

Министерство образования и науки Российской Федерации

**Адыгейский государственный университет
Инженерно-физический факультет
Кафедра теоретической физики**

В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо, Д.С. Ушхо

**Полиномиальные векторные поля
на плоскости
Избранные вопросы**

научное издание

Майкоп – 2012

УДК 517.925:(0.75.8):512.83:513.6

ББК 22.344

И 32

д-р физ.-мат. наук, проф. В.Н. Горбузов (Гродненский государственный
университет им. Янки Купалы, Республика Беларусь)

д-р физ.-мат. наук, проф. А.Б. Шишкун (Кубанский государственный университет,
филиал в г. Славянск-на-Кубани)

Тлячев, В.Б., Ушхо, А.Д., Ушхо, Д.С.

Полиномиальные векторные поля на плоскости. Избранные вопросы / В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо, Д.С. Ушхо. — Майкоп: АГУ, 2012. — 326 с.: ил. 147

ISBN 978-5-85108-272-6

Рассматриваются вопросы топологического поведения решений динамических систем, правые части которых являются полиномами второй и третьей степени. В качестве основного инструментария используются прямые изоклины, преобразования и сфера Пуанкаре. В работе излагаются результаты исследований авторов за последнее десятилетие. Книга содержит подробное изложение теоретических вопросов и большой иллюстративный материал в виде фазовых портретов конкретных полиномиальных дифференциальных систем. Монография рассчитана на научных работников и аспирантов, занимающихся теорией дифференциальных уравнений и ее приложениями. Она может быть использована при чтении спецкурса по качественной теории дифференциальных уравнений.

ББК 22.344

ISBN 978-5-85108-272-6

©В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо, Д.С. Ушхо

Предисловие

Предлагаемое издание охватывает отдельные вопросы качественной теории автономных систем дифференциальных уравнений на плоскости с полиномиальной правой частью. Книга состоит из четырех частей, разбитых на параграфы.

Первая глава «Прямые изоклины полиномиальных дифференциальных систем на плоскости» включает в себя восемь пунктов. В этой главе доказываются теоремы, относящиеся к изоклинам полиномиальных дифференциальных систем с многочленами произвольной степени $n > 2$ в правых частях. Даётся: оценка сверху числа параллельных прямых изоклинов кубической системы и классификации этих систем, обладающих максимальным числом между собой прямых изоклинов; оценка числа прямых изоклинов, проходящих через особую точку полиномиальной системы (квадратичной и кубической). Кроме этого даётся оценка сверху общего числа прямых изоклинов квадратичной и кубической систем.

Вторая глава состоит из четырех параграфов, в которых рассматривается оригинальная теория осей симметрии N и S -типов. При этом в этой главе проводится полное исследование квадратичной и кубической систем на S и N -симметрии.

Третья глава «Особые точки кубической дифференциальной системы на экваторе сферы Пуанкаре» состоит из двух параграфов. В первом из них рассматривается случай, когда экватор сферы Пуанкаре состоит из траекторий системы, а во втором — случай, когда экватор сферы Пуанкаре не содержит целой траектории, отличной от состояния равновесия.

Нумерация формул в книге сквозная — первая цифра до точки указывает на номер главы.

Введение

Несмотря на бурное развитие вычислительной техники и численных методов, качественные методы интегрирования динамической системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = Q(x, y), \quad (0.1)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — аналитические функции в области $G \subset \mathbb{R}^2$, не потеряли своей актуальности и в настоящее время. Это связано с тем фактом, что численные методы во многих случаях позволяют строить лишь локальный фазовый портрет системы, причем при выборе конкретных значений параметров системы, а также, порой, при значительных затратах машинного времени. В то же время качественные методы дают возможность построения глобальной картины поведения траекторий.

Одним из важных вопросов качественной теории дифференциальных уравнений является вопрос о расположении фазовых траекторий автономной системы в окрестности изолированной точки покоя. Исследованию этого вопроса посвящен ряд работ как отечественных так и зарубежных математиков. К их числу относится монография А. Ф. Андреева [1], в которой изложены теория и приложения метода М. Фроммера. Большой вклад в развитие метода расщепления, предложенного М. Фроммером [2], внесли также И. С. Куклес и его ученики (см. например, [3,4]). В работе В. В. Немыцкого и Ю. В. Малышева [5] в отличие от [1–4] поведение траекторий в окрестности сложной особой точки изучается с использованием метода функций Ляпунова. На основе использования аппарата обобщенных функций Ляпунова в статье [6] Ю. В. Малышев проводит классификацию исключительных множеств системы

$$\frac{dx}{dt} = X(x),$$

где $X(x) : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $X(x) \in \mathbb{C}^k(D)$, ($k \geq 1$).

В упомянутых выше работах исследуется поведение фазовых траекторий системы (0.1) в окрестности сложной особой точки лишь с точностью до различия «центра и фокуса». Одной из классических проблем

качественной теории дифференциальных уравнений является проблема различия «центра» и «фокуса». Классические подходы к решению этой проблемы изложены в трудах А. Пуанкаре [7] и А.М. Ляпунова [8]. Значительный вклад в решение данной проблемы внесли такие математики как Дюлак А., Альмухамедов М.И., Малкин К.Е., Сахарников Н.А., Куклес И.С., Черкас Л.А., Сибирский К.С., Андреев А.Ф., Садовский А.П, и многие другие. Проблеме центра и фокуса применительно к системе (0.1) посвящена монография В. В. Амелькина, Лукашевича Н.А., Садовского А.П. [9], в которой указана исчерпывающая библиография по освещаемой проблеме.

Среди большого числа работ, посвященных исследованию динамических систем (0.1), особое место принадлежит системам, правые части которых представляют собой многочлены с действительными коэффициентами. Это обусловлено их фундаментальной ролью в теории дифференциальных уравнений и широким использованием таких систем в качестве математических моделей [10–27].

Методы качественного интегрирования системы (0.1) широко используются в электрорадиотехнике [10,14], биологии [15], физике [21,22] и других науках. В частности, в монографии М. В. Шамолина [23] развиваются качественные методы в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой. Модель, описываемая кубической дифференциальной системой, используется для решения практически важной задачи борьбы с вредными насекомыми [18]. Другие применения плоских полиномиальных систем в биологии можно найти в работах [24–27]. Например, с использованием теории бифуркаций проведено параметрическое исследование системы нелинейных дифференциальных уравнений, предложенной Фиш-Хью (FitsHugh-Nagumo equations) [24–26]. Эта система описывает возбуждение нервных мембран и распространение нервных импульсов вдоль аксона. Обобщенная модель «хищник-жертва» представлена системой двух кубических обыкновенных дифференциальных уравнений [27].

С применением теории бифуркаций построена глобальная бифуркационная диаграмма автономной системы кубических дифференциальных уравнений, описывающая динамику процесса кристаллизации [18].

Не только публикации, но и международные симпозиумы, проводимые на постоянной основе, посвящаются различным применением динамических систем в химии, физике, математике, экономике [28, 29]. В этом ряду следует выделить конференции, посвященные классическим проблемам плоских полиномиальных векторных полей [30].

Современная качественная теория полиномиальных дифференциальных систем решает вопросы, касающиеся, в основном, упомянутой нами выше классической проблемы различения центра и фокуса, а также проблем изохронности центра и фокуса; существования, отсутствия, единственности, взаимного расположения и оценки числа предельных циклов, так или иначе связанных с 16-ой проблемой Гильберта. Обзор работ, посвященных 16-ой проблеме Гильберта, можно найти в работе [31].

За последние десятилетия большая часть публикаций в российской и зарубежной научной литературе посвящена именно этим проблемам. В этой связи отметим работы [11, 32–53].

А. Ф. Андреев, А. П. Садовский, Ю. Л. Бондарь, В. А. Цикалюк в своих работах [32, 37, 38, 40, 46] решают проблему центра-фокуса для отдельных классов полиномиальных систем, уделяя особое внимание автономным кубическим системам, находят необходимые и достаточные условия существования центра изучаемых систем. Аналогичные задачи решаются в статьях [11, 47].

Вопросы существования и числа предельных циклов полиномиальных систем освещаются в работах [35, 39, 40, 49–52].

Среди многообразия работ следует выделить монографию В. Н. Горбузова [34], в которой разрабатываются способы исследования аналитических свойств R — дифференцируемых интегралов и последних множителей систем уравнений в полных дифференциалах и интегралов автономных линейных обыкновенных и многомерных дифференциальных систем.

В работе V. Putuntică, A. Subă [53] проведена классификация кубических дифференциальных систем на плоскости, обладающих шестью инвариантными прямыми трех различных направлений. Для каждого из шести аффинных классов таких систем проведено полное исследование в круге Пуанкаре.

В качественной теории дифференциальных уравнений важная роль отводится таким объектам как изоклины и оси симметрии. Использование этих объектов вносит методологические аспекты при исследовании поведения траекторий. Среди них можно выделить широко известный «метод двух изоклин» (метод Еругина Н.П.), который в настоящее время весьма активно применяется [54, 55]. В фундаментальной работе В. В. Немыцкого [17] указывается на широкие возможности качественного исследования дифференциальных систем с помощью главных изоклин.

Среди изоклин системы существенную роль играют прямолинейные изоклины (в дальнейшем прямые изоклины). В пользу актуальности исследования вопросов, связанных с прямыми изоклинами автономных дифференциальных систем на плоскости, говорит и тот факт, что задача нахождения координат состояний равновесия даже квадратичной системы становится трудно разрешимой в общем случае. Знание уравнения хотя бы одной прямой изоклины делает эту задачу реально разрешимой. При этом: а) может быть полностью решена задача определения местоположения всех особых точек системы; б) существенно упрощается решение вопросов, связанных с взаимным расположением предельных циклов; в) появляются возможности в оценке сверху числа особых точек второй группы и установлении топологической структуры сложной особой точки.

В шестидесятые годы прошлого столетия изучением прямых изоклин квадратичных систем занимались советские математики Л. В. Шахова, А. Н. Берлинский [56–58]. К этому же периоду относится и работа китайского математика Тун-Цзинь-чжу [59], в которой существенно используются прямые изоклины квадратичной системы, а также работы К. С. Сибирского и других авторов [60, 61], в которых они используют ими же найденные условия симметрии поля направлений кубического дифференциального уравнения в связи с решением проблемы центра-фокуса.

В связи с вопросом о прямых изоклинах полиномиальных дифференциальных систем на плоскости уместно отметить следующее. Любая инвариантная прямая автономной дифференциальной системы на плоскости является ее прямой изоклиной. Поэтому проблема оценки числа

инвариантных прямых полиномиальной дифференциальной системы на плоскости является частью более общей проблемы оценки числа прямых изоклин. Так, например, в работах [62, 63] доказано, что число инвариантных прямых кубической системы не превосходит восьми и проведено полное исследование системы с семью и восемью инвариантными прямыми. Проблеме оценки числа инвариантных прямых полиномиальных дифференциальных систем на плоскости посвящены также заметки [64, 65]. В [64] опровергается существовавшая в 80-х годах прошлого столетия гипотеза о том, что максимальное число инвариантных прямых плоской системы с взаимно простыми полиномами степени n в правых частях равно $2n + 1$, если n — четное и $2n + 2$, если n — нечетное. При этом построен пример системы с многочленами пятой степени в правых частях, которая имеет 14 инвариантных прямых. Автором [65] доказано, что максимальное число инвариантных прямых полиномиального векторного поля степени 4 равно 9.

Наиболее изученными из полиномиальных дифференциальных систем являются квадратичные. Здесь решены проблемы: различия центра и фокуса [9], оценки числа особых точек второй группы [57]. Окончательно решен вопрос о поведении траекторий в окрестности сложной особой точки [66, 67]. В работе [68] дана оценка сверху числа интегральных прямых дифференциального уравнения фазовых траекторий квадратичной системы. Обзор результатов исследования алгебраических интегралов квадратичного дифференциального уравнения можно найти в пособии [69]. Из теоремы, доказанной в [36], следует: если квадратичная дифференциальная система имеет максимальное число инвариантных прямых (оно равно пяти [68]), то число алгебраических инвариантных кривых этой системы бесконечно. В статье [70] доказано, что квадратичная дифференциальная система не может иметь предельных циклов, если она обладает хотя бы одной особой точкой типа «центр».

Сравнительно небольшое число работ посвящено изучению системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + P_2(x, y) + P_3(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + Q_2(x, y) + Q_3(x, y), \end{cases} \quad (0.2)$$

где P_i, Q_i — однородные многочлены степени i ($i = 2, 3$). Для (0.2) проблема центра-фокуса решена лишь в случае $|P_2(x, y)| + |Q_2(x, y)| \equiv 0$ (см. [71]).

В связи с результатами работы [71] Н. П. Ергиным был поставлен вопрос о существовании полиномиальных систем дифференциальных уравнений с особой точкой типа «центр» и предельным циклом [72]. Так, в [73] доказано, что система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = -x + Q(x, y), \end{cases} \quad (0.3)$$

где $P(tx, ty) = t^3 P(x, y)$, $Q(tx, ty) = t^3 Q(x, y)$ не имеет предельных циклов, если $(0, 0)$ — особая точка типа «центр».

В статье [74] впервые построен пример кубической системы, имеющей предельный цикл и особую точку типа «центр». Из [75] вытекает следующее утверждение: кубическая дифференциальная система не может иметь предельных циклов при наличии у нее не менее пяти инвариантных прямых. Отсюда естественным образом возникает вопрос: при каком наибольшем числе инвариантных прямых кубическая система имеет изолированные периодические решения? Ответом на этот вопрос является работа [76], в которой доказано утверждение: если E_m — класс кубических дифференциальных систем с m инвариантными прямыми, допускающих предельный цикл, то $m \leq 4$. В работах [77, 78] доказано, что число особых точек второй группы системы (0.2) не превосходит пяти. При этом для системы (0.2) решен вопрос о максимальном числе прямых изоклинов [79].

Глава 1. Прямые изоклины полиномиальных дифференциальных систем на плоскости. Основные понятия, определения, теоремы

1.1 Некоторые общие сведения об изоклинах автономной дифференциальной системы второго порядка

Мы будем рассматривать систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \end{cases} \quad (1.1.1)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — непрерывные функции, определенные в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^2$ и имеющие в этой области непрерывные частные производные до порядка не ниже первого. Так как в правые части уравнений системы (1.1.1) явно не входит t , то (1.1.1) называется *автономной* системой дифференциальных уравнений. Ее также называют *динамической* [80].

Если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются действительными полиномами переменных x и y степени не выше $n \in \mathbb{N}$, то такую систему будем называть полиномиальной. Здесь степень n определяется как максимум $\deg(P)$ и $\deg(Q)$.

Будем обозначать через $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ векторное поле в \mathbb{R}^2 , связанное с системой (1.1.1).

Систему будем называть квадратичной (кубической) дифференциальной системой (или просто квадратичной (кубической) системой), если $n = 2$ ($n = 3$.)

Таким образом, например, полиномиальной системе при $n = 2$ всегда можно сопоставить квадратичное векторное поле

$$X = P \frac{\partial d}{\partial x} + Q \frac{\partial d}{\partial y},$$

а также дифференциальное уравнение

$$Qdx - Pdy = 0.$$

Определение. Точка $A \in \mathbf{B}$ называется особой точкой (или особенностью) векторного поля $X = (P, Q)$, если $P(A) = Q(A) = 0$.

Особая точка векторного поля называется:

- элементарной, если по крайней мере одно из собственных значений матрицы линейной части векторного поля в этой особой точке отлично от нуля;

- невырожденной, если оба собственных значения отличны от нуля.
Всякая невырожденная особая точка является элементарной.

Топологическая классификация изолированных элементарных особых точек на вещественной плоскости проста: кроме узлов, седел, фокусов и центров среди них встречаются еще лишь седлоузлы. Наряду с термином «особая точка» в качественной теории дифференциальных уравнений используются такие термины как «состояние равновесия», «точка покоя».

Под бесконечно удаленными особыми точками системы (1.1.1) подразумеваются особые точки систем, полученных из (1.1.1) в результате применения преобразований Пуанкаре: $x = 1/z$, $y = u/z$ и $x = \varepsilon/z$, $y = 1/z$ [80].

Прямую линию $ax + by + c = 0$ назовем инвариантной прямой линией системы (1.1.1) если выполняется равенство

$$aP(x, y) + bQ(x, y) \equiv (ax + by + c)R(x, y),$$

где $R(x, y)$ — многочлен с действительными коэффициентами, a, b, c — const. Отметим, что $R(x, y)$ — многочлен степени $n - 1$ [69].

Понятия «инвариантная прямая» (или «линейный частный интеграл») системы (1.1.1) и «интегральная прямая» дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

являются синонимами [69]. Последнее уравнение в качественной теории дифференциальных уравнений часто называют уравнением фазовых траекторий системы (0.1) (см. например, [9] и [69]).

Определение 1.1.1. [80] Кривые, расположенные в области G и удовлетворяющие уравнению

$$Q(x, y) - mP(x, y) = 0, \quad (1.1.2)$$

где m — постоянное число, называются изоклиниами системы (1.1.1).

Кривые (1.1.2) обладают тем свойством, что траектории системы (1.1.1), проходящие через все отличные от состояний равновесия точки этой кривой при фиксированном m , имеют в этих точках касательные одного и того же наклона. Именно угловые коэффициенты этих касательных равны m .

При $m = 0$ из (1.1.2) следует

$$Q(x, y) = 0 \quad (1.1.3)$$

или при $m = \infty$

$$P(x, y) = 0. \quad (1.1.4)$$

Кривые, определяемые уравнениями (1.1.3) и (1.1.4) называются *изоклинами нуля и бесконечности* соответственно. Эти изоклины называют также *главными изоклиниами* системы (1.1.1).

Для краткости изложения будем говорить, что на изоклине L система (1.1.1) индуцирует направление m , если угловой коэффициент касательных к фазовым траекториям этой системы в точках пересечения (быть может, касания) с L равен m .

Теорема 1.1.1. [81] *Свойство кривой L быть изоклиной системы (1.1.1) инвариантно относительно невырожденного преобразования*

$$x = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \quad y = \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}. \quad (1.1.5)$$

Доказательство. Пусть система (1.1.1) индуцирует на кривой L направление m , то есть имеет место равенство:

$$\left(\frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \right)_{(x, y) \in L} = m, \quad m \in \mathbb{R}. \quad (1.1.6)$$

В силу (1.1.5) система (1.1.1) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{d\tau} = \delta P(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}) - \beta Q(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}) \equiv \\ \quad \equiv \bar{P}(\bar{x}, \bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{d\tau} = -\gamma P(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}) + \alpha Q(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}) \equiv \\ \quad \equiv \bar{Q}(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases} \quad (1.1.7)$$

где $d\tau = \frac{dt}{\Delta}$, $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Пусть в результате преобразования (1.1.5) кривая L переходит в кривую \bar{L} . Тогда с учетом (1.1.6) и (1.1.7) имеем равенство:

$$\left(\frac{\bar{Q}(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})} \right)_{(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{L}} = \frac{-\gamma + \alpha m}{\delta - \beta m} = \bar{m} - \text{const.} \quad (1.1.8)$$

Из (1.1.8) следует, что \bar{L} — изоклина системы (1.1.7).

Теорема доказана.

Следствие 1.1.1. Произвольную изоклину системы (1.1.1) можно перевести в любую из главных изоклин.

Справедливость данного утверждения вытекает из теоремы 1.1.1, а именно, если $\gamma = \alpha m$ ($\delta = \beta m$), то \bar{L} — изоклина нуля (бесконечности) системы (1.1.7).

Теорема 1.1.2. [81] Точка $M(x_0, y_0)$ — состояние равновесия системы (1.1.1) тогда и только тогда, когда существуют, по крайней мере, две изоклины L_1 и L_2 , проходящие через M , на которых эта система индуцирует различные направления.

Доказательство. Пусть $M(x_0, y_0)$ — точка равновесия системы (1.1.1). Тогда по определению точки равновесия [80] через M проходят две главные изоклины этой системы, то есть налицо существование изоклин L_1 и L_2 , на которых система (1.1.1) индуцирует различные направления.

Если через M проходят две изоклины L_1 и L_2 , на которых система (1.1.1) индуцирует направления m_1 и m_2 соответственно, причем $m_1 \neq m_2$, то в силу следствия 1.1.1 кривую L_1 (L_2) можно перевести в изоклину нуля (бесконечности) или бесконечности (нуля) посредством преобразования (1.1.5). В результате образ точки M — точка \bar{M} будет общей

точкой двух главных изоклинов системы (1.1.7), а значит ее состоянием равновесия. Теорема доказана.

Теорема 1.1.3. [81] Пусть прямой $l : y = kx + b$ принадлежат n особых точек (x_i, y_i) , $i = \overline{1, n}$ дифференциальной системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P_n(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q_n(x, y), \end{cases} \quad (1.1.9)$$

где $P_n(x, y)$, $Q_n(x, y)$ — взаимно простые многочлены n -ой степени над полем \mathbb{R} , тогда l — изоклина системы (1.1.9).

В самом деле,

$$\frac{Q_n(x, kx + b)}{P_n(x, kx + b)} = \frac{\alpha(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{\beta(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)} = \frac{\alpha}{\beta} - \text{const.}$$

Замечание 1.1.1. Если $Q_n(x, kx + b) \equiv 0$ ($P_n(x, kx + b) \equiv 0$), то кривая l — изоклина нуля (бесконечности). Одновременно указанные тождества не могут быть выполнены, так как $(P_n, Q_n) = 1$.

Следствие 1.1.2. Прямая, проходящая через две особые точки квадратичной дифференциальной системы ($n = 2$), является ее изоклиной.

Следствие 1.1.3. Прямая, проходящая через три особые точки кубической дифференциальной системы ($n = 3$), является ее изоклиной.

Теорема 1.1.4. [81] Пусть $(0, 0)$ — особая точка системы (1.1.1), где $P(x, y) = P_n(x, y) + \varphi(x, y)$, $Q(x, y) = Q_n(x, y) + \psi(x, y)$, $|P_n| + |Q_n| \neq 0$, P_n, Q_n — однородные многочлены степени n , $n \geq 1$, φ, ψ — аналитические функции, разложения которых не содержат членов степени меньше $n + 1$. Тогда правая часть хотя бы одного из двух уравнений системы (1.1.7) содержит однородный многочлен степени n .

Доказательство. Система (1.1.7) в условиях данной теоремы запишется в виде:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{d\tau} = \delta \bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y}) - \beta \bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{d\tau} = -\gamma \bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y}) + \alpha \bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}). \end{cases} \quad (1.1.20)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y}) &= P_n(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}), \\ \bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y}) &= Q_n(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}), \\ \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}) &= \delta\varphi(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}) - \beta\psi(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}), \\ \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}) &= -\gamma\varphi(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}) + \alpha\psi(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}).\end{aligned}\tag{1.1.21}$$

Пусть вопреки утверждению теоремы

$$\begin{cases} \delta\bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y}) - \beta\bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y}) \equiv 0, \\ -\gamma\bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y}) + \delta\bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y}) \equiv 0. \end{cases}\tag{1.1.22}$$

В силу неравенства $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ из системы (1.1.22) получаем равенство

$$|\bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y})| + |\bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y})| \equiv 0.\tag{1.1.23}$$

Равенство (1.1.23) с учетом (1.1.21) означает выполнение равенства

$$|P_n(x, y)| + |Q_n(x, y)| \equiv 0,$$

что с очевидностью противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Теорема 1.1.5. *Какие бы $n + 1$ прямых изоклины системы (1.1.9) ни взять, где $P_n(x, y)$ и $Q_n(x, y)$ — многочлены степени n над полем R , среди них найдутся по крайней мере две прямые, на которых эта система индуцирует различные направления.*

Доказательство. Следуя работе [81], применим к системе (1.1.9) преобразование $x = \bar{y}$, $y = \bar{x} + m\bar{y}$, переводящее каждую прямую изоклину, на которой система (1.1.9) индуцирует направление m , в изоклину бесконечности системы

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y}) - m\bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases}\tag{1.1.24}$$

где $\bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y}) = P_n(\bar{y}, \bar{x} + m\bar{y})$, $\bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y}) = Q_n(\bar{y}, \bar{x} + m\bar{y})$.

Изоклина бесконечности $\bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y}) - m\bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ системы (1.1.24) является алгебраической кривой не выше n -го порядка. Следовательно, эта система имеет не более n прямых изоклин бесконечности. Теорема доказана.

Следствие 1.1.4. Дифференциальное уравнение фазовых траекторий системы (1.1.9) имеет не более n различных интегральных прямых с одним и тем же угловым коэффициентом.

Замечание 1.1.2. В статье [82] доказано утверждение 1, являющееся частным случаем теоремы 1.1.5 при $n = 3$.

Теорема 1.1.6. Пусть прямая l_1 проходит через n особых точек A_1, A_2, \dots, A_n системы (1.1.9), и l_2 — прямая изоклина этой же системы, причем $A_i \notin l_2$, $i = \overline{1, n}$. Тогда система (1.1.9) индуцирует одно и то же направление на прямых l_1 и l_2 .

Доказательство. Согласно теореме 1.1.3 прямая l_1 является изоклиной системы (1.1.9). Обозначим через m_1 и m_2 направления, индуцированные системой (1.1.9) на прямых l_1 и l_2 соответственно. Предположим, что $m_1 \neq m_2$. Тогда с помощью преобразования $x = \bar{x} + \bar{y}$, $y = m_1\bar{x} + m_2\bar{y}$ переведем прямую l_1 в изоклину нуля $\bar{l}_1 : a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1 = 0$, а прямую l_2 — в изоклину бесконечности $\bar{l}_2 : a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2 = 0$ дифференциальной системы

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = (a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2)\bar{P}_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = (a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1)\bar{Q}_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases} \quad (1.1.25)$$

где $\bar{P}_{n-1}(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{Q}_{n-1}(\bar{x}, \bar{y})$ — многочлены степени $n - 1$.

Из вида правых частей уравнений системы (1.1.25) следует, что прямой \bar{l}_1 принадлежат n особых точек этой системы в том и только в том случае, если $\bar{l}_1 \cap \bar{l}_2 \neq \emptyset$. Но по условию l_1 и l_2 не пересекаются в особой точке, а значит, не пересекаются в особой точке прямые \bar{l}_1 и \bar{l}_2 . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Замечание 1.1.3. Теорема 4.5 [81] является следствием теоремы 1.1.6. Впрочем, и теорема 2.9 [81] также следует из теоремы 1.1.6.

1.2 Параллельные прямые изоклины дифференциальной системы на плоскости с полиномами произвольной степени в правых частях

Среди всех прямолинейных изоклин системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^n a_{ij}x^i y^j \equiv P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^n b_{ij}x^i y^j \equiv Q(x, y), \end{cases} \quad (1.2.1)$$

где

$$(P, Q) = 1, \quad \deg P = \deg Q = n, \quad n \geq 2, \quad (1.2.2)$$

важную роль играют параллельные прямые изоклины.

В дальнейшем будем считать выполнеными условия (1.2.2), и это не будем оговаривать каждый раз.

Теорема 1.2.1. *Пусть прямые $l_1 : y - kx - b_1 = 0$ и $l_2 : y - kx - b_2 = 0$, где $b_1 \neq b_2$, являются изоклинами системы (1.2.1), m_1 и m_2 — направления, индуцированные этой системой на прямых l_1 и l_2 соответственно, причем $m_1 \neq m_2$. Тогда k является корнем уравнений n -ой степени относительно λ*

$$a_{n,0} + a_{n-1,1}\lambda + a_{n-2,2}\lambda^2 + \dots + a_{1,n-1}\lambda^{n-1} + a_{0,n}\lambda^n = 0, \quad (1.2.3)$$

$$b_{n,0} + b_{n-1,1}\lambda + b_{n-2,2}\lambda^2 + \dots + b_{1,n-1}\lambda^{n-1} + b_{0,n}\lambda^n = 0. \quad (1.2.4)$$

Доказательство. Пусть $y - kx - b = 0$ — изоклина системы (1.2.1). Тогда имеет место равенство

$$Q(x, kx + b) \equiv mP(x, kx + b), \quad (1.2.5)$$

где m — направление, индуцированное системой (1.2.1) на прямой $y - kx - b = 0$.

Так как l_1 и l_2 — изоклины системы (1.2.1), то из (1.2.5) получаем тождество

$$Q(x, kx + b_1) \equiv m_1 P(x, kx + b_1), \quad (1.2.6)$$

$$Q(x, kx + b_2) \equiv m_2 P(x, kx + b_2). \quad (1.2.7)$$

С учетом (1.2.6) и (1.2.7) получаем равенства

$$Q(x, y) \equiv m_1 P(x, y) + (y - kx - b_1) R_{n-1}(x, y), \quad (1.2.8)$$

$$Q(x, y) \equiv m_2 P(x, y) + (y - kx - b_2) S_{n-1}(x, y), \quad (1.2.9)$$

где R_{n-1}, S_{n-1} — многочлены степени $n - 1$.

Из (1.2.8) и (1.2.9) следует равенство

$$(m_1 - m_2) P(x, y) \equiv (y - kx - b_2) S_{n-1}(x, y) - (y - kx - b_1) R_{n-1}(x, y). \quad (1.2.10)$$

При $y = kx + b_1$ из (1.2.10) получаем

$$(m_1 - m_2) P(x, kx + b_1) \equiv (b_1 - b_2) S_{n-1}(x, kx + b_1). \quad (1.2.11)$$

Из (1.2.11) следует, что коэффициент при x^n в многочлене $P(x, kx + b_1)$ равен нулю. Легко заметить, что

$$P(x, kx + b) = f_0(b)x^n + f_1(b)x^{n-1} + \dots + f_{n-1}(b)x + f_n(b), \quad (1.2.12)$$

$$Q(x, kx + b) = g_0(b)x^n + g_1(b)x^{n-1} + \dots + g_{n-1}(b)x + g_n(b), \quad (1.2.13)$$

где f_i, g_i ($i = 0, 1, \dots, n$) — многочлены степени i относительно b , причем

$$f_0(b) = a_{n,0} + a_{n-1,1}k + a_{n-2,2}k^2 + \dots + a_{1,n-1}k^{n-1} + a_{0,n}k^n,$$

$$g_0(b) = b_{n,0} + b_{n-1,1}k + b_{n-2,2}k^2 + \dots + b_{1,n-1}k^{n-1} + b_{0,n}k^n.$$

Таким образом, из (1.2.12) следует, что $f_0(b) = 0$ и в силу (1.2.6) и (1.2.7) $g_0(b) = 0$. Теорема доказана.

Замечание 1.2.1. Если нет действительных решений уравнений (1.2.3) и (1.2.4), то у системы (1.2.1) нет двух параллельных прямых изоклин, на которых индуцированы различные направления.

Обозначим через $M(k)$ — множество параллельных между собой прямых изоклин с угловым коэффициентом k , причем хотя бы на двух прямых $l_1, l_2 \in M(k)$ система (1.2.1) индуцирует различные направления.

Так как уравнения (1.2.3) и (1.2.4) имеют не более n различных действительных корней, то из доказанной теоремы вытекает

Следствие 1.2.1. Система дифференциальных уравнений (1.2.1) имеет не более n различных множеств $M(k)$.

Теорема 1.2.2. Число особых точек системы (1.2.1) на прямой $l \in M(k)$ не превосходит $n - 1$.

Доказательство. Предположим, что система (1.2.1) имеет на прямой l n особых точек. Так как все прямые множества $M(k)$ параллельны между собой, то согласно теореме 1.1.6 на всех прямых множества $M(k)$ система (1.2.1) индуцирует одно и то же направление, что противоречит свойству множества $M(k)$. Теорема доказана.

Теорема 1.2.3. Если система (1.2.1) имеет n^2 особых точек, то любая ее прямая изоклина проходит через n особых точек.

Доказательство. Пусть $l : ax + by + c = 0$ — изоклина системы (1.2.1). Тогда, не уменьшая общности в силу следствия 1.1.1 можно рассматривать систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (ax + by + c)P_{n-1}(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^n b_{ij}x^i y^j, \end{cases} \quad (1.2.14)$$

где $P_{n-1}(x, y)$ — многочлен степени $n - 1$.

Из вида правой части первого уравнения системы (1.2.14) следует, что, при наличии у данной системы n^2 особых точек, система

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ \sum_{i+j=0}^n b_{ij}x^i y^j = 0, \end{cases}$$

имеет ровно n решений. Теорема доказана.

Следствие 1.2.2. Если во множестве M всех прямых изоклин системы (1.2.1) найдутся две параллельные прямые l_1 и l_2 , на которых (1.2.1) индуцирует различные направления, то число особых точек этой системы меньше n^2 .

Справедливость данного утверждения вытекает из теорем 1.2.2 и 1.2.3.

Теорема 1.2.4. Пусть $M(k_1, m_1)$ ($M(k_2, m_2)$) — множество, состоящее из n параллельных между собой прямых изоклин системы

(1.2.1) с угловым коэффициентом $k_1(k_2)$, на которых индуцировано одно и то же направление $m_1(m_2)$. Тогда число прямых изоклин системы (1.2.1) не превосходит $2n + 2$.

Доказательство. Так как каждую прямую множества $M(k_1, m_1)$ пересекают все прямые множества $M(k_2, m_2)$, то система (1.2.1) имеет ровно n^2 особых точек. Согласно теореме 1.2.3 каждая прямая изоклина системы (1.2.1) проходит через n особых точек. Пусть l — прямая изоклина системы (1.2.1), причем $l \notin M(k_1, m_1) \cup M(k_2, m_2)$. Тогда согласно теореме 1.1.5 на l индуцировано направление $m \neq m_{1,2}$. По теореме 1.1.2 l пересекает каждую прямую из множеств $M(k_1, m_1)$ и $M(k_2, m_2)$ в особой точке $A_{js} = l_j^{m_1} \cap l_s^{m_2}$, где $l_j^{m_1} \in M(k_1, m_1)$, $l_s^{m_2} \in M(k_2, m_2)$, $j, s \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Обозначим через $A_{j_1s_1}$ и $A_{j_ns_n}$ — две особые точки системы (1.2.1), расположенные на l , причем все остальные $n - 2$ особых точек, принадлежащих изоклине l , расположены между точками $A_{j_1s_1}$ и $A_{j_ns_n}$. Так как $A_{j_1s_1} = l_{j_1}^{m_1} \cap l_{s_1}^{m_2}$, $A_{j_ns_n} = l_{j_n}^{m_1} \cap l_{s_n}^{m_2}$, то прямые $l_{j_1}^{m_1}$, $l_{j_n}^{m_1}$, $l_{s_1}^{m_2}$, $l_{s_n}^{m_2}$ образуют параллелограмм, диагональю которого является отрезок $[A_{j_1s_1}, A_{j_ns_n}]$ прямой l . Но у параллелограмма ровно две диагонали. Следовательно, кроме прямых изоклин, принадлежащих множеству $M(k_1, m_1) \cup M(k_2, m_2)$, система (1.2.1) может иметь не более двух прямых изоклин, а значит, общее число прямых изоклин не превосходит $2n + 2$. Теорема доказана.

Замечание 1.2.2. При выполнении условий теоремы 1.2.4 число прямых изоклин системы (1.2.1) равно $2n + 2$ в том и только в том случае, когда прямые во множествах $M(k_1, m_1)$ и $M(k_2, m_2)$ равноудаленные.

Следствие 1.2.3. Пусть $M(k_i, m_i)$ — множество, состоящее из n параллельных между собой прямых изоклин системы (1.2.1) с угловым коэффициентом k_i , на которых индуцировано одно и то же направление m_i . Тогда $i \leq 2$.

Данное утверждение непосредственно следует из теоремы 1.2.4.

Следствие 1.2.4. Если выполняются условия теоремы 1.2.4, и при этом система (1.2.1) имеет ровно $2n + 2$ прямых изоклин, то при n нечетном на двух прямых изоклинах l_1 и l_2 , не принадлежащих множеству $M(k_1, m_1) \cup M(k_2, m_2)$, индуцированы различные направления, а при четном n — одно и то же направление.

В самом деле, при нечетном n прямые l_1 и l_2 пересекаются в особой точке, а все особые точки системы (1.2.1) — простые. При n четном — прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке, не являющейся особой для системы (1.2.1). Следовательно, по теореме 1.1.2 на l_1 и l_2 индуцировано одно и то же направление.

Следствие 1.2.5. Пусть $M(k_1, k_1)(M(k_2, k_2))$ — множество, состоящее из n параллельных между собой инвариантных прямых системы (1.2.1) с угловым коэффициентом $k_1(k_2)$. Тогда при n нечетном число инвариантных прямых системы (1.2.1) не превосходит $2n + 2$, а при четном $n = 2n + 1$.

Пример 1. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x - 1)(x - 2), \\ \frac{dy}{dt} = y(y - 1)(y - 2), \end{cases}$$

имеет, кроме шести инвариантных прямых, являющихся главными изоклинами, еще две инвариантные прямые $y = x$ и $y = -x + 2$.

Пример 2. Кроме очевидных восьми инвариантных прямых, дифференциальная система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x - 1)(x - 2)(x - 3), \\ \frac{dy}{dt} = y(y - 1)(y - 2)(y - 3), \end{cases}$$

имеет еще одну инвариантную прямую $y = x$.

Заметим, что прямая $y = -x + 3$ является изоклиной этой же системы, на которой индуцировано направление $m = 1$, то есть она не является инвариантной.

Далее рассмотрим вопрос о максимальном числе параллельных между собой прямых изоклин системы (1.2.1).

Существуют системы вида (1.2.1), имеющие $2n - 1$ параллельных между собой прямых изоклин.

Пример 3. Дифференциальная система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)(y - kx - b_2) \cdot \dots \cdot (y - kx - b_n), \\ \frac{dy}{dt} = (y - kx - b_{n+1})(y - kx - b_{n+2}) \cdot \dots \cdot (y - kx - b_{2n-1})(y + x), \end{cases}$$

где $n \geq 2$, $k \in \mathbb{R} \wedge k \neq -1, b_i \neq b_j$, если $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, 2n - 1\}$, имеет $2n - 1$ параллельных между собой прямых изоклин, в том числе n изоклин бесконечности и $n - 1$ изоклин нуля.

Естественно поставить вопрос: каково максимальное число параллельных между собой прямых изоклин системы (1.2.1).

Теорема 1.2.5. *Если система (1.2.1) имеет хотя бы одну особую точку, то число ее параллельных между собой прямых изоклин не более чем $2n - 1$.*

Доказательство. Предположим, что прямая $y = kx + b$, где k – заданное действительное число, является изоклиной системы (1.2.1). Тогда имеет место равенство (1.2.5), а $P(x, kx + b)$ и $Q(x, kx + b)$ заданы формулами (1.2.12) и (1.2.13) соответственно.

Равенство (1.2.5) равносильно системе уравнений

$$g_i(b) = mf_i(b), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.2.15)$$

Так как правые части системы (1.2.1) взаимно просты, то не может быть выполнено равенство

$$|f_n(b)| + |g_n(b)| \equiv 0.$$

Считая для определенности $f_n(b) \neq 0$, исключим m в системе (1.2.15). В результате получим систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{n-1}(b)f_n(b) = g_n(b) \cdot f_{n-1}(b), \\ g_{n-2}(b)f_n(b) = g_n(b) \cdot f_{n-2}(b), \\ \dots \\ g_1(b)f_n(b) = g_n(b) \cdot f_1(b), \\ g_0(b)f_n(b) = g_n(b) \cdot f_0(b). \end{array} \right. \quad (1.2.16)$$

Все уравнения системы (1.2.16) не могут быть тождествами относительно b , так как это означало бы, что при любом $b \in R$ прямая $y = kx + b$ – изоклина системы (1.2.1). А это возможно тогда и только тогда, когда

$$\frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = \varphi(y - kx). \quad (1.2.17)$$

Но при выполнении (1.2.17) система (1.2.1) не имеет ни одной особой точки. Итак, в системе (1.2.16) есть хотя бы одно невырожденное уравнение.

Так как наивысшая степень уравнений системы (1.2.16) относительно b равна $2n - 1$, то число параллельных между собой прямых изоклин системы (1.2.1), действительно, не превосходит $2n - 1$. Теорема доказана.

Следствие 1.2.6. Квадратичная система имеет не более трех параллельных между собой прямых изоклин при наличии у нее хотя бы одной особой точки.

Следствие 1.2.7. Кубическая система имеет не более пяти параллельных между собой прямых изоклин при наличии у нее хотя бы одной особой точки.

Заметим, что теорема об оценке числа параллельных между собой прямых изоклин кубической системы, доказанная в статье [83], является следствием теоремы 1.2.5.

1.3 Квадратичные дифференциальные системы на плоскости с параллельными прямыми изоклинами

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1.2.1) при $k = 2$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^2 a_{ij}x^i y^j, \\ \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^2 b_{ij}x^i y^j. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Система (1.3.1), в силу теоремы 1.2.5 и ее следствия 1.2.6, имеет не более трех параллельных между собой прямых изоклин.

Будем обозначать символом $l_i^{m_j}$ прямую l_i , на которой система (1.2.1) индуцирует направление m_j .

Отнесем все прямые изоклины с одинаковыми верхними индексами к одному и тому же множеству, а прямые с различными нижними индексами будем считать несовпадающими. Тогда множество всех прямых изоклин системы можно разбить на непересекающиеся непустые подмножества, в каждом из которых не более двух прямых изоклин системы (1.3.1).

Обозначим через M множество, состоящее из трех параллельных между собой прямых изоклин системы (1.3.1). Тогда логически возмож-

ными способами разбиения M на непересекающиеся непустые подмножества будут следующие:

- 1) $M = \{l_1^{m_1}, l_2^{m_1}\} \cup \{l_3^{m_2}\}$, $m_1 \neq m_2$;
- 2) $M = \{l_1^{m_1}\} \cup \{l_2^{m_2}\} \cup \{l_3^{m_3}\}$, $m_1 \neq m_2$, $m_1 \neq m_3$, $m_2 \neq m_3$.

Теорема 1.3.1. *Множество M , состоящее из трех параллельных между собой прямых изоклинов системы (1.3.1), при наличии у этой системы не менее одной особой точки может быть разбито на непустые непересекающиеся подмножества только одним из двух способов 1) и 2).*

Доказательство. Согласно теореме 1.1.5 во множестве M существуют две прямые $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$ ($m_1 \neq m_2$), и согласно следствию 1.1.1 вместо системы (1.3.1) рассматриваем систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)(A_1x + B_1y + C_1), \\ \frac{dy}{dt} = (y - kx - b_2)(A_2x + B_2y + C_2), \end{cases} \quad (1.3.2)$$

где $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$.

Пусть $l_3^{m_3} \in M$. Тогда возможны следующие случаи: а) $m_3 = m_1$, $m_3 \neq m_2$; б) $m_3 = m_2$, $m_3 \neq m_1$; в) $m_3 \neq m_{1,2}$.

В случае а) система (1.3.2) может быть приведена к виду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1), (y - kx - b_3), \\ \frac{dy}{dt} = (y - kx - b_2)(A_3x + B_3y + C_3), \end{cases} \quad (1.3.3)$$

где $A_3 + kB_3 \neq 0$. В случае б) система (1.3.2) может быть приведена к виду

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1), (A_4x + B_4y + C_4), \\ \frac{dy}{dt} = (y - kx - b_2)(y - kx - b_3), \end{cases} \quad (1.3.4)$$

где $A_4 + kB_4 \neq 0$. (1.3.3) и (1.3.4) свидетельствуют о реализации способа 1) разбиения множества M на непустые непересекающиеся подмножества.

Покажем, что реализуется и способ 2) разбиения множества M .

Так как $l_3^{m_3}$ — изоклина системы (1.3.2), где $m_3 \neq m_{1,2}$, то непременно имеет место тождество

$$\left(\frac{A_2x + B_2y + C_2}{A_1x + B_1y + C} \right)_{y=kx+b_3} \equiv \overline{m}_3. \quad (1.3.5)$$

Из тождества (1.3.5) получим равенство $A_2x + B_2y + C_2 \equiv \alpha(y - kx - b_3) + \overline{m}_3(A_1x + B_1y + C_1)$, то есть система (1.3.2) имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)(A_1x + B_1y + C_1), \\ \frac{dy}{dt} = (y - kx - b_2)[\alpha(y - kx - b_3) + \overline{m}_3(A_1x + B_1y + C_1)], \end{cases} \quad (1.3.6)$$

$\alpha, \overline{m} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Очевидно, что прямая $y - kx - b_3 = 0$ — изоклина системы (1.3.6), не являющаяся главной, то есть способ 2) разбиения множества M на непустые непересекающиеся подмножества возможен. Теорема доказана.

Теорема 1.3.2. *Если множество M , состоящее из трех параллельных между собой прямых изоклин системы (1.3.1), разбито на непустые непересекающиеся подмножества способом 1), то эта система имеет ровно четыре прямые изоклины.*

В самом деле, система (1.3.1) может быть приведена к одной из систем (1.3.3) и (1.3.4). Рассуждения проведем относительно системы (1.3.3) (в случае системы (1.3.4) они аналогичны).

В силу неравенства $A_3 + B_3k \neq 0$ система (1.3.3) имеет две особые точки на прямой $l : A_3x + B_3y + C_3 = 0$. Предположим, что система (1.3.3) имеет прямую изоклину L , не являющуюся главной. Согласно теореме 1.1.6 L пересекает l в одной из двух особых точек, и при этом пересекается с каждой прямой $l_i : y - kx - b_i = 0$, $i = \overline{1, 3}$. По теореме 1.1.2 это означает, что система (1.3.1) имеет на L три особые точки, что невозможно для квадратичной системы. Теорема доказана.

Замечание 1.3.1. Среди изоклининых портретов системы (1.3.1) (по терминологии [84]), приведенных в п. 4 работы [84] и соответствующих случаю двух особых точек, отсутствует семейство изоклин, содержащее четыре прямые изоклины, в том числе три, параллельные между собой.

Теорема 1.3.3. *Если множество M , состоящее из трех параллельных между собой прямых изоклин системы (1.3.1), разбито на непе-*

ресекающиеся непустые подмножества способом 2), то эта система имеет ровно шесть прямых изоклинов.

Доказательство. Пусть $l_1^{m_1}, l_2^{m_2}, l_3^{m_3} \in M$, причем $m_1 \neq m_2, m_1 \neq m_3, m_2 \neq m_3$. Тогда для каждой изоклины $l_i^{m_i}, i = \overline{1,3}$ найдется прямая изоклина $l_{j_i}^{m_i}, j_i \notin \{1, 2, 3\}$ системы (1.3.1), на которой индуцировано то же направление m_i , что и на прямой $l_i^{m_i}$. Прямую $l_{j_i}^{m_i}$ назовем ассоциированной с прямой $l_i^{m_i}$. Предположим, что это не так. Выберем прямую $l_s^{m_s}, s \in \{1, 2, 3\}$, для которой не существует ассоциированная прямая изоклина. Подходящим линейным преобразованием переведем прямую $l_s^{m_s}$ в изоклину бесконечности (см. следствие 1.1.1) системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx - b_s)^2, \\ \frac{dy}{dt} = (y - kx - b_r)(\alpha x + \beta y + \gamma). \end{cases} \quad (1.3.7)$$

Система (1.3.7), как легко видеть, имеет одну особую точку, пришли к противоречию с тем, что система (1.3.1) имеет три параллельные между собой прямые изоклины. Таким образом, для каждой прямой изоклины $l_i^{m_i} \in M, i = \overline{1,3}$, существует ассоциированная с ней прямая изоклина $l_{j_i}^{m_i}$. Вместе с тем нет у системы (1.3.1) прямой изоклины, неассоциированной ни с одной из прямых $l_i^{m_i} \in M, i = \overline{1,3}$, так как такая прямая пересекала бы все три прямые из множества M . Но это противоречит тому, что квадратичная система (1.3.1) имеет на прямой не более двух особых точек. Теорема доказана.

