут совпадать. Действительно, если $z_1 := |z_1| e^{i\varphi}$ и $z_2 := |z_1| \exp\left(\frac{2\pi b}{\alpha\bar{\alpha}}\right) \exp i\left(\varphi + \frac{2\pi a}{\alpha\bar{\alpha}}\right)$, то $\operatorname{Deg}^\alpha z_2 = \exp(\alpha \ln|z_2| + i\alpha \operatorname{Arg} z_2) = \exp\left(\alpha \ln|z_1| + \frac{2\pi b}{\bar{\alpha}} + i\alpha \operatorname{Arg} z_1 + i\frac{2\pi a}{\bar{\alpha}}\right) = \operatorname{Deg}^\alpha z_1$. При этом $\frac{z_2}{z_1} = \exp\frac{2\pi i}{\alpha} \neq 1$. Это означает, что степенная функция с комплексным показателем $\alpha \in \dot{\mathbf{C}}$, если $\operatorname{Im}\alpha \neq 0$, не является обратной к однозначной функции. Тот же вывод справедлив, если $\operatorname{Im}\alpha = 0$, но $\frac{1}{\alpha} \notin \mathbf{Z}$. Действительно, в этом случае для $z_1 := |z_1| e^{i\varphi}$ и $z_2 := |z_1| \exp i\left(\varphi + \frac{2\pi}{\alpha}\right)$ имеем $\operatorname{Deg}^\alpha z_2 = \exp(\alpha \ln|z_2| + i\alpha \operatorname{Arg} z_2) = \exp(\alpha \ln|z_1| + i\alpha \operatorname{Arg} z_1 + 2\pi i) = \operatorname{Deg}^\alpha z_1$, но опять $\frac{z_2}{z_1} = \exp\frac{2\pi i}{\alpha} \neq 1$.

Упражнение 4. *Показать, что степенная функция комплексной переменной $z \to \operatorname{Deg}^\alpha z$ с комплексным показателем $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \{0; 1\}$ при условии, что $\frac{1}{\alpha} \in \mathbf{Z}$ является расслоением над $\dot{\mathbf{C}}$ и обратная функция совпадает с однозначной функцией $z \to |z|^{\frac{1}{\alpha}} \exp\left(i\frac{\arg z}{\alpha}\right)$.*

По определению полярного расслоения для любого $z \in \dot{\mathbf{C}}$

$$\operatorname{Deg}^{\alpha} z = \exp\left(\alpha \ln \operatorname{Pr}_1 P(z) + i\alpha \operatorname{Pr}_2 P(z)\right)$$

где $\operatorname{Pr}_1, \operatorname{Pr}_2$ — операторы проектирования $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ на первую и вторую компоненту соответственно. Следовательно, степенную функцию комплексной переменной с комплексным показателем α можно рассматривать как непрерывную однозначную функцию, определенную на римановой поверхности полярного расслоения $\dot{\mathbf{C}}_{\mathcal{P}}$. При этом точке $(z)_k \in D_k$ соответствует комплексное число

$$\exp\left(\alpha \ln|z| + i\alpha \arg{(z)_k}\right) = \exp\left(\alpha \ln|z| + i\alpha\left(\arg z + 2\pi k\right)\right) =$$
$$= \exp\Big(\alpha \ln|z| + i\alpha\left(\operatorname{Arg} z\right)_{0,k}\Big).$$

При $\alpha \in \mathbf{C}\setminus\mathbf{Q}$ в разных точках слоя $(z)_{\mathcal{P}}$ эта функция принимает разные значения. Следовательно, риманова поверхность степенной функции комплексной переменной в этом случае совпадает с римановой поверхностью полярного расслоения. При $\alpha \in \mathbf{Q}$ в разных точках слоя $(z)_{\mathcal{P}}$ эта функция может принимать одинаковые значения. Например, при $\alpha \in \mathbf{Z}$ все ее значения в точках слоя $(z)_{\mathcal{P}}$ совпадают с $\exp\left(\alpha \ln|z| + i\alpha \arg z\right) = \exp\left(\alpha \ln z\right)$. Следовательно, риманова поверхность степенной функции комплексной переменной в общем случае не совпадает с римановой поверхностью полярного расслоения.