Замечание 1.3.2. Если система (1.3.1) удовлетворяет условиям теоремы 1.3.3, то любая прямая $l_i^{m_i} \in M, i = \overline{1,3}$, проходит через одну особую точку системы (1.3.1), а ассоциированная с ней прямая $l_{j_i}^{m_i}$ проходит через две особые точки. В общем система (1.3.1) имеет три особые точки.

Замечание 1.3.3. Изоклиниальный портрет системы (1.3.1), соответствующий разбиению множества M на непустые непересекающиеся подмножества способом 2) указан в работе [84], а взаимное расположение всех прямых изоклин системы (1.3.1), соответствующее этому разбиению множества M , изображено в работах [58, 81].

1.4 Оценка числа прямых изоклинов квадратичной системы

В данном пункте дадим оценку числа прямых изоклинов системы (1.3.1) при условии, что она имеет хотя бы одну особую точку.

В работе [58] доказано, что именно при наличии хотя бы одной особой точки система (1.3.1) имеет не менее одной действительной прямой изоклины. Автором статьи [59] доказана лемма 1, согласно которой через особую точку системы (1.3.1) проходит хотя бы одна прямая изоклина. Ниже мы докажем теорему, из которой следует упомянутая нами лемма 1 [59], а затем вернемся к вопросу об оценке сверху числа прямых изоклинов системы (1.3.1).

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sum_{i=r}^n P_i(x, y) \equiv P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \sum_{j=s}^n Q_j(x, y) \equiv Q(x, y). \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Будем говорить, что система (1.4.1) удовлетворяет условиям (A), если P и Q — неоднородные многочлены, $(P, Q) = 1$, $\deg P = \deg Q = n$, $n \geq 2$, $P_i(Q_j)$ однородные многочлены степени $i(j)$, $i, j \in N$.

Теорема 1.4.1. *Пусть система (1.4.1) удовлетворяет условиям (A) и, кроме этого, $P_r(x, y) \neq 0$, $r \leq s$ ($Q_s(x, y) \neq 0$, $s \leq r$). Тогда через точку $(0, 0)$ проходит не более чем $r + n$ ($s + n$) прямых изоклин.*

Доказательство. Рассуждения проведем для случая $P_r(x, y) \neq 0$, $r \leq s$, так как случай $Q_s(x, y) \neq 0$, $s \leq n$ сводится к первому заменой $x = \bar{y}$, $y = \bar{x}$.

Пусть прямая $y = kx$ — изоклина системы (1.4.1), на которой индуцировано направление t . При этом считаем, что $t \in R$ (конечное число), так как этого можно добиться всегда с помощью невырожденного преобразования

$$x = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \quad y = \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}.$$

Таким образом, имеет место равенство $Q(x, kx) \equiv mP(x, kx)$, из которого следует система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} f_r(k) \cdot m = 0, \\ \dots \\ f_{s-1}(k) \cdot m = 0, \\ f_s(k) \cdot m = g_s(k), \\ \dots \\ f_{n-1}(k) \cdot m = g_{n-1}(k), \\ f_n(k) \cdot m = g_n(k) \end{array} \right. \quad (1.4.2)$$

В силу условий (A) выполняется неравенство $f_n(k) \not\equiv 0$, поэтому, исключив m в системе (1.4.2), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} f_r(k) \cdot g_n(k) = 0, \\ \dots \\ f_{s-1}(k) \cdot g_n(k) = 0, \\ f_s(k) \cdot g_n(k) = g_s(k) \cdot f_n(k), \\ \dots \\ f_{n-1}(k) \cdot g_n(k) = g_{n-1}(k) \cdot f_n(k) \end{array} \right. \quad (1.4.3)$$

здесь $f_i(k)$, $i = \overline{r, n}$ ($g_j(k)$, $j = \overline{s, n}$) — многочлены степеней i и j соответственно.

Согласно условиям (A) и неравенству $P_r(x, y) \not\equiv 0$ из всех уравнений системы (1.4.3) наименьшую степень относительно k имеет уравнение $f_r(k) \cdot g_n(k) = 0$. Следовательно, число решений системы (1.4.3) не более чем $r + n$. Теорема доказана.

Следствие 1.4.1. Число прямых изоклин системы (1.4.1), инцидентных точке $(0; 0)$, при выполнении условий (A) не превосходит числа $2n - 1$, причем если $r = s$, $|P_i(x, y)| + |Q_i(x, y)| \equiv 0$, $i = \overline{r+1, n-1}$, r и n — числа разной четности, то существует хотя бы одна прямая изоклина системы (1.4.1), проходящая через точку $(0, 0)$.

Действительно, при $r = s = n - 1$ из теоремы 1.4.1 следует, что число прямых изоклин системы (1.4.1), инцидентных точке $(0, 0)$, не превосходит числа $2n - 1$.

Если $r = s$, $|P_i(x, y)| + |Q_i(x, y)| \equiv 0$, $i = \overline{r+1, n-1}$, то система (1.4.3) переходит в уравнение

$$f_r(k)g_n(k) = g_r(k)f_n(k). \quad (1.4.4)$$

Уравнение (1.4.4) можно записать в виде:

$$(a_{0,r} \cdot b_{0,n} - a_{0,n} \cdot b_{0,r})k^{n+r} + \dots + (a_{r,0} \cdot b_{n-1,1} + a_{r-1,1} \cdot b_{n,0} - a_{n,0} \cdot b_{r-1,1} - a_{n-1,1} \cdot b_{r,0})k + a_{r,0} \cdot b_{n,0} - a_{n,0} \cdot b_{r,0} = 0. \quad (1.4.5)$$

По условию уравнение (1.4.5) является уравнением нечетной степени относительно k . Поэтому при выполнении неравенства

$$a_{0,r} \cdot b_{0,n} - a_{0,n} \cdot b_{0,r} \neq 0$$

уравнение (1.4.5) имеет хотя бы один корень действительный, которому соответствует прямая изоклина системы (1.4.1). Если

$$a_{0,r} \cdot b_{0,n} - a_{0,n} \cdot b_{0,r} = 0,$$

то прямая $x = 0$ — изоклина системы (1.4.1). Следствие доказано.

Замечание 1.4.1. В статье [85] рассматривалась система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P_m(x, y) + P_n(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q_m(x, y) + Q_n(x, y). \end{cases} \quad (1.4.6)$$

Для нее доказано утверждение: если m и n — числа разной четности, то через особую точку системы (1.4.6) проходит, по крайней мере, одна прямая изоклина. При этом если правые части уравнений системы (1.4.6) взаимно просты, то число таких изоклин не превосходит $m + n$. Здесь $m, n \in N$, P_m и Q_m , P_n и Q_n — однородные многочлены степеней m и n соответственно. Таким образом, результат из работы [86], приведенный нами, является в известном смысле частным случаем теоремы 1.4.1. ($r = s = m$, $|P_i(x, y)| + |Q_i(x, y)| \equiv 0 \quad \forall i \in \overline{m+1, n-1}$).

Замечание 1.4.2. Система (1.4.1) может не иметь ни одной прямой изоклины, проходящей через точку $(0, 0)$ при выполнении условий теоремы 1.4.1.

Пример 4. Не существует прямой изоклины, инцидентной точке $(0, 0)$, для дифференциальной системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y + x^3 - 7x^2y - 38xy^2 + 420y^3, \\ \frac{dy}{dt} = x^2 - 3xy + 2y^2 + x^3 - 13xy^2 - 12y^3. \end{cases}$$

Действительно, система (1.4.3) применительно к рассматриваемой дифференциальной системе имеет вид:

$$\begin{cases} (1 - 3k)(1 - 13k^2 - 12k^3) = 0, \\ (1 - 3k + 2k^2)(1 - 7k - 38k^2 - 420k^3) = 0. \end{cases} \quad (1.4.7)$$

Первое уравнение системы (1.4.7) имеет четыре решения, ни одно из которых не удовлетворяет второму уравнению этой системы.

В работе [82] отсутствие прямой изоклины, проходящей через особую точку $(0, 0)$ дифференциальной системы, приведенной в примере 1, объясняется тем, что в правой части хотя бы одного из уравнений этой системы содержатся однородные многочлены степеней одинаковой четности. Теперь же ответ на возникший в [82] вопрос очевиден.

Приведем примеры систем вида (1.4.1), имеющих максимальное число прямых изоклин, проходящих через начало координат.

Пример 5. Прямые $y = 3x$, $y = -5x$, $y = 5x$, $y = -x$, $y = -10x$ являются изоклинами системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x^2 - 2xy + y^2 + (y + 5x)(y - 5x)(y + 10x), \\ \frac{dy}{dt} = -3x^2 - 2xy + y^2 + 4(y + 5x)(y - 5x)(y + 10x). \end{cases}$$

Пример 6. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x^2 - 15xy - 8y^2 + 20x^3 + 36x^2y + 36xy^2 + 16y^3, \\ \frac{dy}{dt} = 5x^2 + 15xy + 8y^2 - 4x^3 - 11x^2y - 26xy^2 - 16y^3, \end{cases}$$

имеет пять прямых изоклин, проходящих через точку $(0, 0)$, в том числе: $x = 0$, $y = -2x$, $x = -2y$, $y = -6x/5$, $y = -7x/8$. Направления, индуцированные на данных прямых, равны соответственно $m_1 = -1$, $m_2 = -7/6$, $m_3 = -1/3$, $m_4 = -37/64$, $m_5 = -2/3$.

Пример 7. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - k_1x)(y - k_2x) \sum_{i=0}^3 f_i(x, y) + \prod_{j=3}^7 (y - k_jx), \\ \frac{dy}{dt} = (y - k_1x)(y - k_2x) \sum_{i=0}^3 f_i(x, y), \end{cases}$$

где $\prod_{l=1}^7 k_l \neq 0$, $k_r \neq k_s$, если $r \neq s$, $r, s \in \overline{1, 7}$, $f_i(x, y)$ — однородные многочлены степени i , $f_i(x, y) \not\equiv 0 \quad \forall i \in \overline{0, 3}$, имеет семь прямых изоклин, проходящих через начало координат, в том числе: $y - k_s x = 0$, $s = 1, 2$, $y - k_j x = 0$, $j = \overline{3, 7}$.

Пример 8. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \prod_{i=1}^3 (y - k_i x) \sum_{j=0}^2 f_j(x, y) + \prod_{s=4}^8 (y - k_s x), \\ \frac{dy}{dt} = \prod_{i=1}^3 (y - k_i x) \sum_{j=0}^2 f_j(x, y), \end{cases}$$

где $f_j(x, y)$ — однородные многочлены степени j , $f_j(x, y) \not\equiv 0 \quad \forall j \in \overline{0, 2}$, $\prod_{l=1}^8 k_l \neq 0$, $k_m \neq k_n$, если $m \neq n$, $m, n \in \overline{1, 8}$, имеет восемь прямых изоклин, в том числе: $y - k_i x = 0$, $i = \overline{1, 3}$, $y - k_s x = 0$, $s = \overline{4, 8}$.

Далее рассмотрим вопрос о числе прямых изоклин системы (1.3.1).

В работе [81] доказана теорема 2.8, согласно которой через особую точку квадратичной системы (1.3.1) проходит по крайней мере одна прямая изоклина. Заметим, эта теорема является частным случаем теоремы 1.4.1, а также теоремы 1 [85].

В процессе доказательства теоремы 2.8 [81] получено так называемое характеристическое уравнение

$$(a_{02}b_{01} - a_{01}b_{02})k^3 + (a_{02}b_{10} + a_{11}b_{01} - a_{01}b_{11} - a_{10}b_{02})k^2 + (a_{11}b_{10} + a_{20}b_{01} - a_{10}b_{11} - a_{01}b_{20})k + a_{20}b_{10} - a_{10}b_{20} = 0 \quad (1.4.8)$$

прямых изоклин дифференциальной системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=1}^2 a_{ij} x^i y^j, \\ \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=1}^2 b_{ij} x^i y^j, \end{cases} \quad (1.4.9)$$

проходящих через начало координат $(0, 0)$.

Уравнению (1.4.8) удовлетворяют возможные направления (k) указанных прямых изоклин. Очевидно, уравнение (1.4.8) имеет не более трех

действительных корней, причем если $a_{02}b_{01} - a_{01}b_{02} = 0$, что соответствует корню $k = \infty$, то это уравнение имеет не более двух действительных корней.

Замечание 1.4.3. Тот факт, что через особую точку квадратичной системы проходит хотя бы одна прямая изоклина доказывается в работах [57–59] иным способом, а именно на основе критерия распадения кривой второго порядка [86, 87].

Рассмотрим пример квадратичного дифференциального уравнения, имеющего единственную прямую изоклину, проходящую через точку $(0; 0)$.

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3\alpha x^2 + \alpha y^2 + 4xy - 3y}{x^2 - 3y^2 + 4\alpha xy - 2x + \alpha y}, \quad (1.4.10)$$

одной из интегральных кривых которого является кардиоида

$$(x^2 + y^2)^2 - 2x(x^2 + y^2) - y^2 = 0,$$

изучено в работе [88].

Характеристическое уравнение (1.4.8) для особой точки $(0, 0)$ дифференциального уравнения (1.4.10) имеет вид:

$$(9 - \alpha^2)k^3 - 14\alpha k^2 + (5 + 3\alpha^2)k - 6\alpha = 0. \quad (1.4.11)$$

При $\alpha = \pm 3$ старший коэффициент в уравнении (1.4.11) равен нулю. Поэтому $x = 0$ — изоклина дифференциального уравнения (1.4.10).

При $\alpha = 3$ уравнение (1.4.10) имеет единственную прямую изоклину, проходящую через начало координат, причем все особые точки (1.4.10) (их ровно две) принадлежат этой изоклине [82].

Оценим сверху число прямых изоклин системы (1.3.1), имеющей хотя бы одну особую точку. При этом не сужая общности, рассмотрим систему (1.4.9), а также считаем выполненным условие

$$\sum_{i+j=1} (|a_{ij}| + |b_{ij}|) > 0,$$

так как в противном случае каждая прямая, проходящая через начало координат, является изоклиной системы (1.4.9).

Очевидно, система (1.4.9), имеющая только одну особую точку, имеет не более трех прямых изоклин, и в случае их максимального числа, все они проходят через начало координат. Если система имеет только две особые точки, то прямая, проходящая через эти две точки является изоклиной системы (1.4.9) согласно следствию 1.1.2. Кроме указанной прямой через каждую особую точку еще могут проходить не более двух прямых изоклин согласно теореме 1.4.1 (см. также теорему 2.8 [81]). Система не имеет прямой изоклины, кроме указанных пяти. По теореме 1.3.3 квадратичная дифференциальная система может иметь шесть прямых изоклин, если эта система имеет три параллельные между собой прямые изоклины. В случае максимального числа, то есть четырех особых точек квадратичной системы очевидно, что она имеет шесть прямых изоклин.

Теорема 1.4.2. *Если система (1.4.9) имеет не менее трех особых точек, то любая ее прямая изоклина проходит хотя бы через одну особую точку.*

Доказательство. Так как система имеет не менее трех особых точек, то по теореме 1.1.3 можно выбрать две прямые изоклины l_1 и l_2 системы (1.4.9), проходящие через две точки. Если предположить, что l — прямая изоклина системы (1.4.9), и она не проходит через особую точку (1.4.9), то в силу теоремы 1.1.6 на прямых l_1 , l_2 , l_3 система (1.4.9) индуцирует одно и то же направление. Это противоречит теореме 1.1.5. Теорема доказана.

Теорема 1.4.3. (Об оценке числа прямых изоклин квадратичной системы.) *Если коэффициенты системы дифференциальных уравнений (1.4.9) удовлетворяют условиям:*

$$\sum_{i+j=1} (|a_{ij}| + |b_{ij}|) > 0, \quad \sum_{i+j=2} (|a_{ij}| + |b_{ij}|) > 0,$$

то она имеет не более шести прямых изоклин.

Доказательство. Из рассуждений, проведенных нами выше следует, что система (1.4.9) имеет не более пяти прямых изоклин, если число ее особых точек не более двух. Шесть прямых изоклин имеет система в случаях трех и четырех особых точек, при этом через каждую особую точку проходят три прямые изоклины.

Предположим, что система имеет более шести прямых изоклин, тогда по теореме 1.4.2 у системы (1.4.9) существует хотя бы одна особая точка, через которую проходит не менее четырех прямых изоклин. Пришли к противоречию с теоремой 1.4.1. Теорема доказана.

1.5 Прямые изоклины и канонические формы квадратичной системы

Задача нахождения координат особых точек системы (1.3.1) становится трудно разрешимой в общем случае. Знание уравнения хотя бы одной прямой изоклины делает эту задачу реально разрешимой благодаря так называемым каноническим формам.

Под канонической формой записи системы (1.1.1) будем понимать форму ее записи, при которой

$$P(x, y) = (a_1x + b_1y + c_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (a_kx + b_ky + c_k)^{\alpha_k} \cdot P_0(x, y)$$

или

$$Q(x, y) = (m_1x + n_1y + l_1)^{\beta_1} \cdot \dots \cdot (m_sx + n_sy + l_s)^{\beta_s} \cdot Q_0(x, y),$$

где α_i, β_j ($i = \overline{1, k}, j = \overline{1, s}$) - целые неотрицательные числа, причем $\sum_{i=1}^k \alpha_i > 0$ (или $\sum_{j=1}^s \beta_j > 0$),

$P_0(x, y)$ ($Q_0(x, y)$) - либо многочлен нулевой степени, либо многочлен степени $n \geq 2$, не имеющий линейных делителей вида $ax + by + c$.

Теорема 1.5.1. *Если система (1.3.1) имеет четыре особые точки: A, B, C, D , то посредством невырожденного преобразования (1.1.5) эту систему можно привести к каноническому виду:*

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = (a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1)(a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = (a_3\bar{x} + b_3\bar{y} + c_3)(a_4\bar{x} + b_4\bar{y} + c_4). \end{cases} \quad (1.5.1)$$

Доказательство. Согласно следствию 1.1.2 любая из прямых: AB , AC , AD , BC , BD , CD является изоклиной системы (1.3.1). Введем обозначения: $l_1 : AB$, $l_2 : CD$, $l_3 : AC$, $l_4 : BD$.

В силу теоремы 1.1.6 на прямых l_1 и l_2 индуцировано направление m_1 , а на прямых l_3 и l_4 индуцировано направление m_2 , причем $m_1 \neq m_2$ (Т. 1.1.5). Воспользуемся преобразованием

$$x = \bar{x} + \bar{y}, \quad y = m_2 \bar{x} + m_1 \bar{y}, \quad (1.5.2)$$

полагая, что $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$.

Преобразование (1.5.2) переводит l_1 и l_2 в изоклины бесконечности $a_1 \bar{x} + b_1 \bar{y} + c_1 = 0$ и $a_2 \bar{x} + b_2 \bar{y} + c_2 = 0$ соответственно, l_3 и l_4 — в изоклины нуля $a_3 \bar{x} + b_3 \bar{y} + c_3 = 0$ и $a_4 \bar{x} + b_4 \bar{y} + c_4 = 0$ соответственно, то есть система (1.3.1) приводится к каноническому виду (1.5.1).

Если $m_1 = \infty$ (или $m_2 = \infty$), то преобразование (1.5.2) примет вид: $x = \bar{x} + \bar{y}$, $y = m_2 \bar{x}$ ($x = \bar{x} + \bar{y}$, $y = m_1 \bar{x}$).

Наконец, если $m_1 = \infty$, $m_2 = 0$, то система (1.3.1) приводится к каноническому виду на основании тождественных равенств:

$$\sum_{i+j=0}^2 a_{ij} x^i y^j \equiv (A_1 x + B_1 y + C_1)(A_2 x + B_2 y + C_2),$$

$$\sum_{i+j=0}^2 b_{ij} x^i y^j \equiv (A_3 x + B_3 y + C_3)(A_4 x + B_4 y + C_4),$$

где $A_i x + B_i y + C_i = 0$ — уравнение прямой изоклины l_i , $i = \overline{1, 4}$ системы (1.3.1). Теорема доказана.

Замечание 1.5.1. Теорема 1.5.1 доказана в работе [57] с применением условия распадения кривой второго порядка, а именно факта наличия двух различных корней уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & a_{13} - \lambda b_{13} \\ a_{12} - \lambda b_{12} & a_{22} - \lambda b_{22} & a_{23} - \lambda b_{23} \\ a_{13} - \lambda b_{13} & a_{23} - \lambda b_{23} & a_{33} - \lambda b_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (1.5.3)$$

В обозначениях автора [57] правые части уравнений квадратичной дифференциальной системы записаны в виде

$$\begin{aligned} P(x, y) &= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}, \\ Q(x, y) &= b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33}. \end{aligned}$$

Таким образом, преобразование (1.1.5), переводящее систему (1.3.1) в систему (1.5.1), можно найти лишь решив уравнение (1.5.3). Однако из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы (1.5.1) следует, что для нахождения m_1 и m_2 , фигурирующих в преобразовании (1.5.2), не нужно решать громоздкого λ -уравнения (1.5.3).

Для этого достаточно найти значение dy/dx в силу системы (1.3.1) в точках прямых l_1 и l_3 или l_2 и l_4 .

Следует заметить, что теорема 1.5.1 впервые доказана А. Н. Берлинским, им же доказана теорема 1 [57] о распределении особых точек квадратичной системы, которая в настоящее время известна как теорема А. Н. Берлинского.

Теорема 1.5.2 *Пусть система (1.3.1) имеет три и только три особые точки A, B, C . Если через одну из них, например, через A проходят три прямые изоклины l_1, l_2, l_3 , на которых эта система индуцирует попарно различные направления m_1, m_2, m_3 , соответственно, то: 1) прямая l_1 , отличная от AB и AC , пересекает прямую BC ; 2) через точки B и C также проходят три прямые изоклины, на которых система (1.3.1) индуцирует попарно различные направления.*

Доказательство. Прямые AB , AC и BC обозначим через l_2, l_3 и l_4 соответственно. Так как прямая l_1 не проходит ни через одну особую точку B и C , то по теореме 1.1.6 на l_1 и l_4 индуцировано одно и то же направление m_1 . Применим к системе (1.3.1) преобразование (1.5.2), которое переводит прямые l_1 и l_4 в изоклину бесконечности, а l_2 — в изоклину нуля системы:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = (a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1)(a_4\bar{x} + b_4\bar{y} + c_4), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = (a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2)(a_5\bar{x} + b_5\bar{y} + c_5). \end{cases} \quad (1.5.4)$$

Таким образом, в результате преобразования (1.5.2) прямая l_1 перешла в прямую $\bar{l}_1: a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1 = 0$, прямая l_2 перешла в прямую $\bar{l}_2: a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2 = 0$, l_4 перешла в прямую $\bar{l}_4: a_4\bar{x} + b_4\bar{y} + c_4 = 0$. Обозначим через \bar{l}_5 изоклину нуля $a_5\bar{x} + b_5\bar{y} + c_5 = 0$ системы (1.5.4). По условию, на прямой l_1 система (1.3.1) имеет единственную особую точку $A = l_1 \cap l_2 \cap l_3$. Следовательно, на \bar{l}_1 система (1.5.4) имеет единственную

особую точку $\bar{A} = \bar{l}_1 \cap \bar{l}_2$, причем $\bar{l}_1 \parallel \bar{l}_5$. Так как на l_4 система (1.3.1) имеет две особые точки, то $\bar{l}_4 \cap \bar{l}_2 \neq \emptyset$, $\bar{l}_4 \cap \bar{l}_5 \neq \emptyset$. Поэтому $\bar{l}_1 \cap \bar{l}_4 \neq \emptyset$, а значит $l_1 \cap l_4 \neq \emptyset$. Очевидно, через особую точку $\bar{B} = \bar{l}_4 \cap \bar{l}_5$ системы (1.5.4) проходит также и прямая изоклина \bar{l}_3 , в которую перешла прямая l_3 в результате преобразования (1.5.2). Тем самым доказано, что через особую точку B системы (1.3.1) проходят три прямые изоклины, на которых индуцированы попарно различные направления поля этой системы. Заменив в формулах (1.5.2) m_2 через m_3 и рассуждая аналогичным образом, мы приходим к тому, что через особую точку C также проходят три прямые изоклины с теми же свойствами, что и через B (см. рис.1).

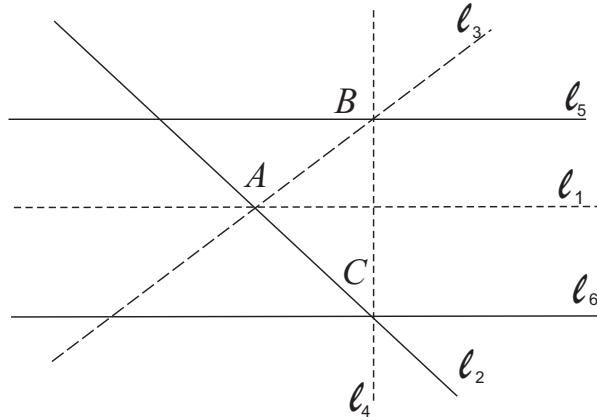


Рис. 1. Через точки B и C проходят три прямые изоклины, на которых индуцированы попарно различные направления

Теорема 1.5.3. *Пусть система (1.3.1) имеет три и только три особые точки A, B, C . Если через одну из них, например, через A проходят две и только две прямые изоклины, причем на них индуцированы различные направления, то через одну из двух остальных особых точек проходят три прямые изоклины, на двух из которых система (1.3.1) индуцирует одно и то же направление.*

Доказательство. Обозначим через l_1, l_2 и l_3 прямые AB, AC и BC соответственно. Очевидно, l_1, l_2, l_3 – изоклины системы (1.3.1). Пусть на прямой $l_i, i = \overline{1, 3}$ система (1.3.1) индуцирует направление m_i .

По условию $m_1 \neq m_2$ и через точку A , кроме l_1 и l_2 , не проходит ни одна прямая изоклина. Применим к системе (1.3.1) преобразование (1.5.2), переводящее точки A, B, C в особые точки $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ соответственно, а прямые l_1, l_2, l_3 – в прямые $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$. Пусть прямая $\bar{l}_1(\bar{l}_2)$ задана

уравнением $a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1 = 0$ ($a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2 = 0$). Из вида системы (1.5.4) следует, что $\bar{l}_1 \cap \bar{l}_2 = \bar{A}$, $\bar{l}_1 \cap \bar{l}_5 = \bar{B}$, $\bar{l}_2 \cap \bar{l}_4 = \bar{C}$, где $\bar{l}_4 : a_4\bar{x} + b_4\bar{y} + c_4 = 0$, ($\bar{l}_5 : a_5\bar{x} + b_5\bar{y} + c_5 = 0$). В силу взаимной простоты правых частей системы (1.5.4) \bar{l}_4 и \bar{l}_5 не могут совпадать. Они также не могут быть параллельными, так как в противном случае на прямых \bar{l}_1 и \bar{l}_2 система имела бы три особые точки, что невозможно для квадратичной системы. Таким образом, \bar{l}_4 и \bar{l}_5 пересекаются либо в особой точке \bar{B} , либо в особой точке \bar{C} системы (1.5.4). Впрочем, если $\bar{l}_4 \cap \bar{l}_5 = \bar{B}$, то $\bar{l}_4 \equiv \bar{l}_3$, если $\bar{l}_4 \cap \bar{l}_5 = \bar{C}$, то $\bar{l}_5 \equiv \bar{l}_3$.

Теорема доказана.

В условиях теоремы 1.5.3 прямые изоклины системы (1.3.1) расположены так, как на рис.2.

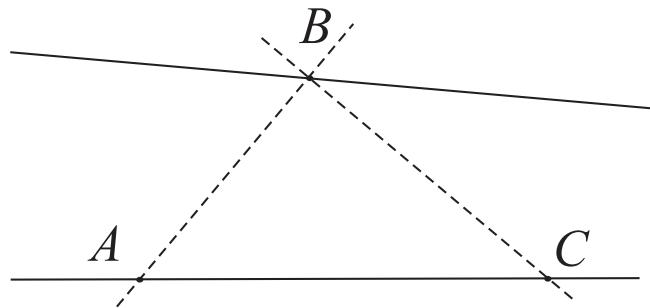


Рис. 2. Через точку A проходят только две прямые изоклины и на этих прямых индуцированы различные направления. Через точку B проходят три прямые изоклины, причем на двух из них индуцировано одно и то же направление

Теорема 1.5.4. *Пусть система (1.3.1) имеет только две особые точки A и B , причем через одну из них, например, через A , проходит только одна прямая изоклина. Тогда через точку B проходит не более двух прямых изоклин этой системы.*

Доказательство. Обозначим через l_1 прямую изоклину AB . По теореме 1.4.1 через особую точку B проходит не более трех прямых изоклин системы (1.3.1). Предположим, что, кроме прямой изоклины l_1 , через точку B проходят еще две прямые изоклины l_2 и l_3 . Тогда в силу теоремы 1.1.5 среди прямых l_1, l_2, l_3 можно выбрать две, на которых система (1.3.1) индуцирует различные значения. Не уменьшая общности полагаем, что на прямых l_1 и l_2 индуцированы направления m_1 и m_2

соответственно, причем $m_1 \neq m_2$. Преобразование (1.5.2), примененное к системе (1.3.1), переводит особую точку $A(B)$ в особую точку $\bar{A}(\bar{B})$, а прямые l_1 и l_2 в прямые $\bar{l}_1 : a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1 = 0$ и $\bar{l}_2 : a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2 = 0$ соответственно системы (1.5.4). Из вида правых частей уравнений системы (1.5.4) следует, что $\bar{l}_1 \cap \bar{l}_2 = \bar{B}$, $\bar{l}_1 \cap \bar{l}_5 = \bar{A}$, где $\bar{l}_5 : a_5\bar{x} + b_5\bar{y} + c_5 = 0$. Следовательно, через особую точку \bar{A} проходят две прямые изоклины, а значит и через точку A , что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 1.5.4 следует, что в случае двух прямых изоклин, инцидентных точке B , на этих прямых система (1.3.1) индуцирует одно и то же направление, т.е. B — сложная особая точка системы.

При выполнении условий теоремы 1.5.4 система (1.3.1) может быть преобразована в систему

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = (a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1)(a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{Q}_2(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases} \quad (1.5.5)$$

или

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = a\bar{x} + b\bar{y} + c, \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{Q}_2(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases} \quad (1.5.6)$$

полученное при помощи преобразования

$$x = \bar{x} + \bar{y}, \quad y = m\bar{y}, \quad (1.5.7)$$

где m — направление индуцированное на прямой AB . Система (1.5.5) ((1.5.6)) соответствует случаю, когда через точку B проходят две прямые изоклины (одна прямая изоклина). Впрочем, система (1.5.5) охватывает также и случай, когда через точку B проходит одна прямая изоклина AB , параллельная второй прямой изоклине бесконечности (рис. 3 – 5).

Теорема 1.5.5. *Пусть система (1.3.1) имеет две и только две особые точки A и B . Если через одну из них, например, через A проходят две и только две прямых изоклины, причем на этих прямых система индуцирует различные направления, то через точку B проходят: а)*



Рис. 3. Взаимное расположение главных изоклин системы (1.5.6)

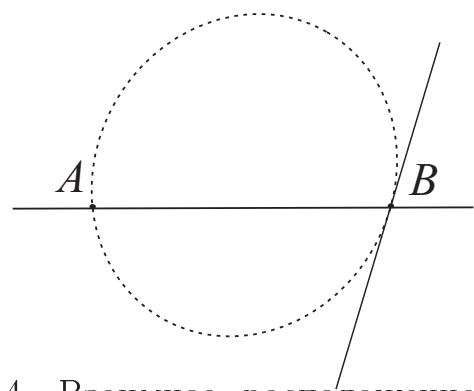


Рис. 4. Взаимное расположение главных изоклин системы (1.5.5) в случае, когда через особую точку B проходят две прямые изоклины

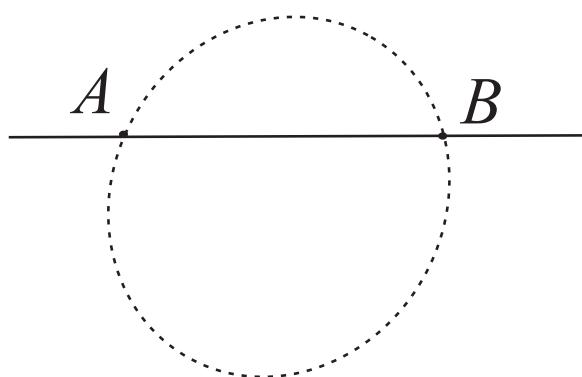


Рис. 5. Взаимное расположение главных изоклин системы (1.5.5) в случае, когда через особую точку B проходит одна прямая изоклина

либо только две прямых изоклины, на которых индуцированы различные направления; б) либо три прямых изоклины, на двух из которых система (1.3.1) индуцирует одно и то же направление.

Доказательство. Пусть через особую точку A проходят две и только две прямые изоклины l_1 и $l_2 \equiv AB$, на которых система (1.3.1) индуцирует направления m_1 и m_2 соответственно ($m_1 \neq m_2$.) Применим к системе (1.3.1) преобразование (1.5.2), которое переводит прямые m_1 и m_2 в изоклину бесконечности $\bar{l}_1 : a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1 = 0$ и нуля $\bar{l}_2 : a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2 = 0$ системы (1.5.4). Очевидно, особую точку A системы (1.3.1) преобразование (1.5.2) переводит в особую точку $\bar{A} = \bar{l}_1 \cap \bar{l}_2$. Поскольку на прямой \bar{l}_2 расположена особая точка \bar{B} — образ точки B , то $\bar{B} = \bar{l}_2 \cap \bar{l}_4$, где \bar{l}_4 задается уравнением $a_4\bar{x} + b_4\bar{y} + c_4 = 0$. Относительно расположения изоклины нуля $\bar{l}_5 : a_5\bar{x} + b_5\bar{y} + c_5 = 0$ системы (1.5.4) можно указать только две возможности: 1) либо $\bar{l}_2 \equiv \bar{l}_5$; 2) либо $\bar{l}_4 \cap \bar{l}_5 = \bar{B}$.

Любое другое расположение прямой \bar{l}_5 неизбежно приводит к тому, что система (1.5.4) имеет либо более двух особых точек, либо точке \bar{A} инцидентны три прямых изоклины. Теорема доказана.

Учитывая, что в случае, когда $\bar{l}_4 \cap \bar{l}_5 = \bar{B}$, $\bar{l}_1 \parallel \bar{l}_5$ (в противном случае на прямой \bar{l}_1 система (1.5.4) имеет, кроме \bar{A} , еще одну особую точку), можно утверждать: при выполнении условий теоремы 1.5.5 система (1.3.1) может быть проведена к одной из канонических форм:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = (a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1)(a_4\bar{x} + b_4\bar{y} + c_4), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = (a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2)(\alpha a_1\bar{x} + \alpha b_1\bar{y} + c_5), \end{cases} \quad (1.5.8)$$

где $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, $a_1b_4 - a_4b_1 \neq 0$, $c_5 \neq \alpha c_1$ или

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = (a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1)(a_4\bar{x} + b_4\bar{y} + c_4), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = (a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2)^2, \end{cases} \quad (1.5.9)$$

где $a_2b_i - a_ib_2 \neq 0$, $i = 1, 4$.

Системе (1.5.8) ((1.5.9)) соответствует расположение главных изоклин, изображенное на рис. 6 (рис. 7).

Теорема 1.5.6. Пусть система (1.3.1) имеет две и только две особые точки A и B , и через одну из них, например, через A проходят три

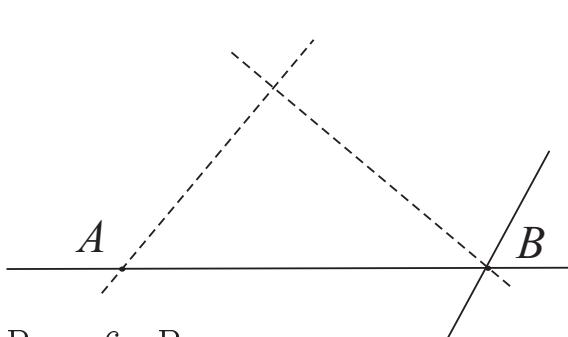


Рис. 6. Взаимное расположение главных изоклинов системы (1.5.8) прямых изоклины, на которых система индуцирует попарно различные направления. Тогда и через особую точку B проходят три прямых изоклины с теми же свойствами.

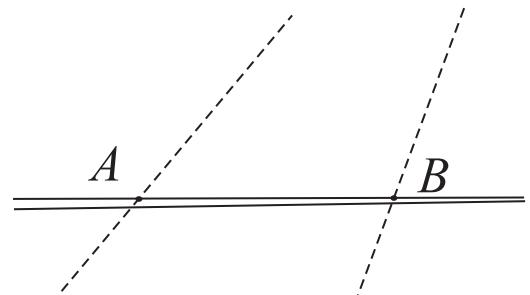


Рис. 7. Взаимное расположение главных изоклинов системы (1.5.9) прямых изоклины, на которых система индуцирует попарно различные направления. Тогда и через особую точку B проходят три прямых изоклины с теми же свойствами.

Доказательство. Пусть через особую точку A проходят прямые изоклины $l_0 \equiv AB$, l_1 и l_2 , на которых система (1.3.1) индуцирует попарно различные направления m_0 , m_1 и m_2 соответственно. Преобразование (1.5.2) переводит прямые l_0 , l_1 и l_2 в прямые $\bar{l}_0, \bar{l}_1 : a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1 = 0$ и $\bar{l}_2 : a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2 = 0$ системы (1.5.4). Следовательно, особая точка \bar{B} - образ точки B , является точкой пересечения главных изоклинов $\bar{l}_4 : a_4\bar{x} + b_4\bar{y} + c_4 = 0$ и $\bar{l}_5 : a_5\bar{x} + b_5\bar{y} + c_5 = 0$ системы (1.5.4). Так как $\bar{B} \in \bar{l}_0$, то, действительно, через \bar{B} проходят три прямых изоклины системы (1.5.4), а, следовательно, через точку B проходят три прямых изоклины системы (1.3.1). Теорема доказана.

Заметим, что в условиях теоремы 1.5.6 главные изоклины системы (1.5.4) так пересекаются, что образуют параллелограмм, в котором A и B — противоположные вершины.

Преобразование (1.5.2) в условиях теоремы 1.5.6 приводит систему (1.3.1) к каноническому виду (1.5.4), а преобразование $x = \bar{x} + \bar{y}$, $y = m_1\bar{x} + m_0\bar{y}$ приводит к каноническому виду:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = a_0\bar{x} + b_0\bar{y} + c_0, \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = (a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1)(a_5\bar{x} + b_5\bar{y} + c_5), \end{cases} \quad (1.5.10)$$

где $a_0b_i - a_ib_0 \neq 0$, $i = \overline{1, 5}$.

Взаимное расположение прямых изоклинов систем (1.5.4) и (1.5.10) изображено на рис. 8.

Теорема 1.5.7 Если система (1.3.1) имеет единственную особую

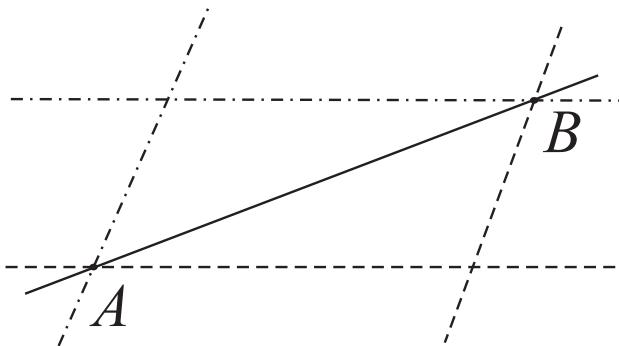


Рис. 8. Взаимное расположение прямых изоклинов систем (1.5.4) и (1.5.10)

точку A , и через нее проходит одна и только одна прямая изоклина, то с помощью преобразования $x = \bar{x} + \bar{y}$, $y = t\bar{y}$ эта система может быть приведена к одной из канонических форм: (1.5.5), (1.5.6) и

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = (a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1)^2, \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{Q}_2(\bar{x}, \bar{y}). \end{cases} \quad (1.5.11)$$

При этом в системе (1.5.5) может быть выполнено одно из условий: $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ или $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Взаимное расположение главных изоклинов системы (1.5.5) изображено на рис. 9-11. Системе (1.5.6) ((1.5.11)) соответствует взаимное расположение изоклинов, изображенное на рис. 12 (13).

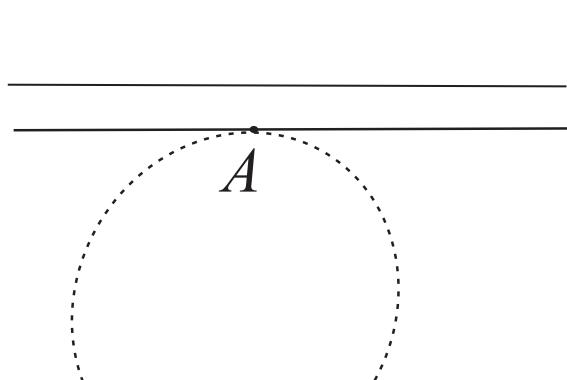


Рис. 9. Расположение главных изоклинов системы (1.5.5)

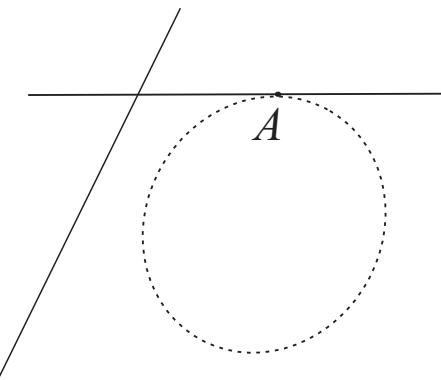


Рис. 10. Расположение главных изоклинов системы (1.5.5)

Отметим, что особая точка A , изображенная на рис. 9, 10, 12, является двукратной, на рис. 11 — простой, на рис. 13 — четырехкратной.

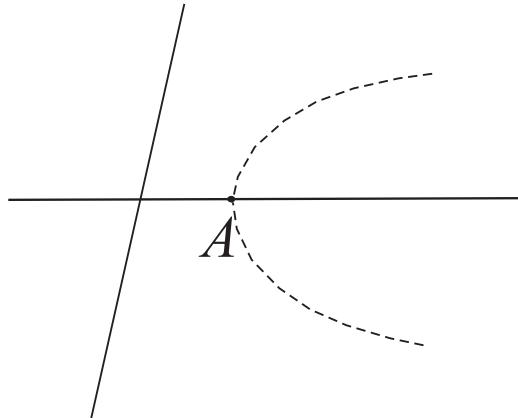


Рис. 11. Взаимное расположение главных изоклинов системы (1.5.5)

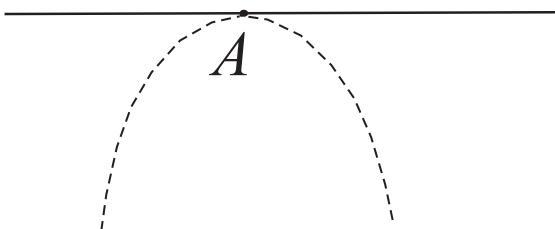


Рис. 12. Расположение главных изоклинов системы (1.5.6)

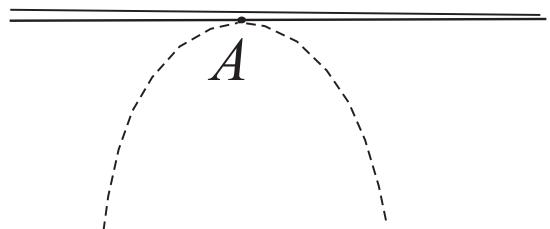


Рис. 13. Расположение главных изоклинов системы (1.5.11)

Пример 9. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 + (y - 1)^2 - 1, \\ \frac{dy}{dt} = x^2 + (y + 1)^2 - 1 \end{cases}$$

имеет единственную особую точку $A(0; 0)$, через которую проходит одна изоклина $y = 0$. На ней индуцировано направление $m = 1$. С помощью преобразования $x = \bar{x} + \bar{y}$, $y = \bar{y}$ эта система приводится к каноническому виду

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = -4\bar{y}, \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = 2\bar{y} + \bar{x}^2 + 2\bar{x}\bar{y} + 2\bar{y}^2. \end{cases}$$

Отсюда, впрочем, следует, что A — двукратная особая точка. Можно также убедиться, что уравнение (1.4.8) для рассматриваемой системы имеет вид: $k^3 + 2k = 0$, то есть имеет единственный действительный корень, а это подтверждает факт инцидентности особой точке $A(0, 0)$ одной единственной прямой изоклины $y = 0$.

Теорема 1.5.8. Пусть система (1.3.1) имеет единственную особую точку A , через которую проходят ровно две прямых изоклины. Если на этих прямых индуцировано одно и то же направление поля системы (1.3.1), то с помощью преобразования

$$x = \bar{x} + \bar{y}, \quad y = m\bar{y} \quad (1.5.12)$$

этая система приводится к каноническому виду (1.5.5), где

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

Расположение главных изоклин системы (1.5.5) изображено на рис. 14.

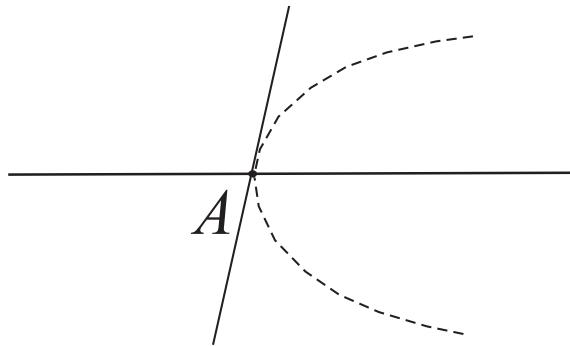


Рис. 14. Расположение главных изоклин системы (1.5.5)

Теорема 1.5.9. Пусть система (1.3.1) имеет единственную особую точку A , через которую проходят ровно две прямых изоклины. Если на этих прямых индуцированы различные направления, то с помощью преобразования (1.5.2) система (1.3.1) может быть приведена к одной из канонических форм:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1, \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = (a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2)(a_3\bar{x} + b_3\bar{y} + c_3), \end{cases} \quad (1.5.13)$$

где $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, $a_1b_3 - a_3b_1 = 0$, $a_2b_3 - a_3b_2 \neq 0$ или

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = (a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1)^2, \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = (a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2)(a_3\bar{x} + b_3\bar{y} + c_3), \end{cases} \quad (1.5.14)$$

$$\text{т.е. } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, a_1b_3 - a_3b_1 = 0, a_2b_3 - a_3b_2 \neq 0.$$

Системе (1.5.13) ((1.5.14)) соответствует расположение главных изоклинов, изображенное на рис. 15 (рис. 16).

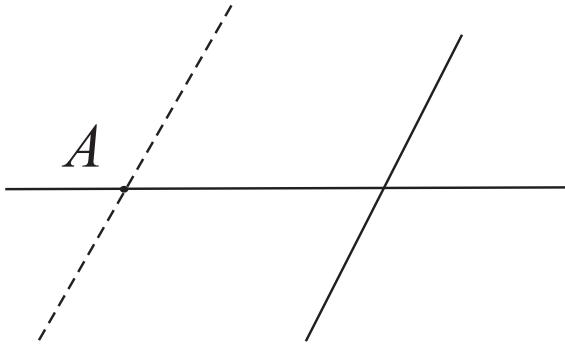


Рис. 15. Расположение главных изоклинов системы (1.5.13)

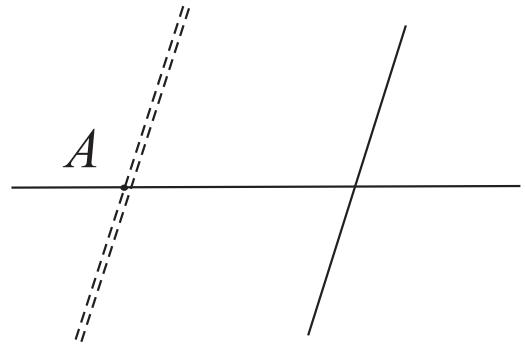


Рис. 16. Расположение главных изоклинов системы (1.5.14)

Пример 10. Дифференциальная система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -1 - y - xy, \\ \frac{dy}{dt} = 1 + y - xy \end{cases}$$

имеет три прямых изоклины: $y = 0$, $x = 0$, $y + 1 = 0$ и единственную особую точку $A(0; -1)$. На прямых $x = 0$, $y = 0$ система индуцирует направление $m_1 = -1$, а на прямой $y + 1 = 0$ — направление $m_2 = 1$. Поэтому с помощью преобразования $x = \bar{x} + \bar{y}$, $y = -\bar{x} + \bar{y}$ данная система приводится к каноническому виду

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{x} - \bar{y} - 1, \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = (\bar{x} - \bar{y})(\bar{x} + \bar{y}). \end{cases}$$

Пример 11. Дифференциальная система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - x^2 + xy, \\ \frac{dy}{dt} = -y + x^2 + xy \end{cases}$$

имеет единственную особую точку $A(0; 0)$, причем кратную. На прямых $x - 1 = 0$, $y = 0$ эта система индуцирует направление $m_1 = -1$, а

на прямой $x = 0$ — направление $m_2 = 1$. С помощью преобразования $x = \bar{x} + \bar{y}$, $y = -\bar{x} + \bar{y}$ данная система приводится к каноническому виду:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = -(x + y)^2, \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = (\bar{y} - \bar{x})(\bar{x} + \bar{y} + 1). \end{cases}$$

Вид последней системы свидетельствует о том, что точка A — двукратная особая точка.

Теорема 1.5.10. *Пусть система (1.3.1) имеет единственную особую точку A , через которую проходят три прямых изоклины. Если на двух из них система (1.3.1) индуцирует одно и то же направление, то ее можно привести к каноническому виду (1.5.13) с помощью преобразования (1.5.2).*

Расположение главных изоклин системы (1.5.13) изображено на рис.17.

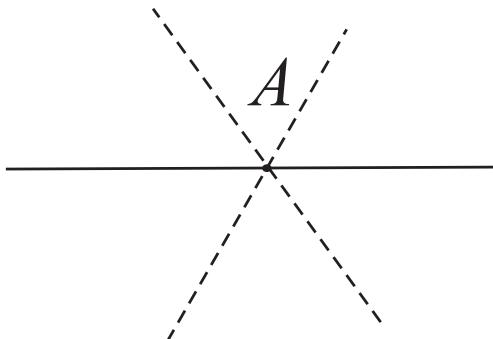


Рис. 17. Расположение главных изоклин системы (1.5.13)

Пример 12. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y - 2xy, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y + 2xy, \end{cases}$$

имеет единственную особую точку $A(0; 0)$, через которую проходят три прямых изоклины: $x = 0$, $y = 0$, $y - x = 0$. При этом на осях координат система индуцирует направление $m_1 = 1$, а на прямой $y - x = 0$ — направление $m_2 = -1$. Система удовлетворяет условиям теоремы 1.5.10,

и с помощью преобразования $x = \bar{x} + \bar{y}$, $y = \bar{x} - \bar{y}$ она приводится к каноническому виду

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = -2\bar{y}, \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = -2(\bar{x} + \bar{y})(\bar{x} - \bar{y}). \end{cases}$$

Теорема 1.5.11. *Если через единственную особую точку A системы (1.3.1) проходят три прямых изоклины, на которых эта система индуцирует попарно различные направления, то через A проходит бесконечное множество прямых изоклин.*

Доказательство. Пусть A — единственная особая точка системы (1.3.1), и через A проходят три прямые изоклины l_1, l_2, l_3 на которых индуцированы направления m_1, m_2, m_3 соответственно, причем $m_i \neq m_j$, если $i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3\}$. Преобразование (1.5.2) переводит прямую $l_1(l_2)$ в прямую изоклину $\bar{l}_1 : a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + \bar{c}_1 = 0$ ($\bar{l}_2 : a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + \bar{c}_2 = 0$) соответственно системы

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = (a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1)(a_3\bar{x} + b_3\bar{y} + c_3), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = (a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2)(a_4\bar{x} + b_4\bar{y} + c_4). \end{cases} \quad (1.5.15)$$

Через особую точку \bar{A} — образ точки A , кроме \bar{l}_1 и \bar{l}_2 , проходит прямая изоклина \bar{l}_3 — образ прямой \bar{l}_3 .

Следовательно, прямая изоклина $\bar{l}_4 : a_4\bar{x} + b_4\bar{y} + c_4 = 0$ либо проходит через \bar{A} , либо совпадает с \bar{l}_2 , аналогично, прямая изоклина $\bar{l}_3 : a_3\bar{x} + b_3\bar{y} + c_3 = 0$ либо проходит через \bar{A} , либо совпадает с \bar{l}_1 . Таким образом, система (1.5.15) имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = (a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1)^2, \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = (a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2)^2, \end{cases} \quad (1.5.16)$$

или

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = (a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1)^2, \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = (a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2)(a_4\bar{x} + b_4\bar{y} + c_4). \end{cases} \quad (1.5.17)$$

Если осуществить параллельный перенос начала координат в особую точку \bar{A} в системах (1.5.16) и (1.5.17), то все свободные члены в правых частях уравнений этих систем обратятся в нуль. Это и означает, что любая прямая $\bar{y} = k\bar{x}$ — изоклина этих систем. Теорема доказана.

Расположение главных изоклинов системы (1.5.16) ((1.5.17)) изображено на рис. 18 (рис. 19).

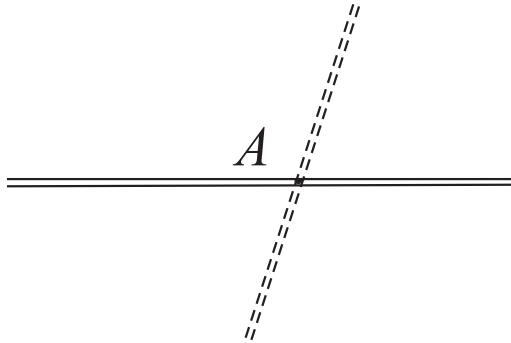


Рис. 18. Расположение главных изоклинов системы (1.5.16)

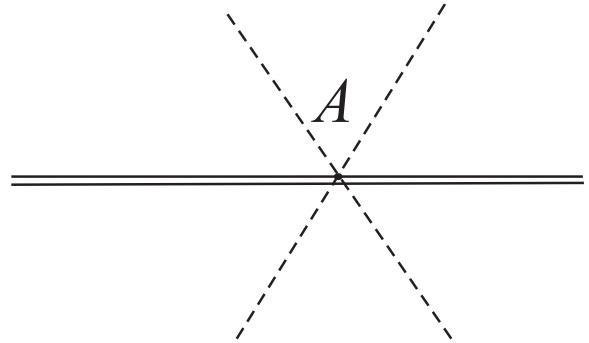


Рис. 19. Расположение главных изоклинов системы (1.5.17)

1.6 Параллельные прямые изоклины кубической дифференциальной системы

Рассмотрим систему (1.2.1) при $n = 3$, а именно систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^3 a_{ij}x^i y^j, \\ \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^3 b_{ij}x^i y^j. \end{cases} \quad (1.6.1)$$

Согласно следствию 1.2.7 система (1.6.1) имеет не более пяти параллельных между собой прямых изоклин, при наличии у нее хотя бы одной особой точки.

Обозначим через M — множество, состоящее из пяти параллельных между собой прямых изоклин системы (1.6.1). Логически возможными способами разбиения M на непустые непересекающиеся подмножества будут следующие (см. теорему 1.1.5):

- 1) $M = \{l_1^{m_1}, l_2^{m_1}, l_3^{m_1}\} \cup \{l_4^{m_2}, l_5^{m_2}\}$, $m_1 \neq m_2$;

- 2) $M = \{l_1^{m_1}, l_2^{m_1}, l_3^{m_1}\} \cup \{l_4^{m_2}\} \cup \{l_5^{m_3}\}$, $m_i \neq m_j$, если $i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3\}$;
- 3) $M = \{l_1^{m_1}, l_2^{m_1}\} \cup \{l_3^{m_2}, l_4^{m_2}\} \cup \{l_5^{m_3}\}$, $m_i \neq m_j$, если $i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3\}$;
- 4) $M = \{l_1^{m_1}, l_2^{m_1}\} \cup \{l_3^{m_2}\} \cup \{l_4^{m_3}\} \cup \{l_5^{m_4}\}$, $m_i \neq m_j$, если $i \neq j$,
 $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$;
- 5) $M = \bigcup_{i=1}^5 \{l_i^{m_i}\}$, $m_i \neq m_j$, если $i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Теорема 1.6.1. Пусть система (1.6.1) имеет не менее одной особой точки и пять параллельных между собой прямых изоклин. Тогда множество M , состоящее из пяти параллельных между собой прямых изоклин этой системы, может быть разбито на непустые непересекающиеся подмножества только одним из способов 1)–5).

Доказательство. Никаких других способов разбиения множества M на непустые непересекающиеся подмножества, кроме способов 1)–5), не существует.

Покажем, что все эти способы реализуются.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)(y - kx - b_2)(y - kx - b_3), \\ \frac{dy}{dt} = (y - kx - b_4)(y - kx - b_5)(y - k_0x - b_6), \end{cases} \quad (1.6.2)$$

где $b_i \neq b_j$, если $i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $k \neq k_0$.

Система (1.6.2) имеет пять параллельных между собой прямых изоклин, в том числе три изоклины бесконечности и две изоклины нуля, а также три особые точки. Таким образом, способ 1) разбиения множества M реализуется.

Далее покажем, что реализуется и способ 2) разбиения множества M на непустые непересекающиеся подмножества. Для этого рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)(y - kx - b_2)(y - kx - b_3), \\ \frac{dy}{dt} = (y - kx - b_4)Q_2(x, y). \end{cases} \quad (1.6.3)$$

где $Q_2(x, y) = \sum_{i+j=0}^2 b_{ij}x^i y^j$.

Система (1.6.3) имеет четыре параллельные прямые изоклины, в том числе три изоклины бесконечности и одна изоклина нуля. Покажем, что система (1.6.3) может иметь и пятую прямую изоклину $y - kx - b = 0$, не являющуюся главной.

Прямая $y - kx - b = 0$, $b \neq b_i$, где $i = \overline{1, 4}$, является изоклиной системы (1.6.3), но не главной в том и только в том случае, когда

$$Q_2(x, y) \equiv (y - kx - b)(Ax + By + C) + L, \text{ где } L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (1.6.4)$$

Из (1.6.4) получаем, что $L = b_{00} + b_{01}b + b_{02}b^2$, $A = b_{11} + b_{02}k$, $B = b_{02}$, $C = b_{01} + b_{02}b$, то есть система (1.6.3) имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)(y - kx - b_2)(y - kx - b_3), \\ \frac{dy}{dt} = (y - kx - b_4)[(y - kx - b)(b_{02}y + (b_{11} + b_{02}k)x + b_{01} + b_{02}) + b_{00} + b_{01}b + b_{02}b^2]. \end{cases} \quad (1.6.5)$$

Из (1.6.5) видно, что прямая $y - kx - b = 0$ — изоклина системы, не являющаяся главной. Тем самым доказана возможность разбиения множества M способом 2).

Пример 13.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y + x - 1)(y + x - 2)(y + x - 3), \\ \frac{dy}{dt} = (y + x - 5)[(y + x - 10)(y - x) + 20]. \end{cases}$$

Данная система имеет пять параллельных между собой прямых изоклин, в том числе три изоклины бесконечности, одна изоклина нуля и прямая $y + x - 10 = 0$, на которой индуцировано направление $m = 25/6$.

Покажем возможность разбиения множества M способом 3), для чего рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)(y - kx - b_2)(Ax + By + C), \\ \frac{dy}{dt} = (y - kx - b_3)(y - kx - b_4)(Rx + Ny + K), \end{cases} \quad (1.6.6)$$

где b_i — попарно различные числа, $i = \overline{1, 4}$, $AN - BR \neq 0$.

Покажем, что система (1.6.6) может иметь прямую изоклину $l : y - kx - b = 0, b \neq b_i, i = \overline{1, 4}$, которая не является главной.

Прямая l является изоклиной системы (1.6.6) в том и только в том случае, когда

$$\left(\frac{Rx + Ny + K}{Ax + By + C} \right)_{y=kx+b} \equiv m = const.$$

Из последнего равенства следует тождество

$$Rx + Ny + K \equiv \alpha(y - kx - b) + m(Ax + By + C),$$

то есть система (1.6.6) имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)(y - kx - b_2)(Ax + By + C), \\ \frac{dy}{dt} = (y - kx - b_3)(y - kx - b_4)[\alpha(y - kx - b) + m(Ax + By + C)], \end{cases} \quad (1.6.7)$$

где $\alpha, m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Очевидно, l — изоклина системы (1.6.7), и она не является главной.

Для доказательства возможности разбиения множества M способом 4) рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)(y - kx - b_2)(Ax + By + C), \\ \frac{dy}{dt} = (y - kx - b_3)Q_2(x, y), \end{cases} \quad (1.6.8)$$

где $Q_2(x, y) = \sum_{i+j=0}^2 b_{ij}x^i y^j$, b_i — попарно различны, $i = \overline{1, 3}$.

Пусть система (1.6.8) индуцирует на прямых $l_4 : y - kx - b_4 = 0$ и $l_5 : y - kx - b_5 = 0$ направления m_4 и m_5 соответственно, причем $m_4 \cdot m_5 \neq 0, m_4 \neq m_5$, все b_i — попарно различны, $i = \overline{1, 5}$.

Тогда имеют место равенства:

$$Q_2(x, y) - \bar{m}_4(Ax + By + C) \equiv (y - kx - b_4)R_1(x, y), \quad (1.6.9)$$

$$Q_2(x, y) - \bar{m}_5(Ax + By + C) \equiv (y - kx - b_5)S_1(x, y), \quad (1.6.10)$$

где R_1 и S_1 — линейные функции.

Решив систему (1.6.9), (1.6.10) относительно $Q_2(x, y)$ и $Ax + by + C$, получаем:

$$Q_2(x, y) \equiv \frac{1}{\bar{m}_4 - \bar{m}_5} \left[\bar{m}_4(y - kx - b_5)S_1(x, y) - \bar{m}_5(y - kx - b_4)R_1(x, y) \right], \quad (1.6.11)$$

$$Ax + By + C \equiv \frac{1}{\bar{m}_4 - \bar{m}_5} \left[(y - kx - b_5)S_1(x, y) - (y - kx - b_4)R_1(x, y) \right]. \quad (1.6.12)$$

Нетрудно убедиться в том, что $S_1(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$, $R_1(x, y) = \alpha x + \beta y + \omega$, $\gamma \neq \omega$.

Замена переменной

$$d\tau = \frac{dt}{\bar{m}_4 - \bar{m}_5}$$

с учетом (1.6.11) и (1.6.12) придает системе (1.6.8) вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = (y - kx - b_1)(y - kx - b_2)[(y - kx - b_5) \times \\ \times (\alpha x + \beta y + \gamma) - (y - kx - b_4)(\alpha x + \beta y + \omega)], \\ \frac{dy}{d\tau} = (y - kx - b_3)[\bar{m}_4(y - kx - b_5)(\alpha x + \beta y + \gamma) - \\ - \bar{m}_5(y - kx - b_4)(\alpha x + \beta y + \omega)]. \end{cases} \quad (1.6.13)$$

Очевидно, что прямые l_4 и l_5 — изоклины системы (1.6.13), но не главные. Таким образом, возможен способ 4) разбиения множества M .

Далее рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)P_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = (y - kx - b_2)Q_2(x, y), \quad b_1 \neq b_2, \end{cases} \quad (1.6.14)$$

к которой может быть приведена система (1.6.1) в силу теоремы 1.1.5 и следствия 1.1.1.

Если прямые $l_3 : y - kx - b_3 = 0$ и $l_4 : y - kx - b_4 = 0$, где b_i — попарно различные числа, $i = \overline{1, 4}$, изоклины системы (1.6.14), то имеют место равенства:

$$Q_2(x, y) - \bar{m}_3 P_2(x, y) \equiv (y - kx - b_3) R_1(x, y), \quad (1.6.15)$$

$$Q_2(x, y) - \bar{m}_4 P_2(x, y) \equiv (y - kx - b_4) S_1(x, y), \quad (1.6.16)$$

где R_1 и S_1 — линейные функции, $\bar{m}_3 \neq \bar{m}_4$.

С учетом (1.6.15) и (1.6.16) и замены $d\tau = dt/(\bar{m}_3 - \bar{m}_4)$ запишем систему (1.6.14) в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = (y - kx - b_1)[(y - kx - b_4)S_1(x, y) - \\ \quad - (y - kx - b_3)R_1(x, y)] \equiv (y - kx - b_1)\bar{P}_2(x, y), \\ \frac{dy}{d\tau} = (y - kx - b_2)[\bar{m}_3(y - kx - b_4)S_1(x, y) - \\ \quad - \bar{m}_4(y - kx - b_3)R_1(x, y)] \equiv (y - kx - b_2)\bar{Q}_2(x, y). \end{cases} \quad (1.6.17)$$

Пусть система (1.6.17) имеет прямую изоклину $l_5 : y - kx - b_5 = 0$, где $b_5 \neq b_i$, $i = \overline{1, 4}$.

Тогда имеет место равенство:

$$\bar{Q}_2(x, y) - \bar{m}_5 \bar{P}_2(x, y) \equiv (y - kx - b_5)T_1(x, y),$$

где T_1 — линейная функция. Из последнего равенства получаем соотношение:

$$\begin{aligned} (y - kx - b_4)S_1(x, y) &\equiv \frac{\bar{m}_4 - \bar{m}_5}{\bar{m}_3 - \bar{m}_5}(y - kx - b_3)R_1(x, y) + \\ &+ \frac{1}{\bar{m}_3 - \bar{m}_5}(y - kx - b_5)T_1(x, y). \end{aligned} \quad (1.6.18)$$

После замены $d\mu = d\tau/(\bar{m}_3 - \bar{m}_5)$ с учетом (1.6.18) система (1.6.17) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\mu} = (y - kx - b_1)[(\bar{m}_4 - \bar{m}_3)(y - kx - b_3)R_1(x, y) + \\ \quad + (y - kx - b_5)T_1(x, y)], \\ \frac{dy}{d\mu} = (y - kx - b_2)[\bar{m}_5(\bar{m}_4 - \bar{m}_3)(y - kx - b_3)R_1(x, y) + \\ \quad + \bar{m}_3(y - kx - b_5)T_1(x, y)]. \end{cases} \quad (1.6.19)$$

Нетрудно видеть, что прямые l_3, l_4, l_5 являются изоклинами системы (1.6.19), вместе с тем это не изоклины нуля и не изоклины бесконечности. Кроме этого, $\bar{m}_3, \bar{m}_4, \bar{m}_5$ могут быть попарно различными, то есть возможен способ 5) разбиения множества M . Теорема доказана.

Пример 14.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - x - 1)(12 + x - 7y - 3x^2 + 2xy + y^2), \\ \frac{dy}{dt} = (y - x - 2)(12 + 26x - 7y + 2x^2 - 3xy + y^2). \end{cases}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что, кроме прямолинейных главных изоклин данной система имеет еще три изоклины: $l_3 : y - x - 3 = 0$, $l_4 : y - x - 4 = 0$, $l_5 : y - x - 5 = 0$, на которых индуцированы направления: $m_3 = 4/3$, $m_4 = 1$, $m_5 = 3/4$ соответственно.

Теорема 1.6.2. *Пусть в условиях теоремы 1.6.1 множество M разбито на непустые непересекающиеся подмножества способом 2) или 5). Тогда система (1.6.1) не имеет ни одной прямой изоклины, не принадлежащей множеству M .*

Доказательство. Пусть множество M разбито на непустые непересекающиеся подмножества способом 2). Не уменьшая общности, рассмотрим вместо системы (1.6.1) систему (1.6.5). Предположим, что $L \notin M$ и L — прямая изоклина системы (1.6.5). В силу следствия 1.2.7 L пересекает все прямые из множества M . Так как прямая $y - kx - b = 0$ не является главной изоклиной системы (1.6.5), то на прямой L система (1.6.5) имеет не менее четырех особых точек, что противоречит свойству кубической дифференциальной системы иметь на прямой не более трех особых точек. В случае разбиения множества M на непустые непересекающиеся подмножества способом 5) приходим к такому же противоречию. Теорема доказана.

Теорема 1.6.3. *Пусть в условиях теоремы 1.6.1 множество M разбито на непустые непересекающиеся подмножества способом 1) или 4). Тогда система (1.6.1) имеет ровно шесть прямых изоклин.*

Доказательство. Пусть множество M разбито на непустые непересекающиеся подмножества способом 1). Тогда, не уменьшая общности, можно рассмотреть вместо системы (1.6.1) систему (1.6.2), которая имеет

ровно шесть прямых изоклин и три особые точки. Очевидно, на прямых изоклинах нуля $l_i : y - kx - b_i = 0$, $i = 4, 5$, система (1.6.2) не имеет особых точек. Предположим, что система (1.6.2) имеет прямую изоклину L_1 , не являющуюся главной изоклиной. В силу следствия 1.2.7 и теоремы 1.1.2 точка $A_i = l_i \cap L_1$, $i = 4, 5$ является особой для системы (1.6.2), пришли к противоречию.

Пусть множество M разбито на непересекающиеся непустые подмножества способом 4). Тогда вместо системы (1.6.1) рассматриваем систему (1.6.13). Очевидно, прямые $l_4 : y - kx - b_4 = 0$, $l_5 : y - kx - b_5 = 0$ — прямые изоклины системы (1.6.13), причем на этих прямых индуцированы различные направления поля системы (1.6.13). Кроме этого, l_4 и l_5 — не главные изоклины системы (1.6.13). Поэтому, если предположить о существовании прямой изоклины L_2 системы (1.6.13), которая не является ее изоклиной бесконечности (эта система уже имеет три прямые изоклины бесконечности), то по теореме 1.1.2 и следствию 1.2.7 система (1.6.13) имеет на прямой L_2 не менее четырех особых точек. Это противоречит свойству системы (1.6.1) иметь на прямой не более трех особых точек. Теорема доказана.

Теорема 1.6.4. *Пусть в условиях теоремы 1.6.1 множество M разбито на непустые непересекающиеся подмножества способом 3). Тогда система (1.6.1) имеет семь прямых изоклин.*

Доказательство. Пусть множество M разбито на непустые непересекающиеся подмножества способом 3). Тогда вместо системы (1.6.1) рассматриваем систему (1.6.7), которая, очевидно, имеет семь прямых изоклин, в том числе пять прямых из множества M , одну изоклину бесконечности $Ax + By + C = 0$ и одну изоклину нуля

$$\alpha(y - kx - b) + m(Ax + By + C) = 0.$$

Поэтому любая прямая изоклина L_3 системы (1.6.7), если бы она существовала и была отлична от указанных семи прямых изоклин, непременно пересекала бы все прямые из множества M . Но это невозможно, так как на L_3 система (1.6.7) не может иметь более трех особых точек. Теорема доказана.

1.7 Оценка общего числа прямых изоклин кубической дифференциальной системы

В работах [79, 81] сделано утверждение о том, что кубическая дифференциальная система, имеющая не менее девяти прямых изоклин, обладает девятью особыми точками. Это положение существенно было использовано при доказательстве теоремы о числе прямых изоклин системы (1.6.1) из [79, 81]. Однако, как будет показано ниже, данное утверждение о наличии девяти особых точек у системы (1.6.1), имеющей не менее девяти прямых изоклин, верно лишь в том случае, когда среди прямых изоклин системы нет двух параллельных, на которых индуцированы различные направления. Действительно, существуют системы вида (1.6.1) с девятью и десятью прямыми изоклинами, но с шестью и семью особыми точками.

Теорема 1.7.1. *Если система (1.6.1) имеет хотя бы одну особую точку и не менее девяти прямых изоклин, то число параллельных между собой прямых изоклин не более трех.*

Доказательство. Из теорем 1.6.2–1.6.4 следует, что при наличии у системы (1.6.1) пяти параллельных между собой прямых изоклин и хотя бы одной особой точки, эта система имеет не более семи прямых изоклин. Поэтому в условиях данной теоремы система (1.6.1) имеет не более четырех параллельных между собой прямых изоклин.

Пусть вопреки утверждению теоремы система имеет четыре параллельные между собой прямые изоклины. Множество M , состоящее из этих четырех прямых изоклин согласно [79] может быть разбито на непустые непересекающиеся подмножества только следующими тремя способами:

- a) $M = \{l_1^{m_1}, l_2^{m_1}, l_3^{m_1}\} \cup \{l_4^{m_2}\}$, $m_1 \neq m_2$;
- b) $M = \{l_1^{m_1}, l_2^{m_1}\} \cup \{l_3^{m_2}\} \cup \{l_4^{m_3}\}$, $m_i \neq m_j$, если $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$;
- c) $M = \bigcup_{i=1}^4 l_i^{m_i}$, где все m_i — попарно различны.

Так как система (1.6.1) индуцирует одно и то же направление не более чем на трех прямых изоклинах, то из остальных не менее чем пяти прямых изоклин системы (1.6.1) найдется хотя бы одна, на которой индуцировано направление $m_0 \neq m_{1,2}$. Таким образом, найденная прямая

изоклина в случае а) пересекает все четыре, параллельные между собой прямые изоклины, то есть система имеет на одной прямой не менее четырех особых точек, что недопустимо для системы (1.6.1). Тем самым доказано, что случай а) невозможен.

В случае разбиения множества M способом *b*) система (1.6.1) посредством подходящего линейного преобразования может быть приведена к системе:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)(y - kx - b_2)(Ax + By + C), \\ \frac{dy}{dt} = (y - kx - b_3)Q_2(x, y), \end{cases} \quad (1.7.0)$$

$$\text{где } Q_2(x, y) = \sum_{i+j=0}^2 b_{ij}x^i y^j.$$

Обозначим прямые $y - kx - b_1 = 0$, $y - kx - b_2 = 0$, $y - kx - b_3 = 0$ через l_1^∞ , l_2^∞ и l_3^0 соответственно. Прямая $L : Ax + By + C = 0$ пересекает прямые l_1^∞ , l_2^∞ и l_3^0 , так как иначе имели бы случай а). Система (1.7.0) имеет прямую изоклину $l_4^{m_3}$ ($m_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), параллельную прямым l_1^∞ , l_2^∞ , l_3^0 . Поэтому система (1.7.0) имеет на прямых l_3^0 и $l_4^{m_3}$ по одной особой точке. Пусть $F = l_3^0 \cap L$, $G = l_4^{m_3} \cap L$.

Из не менее чем четырех остальных прямых изоклин системы (1.7.0) найдется хотя бы одна, на которой индуцировано направление, отличное от m_3 . Следовательно, эта прямая проходит через точку G (иначе на $l_4^{m_3}$ расположены не менее двух особых точек) и пересекает прямую l_3^0 в точке, отличной от F . Поэтому эта прямая является изоклиной нуля (в противном случае на l_3^0 , кроме F есть еще одна особая точка), обозначим ее l_G^0 . Согласно [79] не более чем на одной из остальных не менее чем трех прямых изоклин системы (1.7.0) индуцировано направление $m = 0$. Следовательно, не менее двух прямых изоклин системы (1.7.0), отличных от главных, пересекают l_3^0 в точке F . Эти две прямые и прямая l_G^0 пересекают хотя бы одну из двух параллельных прямых изоклин бесконечности l_1^∞ и l_2^∞ в трех особых точках. Но это невозможно, так как l_1^∞ и l_2^∞ пересекаются с кривой второго порядка $Q_2(x, y) = 0$ не более чем в двух точках. Тем самым доказана невозможность разбиения множества M способом *b*).

В случае разбиения множества M на непустые непересекающиеся подмножества способом с) существует невырожденное линейное преобразование вида (1.5.2), переводящее систему (1.6.1) в систему (1.6.14). Далее, учитывая, что система (1.6.14) имеет еще две прямые изоклины $l_3^{m_3} : y - kx - b_3 = 0, l_4^{m_4} : y - kx - b_4 = 0$, кроме прямых изоклинов $l_1^\infty : y - kx - b_1 = 0, l_2^0 : y - kx - b_2 = 0$, где все $b_i(i = \overline{1, 4})$ — попарно различны, системе (1.6.14) можно придать вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = (y - kx - b_1)[(y - kx - b_4)S_1(x, y) - \\ \quad -(y - kx - b_3)R_1(x, y)], \\ \frac{dy}{d\tau} = (y - kx - b_2)[\bar{m}_3(y - kx - b_4)S_1(x, y) - \\ \quad -\bar{m}_4(y - kx - b_3)R_1(x, y)], \end{cases} \quad (1.7.1)$$

где R_1 и S_1 — линейные функции.

Из (1.7.1) видно, что на каждой из прямых l_1^∞ и l_2^0 расположено не более одной особой точки. Аналогично на каждой из прямых $l_3^{m_3}$ и $l_4^{m_4}$ расположено не более одной особой точки. С другой стороны, каждая из не менее чем пяти прямых изоклинов системы пересекает параллельные между собой четыре прямые изоклины. Следовательно, на каждой прямой $l_1^\infty, l_2^0, l_3^{m_3}, l_4^{m_4}$ система (1.7.1) имеет ровно одну особую точку. Рассмотрим одну из прямых изоклинов системы (1.7.1), не принадлежащих множеству M , обозначим ее через $L_1^{M_1}$. Очевидно, на $L_1^{M_1}$ система (1.7.1) имеет три особые точки. Не уменьшая общности, считаем, что $M_1 = m_4$.

Введем обозначения для особых точек, лежащих на $L_1^{M_1} : A = l_1^\infty \cap L_1^{M_1}, B = l_2^0 \cap L_1^{M_1}, C = l_3^{m_3} \cap L_1^{M_1}$. По теореме 1.1.5 среди не менее чем четырех прямых изоклинов системы (1.7.1), не принадлежащих множеству M , найдется прямая $L_2^{M_2}$, где $M_2 \neq M_1$. Тогда $L_2^{M_2}$ пересекает $L_1^{M_1}$ в одной из особых точек A, B и C системы (1.7.1). Это означает, что хотя бы на одной из прямых изоклинов l_1^∞, l_2^0 и $l_3^{m_3}$ система (1.7.1) имеет не менее двух особых точек. Пришли к противоречию с тем, что на любой прямой из множества M система (1.7.1) имеет ровно одну особую точку. Теорема доказана.

Теорема 1.7.2. *Если система (1.6.1) имеет три параллельные между собой прямые изоклины, на которых индуцировано одно и то же*

направление, то любая особая точка расположена на одной из этих прямых.

В самом деле, в силу следствия 1.1.1, систему (1.6.1) можно привести к виду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)(y - kx - b_2)(y - kx - b_3), \\ \frac{dy}{dt} = Q_3(x, y), \end{cases} \quad (1.7.2)$$

где $b_i (i = \overline{1, 3})$ — попарно различные числа.

Как видно из (1.7.2) любая особая точка расположена на одной из трех прямолинейных изоклин бесконечности.

Теорема 1.7.3. *Пусть система (1.6.1) имеет три параллельные между собой прямые изоклины, на которых индуцировано одно и то же направление. Тогда эта система имеет не более семи прямых изоклин, если хотя бы через одну из особых ее точек проходит не менее двух прямых изоклин, на которых индуцировано одно и то же направление.*

Доказательство. Согласно условию теоремы существует аффинное преобразование, переводящее систему (1.6.1) в систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx)(y - kx - b_1)(y - kx - b_2), \\ \frac{dy}{dt} = (y - k_1x)(y - k_2x)(Ax + By + C), \end{cases} \quad (1.7.3)$$

где $b_1 \cdot b_2 \neq 0$, $b_1 \neq b_2$, $k_1 \neq k_2$, $k \neq k_i, i = 1, 2$.

Для удобства дальнейших рассуждений введем обозначения:

$$l_1^\infty : y - kx = 0; \quad l_2^\infty : y - kx - b_1 = 0; \quad l_3^\infty : y - kx - b_2 = 0;$$

$$l_4^0 : y - k_1x = 0; \quad l_5^0 : y - k_2x = 0; \quad l_6^0 : Ax + By + C = 0.$$

Ни одна прямая изоклина системы (1.7.3), не являющаяся главной, не проходит через особую точку $O(0, 0)$.

В самом деле, если бы существовала прямая изоклина $y = k_3x$, не являющаяся для системы (1.7.3) главной, то выполнялось бы равенство

$$\begin{aligned} & (k_3 - k_1)(k_3 - k_2)x^2[(A + Bk_3)x + C] \equiv \\ & \equiv m_3(k_3 - k)x[(k_3 - k)x - b_1][(k_3 - k)x - b_2], \end{aligned} \quad (1.7.4)$$

где $m_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Но равенство (1.7.4) не выполнимо в силу неравенства $b_1 \cdot b_2 \neq 0$.

Если $C = 0$, то система (1.7.4) не имеет прямой изоклины, отличной от главных. Предположим, что это не так, то есть пусть существует l_7^m — прямая изоклина системы (1.7.3), на которой индуцировано направление $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда приходим к невыполнимому равенству:

$$(k_7 - k_1)(k_7 - k_2)(A + Bk_7)x^3 \equiv (k_7 - k)[(k_7 - k)x - b_1][(k_7 - k)x - b_2]m,$$

полагая, что $y - k_7x = 0$ — уравнение изоклины l_7^m .

Таким образом, при $C = 0$ утверждение теоремы верно. Поэтому предположим, что $C \neq 0$, то есть прямая l_6^0 не проходит через начало координат $O(0, 0)$.

Легко видеть, что на каждой прямой изоклине l_4^0 и l_5^0 система (1.7.3) имеет три особые точки, причем каждая особая точка этой системы расположена на одной из прямых изоклин бесконечности по теореме 1.7.2. Поскольку прямая l_6^0 при $C \neq 0$ проходит через любую точку плоскости, кроме начала координат $O(0, 0)$, то можно предположить, что $l_6^0 \parallel l_1^\infty$. В этом случае система (1.7.3) имеет ровно шесть прямых изоклин, и все они главные изоклины системы. Действительно, допустив существование прямой изоклины, не являющейся главной для системы (1.7.3), мы тем самым приходим к противоречию с теоремой 1.7.2.

Рассмотрим последнюю возможность для прямой l_6^0 , а именно случай ее пересечения с прямыми изоклинами бесконечности, не проходя через точку $O(0, 0)$. Очевидно, при этом $W = l_6^0 \cap l_1^\infty$ — особая точка системы (1.7.3). Из (1.7.3) видно, что на прямой l_1^∞ система (1.7.3) имеет только две особые точки $O(0, 0)$ и W . Поэтому любая прямая изоклина системы (1.7.3), отличная от главных ее изоклин, непременно проходит через точку W .

Изобразим на рис. 20 (рис. 21) взаимное расположение главных изоклинов системы (1.7.3), кроме прямой l_6^0 .

На рис. 20 прямые l_2^∞ и l_3^∞ расположены в одной полуплоскости относительно прямой l_1^∞ , а на рис. 21 — в разных полуплоскостях.

В зависимости от того расположена точка W слева или справа от точки O прямой изоклиновой системы (1.7.3), являющейся главной, мо-

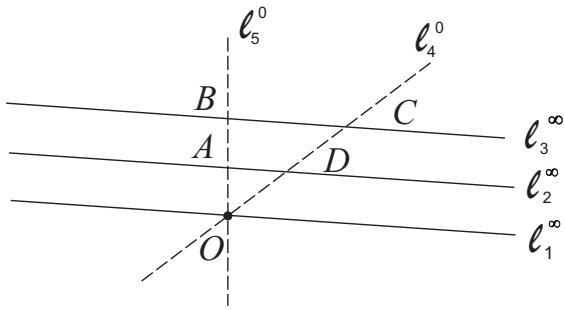


Рис. 20. Прямые ℓ_2^{∞} и ℓ_3^{∞} расположены в одной полуплоскости относительно ℓ_1^{∞}

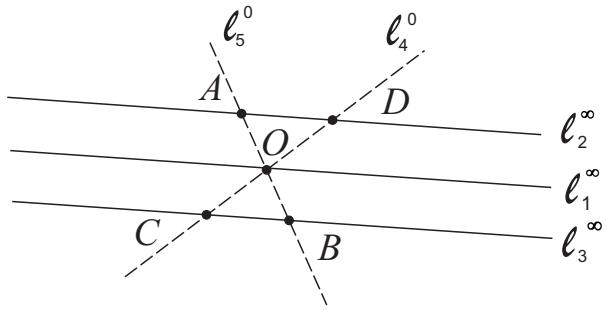


Рис. 21. Прямые ℓ_2^{∞} и ℓ_3^{∞} расположены в разных полуплоскостях относительно ℓ_1^{∞}

жет быть только прямая AC или BD , то есть система (1.7.3) имеет не более семи прямых изоклин. Теорема доказана.

Теорема 1.7.4. *Пусть множество всех прямых изоклин системы (1.6.1) разбито на подмножества так, что элементами одного и того же подмножества являются прямые, на которых индуцировано одно и то же направление. Если среди этих подмножеств есть такое, которое состоит только из двух прямых, то число прямых изоклин у системы (1.6.1) при наличии у нее хотя бы одной особой точки не более шести.*

Доказательство. Пусть $M_1^{m_1}$ — подмножество множества M всех прямых изоклин системы (1.6.1), состоящее из двух прямых. Относительно остальных подмножеств M возможны следующие предположения:

- 1) существует хотя бы одно трехэлементное подмножество;
- 2) нет трехэлементного подмножества.

Если наряду с $M_1^{m_1}$ у системы (1.6.1) существует трехэлементное подмножество, тогда систему (1.6.1) посредством аффинного преобразования можно привести к виду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - k_1x - b_1)(y - k_2x - b_2)^2, \\ \frac{dy}{dt} = \alpha(y - k_3x - b_3)(y - k_4x - b_4)(y - k_5x - b_5), \end{cases} \quad (1.7.5)$$

где $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Введем обозначения:

$$l_1^{\infty} : y - k_1x - b_1 = 0, \quad l_2^{\infty} : y - k_2x - b_2 = 0, \quad l_3^0 : y - k_3x - b_3 = 0,$$

$$l_4^0 : y - k_4 x - b_4 = 0, \quad l_5^0 : y - k_5 x - b_5 = 0.$$

Рассмотрим два случая: a) $l_1^\infty \parallel l_2^\infty$; b) $l_1^\infty \cap l_2^\infty \neq \emptyset$.

Пусть имеет место случай a). Тогда можно утверждать, что никакая прямая изоклина системы (1.7.5), отличная от главных изоклин, не параллельна ни одной из главных изоклин этой системы. Предположим противное, то есть пусть l_6^m — прямая изоклина системы (1.7.5), на которой индуцировано направление $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и которая задана уравнением $y - k_6 x - b_6 = 0$, причем $k_6 = k_1$. Поскольку хотя бы одна из прямых изоклин нуля пересекает обе прямые изоклины бесконечности системы (1.7.5), то согласно теореме 1.1.2 на прямой l_6^m эта система имеет хотя бы одну особую точку. Приходим к противоречию с тем, что все особые точки системы (1.7.5) расположены на изоклинах l_1^∞ и l_2^∞ . Таким образом, $k_6 \neq k_1$. Отсюда и из вида правых частей уравнений системы (1.7.5) следует, что $k_6 \neq k_i, \forall i \in \{3, 4, 5\}$.

Так как в случае a) любая прямая изоклина системы (1.7.5), не являющаяся главной, непременно пересекает все ее главные изоклины, то предположим, что l_6^m — одна из таких изоклин. Обозначим точки пересечения l_6^m с прямыми l_1^∞ и l_2^∞ через A и B соответственно. В силу того, что l_6^m пересекает все изоклины нуля, а система (1.7.5) не имеет особых точек, лежащих вне прямых l_1^∞ и l_2^∞ , каждая из прямых l_3^0, l_4^0, l_5^0 проходит через одну из точек A и B . Прямые l_3^0, l_4^0, l_5^0 — попарно различны, поэтому две из них проходят через одну из точек A и B , а третья — через вторую особую точку (см. рис. 22).

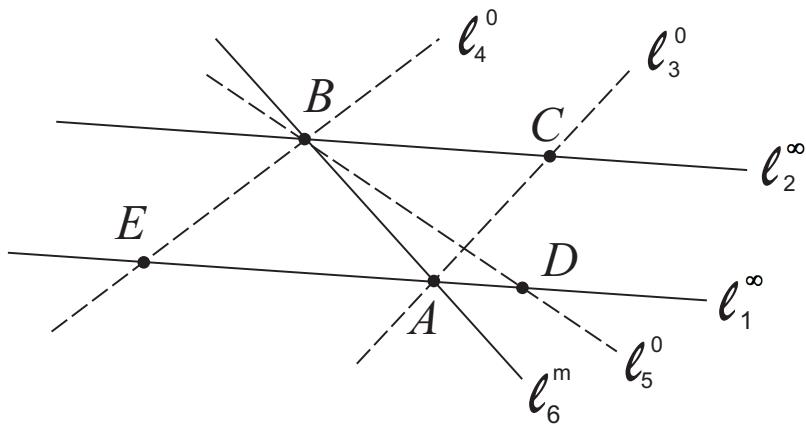


Рис. 22. Прохождение прямых изоклин через особые точки

Очевидно, через точку B не проходит никакая прямая изоклина, от-

личная от изображенных на рис. 22, так как в противном случае система имела бы на прямой l_1^∞ четыре особые точки, что недопустимо для кубической системы. Именно по этой причине любая прямая изоклина, отличная от изображенных на рис. 22, должна проходить через точку E , A или D . Вместе с тем каждая такая прямая пересекает, как нами установлено выше, все три изоклины нуля. При этом одна из этих точек пересечения расположена вне прямых l_1^∞ и l_2^∞ , что противоречит свойству системы (1.7.5) иметь все особые точки на прямых l_1^∞ и l_2^∞ .

Если бы точки E и D лежали по одну сторону от A или точка C лежала левее точки B , мы рассуждали бы аналогично и пришли бы к такому противоречию. Тем самым доказано, что система (1.7.5) в случае а) не может иметь более шести прямых изоклин.

Пусть далее имеет место случай б). Предположим, что существуют прямые изоклины системы (1.7.5), отличные от главных изоклин, и одной из них является прямая l_6^m . Относительно расположения l_6^m существуют две возможности: l_6^m пересекает обе изоклины бесконечности; l_6^m пересекает только одну из прямых l_1^∞ и l_2^∞ . Из вида правых частей уравнений системы (1.7.5) следует, что если l_6^m пересекает l_1^∞ и l_2^∞ , то никакая прямая изоклина нуля не параллельна прямой l_6^m . Поэтому система (1.7.5) имеет не более шести прямых изоклин.

Пусть l_6^m пересекает только одну из прямых l_1^∞ и l_2^∞ . Если $l_1^\infty \cap l_6^m = A$, $l_6^m \parallel l_2^\infty$, то две прямые изоклины нуля параллельны прямой l_6^m , а третья прямая изоклина нуля пересекает ее. Очевидно, что на l_6^m система (1.7.5) имеет единственную особую точку A . Поэтому любая другая прямая изоклина (1.7.5) проходит через точку A и пересекает две прямые изоклины нуля, параллельные прямой l_6^m . Пришли к противоречию с тем, что система (1.7.5) не имеет особых точек вне прямых l_1^∞ и l_2^∞ . Если $l_2^\infty \cap l_6^m = A$, $l_1^\infty \parallel l_6^m$, то рассуждения аналогичны.

Рассмотрим теперь случай 2) отсутствия трехэлементного подмножества множества M . Здесь необходимо различать случаи: с) существует хотя бы одно двухэлементное подмножество множества M , отличное от $M_1^{m_1}$; д) нет ни одного двухэлементного подмножества множества M , отличного от $M_1^{m_1}$.

В случае с) систему (1.6.1) приводим к виду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(y - k_1x - b_1)(y - k_2x - b_2)^2, \\ \frac{dy}{dt} = \beta(y - k_3x - b_3)(y - k_4x - b_4)^2. \end{cases} \quad (1.7.6)$$

При наличии трех и меньшего числа особых точек системы (1.7.6) отсутствие прямой изоклины, отличной от главных изоклин, очевидно. Поэтому, пусть система имеет четыре особые точки. Тогда прямая изоклина системы (1.7.6), отличная от главной изоклины, должна проходить через вершины четырехугольника (выпуклого или невыпуклого). Следовательно, число прямых изоклин системы (1.7.6) и в этом случае не более шести.

Пусть имеет место случай d). Тогда систему (1.6.1) приводим к виду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - k_1x - b_1)(y - k_2x - b_2)^2, \\ \frac{dy}{dt} = (y - k_3x - b_3)Q_2(x, y), \end{cases} \quad (1.7.7)$$

где $Q_2(x, y)$ — неприводимый многочлен второй степени.

Если $k_1 = k_2 = k_3$, то на прямой $l_3^0 : y - k_3x - b_3 = 0$ нет особых точек системы (1.7.7), поэтому любая прямая изоклина, отличная от главных изоклин, если она есть, параллельна трем прямым l_3^0 , $l_1^\infty : y - k_1x - b_1 = 0$, $l_2^\infty : y - k_2x - b_2 = 0$. Согласно следствию 1.2.7 система (1.7.7) имеет не более пяти параллельных между собой прямых изоклин.