Пусть $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Q}$. Однозначная функция

$$z \to \left(\operatorname{Deg}^{\alpha} z\right)_{\theta,k} := \exp\Big(\alpha \ln|z| + i\alpha\left(\operatorname{Arg} z\right)_{\theta,k}\Big), \quad z \in \dot{\mathbf{C}} \setminus l_{\theta},$$

где $(\theta, k) \in (-\pi, \pi] \times \mathbf{Z}$, является непрерывной ветвью степенной функции. При этом совокупность

$$\Big\{z \to \left(\operatorname{Deg}^{\alpha} z\right)_{\theta,k} : (\theta, k) \in (-\pi, \pi] \times \mathbf{Z}\Big\} \tag{4}$$

является непрерывным представлением степенной функции.

Комплексное число $\exp\left(\alpha \ln|z| + i\alpha \arg z\right)$ называется *главным значением* степени $\operatorname{Deg}^{\alpha} z$ и обозначается $\deg^{\alpha} z$. Однозначная функция

$$z \to \deg^{\alpha} z := \exp\left(\alpha \ln|z| + i\alpha \arg z\right) = \exp\left(\alpha \ln z\right)$$

называется *главной ветвью* степенной функции. Непрерывная функция

$$z \to \left(\operatorname{Deg}^{\alpha} z\right)_{0,0} = \exp\Big(\alpha \ln|z| + i\alpha\left(\operatorname{Arg} z\right)_{0,0}\Big)$$

является сужением главной ветви степенной функции на плоскость с разрезом $\dot{\mathbf{C}} \setminus l_0$ вдоль отрицательной части действительной оси и называется *главной непрерывной ветвью* степенной функции. Для других непрерывных ветвей степенной функции справедливы следующие очевидные представления:

$$\left(\operatorname{Deg}^{\alpha} z\right)_{\theta,k} = \left(\operatorname{Deg}^{\alpha} z\right)_{\theta,0} \exp\left(2\pi k\alpha i\right) =$$
$$= \begin{cases} \deg^{\alpha} z \times \exp\left(2\pi\left(k+1\right)\alpha i\right), & \text{если} \quad \arg z \leqslant \theta - \pi, \\ \deg^{\alpha} z \times \exp\left(2\pi k\alpha i\right), & \text{если} \quad \theta - \pi < \arg z \leqslant \theta + \pi, \\ \deg^{\alpha} z \times \exp\left(2\pi\left(k-1\right)\alpha i\right), & \text{если} \quad \theta + \pi < \arg z, \end{cases}$$

для всех $z \in \dot{\mathbf{C}}\setminus l_{\theta}$. Отсюда и из очевидных соотношений $\left(e^{\alpha \ln z}\right)' = \frac{\alpha}{z} e^{\alpha \ln z} = \alpha e^{(\alpha-1)\ln z}$ вытекает, что непрерывная ветвь $z \to \left(\operatorname{Deg}^{\alpha} z\right)_{\theta,k}$ является аналитической функцией и

$$\left(\left(\operatorname{Deg}^{\alpha} z\right)_{\theta,k}\right)' = \begin{cases} \alpha\left(\operatorname{Deg}^{\alpha-1} z\right)_{\theta,k}, & \text{если} \quad \alpha \in \mathbf{C} \setminus \{0; 1\}, \\ \alpha z, & \text{если} \quad \alpha = 2, \end{cases}$$

для любого $z \in \dot{\mathbf{C}} \setminus l_{\theta}$.