Пусть далее $k_1 = k_2, k_1 \neq k_3$. Тогда на прямой l_3^0 система (1.7.7) имеет две особые точки. Легко видеть, что при этом система не имеет прямой изоклины, параллельной изоклине нуля l_3^0 . Следовательно, какая бы прямая изоклина системы (1.7.7), отличная от ее главных изоклин, ни существовала, она обязательно проходит через одну из особых точек $A = l_3^0 \cap l_1^\infty$ и $B = l_3^0 \cap l_2^\infty$.

Предположим, что система (1.7.7) имеет более шести прямых изоклин. Тогда учитывая, что через особую точку кубической системы проходит не более пяти прямых изоклин, можно утверждать: либо через одну из особых точек A и B проходят три прямые изоклины, отличные от главных изоклин, а через другую — не менее одной прямой изоклины,

либо через каждую из этих двух точек проходят по две прямые изоклины. В результате приходим к противоречию, которое состоит в том, что либо на одной из изоклин бесконечности l_1^∞ и l_2^∞ расположены четыре особые точки, либо система (1.7.7) имеет особые точки вне прямых l_1^∞ и l_2^∞ .

Далее рассмотрим случай $k_1 \neq k_2$, но $k_2 = k_3$ либо $k_1 = k_3$. Для определенности считаем, что $l_3^0 \cap l_1^\infty = A$ — единственная на прямой l_3^0 особая точка системы (1.7.7). Так как все прямые изоклины, отличные от главных изоклин системы (1.7.7), являются элементами одноэлементных подмножеств множества M , то любая такая прямая либо параллельна прямой l_3^0 , либо пересекает ее в точке A . Но прямых изоклин, параллельных прямой l_3^0 , не более двух, так как иначе на прямой l_1^∞ более трех особых точек. Через точку A проходит также не более двух прямых изоклин, так как в противном случае на прямой l_2^∞ система имеет не менее трех особых точек. Это противоречит тому, что прямая l_2^∞ пересекается с кривой второго порядка $Q_2(x, y)$ не более чем в двух точках.

Рассмотрим последнюю возможность взаимного расположения прямых l_1^∞ , l_2^∞ и l_3^0 , а именно, $A = l_3^0 \cap l_1^\infty$ и $B = l_3^0 \cap l_2^\infty$ — особые точки системы (1.7.7). Если $A \equiv B$, то согласно следствию 1.4.1 через точку A проходит не более пяти прямых изоклин, а других система не имеет. Поэтому рассмотрим случай, когда A и B — несовпадающие особые точки. Если через одну из особых точек A и B проходят две прямые изоклины, отличные от главных, то через другую не проходит ни одна такая прямая изоклина. В самом деле, если через A проходят две прямые изоклины, отличные от l_1^∞ и l_3^0 , а через точку B проходит хотя бы одна прямая изоклина, не являющаяся главной, то из этих трех прямых хотя бы две пересекаются в точке, не лежащей на изоклине l_1^∞ и l_2^∞ . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Следствие 1.7.1. Если система (1.6.1) имеет не менее семи прямых изоклин и хотя бы одну особую точку, то во множестве всех ее прямых изоклин содержатся лишь трехэлементные и одноэлементные подмножества.

Пример 15 [63]. Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y-1)(y-a)}{x(x-1)(x-a)}, \quad a > 1, \quad a \neq 2,$$

имеет ровно семь прямых изоклин (они же интегральные прямые): $x = 0$, $x = 1$, $x = a$, $y = 0$, $y = 1$, $y = a$. Причем все множество прямых изоклин разбито на два трехэлементных подмножества:

$M_1^\infty = \{x = 0; x = 1; x = a\}$ — множество изоклин бесконечности,
 $M_2^0 = \{y = 0; y = 1; y = a\}$ — множество изоклин нуля,
 $M_3^1 = \{y = x\}$ — одноэлементное множество, состоящее из одной изоклины, на которой индуцировано направление $m = 1$.

Следствие 1.7.2. Если дифференциальное уравнение фазовых траекторий системы (1.6.1) имеет восемь интегральных прямых, то во множестве его прямых изоклин содержится не менее двух трехэлементных подмножеств.

Пример 16 [62]. Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y-1)(3x-2y-2)}{x(x-1)(x-2)}$$

имеет десять прямых изоклин, в том числе три трехэлементных подмножества:

$M_1^\infty = \{x = 0; x - 1 = 0; x - 2 = 0\}$,
 $M_2^0 = \{y = 0; y - 1 = 0; 3x - 2y - 2 = 0\}$,
 $M_3^1 = \{y = x; y = x - 1; y = -\frac{1}{2}x + 1\}$ и одно одноэлементное подмножество $M_4^{\frac{1}{2}} = \{y = \frac{1}{2}x\}$.

Пример 17 [62]. Для дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y-1)(y-2)}{x(x-1)(x-2)}$$

интегральными являются следующие прямые: $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$, $y = x$, $y = -x + 2$.

Множество всех прямых изоклин данного уравнения исчерпывается указанными восемью интегральными прямыми. Оно имеет два трехэлементных подмножества: множество изоклин бесконечности и множество изоклин нуля, а также два одноэлементных подмножества $\{y = x\}$ и $\{y = -x + 2\}$.

Теорема 1.7.5. *Если система (1.6.1) имеет три прямые изоклины, на которых индуцировано одно и то же направление, то любая ее особая точка расположена хотя бы на одной из этих прямых.*

Доказательство для данной теоремы аналогично доказательству теоремы 1.7.2.

Лемма 1.7.1. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (A_1x + B_1y + C_1) \cdot P_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = (A_2x + B_2y + C_2) \cdot Q_2(x, y), \end{cases} \quad (1.7.8)$$

где $P_2(x, y)$ и $Q_2(x, y)$ — неприводимые над полем \mathbb{R} многочлены, имеет менее девяти прямых изоклин, если эта система имеет хотя бы одну особую точку.

Доказательство. Предположим, что число прямых изоклин системы (1.7.8) не менее девяти.

Рассмотрим два случая:

- 1) Изоклина бесконечности $l_1^\infty : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и изоклина нуля $l_2^0 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ параллельны;
- 2) $l_1^\infty \cap l_2^0 \neq \emptyset$.

Пусть имеет место случай 1). Тогда по теореме 1.2.2 система (1.7.8) имеет на каждой из прямых l_1^∞ и l_2^0 не более двух особых точек. Так как по предположению система имеет не менее девяти прямых изоклин, то она, кроме l_1^∞ и l_2^0 , имеет еще не более одной прямой изоклины, параллельной этим двум прямым. Поэтому l_1^∞ и l_2^0 пересекают не менее шести прямых изоклин системы (1.7.8).

В силу следствия 1.4.1 через особую точку системы (1.7.8) проходит не более пяти прямых изоклин. Таким образом, делаем вывод: а) на каждой из прямых l_1^∞ и l_2^0 система (1.7.8) имеет хотя бы одну особую точку; в) на каждой из прямых l_1^∞ и l_2^0 найдется особая точка, которой инцидентны не менее трех прямых изоклин. Пусть $A \in l_1^\infty$ и A — особая точка системы (1.7.8), через которую проходят не менее трех прямых изоклин. Так как, кроме l_2^0 система (1.7.8) не имеет ни одной прямой изоклины нуля, то по теореме 1.1.2 на l_2^0 эта система имеет более двух особых точек. Пришли к противоречию с тем, что что на l_2^0 система (1.7.8) имеет

не более двух особых точек.

Пусть далее имеет место случай 2). Так как на каждой прямой системы (1.7.8) имеет не более трех особых точек, то в сумме на прямых l_1^∞ и l_2^0 система имеет не более пяти. Изобразим на рисунках все возможные конфигурации особых точек, расположенныхных на прямых l_1^∞ и l_2^0 .

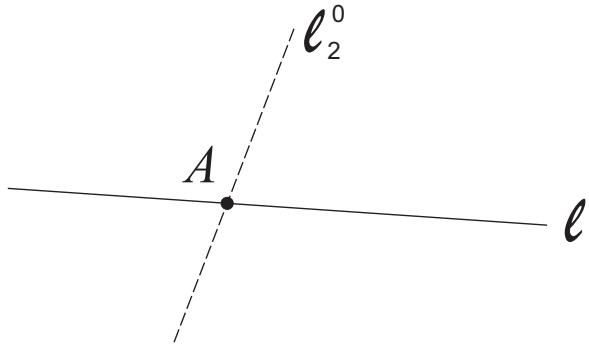


Рис. 23.

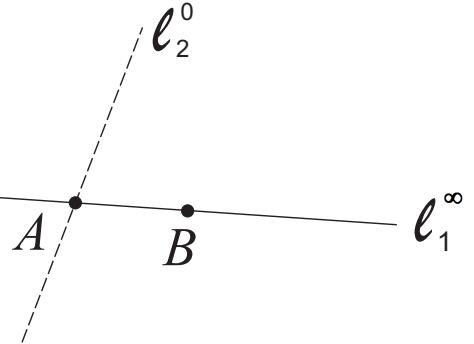


Рис. 24.

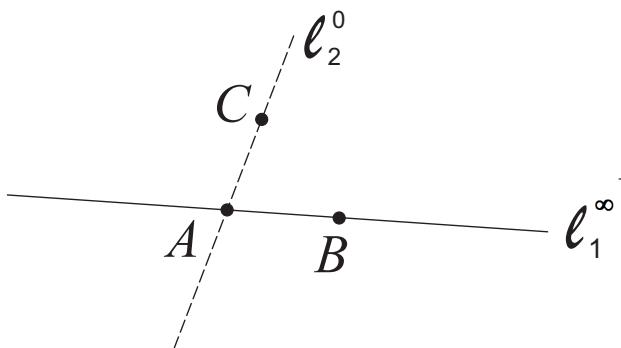


Рис. 25.

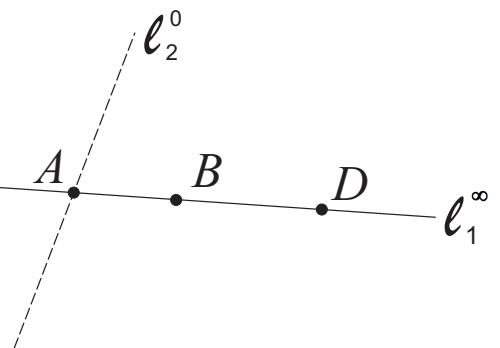


Рис. 26.

В случаях конфигураций, изображенных на рисунках 23, 24, 26, 27 любая прямая изоклина системы (1.7.8), отличная от l_1^∞ и l_2^0 , проходит только через особую точку A . Если это не так, прямая изоклина, проходящая через точки B и D , параллельна прямой l_2^0 , то есть имеем уже рассмотренный случай 1). Но через особую точку A проходит не более пяти прямых изоклин, и общее число прямых изоклин системы (1.7.8) не более пяти.

Так как прямая изоклина системы (1.7.8), проходящая через особую точку B , не параллельна прямой l_2^0 , а прямая изоклина, проходящая

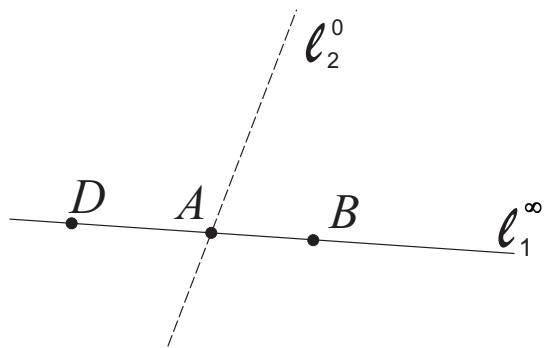


Рис. 27.

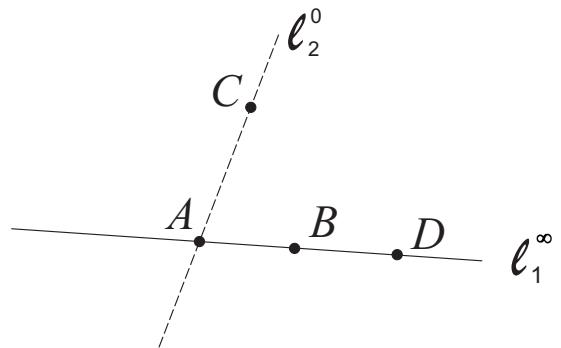


Рис. 28.

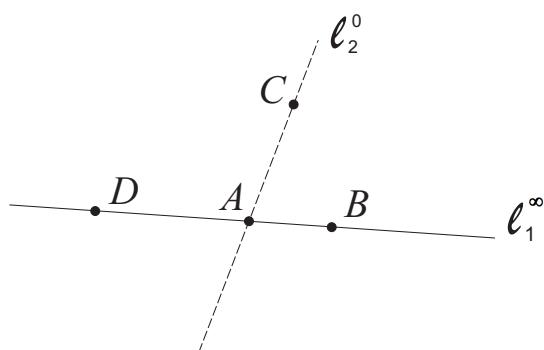


Рис. 29.

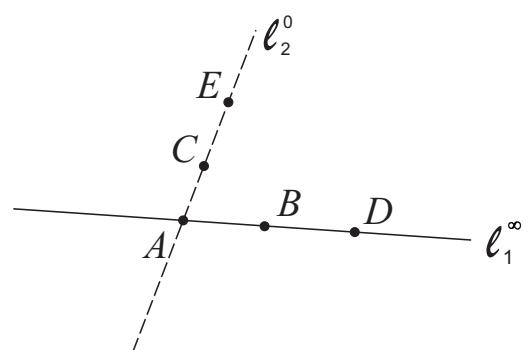


Рис. 30.

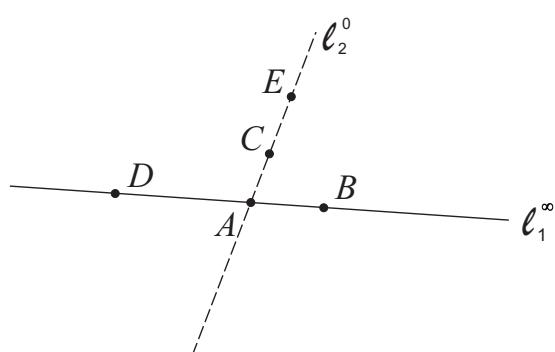


Рис. 31.

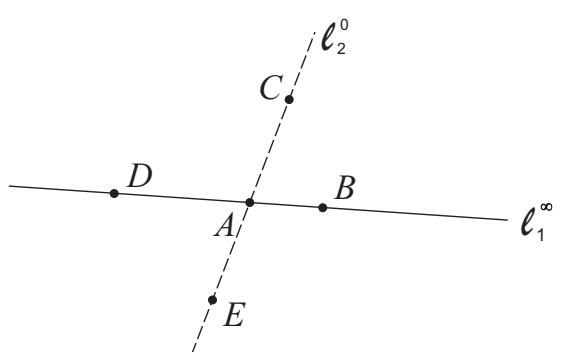


Рис. 32.

через C , не параллельна прямой l_1^∞ , то в случае конфигурации, изображенной на рис.25, кроме прямой BC , которая, быть может, является изоклиной, система (1.7.8) может иметь не более пяти прямых изоклин, то есть общее число прямых изоклин системы (1.7.8) не превосходит шести.

В случае конфигураций, изображенных на рис.28 и 29 возможными прямыми изоклинами системы (1.7.8) являются прямые BC, DC и те прямые, которые инцидентны точке A , то есть общее число прямых изоклин системы не более семи. Если имеет место взаимное расположение пяти особых точек системы (1.7.8) (см. рис.30-32), то общее число прямых изоклин системы меньше девяти. Действительно, возможными прямыми изоклинами системы являются прямые $BE, BC, DE, DC, l_1^\infty, l_2^0$ и еще три прямые изоклины, условно их обозначим через L_1, L_2, L_3 , проходящие через особую точку A . На всех трех прямых $L_i, i = \overline{1, 3}$, не может быть индуцировано одно и то же направление, так как в противном случае все особые точки системы по теореме 1.7.5 расположены на этих трех прямых, что невозможно.

Пусть на двух прямых, например, L_1 и L_2 индуцировано одно и то же направление. Тогда, хотя бы на одной из прямых BE, BC, DE, DC система имеет не менее четырех особых точек, что недопустимо для кубической дифференциальной системы.

Наконец, пусть на всех трех прямых L_1, L_2, L_3 индуцированы попарно различные направления. Тогда имеем ситуацию, когда через особую точку A проходят пять прямых изоклин, на которых индуцированы попарно различные направления. А так как эта система (1.7.8) не имеет двух параллельных прямых изоклин, то система имеет на прямых BE, BC, DE, DC пять особых точек. Это невозможно.

Теорема доказана.

Теорема 1.7.6. *Если система (1.6.1) имеет не менее девяти прямых изоклин и хотя бы одну особую точку, то во множестве ее прямых изоклин не может быть более одного одноэлементного подмножества.*

Доказательство. Пусть вопреки утверждению теоремы во множестве прямых изоклин системы (1.6.1) имеется не менее двух одноэлемент-

ных подмножеств. Выберем из них любые два подмножества и обозначим их $\{l_1^{m_1}\}$ и $\{l_2^{m_2}\}$, где $m_1 \neq m_2$. С помощью преобразования (1.5.2) система (1.6.1) может быть приведена к виду (1.6.14), где $P_2(x, y)$ и $Q_2(x, y)$ — неприводимые над полем действительных чисел многочлены второй степени. По лемме 1.7.1 такая система имеет менее девяти прямых изоклин. Следовательно, теорема доказана.

Теорема 1.7.7. *Если система (1.6.1) имеет ровно девять прямых изоклин и хотя бы одну особую точку, то множество всех её прямых изоклин состоит из трех непересекающихся подмножеств, в каждом из которых три прямые изоклины.*

Доказательство. Пусть n — число всех прямых изоклин системы (1.6.1), k — число одноэлементных подмножеств множества M , состоящего из n прямых изоклин. Тогда в силу следствия 1.7.1 и теоремы 1.7.6 имеет место сравнение

$$n \equiv k \pmod{3}, \quad k = \overline{0; 1}. \quad (1.7.9)$$

Из (1.7.9) при $n = 9$ следует, что $k = 0$, то есть число трех элементных подмножеств множества M равно 3. Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 1.7.8. *Если система (1.6.1) имеет десять прямых изоклин и хотя бы одну особую точку, то множество этих десяти прямых изоклин состоит из трех трехэлементных подмножеств и одного одноЭлементного подмножества.*

Теорема 1.7.9. *Пусть $M_1^{m_1}$ и $M_2^{m_2}$ — подмножества множества всех прямых изоклин системы (1.6.1), состоящие из трех прямых, причем m_1 и m_2 — различные направления, индуцированные на прямых из множеств $M_1^{m_1}$ и $M_2^{m_2}$ соответственно. Если система (1.6.1) имеет менее девяти особых точек, то либо существуют прямые $l_1^{m_1} \in M_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2} \in M_2^{m_2}$, такие, что $l_1^{m_1} \parallel l_2^{m_2}$, либо хотя бы в одном из множеств $M_1^{m_1}$ и $M_2^{m_2}$ найдутся две прямые, пересекающиеся в особой точке.*

Доказательство. Так как по условию существуют два трехэлементных подмножества $M_1^{m_1}$ и $M_2^{m_2}$ множества всех прямых изоклин системы

(1.6.1), то она может быть преобразована в систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(y - k_1x - b_1)(y - k_2x - b_2)(y - k_3x - b_3), \\ \frac{dy}{dt} = \beta(y - k_4x - b_4)(y - k_5x - b_5)(y - k_6x - b_6), \end{cases} \quad (1.7.10)$$

где $\alpha \cdot \beta \neq 0$. Предположим, что нет двух параллельных прямых, одна из которых является изоклиной нуля, а другая — изоклиной бесконечности, и нет двух прямых изоклин нуля или изоклин бесконечности, непересекающихся в особой точке. Тогда на каждой прямой изоклине системы (1.7.10) имеется три особые точки, среди которых нет общих для двух изоклин бесконечности (изоклины нуля), т.е. число особых точек системы (1.7.10) равно девяти. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теорема 1.7.10. *Пусть система (1.6.1) имеет хотя бы одну особую точку и не менее девяти прямых изоклин, в том числе две параллельные прямые $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$, на которых система индуцирует различные направления t_1 и t_2 соответственно. Тогда существует прямая изоклина $l_3^{m_3}$, параллельная прямым $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$, на которой система (1.6.1) индуцирует направление t_3 , отличное от t_1 и t_2 .*

Доказательство. По условию система (1.6.1) имеет не менее девяти прямых изоклин, поэтому множество M всех ее прямых изоклин содержит не более одного одноэлементного подмножества и не менее трехэлементных подмножеств.

Относительно $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$ возможны два предположения:

- 1) одна из них принадлежит одноэлементному подмножеству;
- 2) обе прямые принадлежат различным трехэлементным подмножествам множества M .

Пусть имеет место первый случай, а именно, $l_1^{m_1}$ — элемент одноэлементного подмножества множества M , а $l_2^{m_2} \in M_2^{m_2}$, где $M_2^{m_2}$ — трехэлементное подмножество множества M . С помощью преобразования (1.5.2) переведем $l_1^{m_1}$ в изоклину бесконечности, а прямые множества $M_2^{m_2}$ — в изоклину нуля системы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)P_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = (y - kx - b_2)(y - k_3x - b_3)(y - k_4x - b_4), \end{cases} \quad (1.7.11)$$

где $b_1 \neq b_2$, $P_2(x, y)$ — неприводимый над полем \mathbb{R} многочлен второй степени.

Введем обозначения: $L_1^\infty : y - kx - b_1 = 0$, $L_2^0 : y - kx - b_2 = 0$, $L_3^0 : y - k_3x - b_3 = 0$, $L_4^0 : y - k_4x - b_4 = 0$.

Ни одна из прямых L_3^0 и L_4^0 не параллельна прямой L_1^∞ . Допустим, что это не так, то есть пусть $L_3^0 \parallel L_1^\infty$. Тогда в силу теоремы 1.7.1 $L_4^0 \cap L_1^\infty \neq \emptyset$, то есть на прямой L_1^∞ система (1.7.11) имеет одну особую точку. Согласно следствию 1.7.1 и теореме 1.7.6 во множестве M всех прямых изоклин системы (1.7.11), кроме $M_2^{m_2}$ имеются, по крайней мере, два трехэлементных подмножества (обозначим их через $M_3^{m_3}$ и $M_4^{m_4}$), $m_i \neq m_j$, если $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Рассмотрим два подмножества $\{l_1^{m_1}\}$ и $M_3^{m_3}$ множества M . Как и ранее переведем прямую $l_1^{m_1}$ в изоклину бесконечности, а прямые из множества $M_3^{m_3}$ в изоклину нуля системы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)\tilde{P}_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = (y - k_5x - b_5)(y - k_6x - b_6)(y - k_7x - b_7), \end{cases} \quad (1.7.12)$$

где $\tilde{P}_2(x, y)$ — неприводимый над полем \mathbb{R} многочлен второй степени.

По теореме 1.7.1 все три прямые изоклины нуля системы (1.7.12) проходят через единственную особую точку на прямой L_1^∞ . Но это противоречит теореме 12 [89]. Таким образом, прямой L_1^∞ параллельна только одна прямая изоклина нуля L_2^0 системы (1.7.11). Так как через одну и ту же особую точку системы (1.7.11) в условиях данной теоремы проходит только одна прямая изоклина нуля и одна прямая изоклина бесконечности (см. теорему 12 [89]), то на прямой L_1^∞ система (1.7.11) имеет две особые точки. Именно по этой причине одна из прямых изоклин нуля системы (1.7.12) параллельна L_1^∞ и во множестве $M_4^{m_4}$ также найдется одна прямая, параллельная прямой L_1^∞ . Это означает, что система (1.6.1), имеющая не менее одной особой точки и не менее девяти прямых изоклин, обладает более чем тремя параллельными между собой прямыми изоклинами. Пришли к противоречию с теоремой 1.7.1.

Тем самым доказано, что случай, когда одна из параллельных прямых $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$ является элементом одноэлементного подмножества мно-

жества M , не реализуется.

Пусть далее имеет место случай 2), то есть $l_1^{m_1} \in M_1^{m_1}$, $l_2^{m_2} \in M_2^{m_2}$, где $M_1^{m_1}(M_2^{m_2})$ — трехэлементное подмножество множества M , на трех прямых которого индуцировано направление $m_1(m_2)$, причем $m_1 \neq m_2$.

С помощью невырожденного преобразования (1.5.2) переведем прямые множества $M_1^{m_1}$ в изоклины бесконечности, а прямые множества $M_2^{m_2}$ — в изоклины нуля системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(y - kx - b_1)(y - k_2x - b_2)(y - k_3x - b_3) \\ \frac{dy}{dt} = \beta(y - kx - b_4)(y - k_5x - b_5)(y - k_6x - b_6), \end{cases} \quad (1.7.13)$$

Введем обозначения: $L_1^\infty : y - kx - b_1 = 0$, $L_2^\infty : y - k_2x - b_2 = 0$, $L_3^\infty : y - k_3x - b_3 = 0$, $L_4^0 : y - kx - b_4 = 0$, $L_5^0 : y - k_5x - b_5 = 0$, $L_6^0 : y - k_6x - b_6 = 0$.

Как и в случае 1), можно показать, что ни одна из прямых L_2^∞ , L_3^∞ , L_5^0 , L_6^0 не параллельна прямым L_1^∞ и L_4^0 . Рассматривая пару множеств $M_1^{m_1}$ и $M_3^{m_3}$, где $M_3^{m_3}$ является также трехэлементным подмножеством множества M , $m_1 \neq m_3$, убедимся в том, что одна прямая изоклина из $M_3^{m_3}$ параллельна прямым L_1^∞ и L_4^0 , а остальные две прямые изоклины из $M_3^{m_3}$ пересекают эти две параллельные прямые изоклины. Теорема доказана.

Из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 1.7.10 вытекает, что в условиях этой теоремы число трехэлементных подмножеств множества M не менее трёх.

Пример 18. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x - 3)(y - 2)x, \\ \frac{dy}{dt} = y\left(y + \frac{2}{3}x - 3\right)(y - x - 1). \end{cases}$$

Кроме шести прямолинейных главных изоклин данная система имеет еще три прямые изоклины: $y = 1$, $y = -x + 3$, $y = \frac{4}{3}x$, на которых индуцировано направление $m = \frac{2}{3}$. Заметим, что на трех параллельных между собой прямых изоклинах $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$ индуцированы попарно различные направления, и система удовлетворяет условиям теоремы 1.7.10.

Пример 19. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(y + x - 1)(y - x - 2), \\ \frac{dy}{dt} = (y - 1)(y + x - 2)(y + 2x), \end{cases}$$

имеет десять прямых изоклин, в том числе: три изоклины нуля, три изоклины бесконечности, три изоклины: $y = 2, y = -x, y = -\frac{1}{2}x + 1$, на которых индуцировано направление $m_1 = -1$, и одна прямая $x = 0$, на которой индуцировано направление $m_2 = 1$. В отличие от системы предыдущего примера данная система имеет две тройки параллельных между собой прямых изоклин, удовлетворяющих условиям теоремы 1.7.10. Заметим также, что число особых точек системы равно семи.

В связи с последним примером уместно поставить вопрос о максимальном числе троек параллельных между собой прямых изоклин системы (1.6.1), взятых по одной из трех различных подмножеств множества M .

Под символом $M_i^{m_i}$, который нами неоднократно упоминался, будем понимать подмножество множества M всех прямых изоклин системы (1.6.1), где m_i — направление, индуцированное этой системой на прямых из множества $M_i^{m_i}$.

Множество, состоящее из трех параллельных между собой прямых изоклин, взятых по одной из множеств $M_i^{m_i}, M_j^{m_j}, M_k^{m_k}$, обозначим через M_{ijk}^S , причем считаем, что $M_{ijk}^{S_1} \neq M_{ijk}^{S_2}$, если $s_1 \neq s_2, s_1, s_2 \in \mathbb{N}$.

Теорема 1.7.11. *Пусть система (1.6.1) имеет не менее девяти прямых изоклин и хотя бы одну особую точку. Тогда число подмножеств вида M_{ijk}^S множества M не превосходит трех.*

Доказательство. Прежде всего, покажем, что существуют системы вида (1.6.1), имеющие три тройки параллельных между собой прямых изоклин, взятых по одной из трех трехэлементных подмножеств множества M всех прямых изоклин этой же системы. Для этого рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(y - k_1x - b_1)(y - k_2x - b_2)(y - k_3x - b_3), \\ \frac{dy}{dt} = \beta(y - k_4x - b_4)(y - k_5x - b_5)(y - k_6x - b_6), \end{cases} \quad (1.7.14)$$

где $\alpha \cdot \beta \neq 0$, $(b_1 - b_4)(b_2 - b_5)(b_3 - b_6) \neq 0$.

Введем обозначения: $L_1^\infty : y - k_1x - b_1 = 0$, $L_2^\infty : y - k_2x - b_2 = 0$, $L_3^\infty : y - k_3x - b_3 = 0$, $L_4^0 : y - k_1x - b_4 = 0$, $L_5^0 : y - k_2x - b_5 = 0$, $L_6^0 : y - k_3x - b_6 = 0$.

Так как система (1.7.14) имеет не менее девяти прямых изоклинов и хотя бы одну особую точку, то по теореме 1.7.10 существует прямая изоклина $L_7^{m_k} \in M_k^{m_k}$, такая, что $L_7^{m_k} \parallel L_1^\infty$, то есть во множестве M существует подмножество M_{ijk}^1 , состоящее из параллельных между собой прямых изоклинов $L_1^\infty, L_4^0, L_7^{m_k}$. Аналогично, рассматривая изоклины L_2^∞ и L_5^0 , а затем L_3^0 и L_6^0 , в силу теоремы 1.7.10 приходим к выводу о том, что существуют такие множества M_{ijl}^2 и M_{ijr}^3 , где M_{ijl}^2 состоит из прямых $L_2^\infty, L_5^0, L_8^{m_l}$, а M_{ijr}^3 – из множеств $L_3^\infty, L_6^0, L_9^{m_r}$. Система (1.7.14) не имеет множества вида M_{ijk}^S , отличного от трех множеств $M_{ijk}^1, M_{ijl}^2, M_{ijr}^3$, существование которых нами установлено. В противном случае по теореме 1.7.1 любая прямая из множества M_{ijk}^S пересекает все прямые множеств $M_{ijk}^1, M_{ijl}^2, M_{ijr}^3$.

Вместе с тем теорема 12 [89] не допускает существование у системы (1.7.14) особой точки, через которую проходят две прямые изоклины, на которых индуцировано одно и то же направление. Следовательно, приходим к противоречию с тем, что на прямых из множеств $M_{ijk}^1, M_{ijl}^2, M_{ijr}^3$ система (1.7.14) имеет две особые точки. Теорема доказана.

Пример 20. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y-1)(y-x)(x-1), \\ \frac{dy}{dt} = y(x-2)(y-x-1), \end{cases}$$

имеет три тройки параллельных между собой прямых изоклинов

$$\{y = 0; y = 1; y = 2\},$$

$$\{y - x = 0; y - x - 1 = 0; y - x + 1 = 0\},$$

$$\{x = 0; x = 1; x = 2\}.$$

Эти прямые взяты из множеств прямых изоклинов – бесконечности, нуля и направления $m = 2$. Система имеет шесть особых точек.

Теорема 1.7.12. *Если система (1.6.1) имеет параллельные между собой прямые изоклины l_1, l_2, l_3 , то в случае существования у этой системы хотя бы одной особой точки и не менее девяти прямых изоклин все три прямые $l_i, i = \overline{1, 3}$, либо принадлежат одному и тому же подмножеству $M_j^{m_j}$ множества M всех прямых изоклин системы (1.6.1), либо они принадлежат трем таким различным множествам.*

Данная теорема непосредственно следует из теоремы 1.7.10.

Лемма 1.7.2. *Если множество M всех прямых изоклин системы (1.6.1) содержит три подмножества типа M_{ijk}^S , то M содержит три трехэлементных подмножества таких, что каждая прямая изоклина, принадлежащая одному из них, параллельна двум прямым изоклинам, взятым по одной из двух других подмножеств.*

Доказательство. Пусть $M_{abc}^\alpha, M_{def}^\beta, M_{ghu}^\gamma$ — подмножества множества M всех прямых изоклин системы (1.6.1). Рассмотрим прямую изоклину $l_1^{m_a} \in M_{abc}^\alpha$. Очевидно $l_1^{m_a} \in M_a^{m_a}$, где $M_a^{m_a}$ — трехэлементное подмножество множества M , причем на всех прямых множества $M_a^{m_a}$ индуцировано направление m_a . По теореме 1.7.1 $l_1^{m_a}$ пересекает все прямые из множеств M_{def}^β и M_{ghu}^γ . Но так как на прямой изоклине, принадлежащей множеству вида M_{ijk}^S , система имеет только две особые точки, то в силу теоремы 1.1.2 в каждом из множеств M_{def}^β и M_{ghu}^γ найдется по одной прямой изоклине, на которой индуцировано направление m_a . Таким образом, $M_a^{m_a} = \{l_1^{m_a}, l_2^{m_a}, l_3^{m_a}\}$, $l_1^{m_a} \in M_{abc}^\alpha, l_2^{m_a} \in M_{def}^\beta, l_3^{m_a} \in M_{ghu}^\gamma$.

Аналогичными рассуждениями доказывается, что $M_b^{m_b} = \{l_4^{m_b}, l_5^{m_b}, l_6^{m_b}\}$, $l_4^{m_b} \in M_{abc}^\alpha, l_5^{m_b} \in M_{def}^\beta, l_6^{m_b} \in M_{ghu}^\gamma$, $M_c^{m_c} = \{l_7^{m_c}, l_8^{m_c}, l_9^{m_c}\}$, $l_7^{m_c} \in M_{abc}^\alpha, l_8^{m_c} \in M_{def}^\beta, l_9^{m_c} \in M_{ghu}^\gamma$.

В силу введенного нами обозначения множества $M_{i,j,k}^S$ имеем: $l_1^{m_a} \parallel l_4^{m_b} \parallel l_7^{m_c}; l_2^{m_a} \parallel l_5^{m_b} \parallel l_8^{m_c}; l_3^{m_a} \parallel l_6^{m_b} \parallel l_9^{m_c}$. Лемма доказана.

Теорема 1.7.13. *Пусть множество M всех прямых изоклин системы (1.6.1) содержит три подмножества типа $M_{i,j,k}^S$. Тогда число прямых изоклин системы равно девяти, а количество особых точек (1.6.1) равно шести.*

Доказательство. В силу леммы 1.7.2 систему (1.6.1) можно преобразовать в систему (1.7.14) посредством неособого преобразования (1.5.2). Вместе с тем предположение о существовании прямой изоклины L си-

стемы (1.7.14), не принадлежащей ни одному из подмножеств M_{ijk}^1 , M_{ijk}^2 , M_{ijk}^3 , допускает наличие на L трех особых точек этой системы. При этом хотя бы через одну из этих трех особых точек проходит прямая изоклина, принадлежащая множеству $M_{ijk}^1 \cup M_{ijk}^2 \cup M_{ijk}^3$ и проходящая через три особые точки системы (1.7.14). Но это противоречит свойству системы (1.7.14) иметь только две особые точки на прямых изоклинах из подмножеств M_{ijk}^S , $s = \overline{1, 3}$. Теорема доказана.

Теорема 1.7.14. *Пусть система (1.6.1) имеет хотя бы одну особую точку, а множество M всех ее прямых изоклин содержит хотя бы одно множество вида $M_{i,j,k}^S$. Тогда число прямых изоклин системы (1.6.1) множества M не превосходит десяти.*

Доказательство. Если у системы множеств вида $M_{i,j,k}^S$ три, то по теореме 1.7.13 число прямых изоклин равно девяти. Поэтому полагаем, что число подмножеств $M_{i,j,k}^S$ множества M не более двух. Допустим, что система (1.6.1) имеет более десяти прямых изоклин. Тогда согласно следствию 1.7.1 и теореме 1.7.6 все три подмножества $M_i^{m_i}$, $M_j^{m_j}$, $M_k^{m_k}$ множества M являются трехэлементными.

Следовательно, множество M , кроме трех попарно непересекающихся подмножеств $M_i^{m_i}$, $M_j^{m_j}$, $M_k^{m_k}$, имеет еще хотя бы одно трехэлементное подмножество, обозначим его через $M_r^{m_r}$. В силу определения множество вида M_{ijk}^s содержит три параллельные между собой прямые изоклины, взятые по одной из множеств $M_i^{m_i}$, $M_j^{m_j}$, $M_k^{m_k}$. Поэтому каждая прямая из множества $M_r^{m_r}$ пересекает все три прямые множества M_{ijk}^s , и согласно теореме 1.1.2 проходит через три особые точки. По теореме 12 [89] никакие две прямые изоклины из множества $M_r^{m_r}$ не проходят через одну и ту же особую точку. Это означает, что система (1.6.1) имеет девять особых точек. Пришли к противоречию со следствием 1.2.2. Теорема доказана.

Теорема 1.7.15. *Пусть система (1.6.1) имеет не менее девяти прямых изоклин. Тогда число особых точек этой системы равно девяти, если во множестве M всех ее прямых изоклин нет двух трехэлементных подмножеств $M_1^{m_1}$ и $M_2^{m_2}$, элементы которых — прямые $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$ соответственно параллельны.*

Доказательство. Так как система имеет не менее девяти прямых изоклин, то по теореме 12 [89] нет двух прямых изоклин, проходящих

через одну и ту же особую точку, и на которых индуцировано одно и то же направление. По условию нет двух параллельных прямых изоклинов $l_1^{m_1}$ и $l_2^{m_2}$, на которых индуцированы различные направления, т.е. $m_1 \neq m_2$. Таким образом, не выполняются условия теоремы 1.7.9, откуда и следует справедливость утверждения теоремы.

Теорема 1.7.16. *Пусть никакие две прямые изоклины системы (1.6.1), на которых индуцированы различные направления, не параллельны. Тогда число трехэлементных подмножеств¹ множества M всех прямых изоклинов системы (1.6.1) не превосходит трех.*

Доказательство. Предположим, что система (1.6.1) не имеет двух параллельных прямых изоклинов, на которых индуцированы различные направления, но при этом множество M содержит не менее четырех трехэлементарных подмножеств. Пусть $M_1^{m_1}, M_2^{m_2}, M_3^{m_3}, M_4^{m_4}$ трехэлементные подмножества множества M . Здесь m_i — направление, индуцированное системой (1.6.1) на прямых множества $M_i^{m_i}, i = 1, 2, 3, 4$.

В силу теоремы 1.1.5 $m_i \neq m_j$, если $i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

По теореме 1.7.15 система (1.1.6) имеет девять особых точек. Поэтому каждая прямая изоклина системы (1.1.6) проходит через три особых точки (см. теорему 1.2.1). Отметим также, что по теореме 12 [89] у системы (1.1.6) нет особой точки, через которую проходят две прямые изоклины из одного и того же подмножества множества M .

Таким образом, через каждую из девяти особых точек проходят не менее четырех прямых изоклинов (по одной прямой из множеств M_1, M_2, M_3, M_4).

Рассмотрим произвольную прямую изоклину из множества M_4 , обозначив её через $L_1^{m_4}$. Она проходит через три особые точки A, B, C . Условимся обозначать через A_i, B_i и C_i прямую изоклину, проходящую через особую точку A, B и C соответственно и принадлежащую подмножеству $M_i^{m_i}, i = \overline{1, 3}$ множества M . Тогда каждой особой точке системы (1.6.1), не принадлежащей прямой изоклине $L_1^{m_4}$ соответствует упорядоченная тройка символов A_i, B_j, C_k , где i, j, k — попарно различные числа из множества $\{1, 2, 3\}$. Очевидно, число особых точек системы (1.6.1), не

¹На всех прямых трехэлементного подмножества множества M индуцировано одно и то же направление.

принадлежащих прямой $L_1^{m_4}$ равно $3! = 6$, что подтверждает выше отмеченный факт о наличии девяти особых точек системы (1.6.1).

Рассмотрим прямые изоклины C_1 и C_2 , а также A_1, A_2, A_3 (рис. 33).

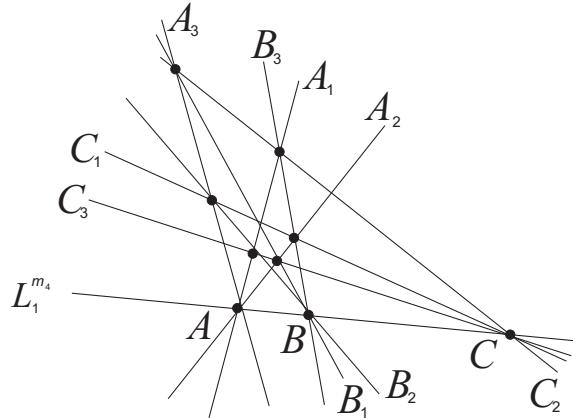


Рис. 33. Расположение прямых изоклинов C_1, C_2, A_1, A_2, A_3 .

На рис. 33 видно, что $W_1 = A_1 \cap C_2, W_2 = A_3 \cap C_2, W_3 = A_3 \cap C_1, W_4 = A_2 \cap C_1$ – особые точки системы (1.6.1). Таким образом, особая точка W_1 определяется тройкой (A_1, B_3, C_1) , особая точка W_4 тройкой (A_2, B_3, C_1) . Поэтому прямая B_3 вполне определяется особыми точками W_1 и W_4 , и сама определяет однозначно положение особой точки $B = B_3 \cap L_1^{m_4}$. Особая точка W_2 определяется тройкой (A_3, B_1, C_2) . Проводя прямую W_2B , мы найдем особую точку (A_2, B_1, C_3) как точку пересечения прямых изоклинов B_1 и A_2 . Соединяя эту точку с точкой C , определяем изоклину C_3 , которая также проходит через точку пересечения прямых A_1 и B_2 .

Далее рассмотрим прямую изоклину $L_2^{m_4} \in M_4$. Она пересекает каждую прямую $A_i, B_i, C_i, i = \overline{1, 3}$ в особой точке, лежащей вне прямой $L_1^{m_4}$ (две прямые из одного и того же подмножества множества M не инцидентны одной и той же особой точке).

Для определенности рассмотрим прямую изоклину A_1 . Если $L_2^{m_4}$ пересекает A_1 в точке (A_1, B_3, C_2) , то $L_2^{m_4}$ пересекает A_3 только в точке (A_3, B_2, C_1) . Следовательно, прямая $L_2^{m_4}$ пересекается с прямыми B_1 и C_3 в точках, заведомо не являющихся особыми для системы (1.6.1).

По теореме 1.1.6 это означает, что на прямых B_1 и C_3 система (1.6.1) индуцируется то же направление, что и на $L_2^{m_4}$. Пришли к противоречию с тем, что по предположению прямые B_1 и C_3 принадлежат различным

трехэлементным подмножествам множества M всех прямых изоклинов системы (1.6.1).

Если бы мы поменяли порядок расположения точек пересечения прямых A_1, A_2, A_3 с прямой C_2 , то в рассуждениях ничего не изменилось бы, разве что могло бы измениться положение особой точки B относительно точек A и C . Теорема доказана.

Теорема 1.7.17. *Если никакие две прямые изоклины системы (1.6.1), на которых индуцированы различные направления, не параллельны, то число прямых изоклинов этой системы не более десяти.*

Доказательство. Пусть система (1.6.1) имеет более десяти прямых изоклинов. Согласно следствию 1.7.1 во множестве M всех прямых изоклинов системы (1.6.1) содержатся только трех элементные и одноэлементные подмножества. По теореме 1.7.6 во множестве M не может быть более одного одноэлементного подмножества. Так как по предположению система (1.6.1) имеет более десяти прямых изоклинов, то число трехэлементных подмножеств множества M более трех.

Пришли к противоречию с теоремой 1.7.16. Теорема доказана.

Пример 21. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - 3x)(y - 3x - 3)(2y + 3x - 3), \\ \frac{dy}{dt} = (y + 3x)(y + 3x - 3)(2y - 3x - 3), \end{cases}$$

кроме шести главных изоклинов имеет еще три прямые изоклины $y = 0$; $y = 1, 5$; $y = 3$, на которых индуцировано направление $m_1 = -1$ и одну прямую изоклину $x = 0$, на которой индуцировано направление $m_2 = 1$.

Из теорем 1.7.14 и 1.7.17 непосредственно следует

Теорема 1.7.18. *Система (1.6.1) при наличии у нее хотя бы одной особой точки имеет не более десяти прямых изоклинов.*

1.8 Траектории кубической дифференциальной системы, имеющей инвариантные прямые максимального числа различных направлений

В этом параграфе рассматривается система дифференциальных уравнений (1.6.1).

Долгое время считалось, что дифференциальное уравнение траекторий системы (1.6.1) может иметь интегральные прямые $y = kx + b$ не более четырех различных направлений [62]. Интерес к проблеме инвариантных прямых кубических систем на плоскости вновь проявился в последнее десятилетие. В частности, впервые в работе [90] доказано, что такие системы могут иметь действительные инвариантные прямые не четырех, как утверждается в [62], а шести различных направлений. В работе [91] приводится теорема, согласно которой система (1.6.1), имеющая действительные инвариантные прямые шести различных направлений, с помощью аффинного преобразования может быть приведена к виду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a + (a + b)x + bx^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} = y(-a + (a - 1)y + bx^2 + y^2), \end{cases} \quad (1.8.1)$$

где $ab(a + 1)(b + 1)(a - b)(a^2 + b) \neq 0$. Кроме этого, общий интеграл системы (1.8.1) может быть записан в форме Дарбу:

$$xy(y - x - 1)^{-1}(y + bx + a)^{-1} = const.$$

Там же (в [91]) приведен фазовый портрет системы (1.8.1) в круге Пуанкаре. Работы [90, 91] инициировали исследование системы (1.6.1) на предмет оценки сверху числа различных направлений действительных инвариантных прямых [92].

Теорема 1.8.1. [92] *Система (1.6.1) не имеет особой точки, через которую проходят более четырех действительных инвариантных прямых.*

Доказательство. Систему (1.6.1), имеющую не менее двух инвариантных прямых с различными угловыми коэффициентами, посредством параллельного переноса начала координат в точку пересечения таких прямых и подходящего линейного преобразования можно привести к виду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xP_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = yQ_2(x, y). \end{cases} \quad (1.8.2)$$

Полагая, что система (1.8.2) имеет инвариантные прямые $y = k_1x$, $y = k_2x$, где $k_1, k_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k_1 \neq k_2$, мы допускаем выполнение равенств:

$$Q_2(x, y) \equiv P_2(x, y) + (y - k_1x)R_1(x, y), \quad (1.8.3)$$

$$Q_2(x, y) \equiv P_2(x, y) + (y - k_2x)S_1(x, y), \quad (1.8.4)$$

где R_1, S_1 — линейные функции.

Из (1.8.3) и (1.8.4) следует, что

$$R_1(x, y) = \alpha(y - k_2x),$$

$$S_1(x, y) = \alpha(y - k_1x),$$

то есть система (1.8.2) может быть записана в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xP_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = y[P_2(x, y) + \alpha(y - k_1x)(y - k_2x)], \end{cases} \quad (1.8.5)$$

где $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Пусть система (1.8.5) имеет инвариантную прямую $y = k_3x$, $k_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(k_3 - k_1)(k_3 - k_2) \neq 0$. Тогда имеет место равенство:

$$P_2(x, y) + \alpha(y - k_1x)(y - k_2x) \equiv P_2(x, y) + (y - k_3x)T_1(x, y),$$

где $T_1(x, y)$ — линейная функция. Но последнее равенство может быть выполнено только при условии $(k_3 - k_1)(k_3 - k_2) = 0$. Приходим к противоречию. Теорема доказана.

Теорема 1.8.2. [92] Пусть система (1.6.1) имеет четыре инвариантные прямые, проходящие через точку A . Тогда любая инвариантная прямая этой системы, не инцидентная точке A , параллельна одной из четырёх инвариантных прямых, проходящих через A .

Доказательство. Не уменьшая общности, рассмотрим систему (1.8.5), через особую точку $(0, 0)$ которой проходят четыре инвариантные прямые. Если $x = c$ — инвариантная прямая, то сеть $P_2(c, y) \equiv 0$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то эта прямая параллельна прямой $x = 0$. Если $y = k_3x + b_3$ — инвариантная прямая системы (1.8.5), причем $b_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k_3 \in \mathbb{R}$, то имеет

место равенство:

$$(k_3x + b_3)[(k_3 - k_1)x + b_3][(k_3 - k_2)x + b_3] \equiv -b_3P_2(x, k_3x + b_3). \quad (1.8.6)$$

Из (1.8.6) следует, что $k_3(k_3 - k_1)(k_3 - k_2) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 1.8.3. [92] Система (1.6.1) имеет действительные инвариантные прямые не более шести различных направлений.

Доказательство. Пусть вопреки утверждению теоремы система (1.6.1) имеет инвариантные прямые более шести различных направлений. Тогда по теореме 1.8.2 у системы нет особой точки, через которую проходят более трех инвариантных прямых. Вместе с тем каждая инвариантная прямая пересекается не менее чем с шестью инвариантными прямыми. Отсюда делаем вывод, что каждая инвариантная прямая проходит через три особые точки, и каждой особой точке системы инцидентны три инвариантные прямые. Не уменьшая общности, рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xP_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = y[P_2(x, y) + (y - kx)(Ax + By + C)]. \end{cases} \quad (1.8.7)$$

Очевидно, через особую точку $(0, 0)$ проходят три инвариантные прямые системы (1.8.7): $x = 0$, $y = 0$, $y = kx$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. На прямой $x = 0$, кроме особой точки $(0; 0)$ расположены еще две особые точки. Обозначим их A и B . Кроме оси ординат, через точку $A(B)$ проходят две инвариантные прямые: $l_A^1 : y - k_1x - b_1 = 0$, $l_A^2 : y - k_2x - b_1 = 0$ ($l_B^1 : y - k_3x - b_3 = 0$, $l_B^2 : y - k_4x - b_3 = 0$), где $k_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, 4}$, все k_i — попарно различны.

Таким образом, имеют место равенства:

$$(k_1x + b_1)\{P_2(x, k_1x + b_1) + [(k_1 - k)x + b_1] \times \\ \times [(A + Bk_1)x + Bb_1 + C]\} \equiv k_1xP_2(x, k_1x + b_1), \quad (1.8.8)$$

$$(k_2x + b_1)\{P_2(x, k_2x + b_1) + [(k_2 - k)x + b_1] \times \\ \times [(A + Bk_2)x + Bb_1 + C]\} \equiv k_2xP_2(x, k_2x + b_1), \quad (1.8.9)$$

$$(k_3x + b_3)\{P_2(x, k_3x + b_3) + [(k_3 - k)x + b_3] \times \\ \times [(A + Bk_3)x + Bb_3 + C]\} \equiv k_3xP_2(x, k_3x + b_3), \quad (1.8.10)$$

$$(k_4x + b_3)\{P_2(x, k_4x + b_3) + [(k_4 - k)x + b_3] \times \\ \times [(A + Bk_4)x + Bb_3 + C]\} \equiv k_4xP_2(x, k_4x + b_3). \quad (1.8.11)$$

Из (1.8.8)–(1.8.11) следуют равенства:

$$b_1P_2(x, y) + y(y - kx)C \equiv (y - k_1x - b_1)R_1(x, y), \quad (1.8.12)$$

$$b_1P_2(x, y) + y(y - kx)C \equiv (y - k_2x - b_1)S_1(x, y), \quad (1.8.13)$$

$$b_3P_2(x, y) + y(y - kx)C \equiv (y - k_3x - b_3)T_1(x, y), \quad (1.8.14)$$

$$b_3P_2(x, y) + y(y - kx)C \equiv (y - k_4x - b_3)U_1(x, y), \quad (1.8.15)$$

где R_1, S_1, T_1, U_1 — линейные функции.

Из (1.8.12)–(1.8.15) получаем равенство:

$$Cy(b_1 - b_3)(y - kx) \equiv b_1\beta(y - k_3x - b_3)(y - k_4x - b_3) - \\ - b_3\alpha(y - k_1x - b_1)(y - k_2x - b_1),$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Из последнего равенства следует система уравнений

$$\begin{cases} b_1b_3(\alpha - \beta) = 0, \\ b_1b_3\beta(k_3 + k_4) - b_1b_3\alpha(k_1 + k_2) = 0, \\ b_1\beta k_3 k_4 - b_3\alpha k_1 k_2 = 0, \\ b_1b_3(\beta b_3 - \alpha b_1) = 0. \end{cases} \quad (1.8.16)$$

Система (1.8.16) равносильна системе

$$\begin{cases} \alpha = \beta, \\ b_1 = b_3, \\ (k_3 - k_2)(k_4 - k_2) = 0, \\ k_1 = k_3 + k_3 - k_2. \end{cases} \quad (1.8.17)$$

Но система (1.8.17) противоречит тому, что A и B — различные особые точки и $k_i, i = \overline{1, 4}$ — попарно различны. Теорема доказана.

Пусть система (1.6.1) имеет инвариантные прямые шести различных направлений. Обозначим через Ω множество всех этих прямых и покажем, что во множестве Ω нет параллельных прямых.

Лемма 1.8.1. *Множество Ω содержит ровно шесть инвариантных прямых.*

Доказательство. Согласно теореме 1.8.1 через состояние равновесия (особую точку) системы (1.6.1) проходит не более четырех инвариантных прямых.

Пусть Ω_A — множество, состоящее из четырех инвариантных прямых, пересекающихся в особой точке A системы (1.6.1), l — инвариантная прямая этой же системы, причем $l \notin \Omega_A$. Тогда l параллельна одной из прямых множества Ω_A (см. теорему 1.8.2). Отсюда следует, что система (1.6.1), обладающая действительными инвариантными прямыми не менее чем пяти различных направлений, не может иметь состояние равновесия, в котором пересекаются более трех инвариантных прямых.

Далее рассмотрим множество $\Omega_0 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, где ω_i , $i = \overline{1, 6}$ — инвариантная прямая, $\omega_i \cap \omega_j \neq \emptyset$, если $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Пусть ω_s — произвольная инвариантная прямая из множества Ω_0 . Учитывая, что на прямой ω_s система (1.6.1) имеет не более трех состояний равновесия и через состояние равновесия, лежащее на ω_s , проходит не более трех инвариантных прямых, приходим к выводу: на прямой ω_s система (1.6.1) имеет ровно три состояния равновесия. Обозначим их B , C , D .

При этом, кроме прямой ω_s , через каждое из двух состояний равновесия (B и C) проходят две инвариантные прямые из множества Ω_0 , а через третье состояние равновесия (D) — одна инвариантная прямая из множества Ω_0 .

Покажем, что $\Omega_0 = \Omega$. Допустим противное. Тогда существует инвариантная прямая $l_1 \in \Omega \setminus \Omega_0$, а значит l_1 параллельна одной из прямых множества Ω_0 . Пусть $l_1 \parallel \omega_r$, где $\omega_r \in \Omega_0$.

Обозначим буквой K состояние равновесия системы (1.6.1), через которое, кроме ω_r проходит одна и только одна инвариантная прямая $\omega_g \in \Omega_0$. Так как l_1 пересекает ω_g и на прямой ω_g , кроме K , расположены еще два состояния равновесия L и M системы (1.6.1), через каждое из которых проходят три инвариантные прямые из множества Ω_0 , то приходим к противоречию с тем, что кубическая дифференциальная система имеет на прямой не более трех состояний равновесия и не имеет в условиях леммы состояние равновесия, через которое проходит более трех инвариантных прямых. Лемма доказана.

Лемма 1.8.2. *Множество Ω можно разбить на два непересекающихся подмножества $\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ и $\Omega_2 = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, где $\omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3 \neq \emptyset$, $\omega_4 \cap \omega_5 \cap \omega_6 = \emptyset$.*

Доказательство. В процессе доказательства предыдущей леммы установлено, что система (1.6.1) имеет состояния равновесия, через каждое из которых проходят три инвариантные прямые из множества Ω . Для определенности положим, что $A = \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3$. Тогда остальные три инвариантные прямые $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ не могут пересекаться в одной точке. В самом деле, если бы существовало состояние равновесия $B = \omega_4 \cap \omega_5 \cap \omega_6$, то любая прямая из множества $\Omega_1(\Omega_2)$ пересекала бы все три прямые из множества $\Omega_2(\Omega_1)$. Так как $A \notin \omega_i, i = 4, 5, 6$ ($B \notin \omega_j, j = 1, 2, 3$), то на каждой прямой множества Ω расположено четыре состояния равновесия, что невозможно для кубической системы (1.6.1). Лемма доказана.

Теорема 1.8.4. *Пусть система (1.6.1) имеет инвариантные прямые шести различных направлений. Тогда эта система имеет семь особых точек, в том числе четыре особые точки, через каждую из которых проходят три инвариантные прямые и три особые точки, через каждую из которых проходят две инвариантные прямые.*

Доказательство. В силу леммы 1.8.2 множество Ω всех инвариантных прямых системы (1.6.1) можно разбить на два непересекающихся подмножества Ω_1 и Ω_2 , где Ω_1 состоит из трех инвариантных прямых, инцидентных одной и той же особой точке системы (1.6.1), а Ω_2 — из трех инвариантных прямых, образующих треугольник.

Пусть $\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\Omega_2 = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, $Q = \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3$, треугольник MNP образован прямыми из множества Ω_2 . Так как $Q \notin \omega_i, i = 4, 5, 6$, то Q расположена либо внутри треугольника MNP , либо вне его.

Рассмотрим случай, когда особая точка Q расположена внутри треугольника MNP (рис. 34).

Каждая прямая $\omega_j, j = 1, 2, 3$, проходит через вершину треугольника MNP , так как в противном случае на такой прямой расположены четыре особые точки. Это противоречит свойству системы (1.6.1) иметь на прямой не более трех особых точек.

Таким образом, каждой из особых точек M, N, P, Q инцидентны три инвариантные прямые, а через остальные три особые точки F, G, H про-

ходят ровно по две инвариантные прямые.

К такому же выводу приходим и в случае, когда Q расположена вне треугольника MNP , т.е. Q принадлежит либо трапециевидной области, примыкающей к стороне треугольника MNP , либо одной из треугольных областей. Теорема доказана.

Примечание. На рис. 34 и 35 сплошными линиями изображены прямые множества Ω_2 , и пунктирными — прямые множества Ω_1 . В случае, когда особая точка расположена внутри одной из четырех треугольных областей, ограниченных прямыми MN, MP, NP (вне этих треугольных областей), особые точки M, N, P, Q образуют невыпуклый (выпуклый) четырехугольник.

Теорема 1.8.5. *Если система (1.6.1) имеет действительные инвариантные прямые шести различных направлений, то эта система может быть приведена к одной из двух систем:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x[k(y - k_1x - b_1)(y - k_2x - b_1) - \\ \quad -(k_2 - k_1)y(y - kx)], \\ \frac{dy}{dt} = y[k(y - k_1x - b_1)(y - k_2x - b_1) - \\ \quad -(k_2 - k_1)(y - kx)(y - b_1)], \end{cases} \quad (1.8.18)$$

где $k_2 > k$, $k_1 < 0$, $b_1 > 0$, $k_3 = \frac{kk_1}{k_1 - k_2 + k}$, $b_3 = \frac{kb_1}{k_1 - k_2 + k}$, причем инвариантными являются прямые: $x = 0$, $y = 0$, $y = k_1x + b_1$, $y = kx$, $y = k_2x + b_1$, $y = k_3x + b_3$;

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - k_3x - b_3)(k_1k_3x^2 - y^2 + k_3b_1x + b_1y) - \\ \quad -(y - k_4x - b_3)(k_2k_4x^2 - y^2 + k_4b_1x + b_1y), \\ \frac{dy}{dt} = k_4(y - k_3x - b_3)(k_1k_3x^2 - y^2 + k_3b_1x + b_1y) - \\ \quad -k_3(y - k_4x - b_3)(k_2k_4x^2 - y^2 + k_4b_1x + b_1y), \end{cases} \quad (1.8.19)$$

где $b_1 > 0$, $b_3 = b_1k_3/k_2$, $k_4 = k_1k_3/k_2$, $k_1 < k_3 < 0$, $k_2 > 0$, $k_2^2 > k_1k_3$, причем инвариантными являются прямые: $x = 0$, $y = 0$, $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_1$, $y = k_3x + b_3$, $y = k_4x + b_3$.

В справедливости теоремы можно убедиться следующим образом. Для случая, когда особые точки M, N, P, Q образуют невыпуклый четырехугольник, необходимо выполнить следующие действия:

1. Перенести начало координат в точку Q (см. рис.34).
2. Осуществить аффинное преобразование $x = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, y = \gamma\bar{x} + \delta\bar{y}$ и замену времени $\tau = t/(\alpha\delta - \beta\gamma)$, переводящее прямые QN и QP в прямые $\bar{x} = 0$ и $\bar{y} = 0$ соответственно, а систему (1.6.1) в систему:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{x}P_2(\bar{x}, \bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{d\tau} = \bar{y}Q_2(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases} \quad (1.8.20)$$

где $P_2(\bar{x}, \bar{y})$ и $Q_2(\bar{x}, \bar{y})$ — многочлены второй степени.

3. Учитывая, что прямые: $MN : \bar{y} = k_2\bar{x} + b_1, NP : \bar{y} = k_1\bar{x} + b_1, MG : \bar{y} = k\bar{x}, MP : \bar{y} = k_3\bar{x} + b_3$ являются инвариантными для системы (1.8.20), записываем (1.8.20) в виде (1.8.18) с соответствующими ограничениями на коэффициенты.

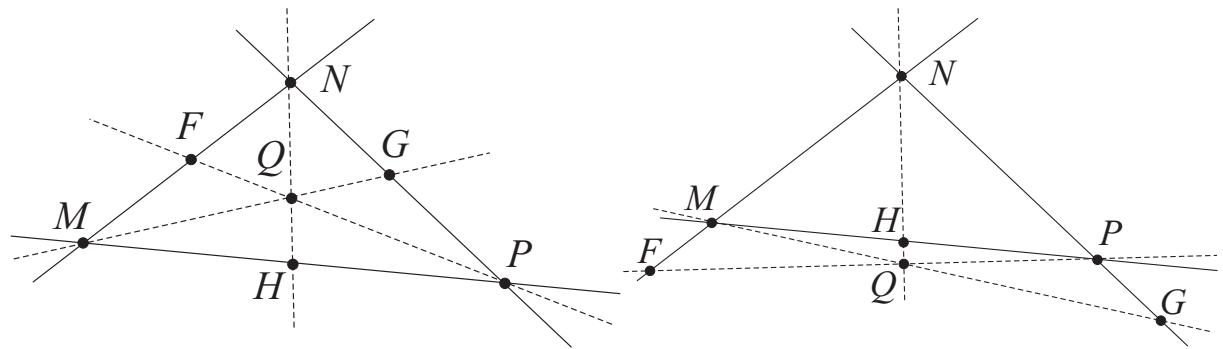


Рис. 34.

Рис. 35.

Алгоритм, с помощью которого система (1.6.1) приводится к системе (1.8.19) в случае, когда особые точки M, N, P, Q образуют выпуклый четырехугольник:

1. Перенести начало координат в точку H (см. рис. 35).
2. Второй шаг данного алгоритма отличается от второго шага, приведенного выше алгоритма только тем, что в прямые $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$ переводятся прямые HM и HN соответственно.

3. Учитывая, что прямые: $MN : \bar{y} = k_1\bar{x} + b_1$, $QM : \bar{y} = k_2\bar{x} + b_1$, $QP : \bar{y} = k_3\bar{x} + b_3$, $PN : \bar{y} = k_4\bar{x} + b_3$ являются инвариантными для системы (1.8.20), записываем (1.8.20) в виде (1.8.19) с соответствующими ограничениями на коэффициенты.

Теорема 1.8.6. *Если система (1.6.1) имеет действительные инвариантные прямые шести различных направлений, то эта система не имеет бесконечно удаленных особых точек.*

Доказательство. После тождественных преобразований правых частей уравнений системы (1.8.19) она примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x[-b_1b_3 - b_1(k_4 + k_3)x - k_1k_3x^2 + y^2], \\ \frac{dy}{dt} = y[b_1b_3 - (b_1 + b_3)y - k_1k_3x^2 + y^2]. \end{cases} \quad (1.8.21)$$

Применяя к системе (1.8.21) преобразование Пуанкаре $x = 1/z, y = u/z$ [80], получим

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = b_1(k_4 + k_3)u - (b_1 + b_3)u^2 + 2b_1b_3uz, \\ \frac{dz}{dt} = k_1k_3 + b_1(k_4 + k_3)z - u^2 + b_1b_3z^2. \end{cases} \quad (1.8.22)$$

Если имеется у дифференциальной системы (1.8.22) особая точка, то ее координаты удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} z = 0, \\ b_1(k_4 + k_3)u - (b_1 + b_3)u^2 = 0, \\ k_1k_3 - u^2 = 0. \end{cases} \quad (1.8.23)$$

При $b_1 + b_3 = 0$, очевидно, система (1.8.23) несовместна, так как $k_1k_3 \neq 0$. Поэтому пусть $b_1 + b_3 \neq 0$. Тогда должно быть выполнено равенство

$$k_1k_3 - \left[\frac{b_1(k_4 + k_3)}{b_1 + b_3} \right]^2 = 0.$$

С учетом ограничений на коэффициенты системы (1.8.19) последнее равенство преобразуется к виду:

$$\frac{(k_1 - k_3)(k^2 - k_1k_3)}{(k_3 + k_2)^2} = 0.$$

Но это равенство не выполнимо в силу условий: $k_1 < k_3 < 0$, $k_2^2 > k_1 k_3$.

Воспользовавшись вторым преобразованием Пуанкаре $x = v/z$, $y = 1/z$ [80] придадим системе (1.8.19) вид:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = (b_1 + b_3)v - b_1(k_4 + k_3)v^2 - 2b_1b_3vz, \\ \frac{dz}{dt} = -1 + (b_1 + b_3)z + k_1k_3v^2 - b_1b_3z^2. \end{cases} \quad (1.8.24)$$

Так как $v = z = 0$ не является особой точкой системы (1.8.24), то согласно [80] все бесконечно удаленные особые точки системы (1.8.19) определяются с помощью первого преобразования Пуанкаре, а именно, удовлетворяют системе (1.8.23). Тем самым доказано отсутствие особых точек системы (1.8.19) на экваторе сферы Пуанкаре. Покажем, что и система (1.8.18) не имеет особых точек в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости.

Для этого, применив к системе (1.8.18) преобразование Пуанкаре $x = 1/z$, $y = u/z$, получим

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = b_1(k_1 - k_2)(k - u)u, \\ \frac{dz}{dt} = -k_1k_2k + 2k_1ku + (k_1kb_1 - k_2k)z - \\ \quad -(k_1 + k - k_2)u^2 + 2kb_1uz - kb_1^2z^2. \end{cases} \quad (1.8.25)$$

Так как $k_1k_2k \neq 0$, то $u = z = 0$ — не особая точка системы (1.8.25). Но и точка $z = 0$, $u = k$ также не является особой точкой этой системы. Действительно, полагая, что $z = 0$, $u = k$ — особая точка системы (1.8.25), по необходимости получим равенство $(k_1 - k_2)(k_1 - k) = 0$, которое не выполнимо в силу ограничений на коэффициенты системы (1.8.18). Применяя к системе (1.8.18) второе преобразование Пуанкаре, нетрудно убедиться в том, что $v = z = 0$ ("концы оси y ") не является особой точкой системы (1.8.18) на экваторе сферы Пуанкаре. Теорема доказана.

Следует заметить, что экватор сферы Пуанкаре систем (1.8.18) и (1.8.19) не состоит из траекторий.

Для сравнения отметим, что в статье [93] изучаются бесконечно удаленные особые точки системы (1.6.1) в случае, когда экватор сферы Пу-

анкаре состоит из траекторий кубической системы.

Теорема 1.8.7. *Если система (1.6.1) имеет действительные инвариантные прямые шести различных направлений, то среди ее семи особых точек четыре являются дикритическими узлами, а три — простыми седлами.*

Доказательство. Нетрудно показать, что при выполнении условий теоремы любая из семи особых точек системы (1.6.1) является простой. Следовательно, индекс Пуанкаре [80] каждой из них равен 1 или -1 . Поскольку все особые точки системы лежат на инвариантных прямых, то исключаются случаи центров и фокусов. Те, четыре особые точки, через которые проходят три инвариантные прямые (см. теорему 1.8.4), не могут быть седлами. Они не могут быть также обычными узлами (с различными действительными корнями характеристического уравнения), так как каждая траектория, входящая в особую точку типа «обычный узел», касается в этой точке одной из двух прямых, пересекающихся в узле [81]. Учитывая, что сумма индексов Пуанкаре всех особых точек системы (1.6.1) равна 1 [93], приходим к выводу, что остальные три особые точки — седла. Теорема доказана.

Нетрудно доказать следующее **утверждение**. Пусть система (1.6.1) имеет инвариантные прямые шести различных направлений, причем M , N , P , Q — особые точки типа «дикритический узел». Если четырехугольник $MNPQ$ выпуклый, то две его противоположные вершины суть устойчивые узлы, а две другие — неустойчивые узлы. Если четырехугольник $MNPQ$ невыпуклый, причем $Q \equiv (0, 0)$, то начало координат — устойчивый (неустойчивый) дикритический узел, а точки M , N , P — неустойчивые (устойчивые) дикритические узлы.

Данное утверждение в некотором смысле является аналогом известной теоремы А.Н. Берлинского [57] о распределении особых точек квадратичной системы.

Очевидно, система (1.6.1) при наличии действительных инвариантных прямых шести различных направлений не имеет предельных циклов. Впрочем, это следует также из результатов работы [75].

Следуя работам [9, 69], можно убедиться в том, что общий интеграл

в форме Дарбу систем (1.8.18) и (1.8.19) записывается в виде

$$\frac{y(y - k_2x - b_1)}{(y - k_1x - b_1)(y - kx)} = C, \quad (1.8.26)$$

и

$$\frac{(y - k_2x - b_1)(y - k_4x - b_3)}{(y - k_1x - b_1)(y - k_3x - b_3)} = C, \quad (1.8.27)$$

соответственно.

В формуле (1.8.26) инвариантным прямым $x = 0$ и $y = k_3x + b_3$ соответствует значение $C = 1$. Аналогично, инвариантным прямым $x = 0$ и $y = 0$ в формуле (1.8.27) соответствует значение $C = 1$.

Рассмотрим примеры систем (1.6.1), имеющих шесть действительных инвариантных прямых попарно различных направлений.

Пример 22.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x[(y + x - 2)(y - 2x - 2) - 3y(y - x)], \\ \frac{dy}{dt} = y[(y + x - 2)(y - 2x - 2) - 3(y - x)(y - 2)]. \end{cases}$$

Данная система имеет инвариантные прямые $x = 0$, $y = 0$, $y = -x + 2$, $y = x$, $y = 2x + 2$, $y = \frac{1}{2}x - 1$ и является примером системы (1.8.18). На рис. 36 изображен фазовый портрет системы.

Пример 23.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y + x + 1)(4x^2 - y^2 - 8x + 8y) - \\ \quad -(y - \frac{1}{2}x + 1)(4x^2 - y^2 + 4x + 8y), \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}(y + x + 1)(4x^2 - y^2 - 8x + 8y) + \\ \quad +(y - \frac{1}{2}x + 1)(4x^2 - y^2 + 4x + 8y). \end{cases}$$

Это система вида (1.8.19), и она имеет шесть инвариантных прямых: $x = 0$, $y = 0$, $y = -x - 1$, $y = \frac{1}{2}x - 1$, $y = -4x + 8$, $y = 8x + 8$. На рис. 37 изображен фазовый портрет системы.

Замечание 1.8.1. Очевидно, любая инвариантная прямая системы (1.6.1) является также изоклиной этой системы. По лемме 1.8.1 и теореме

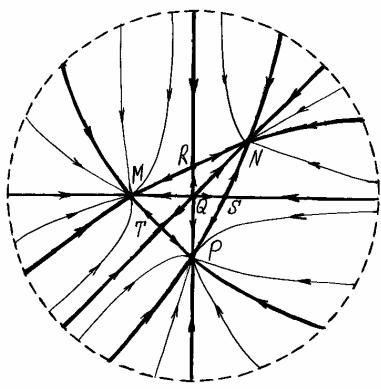


Рис. 36. Фазовый портрет системы из примера 22

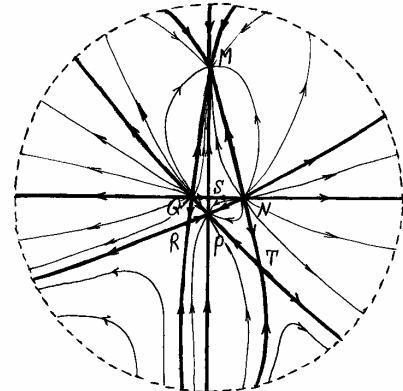


Рис. 37. Фазовый портрет системы из примера 23

1.8.3 система (1.6.1) имеет инвариантные прямые не более шести различных направлений. Если эта система имеет шесть инвариантных прямых попарно различных направлений, то у нее отсутствуют любые прямые изоклины, отличные от указанных шести инвариантных прямых. Возникает вопрос: каково наибольшее число различных направлений прямых изоклинов кубической дифференциальной системы. Ответ дает теорема 1.7.18 и пример системы, приведенный ниже.

Пример 24. система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 8(9y - 7x)(y + x - 10)(y + 2x - 6), \\ \frac{dy}{dt} = 9x(2y - 5x + 15)(4y + x - 10) \end{cases}$$

имеет десять прямых изоклинов, в том числе три изоклины нуля и столько же изоклини бесконечности, три прямые: $y = x$, $y = -\frac{10}{3}x + 10$, $y = -\frac{3}{5}x + 6$, на которых индуцировано направление $m_1 = -\frac{45}{32}$, и одна прямая $y = 0$, на которой индуцировано направление $m_2 = \frac{45}{112}$. Среди прямых изоклинов системы нет двух параллельных. Взаимное расположение прямых изоклинов системы изображено на рис. 38.

Результаты, полученные нами относительно числа различных направлений инвариантных прямых кубической системы, позволяют сделать некоторые выводы о некоторых аспектах теории кривых третьего порядка.

Замечание 1.8.2. Пусть $P_3(x, y) = \sum_{i+j=0}^3 a_{ij}x^i y^j$, $Q_3(x, y) = \sum_{i+j=0}^3 b_{ij}x^i y^j$,

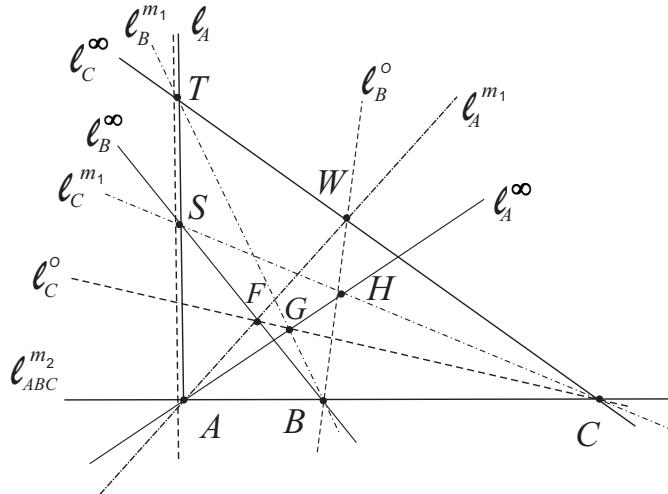


Рис. 38. Взаимное расположение прямых изоклинов системы из примера 24

$$a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Если $Q_3(x, k_i x + b_i) - k_i P_3(x, k_i x + b_i) \equiv 0$, где $i = \overline{1, 6}$, $k_r \neq k_s$, если $r \neq s, r, s, \in \overline{1, 6}$, то в пучке кривых третьего порядка

$$Q_3(x, y) - mP_3(x, y) = 0 \quad (1.8.28)$$

имеется ровно шесть кривых, распадающихся на прямую и неприводимую кривую второго порядка. Все остальные кривые этого пучка невырожденные.

Теорема 1.7.18 также допускает геометрическую трактовку, то есть имеет место

Замечание 1.8.3. Пусть кривые $P_3(x, y) = 0$ и $Q_3(x, y) = 0$ имеют хотя бы одну общую точку, причем такую, в которой

$$|P'_x(x, y)| + |P'_y(x, y)| + |Q'_x(x, y)| + |Q'_y(x, y)| + |P''_{xy}(x, y)| + |P''_{x^2}(x, y)| + |P''_{y^2}(x, y)| + |Q''_{x^2}(x, y)| + |Q''_{y^2}(x, y)| + |Q''_y(x, y)| > 0.$$

Тогда в пучке кривых (1.8.28) имеются не более четырех распадающихся кривых. Если распадающихся кривых ровно четыре, три из них распадаются на три прямые, а одна — на прямую и неприводимую кривую второго порядка.

Перечислим основные результаты исследований, проведенных в первой главе.

1. Свойство кривой на фазовой плоскости быть изоклиной дифференциальной системы инвариантно относительно линейного невырожденного преобразования. Это преобразование позволяет перевести любую изоклину системы в одну из её главных изоклин.

2. Если прямая проходит через n особых точек уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q_n(x, y)}{P_n(x, y)},$$

где $Q_n(x, y)$ и $P_n(x, y)$ — взаимно простые многочлены степени n , то эта прямая является изоклиной системы, соответствующей этому уравнению.

3. Пусть $O(0, 0)$ — состояние равновесия системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P_n(x, y) + \varphi(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q_n(x, y) + \psi(x, y), \end{cases} \quad (A)$$

где $P_n^2(x, y) + Q_n^2(x, y) \not\equiv 0$, $Q_n(x, y)$ и $P_n(x, y)$ — однородные многочлены, $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — аналитические функции, разложения которых в ряд начинаются с членов степени не ниже $n + 1$. Если к вышенназванной системе применить линейное невырожденное преобразование переменных x и y , то эта система перейдет в систему

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y}) + \varphi(\bar{x}, \bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y}) + \psi(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases} \quad (B)$$

в которой $\bar{P}_n^2(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{Q}_n^2(\bar{x}, \bar{y}) \not\equiv 0$, где уже $\bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y})$ и $\bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y})$ являются однородными многочленами степени n .

4. Какие бы $n + 1$ прямых изоклин системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P_n(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q_n(x, y), \end{cases} \quad (P_n, Q_n) = 1,$$

ни взять, среди них найдутся, по крайней мере, две, на которых данная система индуцирует различные направления. При этом данная система

не может иметь более n параллельных между собой инвариантных прямых.

5. Пусть прямая ℓ_1 проходит через n состояний равновесия A_1, A_2, \dots, A_n системы (B) , ℓ_2 — прямая изоклина этой системы, причем $A_i \notin \ell_2$ ($i = \overline{1, n}$). Тогда система (B) индуцирует одно и то же направление на прямых ℓ_1 и ℓ_2 .

6. Пусть $\ell_1 : y - kx - b_1 = 0$ и $\ell_2 : y - kx - b_2 = 0$, где $b_1 \neq b_2$ прямые изоклины системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^n a_{ij} x^i y^j \equiv P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^n b_{ij} x^i y^j \equiv Q(x, y), \end{cases} \quad (P, Q) = 1, \quad (C)$$

причем на ℓ_1 и ℓ_2 индуцированы различные направления m_1 и m_2 . Тогда k — корень уравнений:

$$a_{n,0} + a_{n-1,1}\lambda + a_{n-2,2}\lambda^2 + \dots + a_{1,n-1}\lambda^{n-1} + a_{0,n}\lambda^n = 0, \quad (\alpha)$$

$$b_{n,0} + b_{n-1,1}\lambda + b_{n-2,2}\lambda^2 + \dots + b_{1,n-1}\lambda^{n-1} + b_{0,n}\lambda^n = 0. \quad (\beta)$$

Следствие 1. Если нет действительных корней у хотя бы одного из уравнений (α) и (β) , то система (C) не имеет двух параллельных прямых изоклин, на которых индуцированы различные направления.

Следствие 2. Квадратичная дифференциальная система (система (C) при $n = 2$) не имеет двух параллельных прямых изоклин, на которых индуцированы различные направления, если выполняется хотя бы одно из неравенств $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} < 0$ или $b_{11}^2 - 4b_{20}b_{02} < 0$.

7. Система дифференциальных уравнений (C) имеет не более n различных множеств $M(k)$. Здесь $M(k)$ — это множество параллельных между собой прямых изоклин системы (C) с угловым коэффициентом k , в котором найдутся хотя бы две прямые, на которых эта система индуцирует различные направления.

8. Число состояний равновесия системы (C) на прямой $\ell \in M(k)$ не превосходит $n - 1$.

9. Если система (C) имеет n^2 состояний равновесия, то любая ее прямая изоклина проходит через n состояний равновесия. Кроме того, в этом случае среди ее прямых изоклин нет двух параллельных между собой прямых, на которых индуцированы различные направления.

10. Пусть $M(k_1, m_1)$ ($(M(k_2, m_2))$ — множество, состоящее из n параллельных между собой прямых изоклин с угловым коэффициентом $k_1(k_2)$, на которых индуцировано направление $m_1(m_2)$. Тогда число прямых изоклин системы (C) не превосходит $2n + 2$.

Следствие. Если $M(k_1, k_1)$ ($(M(k_2, k_2))$ — множество параллельных между собой инвариантных прямых системы (C) с угловым коэффициентом $k_1(k_2)$, то число инвариантных прямых этой системы не более $2n + 1(2n + 2)$ при n четном (нечётном).

11. Если система (C) имеет хотя бы одно состояние равновесия, то число параллельных между собой прямых изоклин этой системы не более $2n - 1$.

12. Пусть дифференциальная система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sum_{i=r}^n P_i(x, y) \equiv P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \sum_{i=s}^n Q_j(x, y) \equiv Q(x, y) \end{cases} \quad (D)$$

удовлетворяет условиям (μ) : $(P, Q) = 1$, P, Q — неоднородные многочлены, $\deg P = \deg Q = n, n \geq 2$, $P_i(Q_j)$ — однородные многочлены степеней $i(j)$, $i, j \in \mathbb{N}$.

Если система (D) удовлетворяет условиям (μ) и, кроме этого, $P_r(x, y) \not\equiv 0, r \leq s (Q_s(x, y) \not\equiv 0, s \leq r)$. Тогда через состояние равновесия $O(0, 0)$ системы (D) проходит не более $n = r(n + s)$ прямых изоклин.

Следствие. Число прямых изоклин системы (D) , инцидентных точке $O(0, 0)$ не более $2n - 1$.

13. Максимальное число параллельных между собой прямых изоклин кубической дифференциальной системы не превосходит пяти.

14. Будем обозначать через $\ell_j^{m_j}$ прямую изоклину ℓ_j , на которой индуцировано направление m_j .

Пусть M — множество, состоящее из пяти параллельных между собой прямых изоклин кубической системы. Тогда M можно разбить на непустые непересекающиеся подмножества одним из следующих способов:

- 1). $M = \{\ell_1^{m_1}, \ell_2^{m_1}, \ell_3^{m_1}\} \cup \{\ell_4^{m_2}, \ell_5^{m_2}\}, m_1 \neq m_2;$
- 2). $M = \{\ell_1^{m_1}, \ell_2^{m_1}, \ell_3^{m_1}\} \cup \{\ell_4^{m_2}\} \cup \{\ell_5^{m_3}\}, m_i \neq m_j, \text{ если } i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3\};$
- 3). $M = \{\ell_1^{m_1}, \ell_2^{m_1}\} \cup \{\ell_3^{m_2}, \ell_4^{m_2}\} \cup \{\ell_5^{m_3}\}, m_i \neq m_j, \text{ если } i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3\};$
- 4). $M = \{\ell_1^{m_1}, \ell_2^{m_1}\} \cup \{\ell_3^{m_2}\} \cup \{\ell_4^{m_3}\} \cup \{\ell_5^{m_4}\}, m_i \neq m_j, \text{ если } i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3, 4\};$
- 5). $M = \bigcup_{i=1}^5 \{\ell_i^{m_i}\}, m_i \neq m_j, \text{ если } i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$

15. Если кубическая система имеет пять параллельных между собой прямых изоклин, то общее число прямых изоклин этой системы не более семи.

16. Если кубическая система имеет хотя бы одно состояние равновесия, то она имеет не более десяти прямых изоклин. Эта оценка не улучшаема.

17. Кубическая дифференциальная система имеет действительные инвариантные прямые не более шести различных направлений.

В данной главе полностью изучено поведение фазовых траекторий кубической дифференциальной системы, имеющей инвариантные прямые шести различных направлений.

Глава 2. Оси симметрии поля направлений квадратичных и кубических дифференциальных систем на плоскости

В работе [60] изучено дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Y(x, y)}{X(x, y)}, \quad (2.0.1)$$

где $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ — суть аналитические в окрестности начала координат функции, разложения которых в ряды

$$\begin{aligned} X(x, y) &= P_n(x, y) + P_{n+1}(x, y) + \dots, \\ Y(x, y) &= Q_n(x, y) + Q_{n+1}(x, y) + \dots \end{aligned}$$

начинаются с членов не ниже первого порядка, при условии, что характеристическое уравнение

$$Q_n(\cos \varphi, \sin \varphi) \cdot \cos \varphi + P_n(\cos \varphi, \sin \varphi) \cdot \sin \varphi = 0 \quad (2.0.2)$$

не имеет действительных корней.

Отсутствие действительных корней уравнения (2.0.2), как известно [80], является достаточным условием того, что ни одна интегральная кривая уравнения (2.0.2) неходит в начало координат с определенным угловым коэффициентом, то есть $O(0, 0)$ — особая точка второй группы (центр или фокус). Именно в связи с проблемой различия центра и фокуса автором работы [60] исследуется вопрос о существовании осей симметрии поля направлений дифференциального уравнения (2.0.1), проходящих через начало координат.

Отметим, что ранее к этой проблеме обращались А. Пуанкаре [7] и А. М. Ляпунов [8]. Ими было установлено, что начало координат $O(0, 0)$ — центр дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + Q_2(x, y) + Q_3(x, y) + \dots}{y + P_2(x, y) + P_3(x, y) + \dots},$$

если это уравнение определяет поле направлений, симметричное относительно прямой $y = 0$.

Теорема 1 [60], которая утверждает, что существование проходящей через начало координат оси симметрии поля направлений дифференциального уравнения (2.0.1) при отсутствии действительных корней уравнения (2.0.2) гарантирует наличие центра в начале координат $O(0, 0)$, представляет собой не что иное, как принцип симметрии в его применении к уравнению (2.0.1).

В упомянутой работе [60] в качестве примера приводятся условия наличия у квадратичного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2}{y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2}$$

единственной оси симметрии и трех осей симметрии.

Изучением вопросов, связанных с симметрией интегральных кривых уравнения (2.0.1) занимались М. И. Альмухамедов [95], И. С. Куклес [96], Н. А. Сахарников [97]. В частности, М. И. Альмухамедов показал [95] для уравнения (2.0.1) при условии (2.0.2), что:

1) если $\begin{cases} b_{mk} = 0 \text{ при } k \equiv 0, \\ c_{mk} = 0 \text{ при } k \equiv 1 \end{cases} \pmod{2}$, то есть $X(x, -y) = -X(x, y)$ и $Y(x, -y) = Y(x, y)$, начало координат есть центр и в достаточно малой его окрестности интегральные кривые симметричны относительно прямой $y = 0$;

2) если $\begin{cases} b_{mk} = 0 \text{ при } m \equiv 1, \\ c_{mk} = 0 \text{ при } m \equiv 0 \end{cases} \pmod{2}$, то есть $X(-x, y) = X(x, y)$ и $Y(-x, y) = -Y(x, y)$, начало координат есть центр, и интегральные кривые симметричны относительно прямой $x = 0$;

3) если $b_{mk} = c_{km}$, то есть $X(x, y) = Y(y, x)$, то начало координат есть центр, имеющий в качестве оси симметрии прямую $x - y = 0$ и

4) если $b_{mk} = (-1)^{q+1}c_{km}$, ($q = m + k$), то есть $X(x, y) = -Y(-y, -x)$, то начало координат является центром с осью симметрии $x + y = 0$.

В данной главе изучаются условия существования осей симметрии квадратичной и кубической систем двух дифференциальных уравнений на плоскости. В отличие от [60] при этом мы не требуем, чтобы начало координат было только особой точкой второй группы.

2.1 Оси симметрии N -типа полиномиальных дифференциальных систем на плоскости

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1.1.9), где $P_n(x, y)$ и $Q_n(x, y)$ — взаимно простые многочлены степени n ($n \geq 2$) с действительными коэффициентами.

Определение 2.1.1. Пусть преобразование

$$\bar{x} = x + ky, \bar{y} = -kx + y \quad (2.1.1)$$

переводит систему (1.1.9) в систему

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y}). \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Прямую $y = kx$ назовем осью симметрии N -типа поля направлений системы (1.1.9), если

$$\bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y}) \equiv \bar{y}\bar{P}_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}), \bar{Q}_n(\bar{x}, -\bar{y}) \equiv \bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y}), \bar{P}_{n-1}(\bar{x}, -\bar{y}) \equiv \bar{P}_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}),$$

где $\bar{P}_i(\bar{x}, \bar{y})$ — многочлен степени i ($i = n, n - 1$), $\bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y})$ — многочлен степени n .

Теорема 2.1.1. *Если прямая $y = kx$ — ось симметрии N -типа векторного поля, определяемого системой (1.1.9), то эта прямая является изоклиной системы (1.1.9), причем, если $k \neq 0$, то*

$$\frac{Q_n(x, kx)}{P_n(x, kx)} \equiv -\frac{1}{k}.$$

Доказательство. В результате преобразования (2.1.1) система (1.1.9) перейдет в систему (2.1.2), где

$$\begin{aligned} \bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y}) &\equiv P_n(x, y) + kQ_n(x, y), \\ \bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y}) &\equiv -kP_n(x, y) + kQ_n(x, y), \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

а x и y следует заменить по формулам:

$$x = \frac{\bar{x}}{k^2 + 1} - \frac{k\bar{y}}{k^2 + 1}, \quad y = \frac{k\bar{x}}{k^2 + 1} + \frac{\bar{y}}{k^2 + 1}. \quad (2.1.4)$$

Так как по условию $y = kx$ — ось симметрии N -типа системы (1.1.9), то $\bar{P}_n(\bar{x}, 0) \equiv 0$. Поэтому из первого равенства системы (2.1.3) получим $P_n(x, kx) + kQ_n(x, kx) \equiv 0$. Откуда следует требуемое равенство

$$\frac{Q_n(x, kx)}{P_n(x, kx)} \equiv -\frac{1}{k}.$$

Теорема доказана.

Замечание 2.1.1. Любую ось симметрии N -типа системы (1.1.9) пересекают траектории этой системы под прямым углом (разумеется, в точках, отличных от состояний равновесия). В частности, при $k = 0$, ось симметрии $y = 0$ является ее изоклиной бесконечности.

Теорема 2.1.2. Любая простая особая точка системы (1.1.9), расположенная на оси симметрии N -типа, может быть либо центром, либо седлом.

Доказательство. В самом деле, простая особая точка системы (1.1.9) может быть либо центром, либо фокусом, либо узлом, либо седлом [80]. Очевидно, случай фокуса исключается, так как спиралевидная траектория не может быть расположена симметрично, относительно прямой, проходящей через особую точку типа «фокус». исключается также случай особой точки типа «узел». Сошлемся на монографию [80], согласно которой всегда можно указать цикл без контекста такой, что он расположен в достаточно малой окрестности узла, и все траектории, пересекающие его, стремятся к узлу при $t \rightarrow +\infty$ или при $t \rightarrow -\infty$.

Вместе с тем, согласно замечанию 2.1.1 в сколь угодно малой проколотой окрестности узла траектории пересекают ось симметрии N -типа под прямым углом, то есть не все траектории входят в узел. Таким образом, простая особая точка системы (1.1.9), расположенная на оси симметрии N -типа, является центром или седлом. Теорема доказана.

Пусть система (1.1.9) имеет две оси симметрии N -типа $y = k_1x, y = k_2x, k_1 \neq k_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Согласно теореме 2.1.1 выполняются равенства

$$P_n(x, k_1x) + k_1Q_n(x, k_1x) \equiv 0, \quad (2.1.5)$$

$$P_n(x, k_2x) + k_2Q_n(x, k_2x) \equiv 0. \quad (2.1.6)$$

Из (2.1.5) и (2.1.6) следуют равенства

$$P_n(x, k_1x) + k_1 Q_n(x, k_1x) \equiv (y - k_1x) R_{n-1}(x, y), \quad (2.1.7)$$

$$P_n(x, k_2x) + k_2 Q_n(x, k_2x) \equiv (y - k_2x) S_{n-1}(x, y), \quad (2.1.8)$$

где

$$R_{n-1}(x, y) = \sum_{i+j=0}^{n-1} r_{ij} x^i y^j, \quad S_{n-1}(x, y) = \sum_{i+j=0}^{n-1} s_{ij} x^i y^j. \quad (2.1.9)$$

Разрешив систему (2.1.7) и (2.1.8) относительно $P_n(x, y)$ и $Q_n(x, y)$, получаем следующие соотношения:

$$\begin{cases} P_n(x, y) = \frac{1}{k_2 - k_1} [k_2(y - k_1x) R_{n-1}(x, y) - \\ \quad - k_1(y - k_2x) S_{n-1}(x, y)], \\ Q_n(x, y) = \frac{1}{k_2 - k_1} [(y - k_2x) S_{n-1}(x, y) - \\ \quad - (y - k_1x) R_{n-1}(x, y)]. \end{cases} \quad (2.1.10)$$

Делая замену $d\tau = \frac{dt}{k_2 - k_1}$ и учитывая (2.1.10), приведем систему (1.1.9) к виду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = k_2(y - k_1x) R_{n-1}(x, y) - k_1(y - k_2x) S_{n-1}(x, y), \\ \frac{dy}{d\tau} = -(y - k_1x) R_{n-1}(x, y) + (y - k_2x) S_{n-1}(x, y). \end{cases} \quad (2.1.11)$$

Если оси симметрии N -типа $y = k_1x$ и $y = k_2x$ взаимно перпендикулярны, то

$$k_1 \cdot k_2 + 1 = 0. \quad (2.1.12)$$

Полагая $k_1 = k$, с учетом (2.1.12) перепишем систему (2.1.11) в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\mu} = (y - kx) R_{n-1}(x, y) + k(x + ky) S_{n-1}(x, y), \\ \frac{dy}{d\mu} = k(y - kx) R_{n-1}(x, y) - (x + ky) S_{n-1}(x, y). \end{cases} \quad (2.1.13)$$

Здесь $d\mu = d\tau/k$, $k \neq 0$.