Пусть $\alpha \in \mathbf{Q}$. В этом случае $\alpha = \frac{m}{n} \neq 0$, где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$ и НОД$(m,n) = 1$. Значение степенной функции в точке $z \in \dot{\mathbf{C}}$ в рассматриваемом случае принято обозначать $z^{\frac{m}{n}}$. Как уже говорилось, функцию $z \to z^{\frac{m}{n}}$ можно рассматривать как непрерывную однозначную функцию, определенную на римановой поверхности полярного расслоения. Точке $(z)_k \in D_k$ она ставит в соответствие комплексное число

$$\exp\left(\tfrac{m}{n}\ln|z| + i\tfrac{m}{n}\arg(z)_k\right) = \exp\left(\tfrac{m}{n}\ln|z| + i\tfrac{m}{n}(\arg z + 2\pi k)\right) =$$

$$= |z|^{\frac{m}{n}}\exp\left(i\tfrac{m}{n}(\arg z + 2\pi k)\right) =: \left(z^{\frac{m}{n}}\right)_{0,k}.$$

Из свойства единственности тригонометрической формы записи комплексного числа вытекает, что функция $z \to z^{\frac{m}{n}}$ принимает разные значения в точках $(z)_0, ...(z)_{n-1}$ слоя $(z)_{\mathcal{P}}$ и принимает одинаковые значения в точках $(z)_k, (z)_{k+n} \in (z)_{\mathcal{P}}$ при любом целом k. Это означает, что при $n = 1$ степенная функция является однозначной и совпадает с сужением рациональной функции $z \to z^m$ на плоскость с выколотой точкой $\dot{\mathbf{C}}$, которая и является ее римановой поверхностью.

Если $n \neq 1$, то риманова поверхность степенной функции получается из римановой поверхности полярного расслоения топологическим отождествлением (склейкой) точек $(z)_k, (z)_{k+n} \in (z)_{\mathcal{P}}$ при любом $z \in \dot{\mathbf{C}}$ и любом целом k. Простое представление о ней можно получить следующим образом. Для любого $k \in \{0, ..., n-1\}$ выберем отдельный экземпляр комплексной плоскости и удалим из каждого точки луча l_0. Получим линейно упорядоченное семейство плоскостей с разрезами $\{D_k : k = 0, ..., n-1\}$. Совместим эти области пространственно и затем склеим левый край разреза области D_k с правым краем разреза области D_{k+1} (находимся на луче l_0 и видим начало). Проделаем эту операцию с каждой из областей семейства $\{D_k : k = 0, ..., n-2\}$. Затем склеим левый край разреза области D_{n-1} с правым краем разреза области D_0. В результате мы получили плоскость, наделенную внутренней структурой. Каждая точка плоскости $z \neq 0$ приобрела кратность n. Точку $z = 0$ является особой и ее называют точкой ветвления (порядка n).

Однозначная функция

$$z \to \left(z^{\frac{m}{n}}\right)_{\theta,k} := |z|^{\frac{m}{n}}\exp\left(i\tfrac{m}{n}(\operatorname{Arg} z)_{\theta,k}\right),$$

где $(\theta, k) \in (-\pi, \pi] \times \{0, ..., n-1\}$, является непрерывной ветвью функции $z \to z^{\frac{m}{n}}$. При этом совокупность

$$\left\{z \to \left(z^{\frac{m}{n}}\right)_{\theta,k} : (\theta, k) \in (-\pi, \pi] \times \{0, ..., n-1\}\right\}$$

является непрерывным представлением функции $z \to z^{\frac{m}{n}}$.