Если к системе (2.1.13) применить преобразование (2.1.1) и замену времени $d\eta = (k^2 + 1)d\mu$, то она преобразуется в систему

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{d\eta} = \bar{y}\bar{R}_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{d\eta} = -\bar{x}\bar{S}_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}). \end{cases} \quad (2.1.14)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{R}_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= R_{n-1}\left(\frac{\bar{x}}{k^2 + 1} - \frac{k\bar{y}}{k^2 + 1}, \frac{k\bar{x}}{k^2 + 1} + \frac{\bar{y}}{k^2 + 1}\right), \\ \bar{S}_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= S_{n-1}\left(\frac{\bar{x}}{k^2 + 1} - \frac{k\bar{y}}{k^2 + 1}, \frac{k\bar{x}}{k^2 + 1} + \frac{\bar{y}}{k^2 + 1}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, доказана

Теорема 2.1.3. *Если система (1.1.9) имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии N -типа, то подходящим линейным преобразованием (2.1.1) эту систему можно привести к виду (2.1.14), где*

$$\begin{aligned} \bar{R}_{n-1}(\bar{x}, -\bar{y}) &= \bar{R}_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}), \bar{S}_{n-1}(\bar{x}, -\bar{y}) = \bar{S}_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}), \\ \bar{R}_{n-1}(-\bar{x}, \bar{y}) &= \bar{R}_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}), \bar{S}_{n-1}(-\bar{x}, \bar{y}) = \bar{S}_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Воспользуемся системой (2.1.14) и условиями (2.1.15) для получения явного вида функций (2.1.9) в системе (2.1.13) при $n = 3$.

В силу (2.1.9) имеем

$$R_2(x, y) = r_{00} + r_{10}x + r_{01}y + r_{20}x^2 + r_{11}xy + r_{02}y^2, \quad (2.1.16)$$

$$S_2(x, y) = s_{00} + s_{10}x + s_{01}y + s_{20}x^2 + s_{11}xy + s_{02}y^2. \quad (2.1.17)$$

Заменяя в выражениях (2.1.16), (2.1.17) x и y по формулам (2.1.4), а затем, используя (2.1.15), можно убедиться в выполнении ограничений на коэффициенты:

$$\begin{aligned} r_{10} &= r_{01} = s_{10} = s_{01} = 0, \\ r_{11}k^2 - 2(r_{02} - r_{20})k - r_{11} &= 0, \\ s_{11}k^2 - 2(s_{02} - s_{20})k - s_{11} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

Если $r_{11} = s_{11} = 0, (r_{02} - r_{20})^2 + (s_{02} - s_{20})^2 > 0$, то координатные прямые $x = 0$ и $y = 0$ являются осями симметрии N -типа системы (1.1.9)

при $n = 3$. При этом система (1.1.9) имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(r_{00} + r_{20}x^2 + r_{02}y^2), \\ \frac{dy}{dt} = -x(s_{00} + s_{20}x^2 + s_{02}y^2). \end{cases} \quad (2.1.19)$$

Если $r_{11} \neq 0$, $s_{11} = s_{02} - s_{20} = 0$, то осями симметрии N -типа системы (1.1.9) являются прямые $y = kx$ и $y = -(1/k)x$, где k — корень уравнения $r_{11}k^2 - 2(r_{02} - r_{20})k - r_{11} = 0$. При этом система (1.1.9) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx)(r_{00} + r_{20}x^2 + r_{11}xy + r_{02}y^2) + \\ \quad + k(x + ky)(s_{00} + s_{20}x^2 + s_{20}y^2), \\ \frac{dy}{dt} = k(y - kx)(r_{00} + r_{20}x^2 + r_{11}xy + r_{02}y^2) - \\ \quad - (x + ky)(s_{00} + s_{20}x^2 + s_{20}y^2). \end{cases} \quad (2.1.20)$$

Если $s_{11} \neq 0$, $r_{11} = r_{02} - r_{20} = 0$, то прямые $y = kx$ и $y = -(1/k)x$ являются осями симметрии N -типа системы (1.1.9), где k — корень уравнения $s_{11}k^2 - 2(s_{02} - s_{20})k - s_{11} = 0$. При этом система (1.1.9) имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx)(r_{00} + r_{20}x^2 + r_{20}y^2) + \\ \quad + k(x + ky)(s_{00} + s_{20}x^2 + s_{11}xy + s_{02}y^2), \\ \frac{dy}{dt} = k(y - kx)(r_{00} + r_{20}x^2 + r_{20}y^2) - \\ \quad - (x + ky)(s_{00} + s_{20}x^2 + s_{11}xy + s_{02}y^2). \end{cases} \quad (2.1.21)$$

Если

$$r_{11} \cdot s_{11} \neq 0, \quad \frac{r_{02} - r_{20}}{r_{11}} = \frac{s_{02} - s_{20}}{s_{11}},$$

то осями симметрии N -типа системы (1.1.9) при $n = 3$ являются прямые $y = kx$ и $y = -1/kx$, где k — корень уравнения

$$s_{11}k^2 - 2(s_{02} - s_{20})k - s_{11} = 0.$$

При этом система (1.1.9) имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = (y - kx) \left[r_{00} + r_{20}x^2 + r_{11}xy + \right. \\ \quad \left. + \left(r_{20} + \frac{r_{11}(s_{02} - s_{20})}{s_{11}} \right) y^2 \right] + \\ \quad + k(x + ky)[s_{00} + s_{20}x^2 + s_{11}xy + s_{02}y^2], \\ \frac{dy}{dt} = k(y - kx) \left[r_{00} + r_{20}x^2 + r_{11}xy + \right. \\ \quad \left. + \left(r_{20} + \frac{r_{11}(s_{02} - s_{20})}{s_{11}} \right) y^2 \right] - \\ \quad - (x + ky)[s_{00} + s_{20}x^2 + s_{11}xy + s_{02}y^2]. \end{array} \right. \quad (2.1.22)$$

Если $r_{11} = s_{11} = 0, r_{02} = r_{20} \neq 0, s_{02} = s_{20} \neq 0$, то осями симметрии системы (1.1.9) при $n = 3$ являются прямые $y = kx$ и $x = -ky, k \in \mathbb{R}$, а система (1.1.9) имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = (y - kx)(r_{00} + r_{20}x^2 + r_{20}y^2) + \\ \quad + k(x + ky)(s_{00} + s_{20}x^2 + s_{20}y^2), \\ \frac{dy}{dt} = k(y - kx)(r_{00} + r_{20}x^2 + r_{20}y^2) - \\ \quad - (x + ky)(s_{00} + s_{20}x^2 + s_{20}y^2). \end{array} \right. \quad (2.1.23)$$

Тем самым доказана

Теорема 2.1.4. Система дифференциальных уравнений (1.1.9) при $n = 3$ имеет две оси симметрии N -типа $y = kx$ и $x = -ky$ тогда и только тогда, когда она имеет вид одной из систем (2.1.19)–(2.1.23), где k удовлетворяет системе (2.1.18).

Теорема 2.1.5. Система дифференциальных уравнений (1.1.9) при $n = 2m, m \in \mathbb{N}$ и наличии в правых частях уравнений этой системы хотя бы одного одночлена размерности $2m$ не может иметь двух осей симметрии N -типа в точности.

Доказательство. Пусть вопреки утверждению теоремы система (1.1.9) имеет ровно две оси симметрии N -типа. Не умоляя общности, рассмотр-

рим систему

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{d\eta} = \bar{y}\bar{R}_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{d\eta} = -\bar{x}\bar{S}_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases} \quad (2.1.24)$$

где

$$\bar{R}_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i+j=0}^{2m-1} \bar{r}_{ij} \bar{x}^i \bar{y}^j, \quad \bar{S}_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i+j=0}^{2m-1} \bar{s}_{ij} \bar{x}^i \bar{y}^j. \quad (2.1.25)$$

В силу симметрии поля направлений системы (2.1.24) относительно прямых $\bar{x} = 0$ и $\bar{y} = 0$ должны быть выполнены условия:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{2m-1}(\bar{x}, -\bar{y}) &= \bar{R}_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{S}_{2m-1}(\bar{x}, -\bar{y}) = \bar{S}_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y}), \\ \bar{R}_{2m-1}(-\bar{x}, \bar{y}) &= \bar{R}_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{S}_{2m-1}(-\bar{x}, \bar{y}) = \bar{S}_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

Каждое слагаемое степени $2m - 1$ в правых частях равенств (2.1.25) содержит либо \bar{x} в нечетной степени, либо \bar{y} в нечетной степени. Поэтому согласно условиям (2.1.26) все одночлены размерности $2m - 1$ в правых частях равенств (2.1.25) отсутствуют. Пришли к противоречию с тем, что правые части уравнений системы (2.1.24) содержат хотя бы один одночлен размерности $2m$. Теорема доказана.

Следствие 2.1.1. Если правые части уравнений квадратичной системы содержат хотя бы один квадратичный член, то эта система не может иметь в точности две оси симметрии N -типа.

Замечание 2.1.2. Система дифференциальных уравнений (1.1.9) при условии $(P_n, Q_n) = 1$ имеет не более $n + 1$ осей симметрии N -типа. Это непосредственно следует из тождества $P(x, kx) + kQ(x, kx) \equiv 0$.

Теорема 2.1.6. *Система дифференциальных уравнений (1.1.9) при $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$ не может иметь четного числа осей симметрии N -типа, если правые части этой системы содержат хотя бы один одночлен размерности $2m$.*

Доказательство. Пусть число осей симметрии N -типа поля направлений системы (1.1.9) при $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$ равно $2l$, где $1 \leq l \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]$. Не уменьшая общности считаем, что осью симметрии N -типа является прямая $y = 0$ (этого можно добиться с помощью преобразования

(2.1.1)). Очевидно, любую из $2l$ из осей симметрии N -типа можно получить поворотом прямой $y = 0$ на угол, кратный углу $\varphi = (\pi/2)l$ [60]. Следовательно, среди осей симметрии векторного поля системы (1.1.9) непременно находится и прямая $x = 0$. Это означает, что система (1.1.9) имеет вид системы (2.1.24). В остальном рассуждения совпадают с теми, которые проведены при доказательстве предыдущей теоремы, тем и доказана настоящая теорема.

Далее рассмотрим случай трех осей симметрии N -типа векторного поля системы (1.1.9) при $n = 3$.

Введем обозначения:

$$k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1, \quad k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2, \quad k_3 = \operatorname{tg} \varphi_3, \quad 0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \pi.$$

Согласно работе [60] $\varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{3}$.

$$\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_3 - \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_3 - \operatorname{tg} \varphi_2}{1 + \operatorname{tg} \varphi_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_3}.$$

Из последних двух формул получаем соотношения:

$$k_2 = \frac{k_1 + \sqrt{3}}{1 - k_1\sqrt{3}}, \quad k_3 = \frac{k_1 - \sqrt{3}}{1 + k_1\sqrt{3}}. \quad (2.1.27)$$

Так как $k_3 < 0$, то из (2.1.27) по необходимости следует, что $k_1 \in [0; \frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3})$, разумеется, при $k_1 \geq 0$.

Заметим, что при $k_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ($\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$) имеем $k_2 = \infty$ ($\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$) и $k_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ($\varphi_3 = \frac{5\pi}{6}$).

Пусть система (2.1.11) при $n = 3$ имеет, наряду с прямыми $y = k_1x$ и $y = k_2x$, ось симметрии N -типа $y = k_3x$. Тогда по теореме 2.1.1 имеет место тождество:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_2(y - k_1x)R_2(x, y) - k_1(y - k_2x)S_2(x, y) + \\ + k_3[(y - k_2x)S_2(x, y) - (y - k_1x)R_2(x, y)] \end{array} \right\}_{y=k_3x} \equiv 0,$$

из которого получаем равенство:

$$S_2(x, y) = (y - k_3x)T_1(x, y) + R_2(x, y). \quad (2.1.28)$$

С учетом (2.1.28) система (2.1.11) при $n = 3$ запишется в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = (k_2 - k_1)yR_2(x, y) - k_1(y - k_2x)(y - k_3x)T_1(x, y), \\ \frac{dy}{d\tau} = -(k_2 - k_1)xR_2(x, y) + (y - k_2x)(y - k_3x)T_1(x, y), \end{cases} \quad (2.1.29)$$

где $R_2(x, y) = \sum_{i+j=0}^2 r_{ij}x^i y^j$, $T_1(x, y) = t_{00} + t_{10}x + t_{01}y$.

Последовательно применяя к системе (2.1.29) преобразования $\bar{x} = x + k_i y$, $\bar{y} = -k_i x + y$ ($i = 1, 2, 3$) и учитывая после каждого преобразования, что прямая $\bar{y} = 0$ — ось симметрии N -типа поля направлений получаемых в результате указанных преобразований систем, убеждаемся в выполнении условий на коэффициенты:

$$\begin{aligned} t_{10} &= t_{01} = 0, \quad r_{11} = 0, \quad r_{02} = r_{20} \neq 0, \\ r_{10} &= \frac{t_{00}(k_2 k_3 + 1)}{k_2 - k_1}, \quad r_{01} = \frac{t_{00}(k_2 k_3 + 1)k_1}{k_2 - k_1}, \quad t_{00} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

где $k_1 \in [0; \frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3})$, k_2 и k_3 определяются по формулам (2.1.27).

С учетом (2.1.30) придадим системе (2.1.29) вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = (k_2 - k_1)y \left[r_{00} + \frac{t_{00}(k_2 k_3 + 1)}{k_2 - k_1}(x + k_1 y) + \right. \\ \left. + r_{20}(x^2 + y^2) \right] - k_1(y - k_2 x)(y - k_3 x)t_{00}, \\ \frac{dy}{d\tau} = -(k_2 - k_1)x \left[r_{00} + \frac{t_{00}(k_2 k_3 + 1)}{k_2 - k_1}(x + k_1 y) + \right. \\ \left. + r_{20}(x^2 + y^2) \right] + (y - k_2 x)(y - k_3 x)t_{00}. \end{cases} \quad (2.1.31)$$

Тем самым доказана

Теорема 2.1.7. *Система дифференциальных уравнений (1.1.9) при $n = 3$ имеет три оси симметрии N -типа $y = k_1 x$, $y = k_2 x$, $y = k_3 x$, где $k_1 \in [0; \frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3})$, k_2 и k_3 определяются по формулам (2.1.27), тогда и только тогда, когда эта система имеет вид (2.1.31).*

Замечание 2.1.3. $t_{00} \neq 0$, так как в противном случае правые части уравнений системы (2.1.31) не будут взаимно простыми, а также $r_{20} \neq 0$ (в противном случае система (2.1.31) вырождается в квадратичную).

Рассмотрим случай четырех осей симметрии N -типа системы (1.1.9) при $n = 3$.

Пусть $y = k_1x$, $y = k_2x$, $y = k_3x$, $y = k_4x$ — оси симметрии N -типа системы (1.1.9), причем $k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$, $k_3 = \operatorname{tg}\varphi_3$, $k_4 = \operatorname{tg}\varphi_4$, $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \varphi_4 < \pi$.

Не уменьшая общности, считаем, что $0 \leq \varphi_1 < \frac{\pi}{4}$, то есть $0 \leq k_1 < 1$.

В силу работы [60] $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_4 - \varphi_3 = \frac{\pi}{4}$.

Полагая, что четыре указанные прямые являются осями симметрии N -типа системы (1.1.9), можно привести эту систему к виду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = (k_2 - k_1)yR_{n-1}(x, y) - \\ \quad - k_1(y - k_2x)(y - k_3x)(y - k_4x)T_{n-3}(x, y), \\ \frac{dy}{d\tau} = -(k_2 - k_1)xR_{n-1}(x, y) + \\ \quad + (y - k_2x)(y - k_3x)(y - k_4x)T_{n-3}(x, y), \end{cases} \quad (2.1.32)$$

где

$$R_{n-1}(x, y) = \sum_{i+j=0}^{n-1} r_{ij}x^i y^j, T_{n-3}(x, y) = \sum_{i+j=0}^{n-3} t_{ij}x^i y^j. \quad (2.1.33)$$

Применяя к системе (2.1.32) последовательно преобразования

$$\begin{cases} \bar{x} = x + k_1y, \\ \bar{y} = -k_1x + y, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \bar{x} = x + k_2y, \\ \bar{y} = -k_2x + y, \end{cases}$$

и каждый раз учитывая, что векторное поле получаемых систем симметрично относительно прямых $\bar{x} = 0$ и $\bar{y} = 0$, убеждаемся, что при $n = 3$ и $k_1 \in (0; 1)$ имеют место ограничения на коэффициенты

$$\begin{aligned} r_{10} = r_{01} &= 0, \\ 2(r_{02} - r_{20})k_1 + r_{11}(1 - k_1^2) &= 0, \\ 2(r_{02} - r_{20})k_2 + r_{11}(1 - k_2^2) + t_{00}(k_2 + k_3 + k_3k_2^2 - k_4) &= 0, \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

где $t_{00} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Таким образом, имеет место

Теорема 2.1.8. *Система дифференциальных уравнений (1.1.9) при $n = 3$ имеет четыре оси симметрии N -типа: $y = k_1x$, $y = k_2x$, $y = k_3x$, $y = k_4x$ тогда и только тогда, когда эта система имеет вид:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (k_2 - k_1)y(r_{00} + r_{20}x^2 + r_{11}xy + r_{02}y^2) - \\ \quad - k_1(y - k_2x)(y - k_3x)(y - k_4x)t_{00}, \\ \frac{dy}{dt} = -(k_2 - k_1)x(r_{00} + r_{20}x^2 + r_{11}xy + r_{02}y^2) + \\ \quad + (y - k_2x)(y - k_3x)(y - k_4x)t_{00}, \end{cases} \quad (2.1.35)$$

где $k_1 \in (0; 1)$,

$$k_2 = \frac{1 + k_1}{1 - k_1}, \quad k_3 = -\frac{1}{k_1}, \quad k_4 = \frac{k_1 - 1}{k_1 + 1}, \quad 2(r_{02} - r_{20})k_1 + r_{11}(1 - k_1^2) = 0,$$

$$2(r_{02} - r_{20})k_2 + r_{11}(1 - k_2^2) + t_{00}(k_2 + k_3 + k_2^2k_3 - k_4) = 0, \quad t_{00} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Замечание 2.1.4. В системе (2.1.35) по необходимости выполняется условие $(r_{02} - r_{20})r_{11} \neq 0$, так как в противном случае из (2.1.34) следует равенство $t_{00} = 0$, и правые части уравнений системы (2.1.35) не взаимно простые.

Теорема 2.1.9. Система дифференциальных уравнений (1.1.9) при $n = 3$ имеет четыре оси симметрии N -типа: $y = 0$, $x = 0$, $y = x$, $y = -x$ тогда и только тогда, когда эта система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(r_{00} + r_{20}x^2 + r_{02}y^2), \\ \frac{dy}{dt} = -x[(r_{00} + r_{20}x^2 + r_{02}y^2) - t_{00}(y^2 - x^2)], \end{cases} \quad (2.1.36)$$

где $t_{00} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $r_{02} = r_{20} + t_{00}$.

Справедливость теоремы доказывается применением преобразований

$$\begin{cases} \bar{x} = x, \\ \bar{y} = y, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \bar{x} = x + y, \\ \bar{y} = -x + y, \end{cases}$$

последовательно к системе (2.1.32).

Для системы (2.1.36) автоматически выполняется условие $r_{02} - r_{20} \neq 0$ в силу неравенства $t_{00} \neq 0$.

Заметим, что система (2.1.36) может быть формально получена из системы (2.1.35) при $k_1 = 0, k_2 = 1, k_3 = 0, k_4 = -1$.

Далее, полагая, что прямая $y = kx$ — ось симметрии N -типа векторного поля системы (1.1.9) при $n = 3$, согласно теореме (2.1.1) придадим системе (1.1.9) вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx)R_2(x, y) - kQ_3(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q_3(x, y), \end{cases} \quad (2.1.37)$$

где $R_2(x, y) = \sum_{i+j=0}^2 r_{ij}x^i y^j, Q_3(x, y) = \sum_{i+j=0}^3 b_{ij}x^i y^j$.

Применим к системе (2.1.37) преобразование (2.1.1) и, считая прямую $\bar{y} = 0$ осью симметрии N -типа для полученной системы, убедимся в выполнении следующих условий на коэффициенты:

$$\begin{aligned} r_{01} &= r_{10}k, r_{11}k^2 - 2(r_{02} - r_{20})k - r_{11} = 0, b_{01} = (b_{10} + r_{00})k, \\ r_{10}k^3 + b_{11}k^2 + (2b_{20} - 2b_{02} + r_{10})k - b_{11} &= 0, \\ (b_{12} + r_{02})k^3 + (r_{11} - 3b_{03} + 2b_{21})k^2 + & \\ +(r_{20} - 2b_{12} + 3b_{30})k - b_{21} &= 0, \\ (b_{30} + r_{20})k^3 - (r_{11} + b_{21})k^2 + (r_{02} + b_{12})k - b_{03} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.38)$$

Теорема 2.1.10. Прямая $y = kx$ является осью симметрии N -типа системы дифференциальных уравнений (1.1.9) при $n = 3$ тогда и только тогда, когда эта система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx)(r_{00} + r_{10}x + r_{01}y + r_{20}x^2 + r_{11}xy + r_{02}y^2) - \\ -k(b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + \\ +b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3), \\ \frac{dy}{dt} = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + \\ +b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3, \end{cases} \quad (2.1.39)$$

где $k \in \mathbb{R}$ и выполняются условия (2.1.38).

Рассмотрим вопрос об осях симметрии N -типа квадратичной системы. Согласно теореме 2.1.6 и замечанию 2.1.2 квадратичная система может иметь либо одну ось симметрии, либо три оси симметрии N -типа.

Пусть система (1.1.9) при $n = 2$ имеет ось симметрии N -типа $y = kx$. Тогда согласно теореме 2.1.1 эта система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx)R_1(x, y) - kQ_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q_2(x, y), \end{cases} \quad (2.1.40)$$

где $R_1(x, y) = r_{00} + r_{10}x + r_{01}y$, $Q_2(x, y) = \sum_{i+j=0}^2 b_{ij}x^i y^j$.

Применим к системе (2.1.40) преобразование (2.1.1) и, считая прямую $\bar{y} = 0$ осью симметрии N -типа векторного поля полученной системы, убедимся в выполнении следующих ограничений на коэффициенты:

$$\begin{cases} r_{01} = r_{10}k, \quad b_{01} = (r_{00} + b_{10})k, \\ r_{10}k^3 + b_{11}k^2 + (2b_{20} - 2b_{02} + r_{10})k - b_{11} = 0. \end{cases} \quad (2.1.41)$$

Теорема 2.1.11. Прямая $y = kx$ является осью симметрии N -типа поля направлений системы (1.1.9) при $n = 2$ тогда и только тогда, когда эта система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx)R_1(x, y) - k\tilde{Q}_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \tilde{Q}_2(x, y), \end{cases} \quad (1.4.42)$$

где $\tilde{Q}_2(x, y) = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2$ и коэффициенты удовлетворяют системе (2.1.41).

Пусть далее система (1.1.9) при $n = 2$ имеет три оси симметрии N -типа: $y = k_1x$, $y = k_2x$, $y = k_3x$, где $k_1 \in [0; \frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3})$, k_2 и k_3 определены по формулам (2.1.27).

Тогда система (1.1.9) при $n = 2$ может быть приведена к виду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = (k_2 - k_1)y(r_{00} + r_{10}x + r_{01}y) - k_1(y - k_2x)(y - k_3x)t_{00}, \\ \frac{dy}{d\tau} = -(k_2 - k_1)x(r_{00} + r_{10}x + r_{01}y) + (y - k_2x)(y - k_3x)t_{00}, \end{cases} \quad (2.1.43)$$

где $t_{00} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Последовательно применяя к системе (2.1.43) преобразования $\bar{x} = x + k_i y$, $\bar{y} = -k_i x + y$ ($i = 1, 2, 3$) и учитывая после каждого преобразования, что прямая $\bar{y} = 0$ — ось симметрии N -типа поля направлений получаемых в результате указанных преобразований систем, убеждаемся в выполнении следующих условий на коэффициенты системы (2.1.43):

$$\begin{aligned} r_{01} &= r_{10}k_1, \quad r_{01} - r_{10}k_2 + t_{00}(1 + k_2k_3) = 0, \\ (k_2 - k_1)(r_{01} - r_{10}k_3) + t_{00}(k_3 - k_1)(1 + k_2k_3) &= 0. \end{aligned}$$

Учитывая полученные ограничения на коэффициенты, а также формулы (2.1.27), запишем систему (2.1.43) в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{d\mu} = y[(\sqrt{3} + 3k_1)r_{00} - 2t_{00}(x + k_1y)] - \\ \quad - \frac{t_{00}k_1}{k_1^2 + 1}[(1 - k_1\sqrt{3})y - (k_1 + \sqrt{3})x] \times \\ \quad \quad \times [(1 + k_1\sqrt{3})y - (k_1 - \sqrt{3})x], \\ \frac{dy}{d\mu} = -x[(\sqrt{3} + 3k_1)r_{00} - 2t_{00}(x + k_1y)] + \\ \quad + \frac{t_{00}}{k_1^2 + 1}[(1 - k_1\sqrt{3})y - (k_1 + \sqrt{3})x] \times \\ \quad \quad \times [(1 + k_1\sqrt{3})y - (k_1 - \sqrt{3})x]. \end{array} \right. \quad (2.1.44)$$

где

$$d\mu = \frac{(k_1^2 + 1)}{1 - 3k_1^2} d\tau.$$

Теорема 2.1.12. *Система дифференциальных уравнений (1.1.9) при $n = 2$ имеет три оси симметрии N -типа: $y = k_1x$, $y = k_2x$, $y = k_3x$, где k_2 и k_3 определяются по формулам (2.1.27), тогда и только тогда, когда эта система имеет вид (2.1.44), причем $k_1 \in [0; \frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3})$, $t_{00} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

В связи с рассматриваемым в настоящем пункте вопросом отметим, что в работе [61] проведено полное исследование на N -симметрию диф-

ференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + \sum_{i+j=2}^3 c_{ij}x^i y^j}{y + \sum_{i+j=2}^3 b_{ij}x^i y^j}. \quad (2.1.45)$$

Как видно, начало координат $O(0; 0)$ уравнения (2.1.45) является особой точкой второй группы. В целях различия центра и фокуса в точке $O(0; 0)$ изучено дифференциальное уравнение (2.1.45) на предмет наличия у него осей симметрии N -типа. Заметим, что в работах [60, 61] не используется термин «ось симметрии N -типа», введенный нами, который позволяет записать в более удобной форме полиномиальные системы. А это, в свою очередь, существенно упрощает их качественное исследование и конструирование систем с заданными осями симметрии.

2.2 Оси симметрии S -типа полиномиальных дифференциальных систем на плоскости

В предыдущем пункте было введено понятие оси симметрии N -типа поля направлений системы (1.1.9). Однако, исследуя поведение траекторий полиномиальных векторных полей, можно обнаружить существование осей симметрии векторного поля системы, отличных от N -типа. Поэтому возникает необходимость для введения понятия оси симметрии S -типа, отличного от понятия оси симметрии N -типа системы (1.1.9).

При этом в случаях $n = 2; 3$ проводится исследование этой системы на S -симметрию. Изучается вопрос о существовании осей симметрии S -типа и прямых изоклин системы (1.1.9), отличных от осей симметрии и проходящих через начало координат. В частности, доказывается утверждение: если система (1.1.9) при $n \geq 2$ имеет n^2 особых точек в конечной части фазовой плоскости и $n+1$ осей симметрии N -типа при отсутствии осей симметрии S -типа или $n+1$ осей симметрии S -типа при отсутствии осей симметрии N -типа, то все особые точки расположены на осях симметрии, причем начало координат – особая точка системы (1.1.9).

Определение 2.2.1. Пусть преобразование (2.1.1) переводит систему (1.1.9) в систему (2.1.2). Прямую $y = kx$ назовем осью симметрии

S -типа поля направлений системы (1.1.9), если $\bar{P}_n(\bar{x}, -\bar{y}) \equiv \bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y}) \equiv \bar{y}\bar{Q}_{n-1}(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{Q}_{n-1}(\bar{x}, -\bar{y}) \equiv \bar{Q}_{n-1}(\bar{x}, \bar{y})$ где $\bar{Q}_i(\bar{x}, \bar{y})$ — многочлен степени i , ($i = n, n-1$), $\bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y})$ — многочлен степени n

Теорема 2.2.1. *Если прямая $y = kx$ — ось симметрии S -типа векторного поля, определяемого системой (1.1.9), то эта прямая является инвариантной для системы (1.1.9), то есть имеет место равенство $Q_n(x, kx)/P_n(x, kx) \equiv k$.*

Доказательство. Пусть $y = kx, k \in \mathbb{R}$ — ось симметрии S -типа системы (1.1.9). В результате преобразования (2.1.1) система (1.1.9) перейдет в систему (2.1.2), где

$$\bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y}) \equiv P_n(x, y) + kQ_n(x, y),$$

$$\bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y}) \equiv -kP_n(x, y) + kQ_n(x, y). \quad (2.2.1)$$

В равенстве (2.2.1) следует заменить x и y по формулам (2.1.4). Согласно определению 2.2.1 $\bar{Q}_n(\bar{x}, 0) \equiv 0$, т.е. $-kP_n(x, kx) + Q_n(x, kx) \equiv 0$. Откуда следует требуемое равенство $Q_n(x, kx)/P_n(x, kx) \equiv k$. Теорема доказана.

Следствие 2.2.1. Если $y = kx$ — ось симметрии S -типа поля направлений системы (1.1.9), то имеет место тождество:

$$Q_n(x, y) \equiv (y - kx)R_{n-1}(x, y) + kP_n(x, y),$$

$$\text{где } R_{n-1}(x, y) = \sum_{i+j=0}^{n-1} r_{ij}x^i y^j.$$

Найдем коэффициентные условия того, что система (1.1.9) при $n = 3$ имеет в качестве оси симметрии S -типа прямую $y = kx$.

Согласно следствию 2.2.1 система (1.1.9) при $n = 3$ запишется в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P_3(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = (y - kx)R_2(x, y) + kP_3(x, y). \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Сделаем в системе (2.2.2) преобразование (2.1.1) и потребуем, чтобы прямая $\bar{y} = 0$ была осью симметрии S -типа полученной дифференциальной системы.

В результате получим следующие ограничения на коэффициенты:

$$\begin{aligned} r_{01} &= r_{10}k, r_{11}k^2 - 2(r_{02} - r_{20})k - r_{11} = 0, a_{01} = (a_{10} - r_{00})k, \\ (r_{01} - a_{11})k^2 + (r_{10} + 2a_{02} - 2a_{20})k + a_{11} &= 0, \\ (r_{02} - a_{12})k^3 + (r_{11} - 2a_{21} + 3a_{03})k^2 + (r_{20} - 3a_{30} + 3a_{12})k + &\quad (2.2.3) \\ + a_{21} &= 0, \\ (r_{20} - a_{30})k^3 + (-r_{11} + a_{21})k^2 + (r_{02} - a_{12})k + a_{03} &= 0. \end{aligned}$$

Теорема 2.2.2. Прямая $y = kx$ является осью симметрии S -типа поля направлений системы дифференциальных уравнений (1.1.9) при $n = 3$, тогда и только тогда, когда она имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + \\ \quad + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3, \\ \frac{dy}{dt} = (y - kx)(r_{00} + r_{10}x + r_{01}y + r_{20}x^2 + r_{11}xy + r_{02}y^2) + \\ \quad + k(a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + \\ \quad + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3), \end{array} \right.$$

причем коэффициенты удовлетворяют системе (2.2.3) ($k \in \mathbb{R}$).

Рассмотрим случай двух осей симметрии S -типа кубической дифференциальной системы.

Если система (1.1.9) при $n = 3$ имеет две оси симметрии S -типа: $y = k_1x$, $y = k_2x$, то согласно следствию 2.2.1 имеют место равенства:

$$Q_3(x, y) - k_1 P_3(x, y) \equiv (y - k_1 x) R_2(x, y), \quad (2.2.4)$$

$$Q_3(x, y) - k_2 P_3(x, y) \equiv (y - k_2 x) S_2(x, y), \quad (2.2.5)$$

Разрешив систему (2.2.4), (2.2.5) относительно P_3 и Q_3 , получаем следующие соотношения:

$$P_3(x, y) = [(y - k_1 x) R_2(x, y) - (y - k_2 x) S_2(x, y)] / (k_2 - k_1), \quad (2.2.6)$$

$$Q_3(x, y) = [k_2(y - k_1 x) R_2(x, y) - k_1(y - k_2 x) S_2(x, y)] / (k_2 - k_1). \quad (2.2.7)$$

Учитывая (2.2.6) и (2.2.7), а также замену переменной

$$d\tau = dt / (k_2 - k_1)$$

систему (1.1.9) при $n = 3$ можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = (y - k_1x)R_2(x, y) - (y - k_2x)S_2(x, y), \\ \frac{dy}{d\tau} = k_2(y - k_1x)R_2(x, y) - k_1(y - k_2x)S_2(x, y). \end{cases} \quad (2.2.8)$$

Если система (2.2.8) имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии S -типа, то, очевидно, $k_1 \cdot k_2 = -1$ (если $k_1 = 0$, то $k_2 = \infty$). Обозначим k_1 через k , тогда $k_2 = -1/k$ ($k \neq 0$), и системе (2.2.8) можно придать вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = k(y - kx)R_2(x, y) - (x + ky)S_2(x, y), \\ \frac{dy}{d\tau} = -(y - kx)R_2(x, y) - k(x + ky)S_2(x, y). \end{cases} \quad (2.2.9)$$

Система (2.2.9) получена умножением обеих частей уравнений системы (2.2.8) на k , но при этом мы оставили прежнее обозначение переменной — времени τ .

Здесь $R_2(x, y) = \sum_{i+j=0}^2 r_{ij}x^i y^j$, $S_2(x, y) = \sum_{i+j=0}^2 s_{ij}x^i y^j$.

Применяя к системе (2.2.9) преобразование (2.1.1) и учитывая, что прямые $\bar{x} = 0$ и $\bar{y} = 0$ — оси симметрии S -типа, убеждаемся в выполнении следующих условий на коэффициенты этой системы: $r_{10} = r_{01} = s_{10} = s_{01} = 0$, $r_{11}k^2 - 2(r_{02} - r_{20})k - r_{11} = 0$, $s_{11}k^2 - 2(s_{02} - s_{20})k - s_{11} = 0$. Тем самым доказана

Теорема 2.2.3. *Две прямые $y = kx$ и $x = -ky$ являются осьми симметрии S -типа системы (1.1.9) при $n = 3$ тогда и только тогда, когда эта система имеет вид:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = k(y - kx)(r_{00} + r_{20}x^2 + r_{11}xy + r_{02}y^2) - \\ \quad -(x + ky)(s_{00} + s_{20}x^2 + s_{11}xy + s_{02}y^2), \\ \frac{dy}{d\tau} = -(y - kx)(r_{00} + r_{20}x^2 + r_{11}xy + r_{02}y^2) - \\ \quad -k(x + ky)(s_{00} + s_{20}x^2 + s_{11}xy + s_{02}y^2), \end{cases} \quad (2.2.10)$$

причем выполняются условия:

$$r_{11}k^2 - 2(r_{02} - r_{20})k - r_{11} = 0, \quad s_{11}k^2 - 2(s_{02} - s_{20})k - s_{11} = 0.$$

Пусть далее система (1.1.9) при $n = 3$ имеет три симметрии S -типа, тогда система (2.2.8), кроме прямых $y = k_1x$ и $y = k_2x$ имеет еще третью ось симметрии S -типа $y = k_3x$. Согласно следствию 2.2.1 имеет место равенство:

$$S_2(x, y) \equiv (y - k_3x)T_1(x, y) + R_2(x, y). \quad (2.2.11)$$

С учетом (2.2.11) перепишем систему (2.2.8) в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = (k_2 - k_1)xR_2(x, y) - (y - k_2x)(y - k_3x)T_1(x, y), \\ \frac{dy}{d\tau} = (k_2 - k_1)yR_2(x, y) - k_1(y - k_2x)(y - k_3x)T_1(x, y). \end{cases} \quad (2.2.12)$$

где $T_1(x, y) = t_{00} + t_{10}x + t_{01}y$, k_2 и k_3 определены по формулам (2.1.27), $R_2(x, y) = \sum_{i+j=0}^2 r_{ij}x^i y^j$, $k_1 \in [0; \frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3})$.

Последовательно применяя преобразования $\bar{x} = x + k_i y$, $\bar{y} = -k_i x + y$ ($i = 1, 2, 3$) к системе (2.2.12) и учитывая после каждого преобразования, что прямая $\bar{y} = 0$ — ось симметрии S -типа поля направлений получаемой в результате указанных преобразований системы, убедимся в выполнении условий:

$$\begin{cases} t_{10} = t_{01} = 0, r_{01} = r_{10}k_1, r_{11} = 0, \\ r_{02} = r_{20} \neq 0, t_{00} = -\frac{\sqrt{3} + 3k_1}{2}r_{10}. \end{cases} \quad (2.2.13)$$

Учитывая (2.2.13) приходим к выводу, что имеет место

Теорема 2.2.4. *Система дифференциальных уравнений (1.1.9) при $n = 3$ имеет три оси симметрии S -типа: $y = k_1x$, $y = k_2x$, $y = k_3x$, где $k_1 \in [0, 1/\sqrt{3}) \cup (1/\sqrt{3}, \sqrt{3})$, k_2 и k_3 определены по формулам (2.1.27), тогда и только тогда, когда эта система имеет вид:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = 2(k_1^2 + 1)x[r_{00} + r_{10}(x + k_1y) + r_{20}(x^2 + y^2)] + \\ + r_{10}[(1 - k_1\sqrt{3})y - (k_1 + \sqrt{3})x] \times \\ \times [(1 + k_1\sqrt{3})y - (k_1 - \sqrt{3})x], \\ \frac{dy}{d\tau} = 2(k_1^2 + 1)y[r_{00} + r_{10}(x + k_1y) + r_{20}(x^2 + y^2)] + \\ + r_{10}k_1[(1 - k_1\sqrt{3})y - (k_1 + \sqrt{3})x] \times \\ \times [(1 + k_1\sqrt{3})y - (k_1 - \sqrt{3})x]. \end{cases} \quad (2.2.14)$$

Замечание 2.2.1. Обе части уравнений системы (2.2.12) предварительно мы разделили на $\sqrt{3}/(2(1 - k_1\sqrt{3}))$, при этом обозначение переменной τ оставили без изменения.

Кроме этого, в системе (2.2.14) $r_{10} \cdot r_{20} \neq 0$, так как в противном случае либо правые части уравнений системы (2.2.14) имеют общий множитель, отличный от постоянной, либо эта система вырождается в квадратичную систему.

Обратимся теперь к случаю четырех осей симметрии S -типа системы (1.1.9) при $n = 3$.

Пусть $k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$, $k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2$, $k_3 = \operatorname{tg} \varphi_3$, $k_4 = \operatorname{tg} \varphi_4$, где

$$0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \varphi_4 < \pi.$$

Не уменьшая общности, считаем, что $0 \leq \varphi_1 < \frac{\pi}{4}$, то есть $0 \leq k_1 < 1$. В силу работы [60] имеют место соотношения:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_4 - \varphi_3 = \frac{\pi}{4}.$$

Отметим, что при $k_1 = 0$ имеют место равенства $k_2 = 1$, $k_3 = \infty$ ($x = 0$ – ось симметрии S -типа), $k_4 = -1$.

Поэтому мы будем полагать, что $k_1 \in (0; 1)$. Тогда

$$k_2 = \frac{1 + k_1}{1 - k_1}, k_3 = \frac{1}{k_1}, k_4 = \frac{k_1 - 1}{1 + k_1}. \quad (2.2.15)$$

В предположении, что система (1.1.9) при $n = 3$ имеет четыре оси симметрии S -типа, систему (2.2.15) можно привести к виду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (k_2 - k_1)xS_2(x, y) + (y - k_1x)(y - k_3x)(y - k_4x)t_{00}, \\ \frac{dy}{dt} = (k_2 - k_1)yS_2(x, y) + k_2(y - k_1x)(y - k_3x)(y - k_4x)t_{00}, \end{cases} \quad (2.2.16)$$

где $S_2(x, y) = \sum_{i+j=0}^2 s_{ij}x^i y^j$, $t_{00} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Последовательно применяя преобразования $\bar{x} = x + k_i y$, $\bar{y} = -k_i x + y$ ($i = 1, 2$) к системе (2.2.16) и учитывая после каждого такого преобразования, что прямые $\bar{x} = 0$ и $\bar{y} = 0$ являются осями симметрии S -типа

поля направлений получаемой системы, убеждаемся в выполнении условий:

$$s_{10} = s_{01} = 0, \quad s_{11} = \frac{t_{00}(k_1 - 1)}{k_1}, \quad s_{02} = s_{20} - \frac{2t_{00}}{k_1 + 1}, \quad t_{00} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2.2.17)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2.2.5. *Система дифференциальных уравнений (1.1.9) при $n = 3$ имеет четыре оси симметрии S -типа: $y = k_1x$, $y = k_2x$, $y = k_3x$, $y = k_4x$, где $k_1 \in (0; 1)$, k_2, k_3, k_4 заданы по формулам (2.2.15), тогда и только тогда, когда эта система имеет вид:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (k_2 - k_1)x[s_{00} + s_{20}x^2 + s_{11}xy + s_{02}y^2] + \\ \quad + (y - k_1x)(y - k_3x)(y - k_4x)t_{00}, \\ \frac{dy}{dt} = (k_2 - k_1)y[s_{00} + s_{20}x^2 + s_{11}xy + s_{02}y^2] + \\ \quad + k_2(y - k_1x)(y - k_3x)(y - k_4x)t_{00}, \end{cases}$$

причем выполняются условия (2.2.17).

Теорема 2.2.6. *Система дифференциальных уравнений (1.1.9) при $n = 3$ имеет четыре оси симметрии S -типа: $y = 0$, $y = x$, $y = -x$, $x = 0$, тогда и только тогда, когда эта система имеет вид:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x[s_{00} + s_{20}(x^2 + y^2) + t_{00}y^2], \\ \frac{dy}{dt} = y[s_{00} + s_{20}(x^2 + y^2) + t_{00}x^2], \end{cases}$$

где $t_{00} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Рассмотрим теперь вопрос об условиях S -симметрии поля направлений квадратичной системы. Так как квадратичная система имеет лишь одну или три оси симметрии S -типа, то рассмотрим сначала случай одной оси симметрии.

Замечание 2.2.2. Теоремы 2.1.5 и 2.1.6, доказанные в случае осей симметрии N -типа системы (1.1.9), остаются в силе и в случае осей симметрии S -типа. Кроме того, оценка числа осей симметрии N -типа, данная в замечании 2.1.2, также справедлива применительно к осям симметрии S -типа.

Теорема 2.2.7. Прямая $y = kx$ является осью симметрии S -типа поля направлений системы дифференциальных уравнений (1.1.9) при $n = 2$ тогда и только тогда, когда эта система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\ \frac{dy}{dt} = (y - kx)(r_{00} + r_{10}x + r_{01}y) + \\ \quad + k(a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2) \end{cases}$$

и при этом выполняются условия:

$$\begin{aligned} r_{01} &= r_{10}k, \quad a_{01} = (a_{10} - r_{00})k, \\ 2(a_{02} - a_{20})k + a_{11}(1 - k^2) + (k^2 + 1)kr_{10} &= 0, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Пусть система (1.1.9) при $n = 2$ имеет три оси симметрии S -типа: $y = k_1x$, $y = k_2x$, $y = k_3x$, где k_2 и k_3 удовлетворяют равенствам (2.1.27). Тогда по необходимости эта система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (k_2 - k_1)xR_1(x, y) - (y - k_2x)(y - k_3x)t_{00}, \\ \frac{dy}{dt} = (k_2 - k_1)yR_1(x, y) - k_1(y - k_2x)(y - k_3x)t_{00}, \end{cases} \quad (2.2.18)$$

где $t_{00} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $R_1(x, y) = r_{00} + r_{10}x + r_{01}y$.

Найдем условия на коэффициенты (2.2.18), для чего последовательно осуществим преобразование $\bar{x} = x + k_iy$, $\bar{y} = -k_ix + y$ ($i = 1, 2, 3$). После каждого такого преобразования требуем, чтобы прямая $\bar{y} = 0$ была осью симметрии S -типа поля направлений получаемой системы.

Теорема 2.2.8. Система дифференциальных уравнений (1.1.9) при $n = 2$ имеет три оси симметрии S -типа: $y = k_1x$, $y = k_2x$, $y = k_3x$, где $k_1 \in [0; \frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3})$, k_2 и k_3 заданы по формулам (2.1.27), тогда и только тогда, когда эта система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (k_2 - k_1)x(r_{00} + r_{10}x + r_{01}y) - t_{00}(y - k_2x)(y - k_3x), \\ \frac{dy}{dt} = (k_2 - k_1)y(r_{00} + r_{10}x + r_{01}y) - k_1t_{00}(y - k_2x)(y - k_3x), \end{cases}$$

причем $r_{01} = r_{10}k_1$, $r_{10}(k_1 - k_2) + t_{00}(1 + k_2k_3) = 0$, $t_{00} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Замечание 2.2.3. Система (1.1.9) при $n = 2$ имеет три оси симметрии S -типа: $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$, $y = -\sqrt{3}x$ в том и только в том случае, когда эта система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(r_{00}\sqrt{3} - 2t_{00}x) + t_{00}(3x^2 - y^2), \\ \frac{dy}{dt} = y(r_{00}\sqrt{3} - 2t_{00}x), \end{cases}$$

где $t_{00} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2.3 Поведение траекторий полиномиальных дифференциальных систем, имеющих оси симметрии N - и S -типа.

Существуют полиномиальные дифференциальные системы (1.1.9), обладающие как осьми симметрии N -типа, так и осьми симметрии S -типа. В качестве иллюстрации этого случая приведем примеры.