Главное значение $|z|^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m}{n}\arg z + i\sin\frac{m}{n}\arg z\right)$ функции $z \to z^{\frac{m}{n}}$ точке $z \in \dot{\mathbf{C}}$ обозначается $\sqrt[n]{z^m}$. Однозначная функция

$$z \to \sqrt[n]{z^m} := |z|^{\frac{m}{n}}\exp\left(i\tfrac{m}{n}\arg z\right), \; z \in \dot{\mathbf{C}},$$

называется *главной ветвью* функции $z \to z^{\frac{m}{n}}$. Непрерывная функция

$$z \to \left(z^{\frac{m}{n}}\right)_{0,0} = |z|^{\frac{m}{n}}\exp\left(i\tfrac{m}{n}(\operatorname{Arg} z)_{0,0}\right)$$

является сужением главной ветви степенной функции на плоскость с разрезом $\dot{\mathbf{C}} \setminus l_0$ вдоль отрицательной части действительной оси и называется *главной непрерывной ветвью* функции $z \to z^{\frac{m}{n}}$. Для других непрерывных ветвей функции $z \to z^{\frac{m}{n}}$ справедливы следующие представления:

$$\left(z^{\frac{m}{n}}\right)_{\theta,k} = \left(z^{\frac{m}{n}}\right)_{\theta,0}\exp\left(\tfrac{2\pi km}{n}i\right) =$$

$$= \begin{cases} \sqrt[n]{z^m} \times \exp\left(\frac{2\pi(k+1)m}{n} i\right), & \text{если} \quad \arg z \leqslant \theta - \pi, \\ \sqrt[n]{z^m} \times \exp\left(\frac{2\pi k m}{n} i\right), & \text{если} \quad \theta - \pi < \arg z \leqslant \theta + \pi, \\ \sqrt[n]{z^m} \times \exp\left(\frac{2\pi(k-1)m}{n} i\right), & \text{если} \quad \theta + \pi < \arg z, \end{cases}$$

для всех $z \in \dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta$. Все непрерывные ветви являются аналитическими функциями и

$$\left((z^{\frac{m}{n}})_{\theta,k} \right)' = \begin{cases} \frac{m}{n} \left(z^{\frac{m}{n}-1} \right)_{\theta,k}, & \text{если} \quad \frac{m}{n} \notin \{0;1;2\}, \\ 2z, & \text{если} \quad \frac{m}{n} = 2, \end{cases}$$

для любого $z \in \dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta$.

Упражнение 5. *Убедитесь, что функция* $z \to \left(z^{\frac{m}{n}}\right)_{\theta,k}$ *отображает плоскость с разрезом*

2.5 Показательная функция комплексной переменной

Пусть $a \in \mathbf{C} \setminus \{0;1\}$. Предположим, что непрерывная многозначная функция $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ определена на $\mathbf{C}$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) $F(z_1 + z_2) = F(z_1)F(z_2)$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$;
2) $F(z_1 - z_2) = \frac{F(z_1)}{F(z_2)}$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$;
3) $F(1) = a$, $F(i) \subseteq e^{i \operatorname{Ln} a}$.

Из условий 2) и 3) вытекает, что $F(0) = F(1-1) = \frac{F(1)}{F(1)} = 1$. Значит, $\frac{F(z)}{F(z)} = F(z - z) = F(0) = 1$. Это означает, что функция F является однозначной. Следовательно $F(i) = e^{i(\ln a + 2\pi i k)}$ при некотором целом k. Пусть $\Phi(z) := \operatorname{Ln} F(z)$. Тогда $F(z) = \exp \Phi(z)$ для любого $z \in \mathbf{C}$. При этом $\Phi(z_1 + z_2) = \Phi(z_1) + \Phi(z_2)$, $\Phi(z_1 - z_2) = \Phi(z_1) - \Phi(z_2)$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ и $\Phi(1) = \operatorname{Ln} a = \ln a + 2\pi i k + 2\pi i \mathbf{Z}$, $\Phi(i) = \operatorname{Ln} e^{i(\ln a + 2\pi i k)} = i(\ln a + 2\pi i k) + 2\pi i \mathbf{Z}$. По определению линейной многозначной функции комплексной переменной получаем $\Phi(z) = (\ln a + 2\pi i k) z + 2\pi i \mathbf{Z}$. Значит, $F(z) = \exp \Phi(z) = e^{z(\ln a + 2\pi i k)}$.