Пример 25. Поле направлений системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2xy, \\ \frac{dy}{dt} = y^2 - x^2 \end{cases}$$

имеет три оси симметрии N -типа: $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$, $y = -\sqrt{3}x$ и столько же осей симметрии S -типа: $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$, $x = 0$.

Пример 26. Векторное поле, определяемое системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(3y^2 - x^2), \\ \frac{dy}{dt} = y(3x^2 - y^2) \end{cases}$$

имеет четыре оси симметрии S -типа: $y = 0$, $x = 0$, $y = x$, $y = -x$ и столько же осей симметрии N -типа: $y = (\sqrt{2} + 1)x$, $y = -(\sqrt{2} + 1)x$, $y = (\sqrt{2} - 1)x$, $y = -(\sqrt{2} - 1)x$.

Замечание 2.3.1. Ранее доказанную нами теорему 2.1.6 и замечание 2.2.2 о том, что дифференциальная система (1.1.9) при $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) не может иметь четного числа осей симметрии, следует понимать в том

смысле, что она не может иметь четного числа осей симметрии N -типа и четного числа осей симметрии S -типа.

В этой связи можно отметить, что справедливо

Утверждение 2.3.1. Существуют системы вида (1.1.9), которые при $n = 2m (m \in \mathbb{N})$ имеют четное число осей симметрии, причем половина из них оси симметрии N -типа, а другая половина — оси симметрии S -типа.

Пример 27. Поле направлений системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - x^2 + y^2, \\ \frac{dy}{dt} = xy \end{cases}$$

имеет одну ось симметрии N -типа $x = 0$ и одну ось симметрии S -типа $y = 0$. Впрочем, никаких других осей симметрии данная система не имеет. Это следует из того, что никакая прямая $y = kx, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ не является изоклиной. Но, как нам известно, любая ось симметрии, будь то N -типа или S -типа, является изоклиной.

Нетрудно также проверить, что данная система имеет только два состояния равновесия $(1, 0)$ и $(-1, 0)$, и они являются простыми седлами.

Теорема 2.3.1. Пусть правые части уравнений системы (1.1.9) при $n = 3$ содержат хотя бы один линейный или квадратичный член. Если эта система имеет не менее трех осей симметрии N -типа (S -типа), то она не имеет осей симметрии S -типа (N -типа).

Доказательство. Пусть, для определенности, кубическая дифференциальная система имеет не менее трех осей симметрии N -типа. Если бы при этом система имела также оси симметрии S -типа, то в силу заявленной симметрии осей симметрии S -типа было бы столько же, сколько осей симметрии N -типа. Это бы означало, что через начало координат проходят не менее шести прямых изоклин (любая ось симметрии — прямая изоклина). А это противоречит следствию 1.4.1. Теорема доказана.

Пример 28. Поле направлений системы дифференциальных урав-

нений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(-3 - 2x + x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} = -x(-3 - 2x + x^2 + y^2) + 3x^2 - y^2 \end{cases}$$

имеет три оси симметрии N -типа: $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$, $y = -\sqrt{3}x$. Кроме этих трех прямых, данная система не имеет прямых изоклин, проходящих через точку покоя $O(0; 0)$.

Пример 29. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(1 + x^2 - y^2), \\ \frac{dy}{dt} = -x(y^2 - x^2 - 1) \end{cases}$$

имеет две оси симметрии N -типа: $y = 0$, $x = 0$ и столько же осей симметрии S -типа: $y = x$, $y = -x$. Никаких других прямых изоклин, проходящих через состояние равновесия $O(0; 0)$, система не имеет.

В связи с последним примером следует заметить, что справедливо

Утверждение 2.3.2. Если кубическая система дифференциальных уравнений имеет не менее трех осей симметрии (не важно какого типа), причем правые части уравнений этой системы содержат хотя бы один некубический член, то она не имеет прямых изоклин, проходящих через начало координат и отличных от указанных осей симметрии.

Теорема 2.3.2. Пусть правые части уравнений системы (1.1.9) при $n = 2$ содержат хотя один линейный член. Если эта система имеет три оси симметрии N -типа (S -типа), то она не имеет осей симметрии S -типа (N -типа).

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Теорема 2.3.3. Пусть система дифференциальных уравнений (1.1.9) при $n = 2$ имеет две оси симметрии при условии, что правые части уравнений этой системы содержат хотя один неквадратичный член. Тогда обе оси симметрии являются изоклинами, на которых индуцировано одно и то же направление.

Доказательство. Так как квадратичная система не имеет четного числа осей симметрии N -типа и четного числа осей симметрии S -типа,

то одна из осей симметрии является осью симметрии N -типа, а другая — осью симметрии S -типа.

Повернем координатные оси так, чтобы ось абсцисс совместились с осью симметрии S -типа (N -типа). Тогда прямая $y = 0$ изоклина нуля (изоклина бесконечности), а прямая $x = 0$ ось симметрии N -типа (S -типа). По теореме 2.1.1 (по теореме 2.2.1) прямая $x = 0$ изоклина нуля (изоклина бесконечности). Теорема доказана.

Пример 30. Векторное поле системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xy, \\ \frac{dy}{dt} = 1 - x^2 + y^2 \end{cases}$$

имеет две оси симметрии: $x = 0$ — ось симметрии S -типа, $y = 0$ — ось симметрии N -типа. Других осей симметрии данная система не имеет. Обоснуем это утверждение. Если квадратичная система имеет не менее трех прямых изоклин, то, по крайней мере, на двух из них эта система индуцирует различные направления (см. теорему 1.1.5). Так как все оси симметрии являются изоклинами и проходят через начало координат $O(0; 0)$, то $O(0; 0)$ — особая точка по теореме 1.1.2. Но в нашем случае это не так. Заметим, что особыми точками системы являются центры $(-1; 0)$ и $(1; 0)$.

Отметим, что система, приведенная в примере 27, также удовлетворяет условиям теоремы 2.3.3.

Из теорем 2.3.2 и 2.3.3 следует

Утверждение 2.3.3. Если квадратичная система двух дифференциальных уравнений имеет не менее двух осей симметрии при условии, что правые части уравнений этой системы содержат хотя бы один неквадратичный член, то она не имеет прямых изоклин, проходящих через начало координат $O(0; 0)$ и отличных от указанных осей симметрии.

Пример 31. Поле направлений системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - 2x) + 3x^2 - y^2, \\ \frac{dy}{dt} = y(1 - 2x) \end{cases}$$

имеет три оси симметрии S -типа: $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$, $y = -\sqrt{3}x$. Через начало координат $O(0; 0)$ не проходит ни одна прямая изоклина этой системы, отличная от указанных осей симметрии.

Теорема 2.3.4. *Если поле направлений дифференциальной системы (1.1.9) имеет максимальное (конечное) число осей симметрии N -типа и такое же число осей симметрии S -типа, то правые части уравнений этой системы суть взаимно простые однородные многочлены n -ой степени.*

Доказательство. Пусть система (1.1.9) имеет $n + 1$ осей симметрии N -типа и столько же осей симметрии S -типа. Тогда общее число осей симметрии системы равно $2n + 2$, т.е. через начало координат $O(0; 0)$ проходят не менее чем $2n + 2$ прямых изоклин. Если бы правые части уравнений системы (1.1.9) содержали хотя бы один одночлен размерности m ($1 \leq m \leq n$), то число прямых изоклин этой системы, инцидентных точке $O(0; 0)$, согласно теореме 1.4.1 не превосходило бы $m + n$, но $m + n < 2n + 2$. Теорема доказана.

Примеры 25 и 26 иллюстрируют утверждение теоремы 2.3.4.

Далее докажем некоторые утверждения об особых точках полиномиальных дифференциальных систем, имеющих оси симметрии.

Теорема 2.3.5. *Пусть система дифференциальных уравнений (1.1.9) при $n \geq 2$ имеет n^2 особых точек в конечной части фазовой плоскости, а поле ее направлений симметрично относительно $n + 1$ осей симметрии N -типа (осей симметрии S -типа нет) или относительно $n + 1$ осей симметрии S -типа (осей симметрии N -типа нет). Тогда все особые точки системы (1.1.9) расположены на осях симметрии, причем $O(0; 0)$ — особая точка.*

Доказательство. Так как любая ось симметрии системы (1.1.9) является ее изоклиной, то в силу теорем 1.1.2 и 1.1.5 $O(0; 0)$ — особая точка системы (1.1.9). По условию теоремы система имеет n^2 особых точек, поэтому каждая ось симметрии проходит через n особых точек (Т.1.2.3). Общее число особых точек системы (1.1.9), принадлежащих $n + 1$ осям симметрии, таким образом, равно $(n + 1)n - n = n^2$. Следовательно, система (1.1.9) не имеет особых точек, расположенных вне осей симметрии. Теорема доказана.

Пример 32. Поле направлений дифференциальной системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(4 + x^2 - 4y^2), \\ \frac{dy}{dt} = -x(4 - 4x^2 + y^2) \end{cases}$$

симметрично относительно четырех осей симметрии N -типа: $y = 0$, $x = 0$, $y = x$, $y = -x$, а сама система имеет девять особых точек: $O(0; 0)$, $A(0; 1)$, $B(0; -1)$, $C(1; 0)$, $D(-1; 0)$, $E\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $G\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $H\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $F\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Легко видеть, что все указанные особые точки расположены на осях симметрии, то есть выполнены условия теоремы 2.3.5.

Заметим также, что O , E , G , H , F — центры, а остальные состояния равновесия — простые седла.

Утверждение 2.3.4. Любая простая особая точка системы (1.1.9), расположенная на оси симметрии S -типа, является либо седлом, либо узлом.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1.2.

Пример 33. Прямая $y = 0$ является осью симметрии S -типа поля направлений системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y^2 - x^3, \\ \frac{dy}{dt} = y(1 + y^2), \end{cases}$$

$O(0; 0)$ — неустойчивый простой дикритический узел, $(\pm 1; 0)$ — простые седла.

Пример 34. Прямая $y = 0$ является осью симметрии S -типа поля направлений системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y^2 + x^3, \\ \frac{dy}{dt} = y(1 + y^2), \end{cases}$$

$O(0; 0)$ — простое седло, $(\pm 1; 0)$ — простые узлы.

Теорема 2.3.6. Пусть l — окружность достаточно малого радиуса с центром в точке $O(0; 0)$, и система (1.1.9) при n четном имеет n^2

особых точек и $n + 1$ осей симметрии N -типа (осей симметрии S -типа нет) или $n + 1$ осей симметрии S -типа (осей симметрии N -типа нет). Пусть l_i и l_j – оси симметрии, $M_i = l_i \cap l$, $M_j = l_j \cap l$. Если $\angle M_i O M_j = \pi/(n+1)$ и на одном из лучей $[O; M_i]$ и $[O; M_j]$ расположены k особых точек ($1 \leq k \leq n$), то на другом луче расположены $n - k + 1$ особых точек системы (1.1.9).

Доказательство. Введем обозначения $\overline{M_i}(\overline{M_j})$ – точка, диаметрально противоположная точке $M_i(M_j)$ на окружности l . Согласно работе [60] развернутый угол $\angle M_i O \overline{M_i}$ делится осями симметрии на $n + 1$ равных частей так, что каждая из них равняется $\pi/(n + 1)$. По условию $\angle M_i O M_j = \pi/(n + 1)$. Следовательно, угол $\angle M_j O \overline{M_i}$, дополняющий угол $\angle M_i O \overline{M_j}$ до развернутого, делится осями симметрии на n равных частей. Так как n – четное число, то среди этих осей симметрии находится и биссектриса угла $\angle M_j O \overline{M_i}$. Обозначим эту ось симметрии через l_s . Так как лучи $[O; M_i]$ и $[O; \overline{M_j}]$ симметричны относительно l_s , то на луче $[O; \overline{M_j}]$ расположены также k особых точек системы (1.1.9). Так как по условию теоремы система (1.1.9) имеет n^2 особых точек, то любая ее ось симметрии как прямая изоклина проходит через n особых точек. Отсюда следует, что на луче $[O; M_j]$ расположены $n - k + 1$ особых точек. Теорема доказана.

Теорема 2.3.7. Пусть l – окружность достаточно малого радиуса с центром в точке $O(0; 0)$, а система (1.1.9) при n нечетном имеет n осей симметрии N -типа (осей симметрии S -типа нет) или n осей симметрии S -типа (осей симметрии N -типа нет). Пусть l_i и l_j – оси симметрии системы (1.1.9), $M_i = l_i \cap l$, $M_j = l_j \cap l$. Если угол $\angle M_i O M_j = \pi/n$ и на прямой l_i расположены n особых точек, в том числе k особых точек расположены на луче $[O; M_i]$. Тогда на луче $[O; M_j]$ расположены $n - k + 1$ особых точек. При этом общее число особых точек системы (1.1.9) равно $n^2 - n + 1$.

Доказательство. Тот факт, что на луче $[O; M_j]$ расположены $n - k + 1$ особых точек, доказывается с помощью аналогичных рассуждений, которые были проведены при доказательстве теоремы 2.3.6. Поэтому этот факт будем считать доказанным. Так как биссектриса угла $\angle M_j O \overline{M_i}$, дополняющего угол $\angle M_i O \overline{M_j}$ до развернутого, является одной

из осей симметрии поля направлений системы (1.1.9), то на каждом из лучей $(O; \overline{M}_j)$ и $(O; M_i)$ расположены $k - 1$ особых точек, и на каждом из лучей (OM_j) и $(O\overline{M}_i)$ расположены $n - k$ особых точек. Здесь \overline{M}_j и \overline{M}_i имеют тот же смысл, что и в процессе доказательства теоремы 2.3.6.

Так как система по условию имеет n осей симметрии, то общее количество особых точек, расположенных на осях симметрии, равно $n(k-1) + n(n-k) + 1 = n^2 - n + 1$. Система не может иметь ни одной особой точки, не лежащей на оси симметрии. В противном случае система имела бы еще не менее $2n$ особых точек (не менее одной внутри каждого из $2n$ углов M_iOM_j). Это означало бы, что система (1.1.9) в условиях данной теоремы имеет $n^2 - n + 1 + 2n = n^2 + n + 1$ особых точек. Но число $n^2 + n + 1$ больше максимально возможного числа особых точек системы (1.1.9), которое равно n^2 . Теорема доказана.

Теорема 2.3.8. *Если $n^2 - n$ особых точек системы (1.1.9) расположены на алгебраической кривой $n - 1$ -го порядка*

$$L_{n-1} : L_{n-1}(x, y) = 0, \quad (2.3.1)$$

то кривая (2.3.1) является изоклиной системы (1.1.9).

Доказательство. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — произвольная точка кривой (2.3.1), не являющаяся особой для системы (1.1.9). Очевидно, через точку $M_0(x_0, y_0)$ проходит изоклина L , на которой система (1.1.9) индуцирует направление $m = Q_n(x_0, y_0)/P_n(x_0, y_0)$. Рассуждения проводим в случае, когда $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Применим к системе (1.1.9) преобразование

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + \bar{y}, \\ y &= m\bar{y}, \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

переводящее систему (1.1.9) в систему

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases} \quad (2.3.3)$$

где

$$\bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y}) = P_n(\bar{x} + \bar{y}, m\bar{y}) - \frac{1}{m}Q_n(\bar{x} + \bar{y}, m\bar{y}), \quad \bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{m}Q_n(\bar{x} + \bar{y}, m\bar{y}).$$

Пусть преобразование (2.3.2) переводит кривую L в кривую \bar{L} , а кривую L_{n-1} — в кривую \bar{L}_{n-1} , точку M_0 — в точку \bar{M}_0 . Тогда в силу работы [79] $\bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y})|_{(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{L}} \equiv 0$. По условию, система (1.1.9) имеет $n^2 - n$ особых точек на кривой L_{n-1} , следовательно, система (2.3.3) имеет на \bar{L}_{n-1} $n^2 - n$ особых точек. Кроме этого, на \bar{L}_{n-1} расположена точка \bar{M}_0 , заведомо не являющаяся особой точкой системы (2.3.3).

Таким образом, кривая n -го порядка $\bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ и кривая \bar{L}_{n-1} n -го порядка имеют более $n(n - 1)$ общих точек. По теореме Безу [98, с. 72] кривая \bar{L}_{n-1} является компонентой кривой $\bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Поскольку свойство кривой быть изоклиной системы (1.1.9), инвариантно относительно линейного неособенного преобразования [79, 81], то \bar{L}_{n-1} — изоклина системы (1.1.9). Если $Q_n(x, y)|_{(x, y) \in L} \equiv 0$ или $P_n(x, y)|_{(x, y) \in L} \equiv 0$, то рассуждения, проведенные выше позволяют сделать вывод о том, что L_{n-1} — изоклина нуля или изоклина бесконечности соответственно. Теорема доказана.

Замечание 2.3.2. В статье [99] доказана теорема 3, согласно которой кривая второго порядка является изоклиной кубической системы дифференциальных уравнений, если она имеет на кривой шесть особых точек. Таким образом, упомянутая теорема является частным случаем теоремы 2.3.8.

Следствие 2.3.1. Если $n^2 - n$ особых точек системы (1.1.9) принадлежат алгебраической кривой $n - 1$ -го порядка, то все остальные особые точки этой системы расположены на одной прямой.

Теорема 2.3.9. *Пусть система (1.1.9) при $n = 3$ имеет девять особых точек и четыре оси симметрии N -типа (осей симметрии S -типа нет) или четыре оси симметрии S -типа (осей симметрии N -типа нет). Тогда все особые точки системы, кроме начала координат $O(0, 0)$ не могут принадлежать одной и той же окружности с центром в точке $O(0, 0)$.*

Доказательство. Так как по условию система имеет девять состояний равновесия, то по теореме 2.3.5 все состояния равновесия принадлежат осмим симметрии, причем $O(0, 0)$ — состояние равновесия системы. Таким образом, каждая ось симметрии как прямая изоклина системы проходит через три состояния равновесия (особые точки), причем

на каждой оси симметрии две особые точки расположены симметрично относительно начала координат $O(0, 0)$. Поэтому логически нельзя исключить случай расположения всех восьми особых точек на окружности l с центром в точке $O(0, 0)$. Пусть вопреки утверждению теоремы все особые точки системы, кроме точки $O(0, 0)$, лежат на окружности l . Тогда можно выбрать на окружности две особые точки A и B так, что A, B и O не лежат на одной оси симметрии. Пришли к противоречию со следствием 2.3.1. Теорема доказана.

Замечание 2.3.3. Из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 2.3.9. следует, что при наличии у системы (1.1.9) в случае $n = 3$ девяти особых точек и четырех осей симметрии восемь особых точек расположены на концентрических окружностях l_1 и l_2 (по четыре на каждой).

Ниже сформулируем важные утверждения в виде теорем.

Теорема 2.3.10. *Пусть система (1.1.9) имеет k осей симметрии ($2 \leq k \leq n+1$. Тогда все они являются осями симметрии N -типа (или S -типа) в том и только в том случае, когда среди осей симметрии найдутся две оси симметрии l_i и l_j N -типа (или S -типа) соответственно, такие, что $\angle M_i O M_j = \pi/k$, где $M_j = l_j \cap l$, $M_i = l_i \cap l$, l — окружность достаточно малого радиуса с центром в точке $O(0; 0)$.*

Теорема 2.3.11. *Пусть система (1.1.9) имеет k осей симметрии ($2 \leq k \leq n + 1$). Тогда среди этих осей симметрии есть как оси симметрии N -типа, так и оси симметрии S -типа в том и только в том случае, когда какие бы две оси симметрии l_i и l_j мы ни взяли такие, что $\angle M_i O M_j = \pi/k$, где $M_j = l_j \cap l$, $M_i = l_i \cap l$, l — окружность достаточно малого радиуса с центром в точке $O(0; 0)$, одна из них ось симметрии N -типа, а другая — ось симметрии S -типа.*

Следствие 2.3.2. Если система (1.1.9) имеет оси симметрии как N -типа, так и S -типа, то общее их число четное. При этом одна половина из них оси симметрии N -типа, а другая — оси симметрии S -типа.

Далее рассмотрим вопрос о существовании квадратичной и кубической дифференциальных систем, имеющих оси симметрии обоих типов. В силу следствия 2.3.2 для квадратичной системы представляется единственная возможность: одна ось симметрии N -типа и одна ось симмет-

рии S -типа. Для кубической системы логически возможны два случая:

- 1) одна ось симметрии N -типа и одна ось симметрии S -типа;
- 2) две оси симметрии N -типа и столько же осей симметрии S -типа.

Разумеется, мы будем рассматривать те квадратичные и кубические дифференциальные системы, правые части уравнений которых содержат хотя бы один неквадратичный и некубический член соответственно.

Система (1.1.9) при $n = 2$ имеет в качестве оси симметрии N -типа прямую $y = kx$ тогда и только тогда, когда она имеет вид системы (2.1.42), коэффициенты которой удовлетворяют условиям (2.1.41). Применим к системе (2.1.42) преобразование (2.1.1) и в полученной в результате такого преобразования системе потребуем, чтобы прямая $\bar{x} = 0$ была осью симметрии S -типа. Тем самым убеждаемся в том, что справедлива

Теорема 2.3.12. *Система (1.1.9) при $n = 2$ имеет две оси симметрии, в том числе: прямую $y = kx$ — ось симметрии N -типа и прямую $x = -ky$ — ось симметрии S -типа, тогда и только тогда, когда эта система имеет вид:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx)(r_{10}x + r_{10}ky) - k(b_{00} + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2), \\ \frac{dy}{dt} = b_{00} + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2, \end{cases} \quad (2.3.4)$$

где

$$r_{10}k^3 + b_{11}k^2 + (2b_{20} - 2b_{02} + r_{10})k - b_{11} = 0, \quad r_{10} \neq 0. \quad (2.3.5)$$

Замечание 2.3.4. Утверждение теоремы 2.3.3 о том, что на двух осиях симметрии разных типов квадратичной системы индуцировано одно и то же направление векторного поля этой системы, легко доказывается с использованием системы (2.3.4).

Покажем, что для кубической дифференциальной системы не реализуется случай одной оси симметрии N -типа и одной оси симметрии S -типа.

Теорема 2.3.13. *Система (1.1.9) не может иметь двух взаимно перпендикулярных осей симметрии, одна из которых ось симметрии N -типа, а другая — ось симметрии S -типа, если n нечетно, $n \geq 3$.*

Доказательство. Пусть $y = kx$ — ось симметрии N -типа поля направляет системы (1.1.9). В силу теоремы 2.1.1 системе (1.1.9) можно придать вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx)R_{n-1}(x, y) - kQ_n(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q_n(x, y), \end{cases} \quad (2.3.6)$$

где

$$R_{n-1} = \sum_{i+j=0}^{n-1} r_{ij}x^i y^j, \quad Q_n(x, y) = \sum_{i+j=0}^n b_{ij}x^i y^j.$$

С помощью преобразования (2.1.1) систему (2.3.6) приведем к виду:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{y}\bar{R}_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = -k\bar{y}\bar{R}_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}) + (k^2 + 1)\bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases} \quad (2.3.7)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{R}_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= R_{n-1}\left(\frac{\bar{x}}{k^2 + 1} - \frac{k\bar{y}}{k^2 + 1}; \frac{k\bar{x}}{k^2 + 1} + \frac{\bar{y}}{k^2 + 1}\right), \\ \bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y}) &= Q_n\left(\frac{\bar{x}}{k^2 + 1} - \frac{k\bar{y}}{k^2 + 1}; \frac{k\bar{x}}{k^2 + 1} + \frac{\bar{y}}{k^2 + 1}\right). \end{aligned}$$

Поскольку $y = kx$ — ось симметрии N -типа, то

$$\begin{aligned} \bar{R}_{n-1}(\bar{x}, -\bar{y}) &= \bar{R}_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}), \\ k\bar{y}\bar{R}_{n-1}(\bar{x}, -\bar{y}) + (k^2 + 1)\bar{Q}_n(\bar{x}, -\bar{y}) &= \\ &= -k\bar{y}\bar{R}_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}) + (k^2 + 1)\bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Потребуем, чтобы прямая $\bar{x} = 0$ была осью симметрии S -типа системы (2.3.7). Тогда по необходимости выполняются условия:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{n-1}(0, \bar{y}) &\equiv 0, \\ R_{n-1}(-\bar{x}, \bar{y}) &= -R_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}), \\ -k\bar{y}\bar{R}_{n-1}(-\bar{x}, \bar{y}) + (k^2 + 1)\bar{Q}_n(-\bar{x}, \bar{y}) &= \\ &= -k\bar{y}\bar{R}_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}) + (k^2 + 1)\bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Из (2.3.8) и (2.3.9) следует, что в многочлене $R_{n-1}(\bar{x}, \bar{y})$ отсутствуют все одночлены размерности $n - 1$, а в многочлене $\bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y})$ отсутствуют одночлены размерности n , то есть правые части уравнений системы (2.3.7) являются многочленами системы не выше $n - 1$. Вместе с тем мы рассматриваем систему (1.1.9) только при условии, что правые части уравнений этой системы содержат хотя бы один одночлен размерности n . Теорема доказана.

Из теоремы (2.3.13), действительно, следует, что кубическая дифференциальная система не может иметь двух взаимно перпендикулярных осей симметрии, одна из которых ось симметрии N -типа, а другая — ось симметрии S -типа.

Далее найдем вид кубической дифференциальной системы, имеющей две оси симметрии N -типа и столько же осей симметрии S -типа.

Система (1.1.9) при $n = 3$ имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии N -типа $y = kx$ и $x = -ky$ тогда и только тогда, когда эта система имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y - kx)(r_{00} + r_{20}x^2 + r_{11}xy + r_{02}y^2) + \\ \quad + k(x + ky)(s_{00} + s_{20}x^2 + s_{11}xy + s_{02}y^2), \\ \frac{dy}{dt} = k(y - kx)(r_{00} + r_{20}x^2 + r_{11}xy + r_{02}y^2) - \\ \quad - (x + ky)(s_{00} + s_{20}x^2 + s_{11}xy + s_{02}y^2), \end{cases} \quad (2.3.10)$$

где

$$\begin{cases} r_{11}k^2 - 2(r_{02} - r_{20})k - r_{11} = 0, \\ s_{11}k^2 - 2(s_{02} - s_{20})k - s_{11} = 0. \end{cases} \quad (2.3.11)$$

Заметим, что система (2.3.10) получена из системы (2.1.13) при $n = 3$.

Пусть прямая $y = k_1x$ — ось симметрии S -типа системы (2.3.10) и образует с прямой $y = kx$ угол $\varphi = \pi/4$ [60]. Тогда

$$k_1 = \frac{1+k}{1-k}, \quad (0 \leq k < 1). \quad (2.3.12)$$

Применим к системе (2.3.10) преобразование $\bar{x} = x + k_1y$, $\bar{y} = -k_1x + y$, где k_1 определяется по формуле (2.3.12). В полученной системе потребуем, чтобы прямые $\bar{x} = 0$ и $\bar{y} = 0$ были осями симметрии S -типа.

Теорема 2.3.14. Система дифференциальных уравнений (1.1.9) при $n = 3$ имеет две оси симметрии N -типа $y = kx$ и $x = -ky$, и столько же осей симметрии S -типа, а именно $y = k_1x$ и $x = -k_1y$, где k_1 определяется по формуле (2.3.12), в том и только в том случае, когда эта система имеет вид (2.3.10), где

$$\begin{aligned} r_{00} &= -s_{00}, \\ s_{02} + r_{20} &= -(s_{02} + r_{02}), \\ (s_{02} + r_{20})k^2 + (s_{11} - r_{11})k - (s_{02} + r_{20}) &= 0, \\ (s_{11} + r_{11})k^2 - 4(s_{02} + r_{02})k - (s_{11} + r_{11}) &= 0, \\ r_{11}k^2 - 2(r_{02} - r_{20})k - r_{11} &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

При $k = 0$, с учетом ограничений на коэффициенты, систему (2.3.10) запишем в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y(s_{00} + s_{02}x^2 + s_{20}y^2), \\ \frac{dy}{dt} = -x(s_{00} + s_{20}x^2 + s_{02}y^2), \end{cases} \quad (2.3.14)$$

где $s_{02} \neq s_{20}$, $s_{00} \neq 0$.

Изучим поведение траекторий кубической дифференциальной системы, удовлетворяющей условиям теоремы 2.3.14. Для этого, не уменьшая общности, воспользуемся системой (2.3.14).

Рассмотрим случаи:

$$s_{00}s_{02} < 0, \quad s_{00}s_{20} < 0; \quad (2.3.15)$$

$$s_{00}s_{02} < 0, \quad s_{00}s_{20} > 0; \quad (2.3.16)$$

$$s_{00}s_{02} > 0, \quad s_{00}s_{20} > 0; \quad (2.3.17)$$

$$s_{00}s_{02} > 0, \quad s_{00}s_{20} < 0; \quad (2.3.18)$$

$$s_{00}s_{02} < 0, \quad s_{20} = 0; \quad (2.3.19)$$

$$s_{00}s_{02} > 0, \quad s_{20} = 0; \quad (2.3.20)$$

$$s_{20}s_{00} > 0, \quad s_{02} = 0; \quad (2.3.21)$$

$$s_{20}s_{00} < 0, \quad s_{02} = 0. \quad (2.3.22)$$

Предварительно установим характер поведения траекторий системы (2.3.14) в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости.

Преобразование Пуанкаре $x = 1/z$, $y = u/z$ приводит систему (2.3.14) к системе

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -s_{20} - s_{00}z^2 + s_{20}u^4 + s_{00}u^2z^2, \\ \frac{dz}{dt} = s_{02}uz + s_{20}u^3z + s_{00}uz^3. \end{cases} \quad (2.3.23)$$

Легко видеть, что особыми точками системы (2.3.23) на экваторе сферы Пуанкаре являются точки $W_1(u = 1, z = 0)$ и $W_2(u = -1, z = 0)$.

Выясним характер особой точки W_1 , для чего перенесем начало координат в эту точку

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 4s_{20}u + 6s_{20}u^2 + 4s_{20}u^3 + 2s_{00}uz^2 + s_{20}u^4 + s_{00}u^2z^2, \\ \frac{dz}{dt} = (s_{02} + s_{20})z + (s_{02} + 3s_{20})uz + s_{00}z^3 + 3s_{20}u^2z + \\ + s_{20}u^3z + s_{00}uz^3. \end{cases} \quad (2.3.24)$$

Теорема 2.3.15. Особая точка W_1 системы (2.3.23) является:

a) простым устойчивым узлом, если выполняется одна из серий условий:

$$s_{00} > 0, s_{02} > 0, s_{02} + s_{20} < 0;$$

$$s_{00} > 0, s_{02} = 0, s_{20} < 0, s_{00}s_{02} < 0, s_{00}s_{20} < 0;$$

b) простым неустойчивым узлом, если выполняется одна из серий условий:

$$s_{00} > 0, s_{02} < 0, s_{02} + s_{20} < 0;$$

$$s_{00} > 0, s_{02} > 0, s_{20} > 0;$$

c) простым седлом, если выполняется условие

$$s_{20}(s_{02} + s_{20}) < 0, s_{00} > 0;$$

d) сложным трехкратным узлом, если выполняется условие:

$$s_{00} > 0, s_{02} < 0, s_{20} = -s_{02};$$

e) сложным трехкратным седлом, если выполняется условие:

$$s_{00} > 0, \ s_{02} > 0, \ s_{20} = -s_{02}.$$

Доказательство. Справедливость утверждения теоремы в случаях a), b), и c) следует из того, что определитель Δ , составленный из коэффициентов при линейных членах в правых частях уравнений системы (2.3.24) является знакопостоянным, а именно, при $\Delta > 0$ точка W_1 — узел, при $\Delta < 0$ — седло.

Для выяснения характера сложной особой точки W_1 системы (2.3.23) в системе (2.3.24) сделаем преобразование $\bar{z} = u$, $\bar{u} = z$ и замену времени $d\tau = 4s_{20}dt$. В результате этого получим систему

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{d\tau} = \frac{\bar{u} \cdot \bar{z}}{2} + \frac{s_{00}}{4s_{20}}\bar{u}^3 + \frac{3}{4}\bar{u} \cdot \bar{z}^3 + \frac{s_{00}}{4s_{20}}\bar{u}^3 \cdot \bar{z} \equiv P_2(\bar{u}, \bar{z}), \\ \frac{d\bar{z}}{d\tau} = \bar{z} + \frac{3}{2}\bar{z}^2 + \bar{z}^3 + \frac{s_{00}}{2s_{20}}\bar{u}^2 \cdot \bar{z} + \frac{1}{4}\bar{z}^4 + \frac{s_{00}}{4s_{20}}\bar{u}^2 \cdot \bar{z}^2 \equiv \\ \equiv \bar{z} + Q_2(\bar{u}, \bar{z}). \end{cases} \quad (2.3.25)$$

Из (2.3.25) видно, что $P_2(\bar{u}, 0) \equiv -(s_{00}/s_{02})\bar{u}^3$.

Согласно теореме 65 [80] при $s_{00} \cdot s_{02} > 0$ ($s_{00} \cdot s_{02} < 0$) точка W_1 — трехкратное сложное седло (трехкратный сложный узел). Теорема доказана.

Заметим, что второе преобразование Пуанкаре $x = \frac{v}{z}, y = \frac{1}{z}$ [80], примененное к системе (2.3.14), показывает, что эта система на бесконечности не имеет особых точек, отличных от W_1 и W_2 .

Теорема 2.3.16. Если $s_{20} = 0$, то система (2.3.14) имеет на экваторе сферы Пуанкаре два центра $W_3(u = z = 0)$, $W_4(v = z = 0)$ при $s_{00} \cdot s_{02} > 0$ и два простых седла, если $s_{00} \cdot s_{02} < 0$.

Доказательство. При $s_{20} = 0$, как видно из первого уравнения системы (2.3.23) $f(u) = -s_{20} + s_{20}u^4 \equiv 0$. Поэтому воспользуемся результатами работы [100].

В результате применения преобразования Пуанкаре $x = 1/z, y = u/z$,

$(x = v/z, y = 1/z)$ система (2.3.14) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -s_{00}z + s_{00}u^2z, \\ \frac{dz}{dt} = s_{02}u + s_{00}uz^2, \end{cases} \quad (2.3.26)$$

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -s_{00}z + s_{00}v^2z, \\ \frac{dz}{dt} = s_{02}v + s_{00}vz^2. \end{cases} \quad (2.3.27)$$

Из (2.3.26) и (2.3.27) видно, что при $s_{20} = 0$ система (2.3.14) имеет две особые точки $W_3(u = z = 0)$ и $W_4(v = z = 0)$, причем экватор сферы Пуанкаре не состоит из траекторий системы.

Согласно [100] и в силу симметрии векторного поля системы (2.3.14) W_3 и W_4 могут быть только особыми точками второй группы, а именно, центром при $s_{00} \cdot s_{02} > 0$ и седлами при $s_{00} \cdot s_{02} < 0$.

Теорема доказана.

Теорема 2.3.17. В конечной части фазовой плоскости система (2.3.14) имеет:

1) четыре центра и пять седел, если выполняется одна из серий условий:

- a) $s_{00} > 0, s_{20} < s_{02} < 0;$
- b) $s_{00} > 0, s_{02} = 0, s_{20} < 0;$

2) четыре узла и пять седел, если выполняется условие

$$s_{00} > 0, s_{02} < s_{20} < 0;$$

3) четыре центра и одно седло, если выполняется одна из серий условий:

- c) $s_{00} > 0, s_{20} < 0, s_{02} + s_{20} > 0;$
- d) $s_{00} > 0, s_{02} > 0, s_{20} = -s_{02};$

4) четыре узла и одно седло, если выполняется одна из серий условий:

- e) $s_{00} > 0, s_{20} > 0, s_{02} + s_{20} < 0;$
- f) $s_{20} = 0, s_{00} > 0, s_{02} < 0;$

5) одно седло $O(0, 0)$, если выполняется одна из серий условий:

- g) $s_{00} > 0, s_{02} < 0, s_{20} + s_{02} > 0;$
- h) $s_{00} > 0, s_{20} > 0, s_{02} = -s_{20};$
- s) $s_{02} = 0, s_{00} > 0, s_{20} > 0;$
- r) $s_{00} > 0, s_{20} = 0, s_{02} > 0.$

Доказательство теоремы основано на теореме 2.3.16 и на известном факте о том, что сумма индексов Пуанкаре всех особых точек системы, включая и бесконечно удаленные, равна 1 [94].

Отметим, что в случае $s_{00} < 0$ мы получим те же утверждения о поведении траекторий системы (2.3.14) как и при $s_{00} > 0$, с той лишь разницей, что устойчивость особых точек типа «узел», поменяется на противоположную.

Фазовые портреты системы (2.3.14) изображены на рис. 39-45.

Далее рассмотрим вопрос о поведении траекторий квадратичной системы, имеющей только оси симметрии N -типа или только оси симметрии S -типа.

Сначала изучим поведение траекторий системы (1.1.9) при $n = 2$, имеющей одну ось симметрии N -типа.

Для этого, не ограничивая общности, рассмотрим систему (2.1.42) при $k = 0$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(r_{00} + r_{10}x), \\ \frac{dy}{dt} = b_{00} + b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{02}y^2. \end{cases} \quad (2.3.28)$$

Будем считать, что правая часть каждого из уравнений системы (2.3.28) содержит хотя бы один квадратичный член и правая часть хотя бы одного из уравнений содержит, по крайней мере, один неквадратичный член.

Рассмотрим поведение траекторий системы (2.3.28) в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости.

Преобразование Пуанкаре $x = 1/z, y = u/z$ переводит эту систему в систему:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = b_{20} + b_{10}z + (b_{02} - r_{10})u^2 + b_{00}z^2 - r_{00}u^2z, \\ \frac{dz}{dt} = -r_{10}uz - r_{00}uz^2. \end{cases} \quad (2.3.29)$$

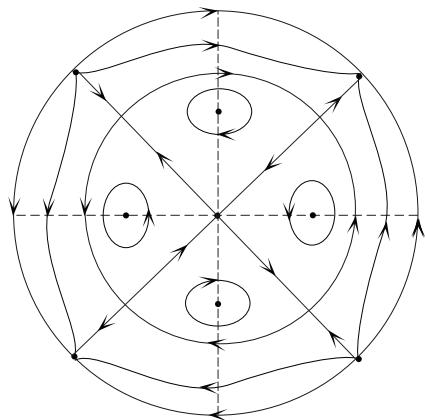


Рис. 39

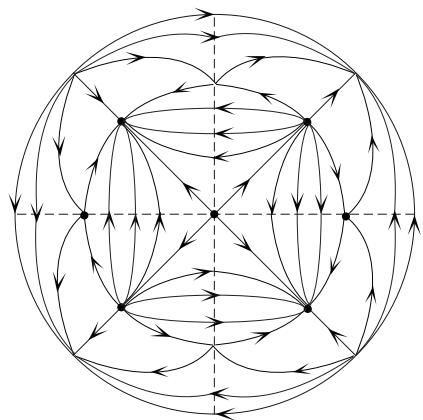


Рис. 40

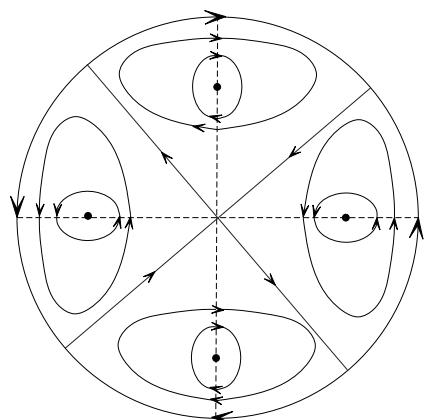


Рис. 41

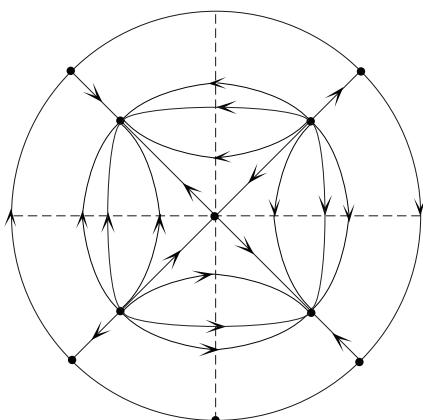


Рис. 42

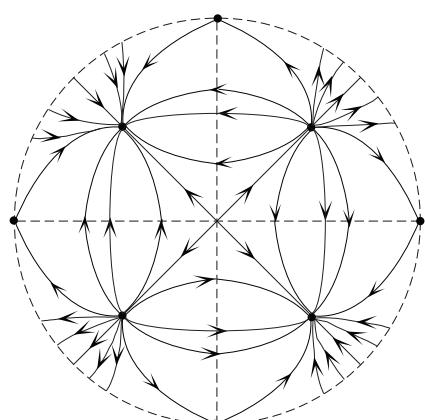


Рис. 43

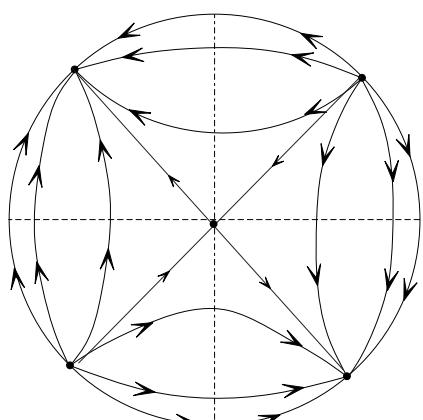


Рис. 44

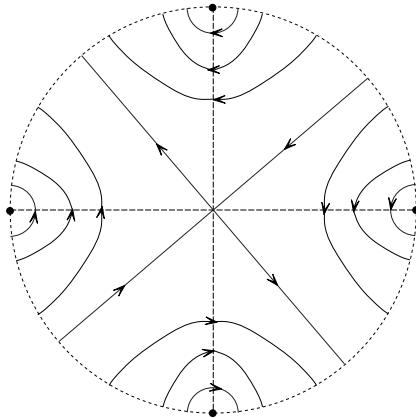


Рис. 45

Особые точки системы (2.3.29) определяются из системы

$$\begin{cases} z = 0, \\ f(u) \equiv b_{20} + (b_{02} - r_{10})u^2 = 0. \end{cases}$$

Здесь следует различать два случая:

- a) $f(u) \not\equiv 0$, экватор сферы Пуанкаре состоит из траекторий системы (2.3.28).
- b) $f(u) \equiv 0$, экватор сферы Пуанкаре не состоит из траекторий системы (2.3.28).

Второе преобразование Пуанкаре $x = v/z, y = 1/z$ переводит систему (2.3.28) в систему

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = (r_{10} - b_{02})v + r_{00}z - b_{20}v^3 - b_{10}v^2z - b_{00}vz^2, \\ \frac{dz}{dt} = -b_{02}z - b_{20}v^2z - b_{10}vz^2 - b_{00}z^3. \end{cases} \quad (2.3.30)$$

В случае a) имеет место

Теорема 2.3.18. *Если выполняется одна из серий условий*

$$b_{20} > 0, \quad b_{02} - r_{10} < 0, \quad r_{10} < 0; \quad (2.3.31)$$

$$b_{20} < 0, \quad b_{02} - r_{10} > 0, \quad r_{10} > 0, \quad (2.3.32)$$

то на экваторе сферы Пуанкаре система (2.3.28) имеет три простые особые точки, в том числе:

$$(u = \pm \sqrt{\frac{b_{20}}{r_{10} - b_{02}}}, z = 0) - \text{седла, } (v = z = 0) - \text{узел.}$$

Доказательство. При выполнении условия (2.3.31) или (2.3.32) система (2.3.29) имеет две особые точки:

$$u = \pm \sqrt{\frac{b_{20}}{r_{10} - b_{02}}}, z = 0).$$

Для установления характера особой точки

$$(u = \sqrt{\frac{b_{20}}{r_{10} - b_{02}}}, z = 0)$$

в системе (2.3.29) произведем замену

$$z = \bar{z}, u + \sqrt{\frac{b_{20}}{r_{10} - b_{02}}} = \bar{u},$$

но полученную систему запишем в прежних переменных:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 2(b_{02} - r_{10})\sqrt{\frac{b_{20}}{r_{10} - b_{02}}}u + f_2(u, z), \\ \frac{dz}{dt} = -r_{10}\sqrt{\frac{b_{20}}{r_{10} - b_{02}}}z + g_2(u, z), \end{cases} \quad (2.3.33)$$

где $f_2(u, z)$ и $g_2(u, z)$ — многочлены степени, не ниже второй.

Из (2.3.33) видно, что определитель из линейных коэффициентов $\Delta = 2r_{10} \cdot b_{20}$. При выполнении любой из серий условий (2.3.31) и (2.3.32) $\Delta < 0$, следовательно, особая точка ($u = 0, z = 0$) системы (2.3.33) является простым седлом. В силу симметрии векторного поля системы (2.3.28) относительно прямой $y = 0$ особая точка

$$\left(u = -\sqrt{\frac{b_{20}}{r_{10} - b_{02}}}, z = 0 \right)$$

также является простым седлом.

Нетрудно видеть, что для каждой из серий условий (2.3.31) и (2.3.32) выполняется неравенство $b_{02}(r_{01} - b_{02}) < 0$. Отсюда следует, что особая точка ($v = z = 0$) системы (2.3.30) является простым узлом. Теорема доказана.

Теорема 2.3.19. *Система дифференциальных уравнений (2.3.28) имеет на экваторе сферы Пуанкаре:*

a) три простых узла

$$\left(u = \pm \sqrt{\frac{b_{20}}{r_{10} - b_{02}}}, z = 0 \right), (v = z = 0),$$

если выполняется серия условий:

$$b_{20} > 0, r_{10} > 0, b_{02} < 0; \quad (2.3.34)$$

b) два простых узла

$$\left(u = \pm \sqrt{\frac{b_{20}}{r_{10} - b_{02}}}, z = 0 \right)$$

и простое седло ($v = z = 0$), если выполняется серия условий:

$$b_{20} > 0, 0 < b_{02} < r_{10}; \quad (2.3.35)$$

c) два простых узла

$$\left(u = \pm \sqrt{\frac{b_{20}}{r_{10}}}, z = 0 \right)$$

и сложную особую точку ($v = z = 0$), являющуюся либо седлом, либо узлом, либо седлоузлом, если выполняется серия условий:

$$b_{20} > 0, r_{10} > 0, b_{02} = 0. \quad (2.3.36)$$

Доказательство в случаях выполнения (2.3.34) или (2.3.35) проводится так же, как и доказательство предыдущей теоремы. В случае выполнения (2.3.36) нетрудно видеть, что особая точка ($v = z = 0$) системы (2.3.30) является сложной, и согласно теореме 65 [80] может быть либо седлом, либо узлом, либо седлоузлом.