Таким образом, условия 1)–3) определяют семейство однозначных функций $z \to (\operatorname{Exp}_a z)_k$, где

$$(\operatorname{Exp}_a z)_k := e^{z(\ln a + 2\pi i k)}, \ k \in \mathbf{Z}.$$

Это означает, что условия 1)–3) определяют многозначную функцию $z \to \operatorname{Exp}_a z$, где

$$\operatorname{Exp}_a z := \{(\operatorname{Exp}_a z)_k : k \in \mathbf{Z}\} = e^{z \operatorname{Ln} a} = \operatorname{Deg}^z a,$$

которую принято называть *показательной функцией комплексной переменной* с основанием $a \in \mathbf{C} \setminus \{0;1\}$. Из определения показательной функции вытекает, что для ее непрерывных ветвей справедливы тождества:

$$(\operatorname{Exp}_a (z_1 + z_2))_k = (\operatorname{Exp}_a z_1)_k (\operatorname{Exp}_a z_2)_k,$$

$$(\operatorname{Exp}_a (z_1 - z_2))_k = \frac{(\operatorname{Exp}_a z_1)_k}{(\operatorname{Exp}_a z_2)_k}, \ k \in \mathbf{Z}.$$

Так как $a \neq 1$, то $\ln a + 2\pi i k = \ln|a| + i(\arg a + 2\pi k) \neq 0$ для любого $k \in \mathbf{Z}$. Если $z_2 = z_1 + \frac{2\pi i}{\ln a + 2\pi i k}$, то $(\operatorname{Exp}_a z_2)_k = e^{z_2(\ln a + 2\pi i k)} = e^{z_1(\ln a + 2\pi i k)} e^{2\pi i} = (\operatorname{Exp}_a z_1)_k$. Это означает, что непрерывная ветвь $z \to (\operatorname{Exp}_a z)_k$ является периодической с основным периодом $\frac{2\pi i}{\ln a + 2\pi i k} \neq 0$. В силу периодичности непрерывных ветвей показательной функции образы $\operatorname{Exp}_a z$ и $\operatorname{Exp}_a \left(z + \frac{2\pi i}{\ln a}\right)$ различных точек из $\mathbf{C}$ пересекаются. Значит, показательная функция $z \to \operatorname{Exp}_a z$ не является расслоением над $\mathbf{C}$ и не может быть определена как обратная к однозначной функции.

Непрерывная ветвь $z \to (\operatorname{Exp}_a z)_0$ называется *главной непрерывной ветвью* показательной функции с основанием a. Ее значение в точке $z \in \mathbf{C}$ называется *главным значением* показательной функции и обозначается $\exp_a z$. Если $a = e$, то $\operatorname{Exp}_a z$ и $(\operatorname{Exp}_a z)_k$ обозначаются символами $\operatorname{Exp} z$ и $(\operatorname{Exp} z)_k$ соответственно. Согласно этим обозначениям

$$(\operatorname{Exp} z)_k = \exp z(1 + 2\pi i k), \ \operatorname{Exp} z = \exp z(1 + 2\pi i \mathbf{Z}).$$

При этом главная непрерывная ветвь $z \to (\mathrm{Exp}\, z)_0$ показательной функции с основание e совпадает с экспоненциальной функцией комплексной переменной $z \to \exp z$.

Литература

1. *Шишкин А.Б.* Теория функций комплексной переменной. Основы теории : учебное пособие. — Славянск-на-Кубани : Издательский центр СГПИ, 2010. — 195 с.

Axiomatic definition of multivalued functions of a complex variable

V.A. Kharchenko, A.B. Shishkin

The original axiomatic method of definition of basic elementary functions of a real variable is developed. This approach allows a simple extension to the case of single-valued elementary functions of a complex variable. The case of multivalued elementary functions is beyond the scope of the general concept stands alone and requires a separate independent study. In this article the authors eliminate this gap and develop an axiomatic multivalued elementary functions based on the concept of a continuous representation of a multivalued mapping.