Теорема 2.3.20. *Система дифференциальных уравнений (2.3.28) имеет на экваторе сферы Пуанкаре единственную особую точку ($v = z = 0$), которая является:*

a) узлом, если выполняется условие

$$b_{20}(b_{02} - r_{10}) > 0, b_{20} \cdot b_{02} > 0, \quad (2.3.37)$$

b) седлом, если выполняется условие

$$b_{20}(b_{02} - r_{10}) > 0, \quad b_{20} \cdot b_{02} < 0, \quad (2.3.38)$$

c) сложной особой точкой типа «седло», или «узел» или «седло-узел», если выполняется условие:

$$b_{20}(b_{02} - r_{10}) > 0, \quad b_{02} = 0. \quad (2.3.39)$$

Доказательство проводится с использованием (2.3.29) и (2.3.30).

Теорема 2.3.21. Система дифференциальных уравнений (2.3.28) имеет на экваторе сферы Пуанкаре:

a) один простой узел ($v = z = 0$) и одно топологическое седло ($u = z = 0$), если выполняется серия условий:

$$b_{20} = 0, \quad r_{10}(b_{02} - r_{10}) > 0, \quad r_{10} \cdot b_{02} > 0, \quad (2.3.40)$$

b) одно простое седло ($v = z = 0$) и одно топологическое седло ($u = z = 0$), если выполняется серия условий:

$$b_{20} = 0, \quad r_{10}(b_{02} - r_{10}) > 0, \quad r_{10} \cdot b_{02} < 0; \quad (2.3.41)$$

c) один простой узел ($v = z = 0$) и одну особую точку с эллиптической областью ($u = z = 0$), если выполняется серия условий:

$$b_{20} = 0, \quad r_{10}(b_{02} - r_{10}) < 0, \quad r_{10} \cdot b_{02} < 0; \quad (2.3.42)$$

d) одно простое седло ($v = z = 0$) и одну особую точку с эллиптической областью ($u = z = 0$), если выполняется серия условий:

$$b_{20} = 0, \quad r_{10}(b_{02} - r_{10}) < 0, \quad r_{10} \cdot b_{02} > 0. \quad (2.3.43)$$

Доказательство. Заменой времени $d\tau = b_{10} \cdot dt$ приведем систему (2.3.29) к виду

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = z + \frac{(b_{02} - r_{10})}{b_{10}} u^2 + \frac{b_{00}}{b_{10}} z^2 - \frac{r_{00}}{b_{10}} u^2 z \equiv z + P_2(u, z), \\ \frac{dz}{d\tau} = -\frac{r_{10}}{b_{10}} u z - \frac{r_{00}}{b_{10}} u z^2 \equiv Q_2(u, z). \end{cases} \quad (2.3.44)$$

Решение уравнения $z + P_2(u, z) = 0$ имеет вид

$$\varphi(u) = -\frac{(b_{02} - r_{10})}{b_{10}} \cdot u^2 + \dots,$$

поэтому

$$Q_2(u, \varphi(u)) = \frac{(b_{02} - r_{10})r_{10}}{b_{10}^2} \cdot u^3 + \dots. \quad (2.3.45)$$

Если имеет место (2.3.40) или (2.3.41), то в силу теоремы 66 [80] точка $(u = z = 0)$ — топологическое седло по терминологии [80]. Вместе с тем из системы (2.3.30) вытекает, что если выполняется (2.3.40) ((2.3.41)), то точка $(v = z = 0)$ — простой узел (простое седло).

Если выполняется (2.3.42) или (2.3.43), то согласно теореме 66 [81] точка $(u = z = 0)$ — либо топологический узел, либо особая точка второй группы, либо состояние равновесия с эллиптической областью. Так как экватор сферы Пуанкаре $z = 0$ состоит из траекторий системы (2.3.29), то $(u = z = 0)$ не может быть ни фокусом, ни центром. Эта особая точка не может быть топологическим узлом также, так как при переходе через нее знак правой части первого уравнения системы (2.3.29) не меняется.

Таким образом, $(u = z = 0)$ — особая точка с эллиптической областью по терминологии [80].

Характер особой точки $(v = z = 0)$ в рассматриваемых случаях легко устанавливается из системы (2.3.30). Теорема доказана.

Теорема 2.3.22. *Если $b_{20} = b_{10} = 0, b_{00} \cdot b_{02} > 0$, то система (2.3.28) имеет на экваторе сферы Пуанкаре:*

a) *одну особую точку $(v = z = 0)$ типа «простое седло» и одну сложную особую точку $(u = z = 0)$, к которой примыкают два эллиптических и два параболических сектора, если $b_{02} \cdot (r_{10} - b_{02}) > 0$;*

b) *одну особую точку $(v = z = 0)$ типа «простой узел» и одну сложную особую точку $(u = z = 0)$, к которой примыкают два гиперболических сектора, если $b_{02} \cdot (r_{10} - b_{02}) < 0$.*

Доказательство. Установим характер сложной особой точки $(u = z = 0)$ системы (2.3.29) используя метод Фроммера [2]. Для этого обозначим функцию

$$\psi(u, \mu) = \frac{-b_{02}\mu - b_{00}\mu^3}{b_{02} - r_{10} + b_{00}\mu^2 - r_{00}u\mu}.$$

По условиям данной теоремы в особой точке ($u = z = 0$) (в соответствии с терминологией [2]) существует единственное критическое направление $z = 0$.

Нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial \psi(0, 0)}{\partial \mu} = \frac{b_{02}}{r_{10} - b_{02}}. \quad (2.3.46)$$

Если выражение (2.3.46) положительно (отрицательно), то согласно работе [2] ($u = z = 0$) — особая точка, к которой примыкают два эллиптических и два параболических сектора (два гиперболических сектора). При выполнении условия $b_{02}(r_{10} - b_{02}) > 0 (< 0)$ в силу (2.3.30) точка ($u = z = 0$) — простое седло (простой узел). Теорема доказана.

Замечание 2.3.5. Из результатов статьи [67] следует, что индекс Пуанкаре особой точки ($u = z = 0$) системы (2.3.29) при $b_{20} = b_{10} = 0$, $b_{02} - r_{10} \neq 0$ равен нулю, или -2 , или $+2$. Так как в условиях теоремы в конечной части фазовой плоскости нет особых точек, то в силу единственности критического направления в особой точке ($u = z = 0$) индекс Пуанкаре указанной особой точки не может равняться -2 . Согласно [67] точка ($u = z = 0$) может быть только особой точкой, к которой примыкают два эллиптических и два параболических сектора или два гиперболических сектора.

Теорема 2.3.23. *Если $b_{20} = b_{10} = 0$, $b_{00}b_{02} < 0$, то система (2.3.28) имеет на экваторе сферы Пуанкаре:*

a) *простое седло ($v = z = 0$) и сложную особую точку ($u = z = 0$), к которой примыкают два параболических и два гиперболических сектора, если $b_{02}(r_{10} - b_{02}) > 0$;*

b) *простой узел ($v = z = 0$) и сложную особую точку ($u = z = 0$), к которой примыкают два эллиптических и два параболических сектора (шесть гиперболических секторов), если $b_{02}r_{10} < 0$ ($0 < r_{10} < b_{02}$).*

Доказательство. При выполнении неравенства $b_{02}(r_{10} - b_{02}) > 0$ особая точка ($v = z = 0$) является, очевидно, простым седлом системы (2.3.30). При этом выполняется неравенство $b_{02}r_{10} > 0$. Нетрудно убедиться в том, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mu} \left(0, \pm \sqrt{\frac{-b_{02}}{b_{00}}} \right) = -\frac{2b_{02}}{r_{10}}. \quad (2.3.47)$$

Так как правая часть (2.3.47) отрицательная, то согласно [2] в критических направлениях $z = \pm\sqrt{-b_{02}/b_{00}}u$ в точку ($u = z = 0$) входит ровно по одной траектории. Это означает, что к особой точке ($u = z = 0$) примыкают два гиперболических и два параболических сектора.

Если выполняется неравенство $b_{02}r_{10} < 0$, то выражение (2.3.46) отрицательно. Отсюда следует, что точка ($u = z = 0$) — простой узел и в направлении $z = 0$ к точке ($u = z = 0$) стремится одна траектория. Приимая во внимание, что правая часть (2.3.47) положительна, приходим к выводу, что к точке ($u = z = 0$) примыкают два эллиптических и два параболических сектора [2].

Если имеет место неравенство $0 < r_{10} < b_{02}$, то в каждом критическом направлении $z = 0, z = \pm\sqrt{-b_{02}/b_{00}}u$, к особой точке стремится по одной траектории [2]. Поэтому ($u = z = 0$) — шестисепаратрисное седло. Теорема доказана.

Если $b_{02} - r_{10} = 0, b_{20} \neq 0$, то на экваторе сферы Пуанкаре система (2.3.28) имеет единственную особую точку ($v = z = 0$).

Замечание 2.3.6. Так как $b_{02} \neq 0$, то тип особой точки ($v = z = 0$) системы (2.3.30) вполне определяется ее индексом Пуанкаре, а именно, если $J = 0$, то точка ($v = z = 0$) — седлоузел, если $J = 1(-1)$, то точка ($v = z = 0$) — топологический узел (топологическое седло) [101].

Тем самым полностью исследовано поведение траекторий системы (2.3.28) в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости при $f(u) \not\equiv 0$.

Пусть $f(u) \equiv 0$, то есть $b_{20} = 0, b_{02} = r_{10} \neq 0$. Применим к системе (2.3.28) первое преобразование Пуанкаре $x = 1/z, y = u/z$

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = b_{10} + b_{00}z - r_{00}u^2, \\ \frac{dz}{dt} = -r_{10}u - r_{00}uz. \end{cases} \quad (2.3.48)$$

Второе преобразование Пуанкаре $x = v/z, y = 1/z$ переводит систему (2.3.28) в систему

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = r_{00} - b_{10}v^2 - b_{00}vz, \\ \frac{dz}{dt} = -r_{10} - b_{10}vz - b_{00}z^2. \end{cases} \quad (2.3.49)$$

Так как $r_{10} \neq 0$, то $(v = z = 0)$ — не особая точка системы (2.3.49). Следовательно, все бесконечно удаленные особые точки системы (2.3.28) являются особыми точками системы 2.3.48 [80].

Но система (2.3.48) не имеет ни одной особой точки на прямой $z = 0$, либо имеет единственную особую точку. Очевидно, при $b_{10} \neq 0$ система (2.3.48) не имеет особой точки.

Пусть $b_{10} = 0$. Если $r_{10}b_{00} < 0$, то $A(u = z = 0)$ — простое седло. Если $r_{10}b_{00} > 0$, то в силу симметрии поля направлений системы (2.3.28) относительно прямой $y = 0$ точка $A(u = z = 0)$ — центр.

Заметим, что $b_{00} \neq 0$ при $b_{10} = 0, b_{20} = 0, b_{02} = r_{10}$, так как в противном случае правые части уравнений системы (2.3.28) имеют общий множитель y .

Таким образом, справедлива

Теорема 2.3.24. *Если $b_{20} = 0, b_{02} = r_{10} \neq 0$, то при $b_{10} \neq 0$ система (2.3.28) не имеет особых точек на экваторе сферы Пуанкаре, при $b_{10} = 0, b_{00}r_{10} > 0 (< 0)$ система (2.3.28) имеет единственную бесконечно удаленную особую точку $A(u = z = 0)$ типа «центр» («седло»).*

Далее исследуем поведение траекторий системы (2.3.28) в ограниченной части фазовой плоскости.

Теорема 2.3.25. *Система дифференциальных уравнений (2.3.28) имеет в ограниченной части фазовой плоскости:*

a) *четыре особые точки, в том числе два центра и два седла или два узла и два седла, если выполняется серия условий:*

$$b_{10}^2 - 4b_{00}b_{20} > 0, b_{20}b_{02} > 0, x_1 < -\frac{r_{00}}{r_{10}} < x_2, \quad (2.3.50)$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $b_{20}x^2 + b_{10}x + b_{00}$;

b) *четыре особые точки, в том числе один центр, два узла и одно седло или один центр и три седла, если выполняется серия условий:*

$$b_{10}^2 - 4b_{00}b_{20} > 0, b_{20}b_{02} < 0, -\frac{r_{00}}{r_{10}} \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty), \quad (2.3.51)$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $b_{20}x^2 + b_{10}x + b_{00}$, $x_1 < x_2$.

Доказательство. При выполнении условия (2.3.50) или (2.3.51) система имеет две особые точки на прямой $y = 0$ и столько же особых

точек на инвариантной прямой $x = -r_{00}/r_{10}$, причем особые точки, расположенные на прямой $x = -r_{00}/r_{10}$ являются узлами (седлами), если $r_{10}b_{02} > 0 (< 0)$. Особые точки системы при выполнении серии условий пункта а) образуют выпуклый (для случая б) невыпуклый) четырехугольник. Принимая во внимание, что на оси симметрии N -типа простая особая точка может быть только центром или седлом (теорема 2.1.2) и теорему Берлинского [57], убеждаемся в справедливости данной теоремы. Фазовые портреты системы (2.3.28) в круге Пуанкаре изображены на рис. 46-51 в случае четырех особых точек в ограниченной части фазовой плоскости.

Теорема 2.3.26. *Система дифференциальных уравнений (2.3.28) имеет в ограниченной части фазовой плоскости три особые точки, в том числе:*

a) *одно простое седло и два простых узла, если выполняется серия условий:*

$$b_{20} = 0, b_{10} \neq 0, r_{10}b_{02} > 0, \Delta < 0; \quad (2.3.52)$$

b) *один центр и два простых седла, если выполняется серия условий:*

$$b_{20} = 0, b_{10} \neq 0, r_{10}b_{02} < 0, \Delta > 0; \quad (2.3.53)$$

c) *одно двухсепаратрисное седло и два простых седла, если выполняется серия условий:*

$$b_{10}^2 - 4b_{00}b_{20} = 0, b_{20}b_{02} < 0, r_{10}b_{20} > 0; \quad (2.3.54)$$

d) *одно двухсепаратрисное седло и два простых узла, если выполняется серия условий:*

$$b_{10}^2 - 4b_{00}b_{20} = 0, b_{20}b_{02} < 0, r_{10}b_{20} < 0; \quad (2.3.55)$$

$$\varepsilon \partial e \Delta = b_{00}r_{10} - r_{00}b_{10}.$$

Доказательство. В результате переноса начала координат в точку $D(-b_{10}/2b_{20}; 0)$ система (2.3.28) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{(2b_{20}r_{00} - b_{10}r_{10})}{2b_{02}}y + r_{10}xy, \\ \frac{dy}{dt} = b_{20}x^2 + b_{02}y^2. \end{cases} \quad (2.3.56)$$

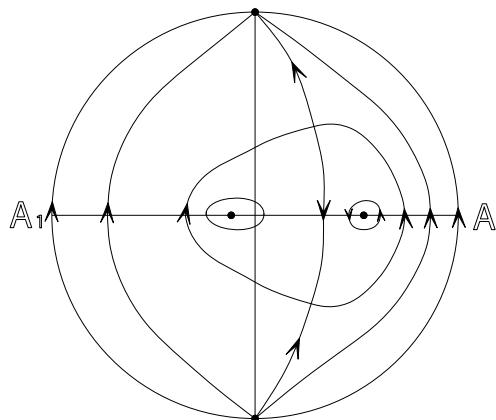


Рис. 48

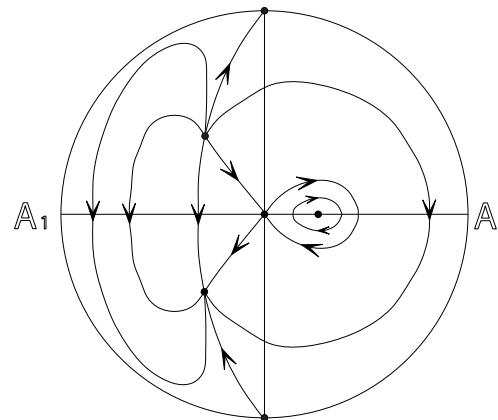


Рис. 49

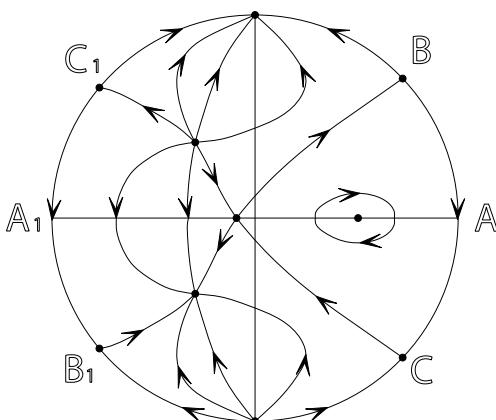


Рис. 50

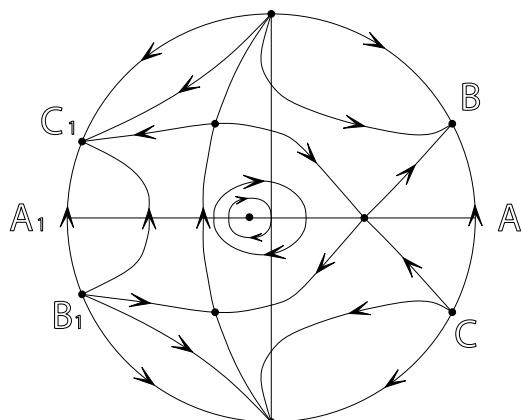


Рис. 51

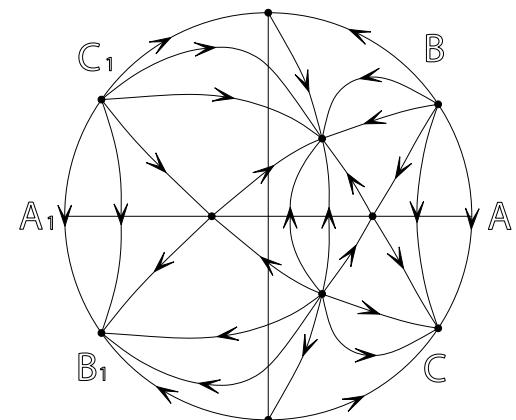


Рис. 47

Рис. 46

Согласно теореме 67 [80] особая точка $(0, 0)$ системы (2.3.56) является либо двухсепаратрисным седлом (вырожденным седлом по терминологии [80]), либо седлоузлом. Но в силу того, что ось абсцисс является осью симметрии N -типа, точка $(0, 0)$ может быть только двухсепаратрисным седлом.

Перенося начало координат в особую точку

$$F\left(-\frac{r_{00}}{r_{10}}, \sqrt{\alpha}\right), \text{ где } \alpha = -\frac{(b_{10}r_{10} - 2r_{00}b_{20})^2}{4r_{10}^2 b_{20} b_{02}},$$

получим, что система (2.3.28) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_{10}\sqrt{\alpha}x + r_{10}xy, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{(b_{10}r_{10} - 2b_{20}r_{00})}{r_{10}}x + 2b_{02}\sqrt{\alpha}y + b_{20}x^2 + b_{02}y^2. \end{cases} \quad (2.3.57)$$

Определитель матрицы линейных коэффициентов системы (2.3.57) равен

$$-\frac{(b_{10}r_{10} - 2b_{20}r_{00})^2}{2r_{10}b_{20}}. \quad (2.3.58)$$

Выражение (2.3.58) положительно (отрицательно), если $r_{10}b_{20} < 0$ (> 0), то есть при выполнении (2.3.54)((2.3.55)) точки

$$F\left(-\frac{r_{00}}{r_{10}}, \sqrt{\alpha}\right) \text{ и } G\left(-\frac{r_{00}}{r_{10}}, -\sqrt{\alpha}\right)$$

являются простыми седлами (простыми узлами).

Если выполняется одна из серий условий (2.3.52) и (2.3.53), то особыми точками системы (2.3.28) являются точки

$$A\left(-\frac{b_{00}}{b_{10}}, 0\right), B\left(-\frac{r_{00}}{r_{10}}, \sqrt{-\frac{\Delta}{r_{10}b_{02}}}\right), C\left(-\frac{r_{00}}{r_{10}}, -\sqrt{-\frac{\Delta}{r_{10}b_{02}}}\right).$$

Перенесем начало координат в точку $A(-b_{00}/b_{10}, 0)$ и придадим системе (2.3.28) вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{\Delta}{b_{10}}y + r_{10}xy, \\ \frac{dy}{dt} = b_{10}x + b_{02}y^2. \end{cases} \quad (2.3.59)$$

Определитель матрицы линейных коэффициентов системы (2.3.59) равен Δ , следовательно, при $\Delta > 0 (< 0)$ точка A — центр (простое седло).

Аналогичным образом, перенося начало координат в особую точку B , можно убедиться в том, что определитель матрицы линейных коэффициентов для особой точки B равен $-\Delta$. Следовательно, при $\Delta > 0 (< 0)$ точки B и C — простые седла (простые узлы). Теорема доказана.

Фазовые портреты системы (2.3.28) в случае трех особых точек изображены на рис. 52-57.

Теорема 2.3.27. *Система дифференциальных уравнений (2.3.28) имеет в ограниченной части фазовой плоскости две особые точки, в том числе:*

a) *одно простое седло и одна сложная особая точка с эллиптической областью, расположенные на прямой $y = 0$, если выполняется одна из серий условий:*

$$b_{10}^2 - 4b_{00}b_{20} > 0, \quad b_{20} > 0, \quad 0 < b_{02} < r_{10}, \quad -\frac{r_{00}}{r_{10}} = x_{1,2}; \quad (2.3.60)$$

$$b_{10}^2 - 4b_{00}b_{20} > 0, \quad b_{20}(b_{02} - r_{10}) > 0, \quad b_{20}b_{02} > 0, \quad -\frac{r_{00}}{r_{10}} = x_{1,2}; \quad (2.3.61)$$

b) *одно простое седло и одно топологическое седло, расположенные на прямой $y = 0$, если выполняется серия условий:*

$$b_{10}^2 - 4b_{00}b_{20} > 0, \quad b_{20} > 0, \quad r_{10} > 0, \quad b_{02} < 0, \quad -\frac{r_{00}}{r_{10}} = x_{1,2}; \quad (2.3.62)$$

c) *два простых седла, расположенных на прямой $y = 0$, если выполняется серия условий:*

$$b_{10}^2 - 4b_{00}b_{20} > 0, \quad b_{20} > 0, \quad r_{10} > 0, \quad b_{02} < 0, \quad -\frac{r_{00}}{r_{10}}\epsilon(x_1, x_2); \quad (2.3.63)$$

d) *два центра, расположенных на прямой $y = 0$, если выполняется одна из серий условий:*

$$b_{10}^2 - 4b_{00}b_{20} > 0, \quad b_{20}(b_{02} - r_{10}) > 0, \quad b_{20}b_{02} < 0, \quad -\frac{r_{00}}{r_{10}}\epsilon(x_1, x_2), \quad (2.3.64)$$

$$b_{10}^2 - 4b_{00}b_{20} > 0, \quad b_{20}r_{10} < 0, \quad (b_{02} - r_{10})r_{10} > 0, \quad -\frac{r_{00}}{r_{10}}\epsilon(x_1, x_2); \quad (2.3.65)$$

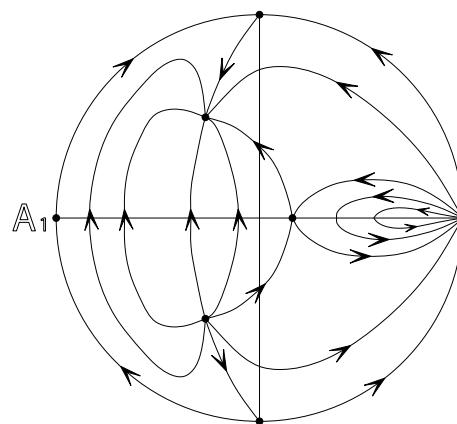


Рис. 52

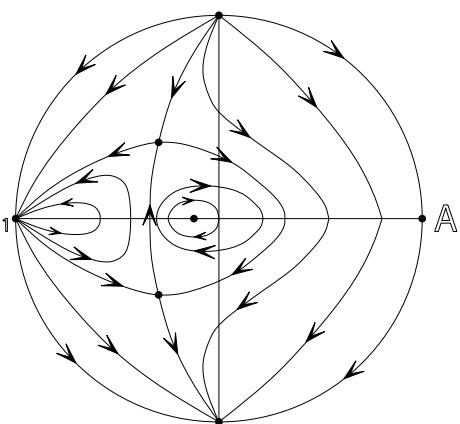


Рис. 53

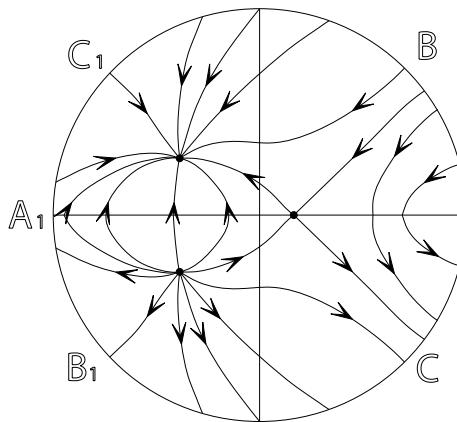


Рис. 54

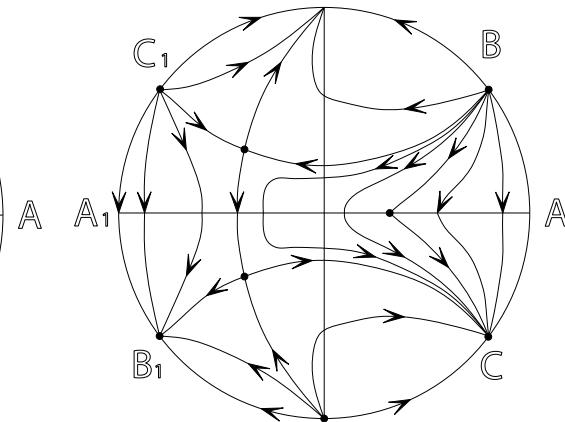


Рис. 55

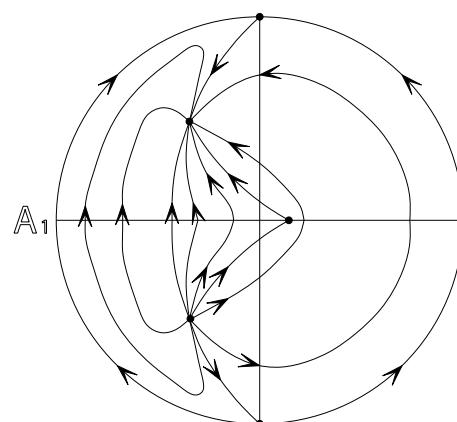


Рис. 56

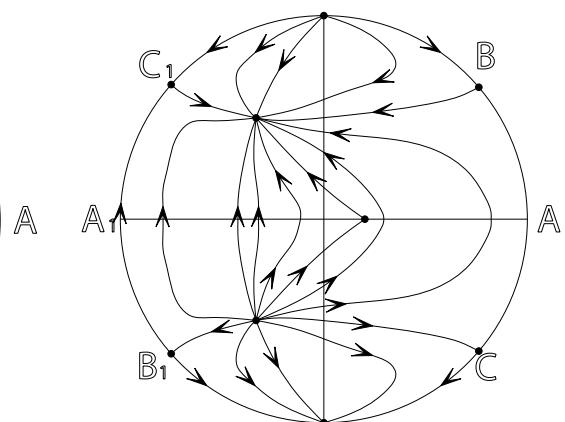


Рис. 57

e) простое седло и центр, расположенные на прямой $y = 0$, если выполняется одна из серий условий:

$$\begin{aligned} b_{10}^2 - 4b_{00}b_{20} &> 0, \quad b_{20} > 0, \\ 0 < b_{02} < r_{10}, \quad -\frac{r_{00}}{r_{10}} &\in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty), \end{aligned} \quad (2.3.66)$$

$$\begin{aligned} b_{10}^2 - 4b_{00}b_{20} &> 0, \quad b_{20}(b_{02} - r_{10}) > 0, \\ b_{20}b_{02} > 0, \quad -\frac{r_{00}}{r_{10}} &\in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty); \end{aligned} \quad (2.3.67)$$

f) два простых седла, расположенных на прямой $x = -r_{00}/r_{10}$, если справедлива серия условий:

$$b_{10}^2 - 4b_{00}b_{20} < 0, \quad b_{20} > 0, \quad r_{10} > 0, \quad b_{02} < 0; \quad (2.3.68)$$

g) два простых узла, расположенных на прямой $x = -r_{00}/r_{10}$, если выполняется одна из серий условий:

$$b_{10}^2 - 4b_{00}b_{20} < 0, \quad b_{20}(b_{02} - r_{10}) > 0, \quad b_{20}b_{02} < 0, \quad (2.3.69)$$

$$b_{10}^2 - 4b_{00}b_{20} < 0, \quad (b_{02} - r_{10})r_{10} > 0, \quad b_{20}r_{10} < 0; \quad (2.3.70)$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $b_{20}x^2 + b_{10}x + b_{00}$, причем $x_1 < x_2$.

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 2.3.26.

Замечание 2.3.7. Под особой точкой с эллиптической областью следует понимать сложную особую точку, к которой примыкают один эллиптический, один гиперболический и два параболических сектора [80].

По терминологии [80] топологическое седло — это сложная особая точка, к которой примыкают четыре гиперболических сектора.

Фазовые портреты системы (2.3.28) в случае двух особых точек в конечной части плоскости изображены на рис. 58-69.

Теорема 2.3.28. Система дифференциальных уравнений (2.3.28) имеет в ограниченной части фазовой плоскости одну особую точку, если выполняются условия

$$b_{10}^2 - 4b_{00}b_{20} = 0, \quad b_{20}b_{02} > 0, \quad \frac{r_{00}}{r_{10}} \neq \frac{b_{10}}{2b_{20}}, \quad (2.3.71)$$

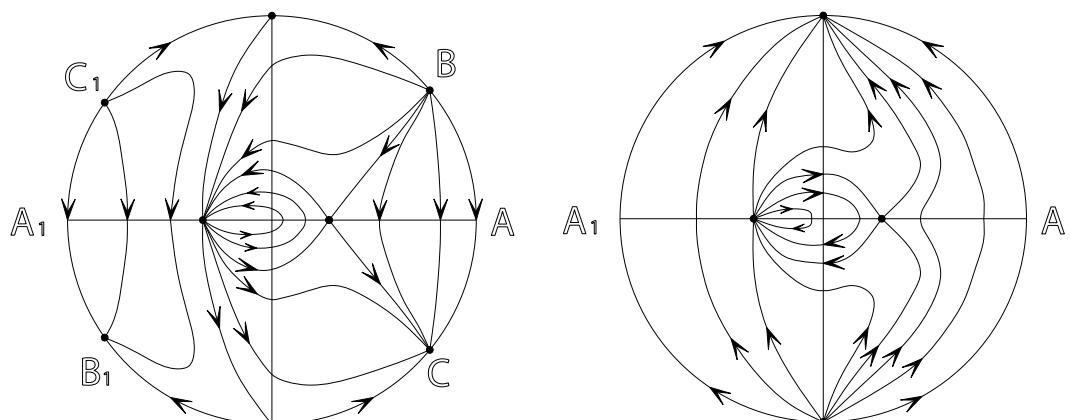


Рис. 58

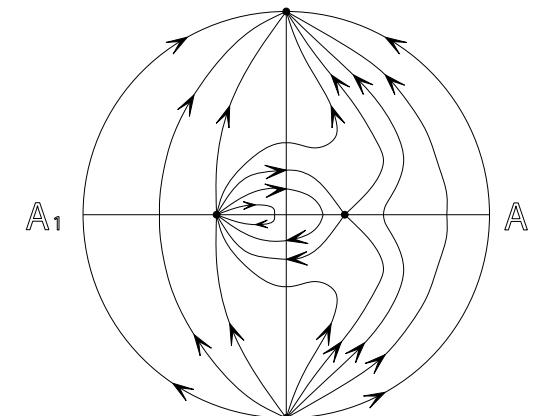


Рис. 59

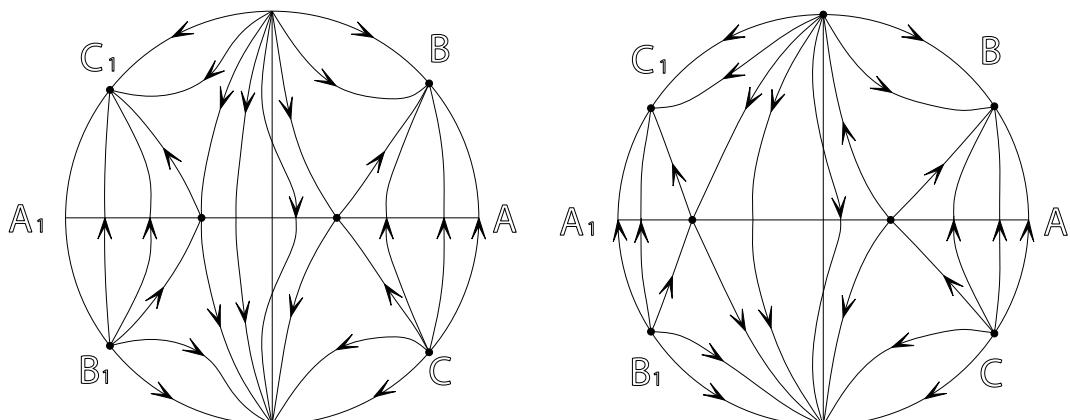


Рис. 60

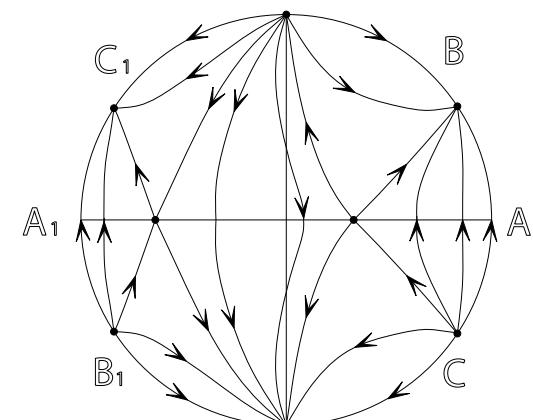


Рис. 61

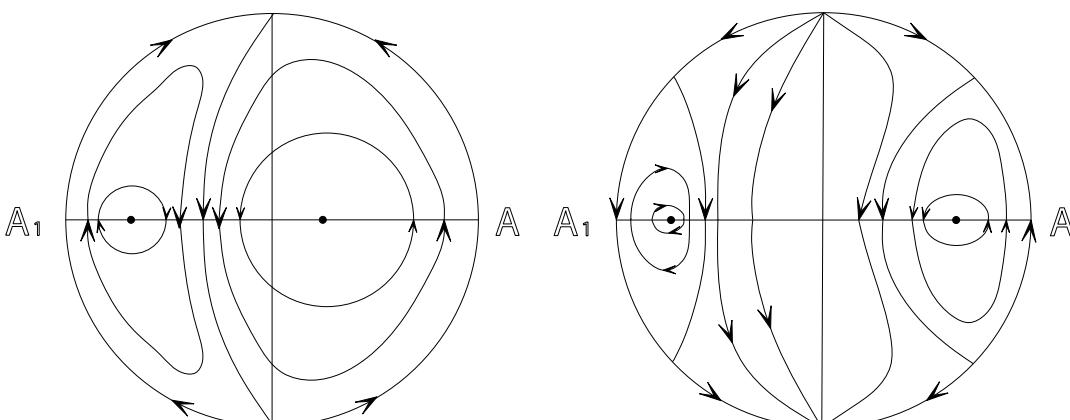


Рис. 62

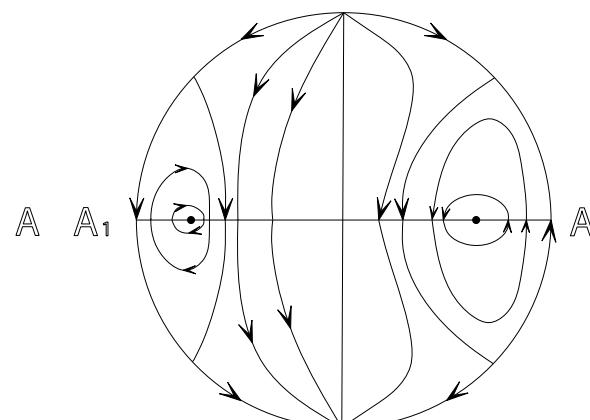


Рис. 63

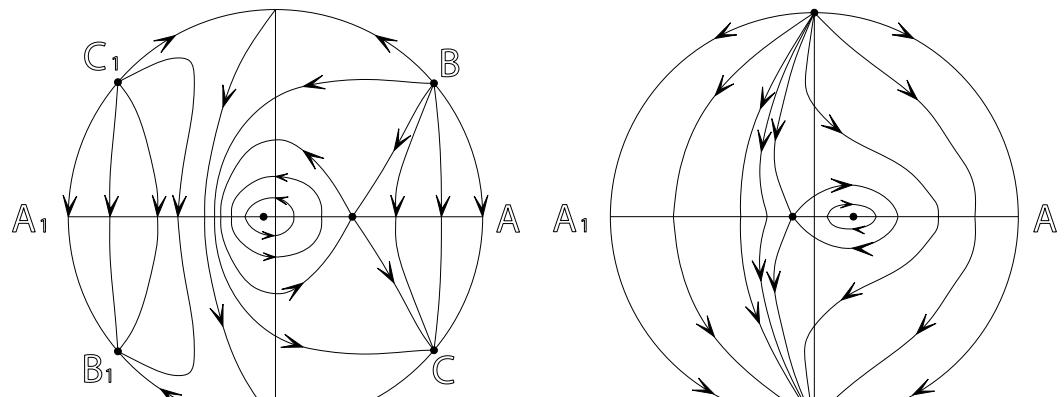


Рис. 64

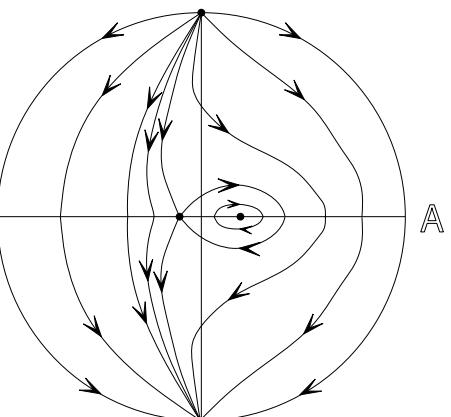


Рис. 65

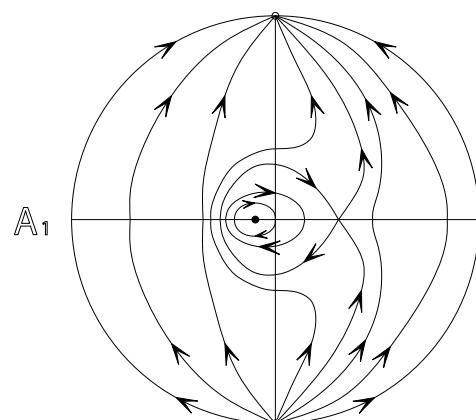


Рис. 66

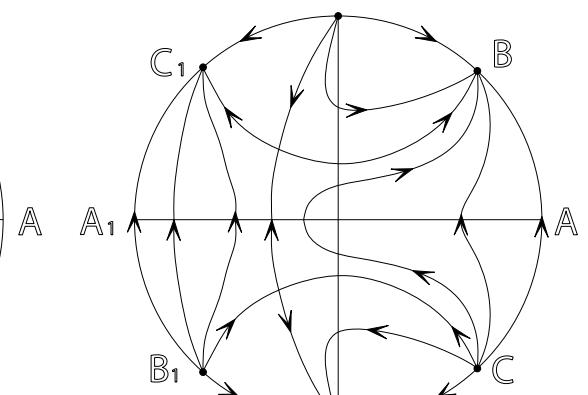


Рис. 67

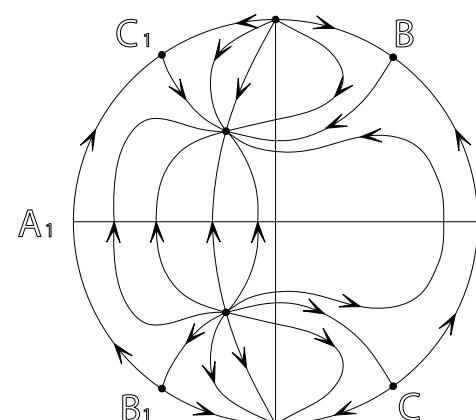


Рис. 68

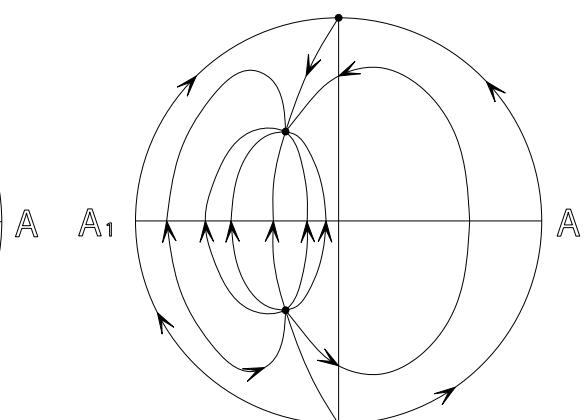


Рис. 69

причем она является вырожденным седлом.

Доказательство. При выполнении условий (2.3.71) система (2.3.28) имеет единственную конечную особую точку $(-b_{10}/2b_{20}, 0)$. Для установления типа этой особой точки перенесем начало координат в эту точку $(-b_{10}/2b_{20}, 0)$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (r_{00} - \frac{r_{10}b_{10}}{2b_{20}})y + r_{10}xy, \\ \frac{dy}{dt} = b_{20}x^2 + b_{02}y^2. \end{cases} \quad (2.3.72)$$

Для особой точки $(0, 0)$ системы (2.3.72) $\sigma = 0$, $\Delta = 0$ [80]. Так как по условию теоремы коэффициент при y в первом уравнении системы (2.3.72) отличен от нуля, то согласно теореме 67 [80] точка $(0, 0)$ является либо вырожденным (двуихсепаратрисным) седлом, либо седлоузлом, к которому примыкают два гиперболических и один параболический сектор. Так как для системы (2.3.28) прямая $y = 0$ — ось симметрии N -типа, то возможен только случай вырожденного седла. Теорема доказана.

Фазовые портреты системы (2.3.28), соответствующие условиям теоремы 2.3.28 изображены на рис. 70 и 71.

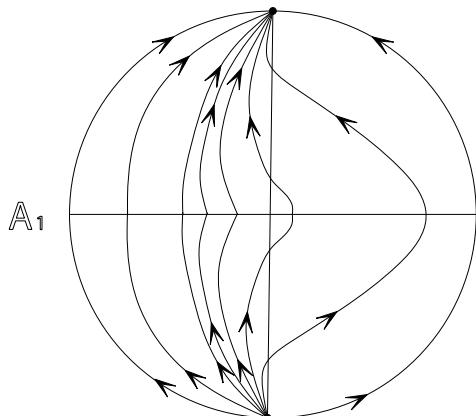


Рис. 70

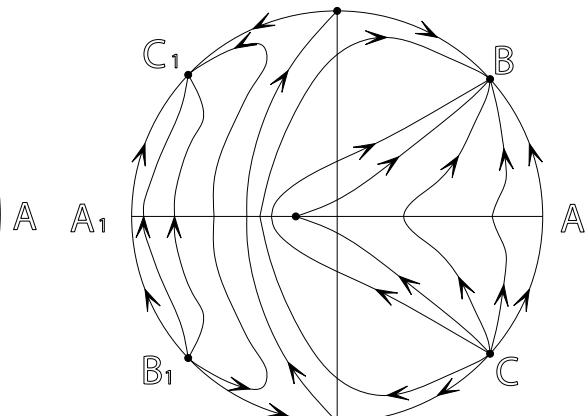


Рис. 71

Теорема 2.3.29. Система дифференциальных уравнений (2.3.28) имеет в ограниченной части фазовой плоскости единственную особую точку, если выполняется условие

$$b_{10}^2 - 4b_{00}b_{20} = 0, \quad b_{20}b_{02} > 0, \quad \frac{r_{00}}{r_{10}} = \frac{b_{10}}{2b_{20}}, \quad (2.3.73)$$

причем она является сложной, к которой примыкают:

a) два гиперболических сектора, если $b_{20}(b_{02} - r_{10}) \geq 0$;

b) два гиперболических и два параболических сектора, если $b_{20}(b_{02} - r_{10}) < 0$.

Доказательство. Перенося начало координат в особую точку $(-b_{10}/2b_{20}; 0)$ систему (2.3.28) преобразуем в систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_{10}xy, \\ \frac{dy}{dt} = b_{20}x^2 + b_{02}y^2. \end{cases} \quad (2.3.74)$$

Для выяснения характера особой точки $O(0; 0)$ системы (2.3.74) воспользуемся результатом работы [67].

Следуя этой работе, вычислим величины

$$\Delta = -4b_{20}(b_{02} - r_{10}),$$

$$\sigma = -4b_{20}(b_{02} + r_{10}).$$

Если $b_{02} - r_{10} = 0$ или $b_{20}(b_{02} - r_{10}) > 0$, то в направлениях лучей $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$ в особую точку O входит по одной траектории и к точке O примыкают два гиперболических сектора [67].

Если $b_{20}(b_{02} - r_{10}) < 0$, то имеет место случай $\Delta > 0$, $\sigma < 0$, и согласно [67] к сложной особой точке $O(0; 0)$ системы (2.3.74) примыкают два параболических и два гиперболических сектора. Теорема доказана.

Фазовые портреты системы (2.3.28), соответствующие условиям теоремы 2.3.29 изображены на рис. 72 и 73.

Теорема 2.3.30. Если $b_{20} = 0$, $b_{10}b_{02}(b_{00}/b_{10} - r_{00}/r_{10}) > 0$, то система (2.3.28) имеет единственную особую точку $M(-b_{00}/b_{10}, 0)$ в ограниченной части фазовой плоскости, причем M является центром при выполнении условия $b_{10}r_{10}(b_{00}/b_{10} - r_{00}/r_{10}) > 0$ и седлом, если

$$b_{10}r_{10}(b_{00}/b_{10} - r_{00}/r_{10}) < 0.$$

Доказательство. После параллельного переноса начала координат в особую точку M система (2.3.28) преобразуется в систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_{10}\left(\frac{r_{00}}{r_{10}} - \frac{b_{00}}{b_{10}}\right)y + r_{10}xy, \\ \frac{dy}{dt} = b_{10}x + b_{02}y^2. \end{cases} \quad (2.3.75)$$

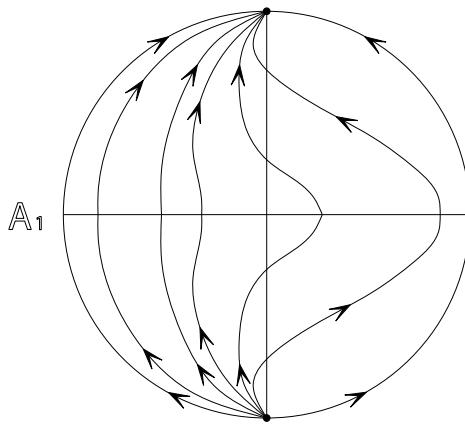


Рис. 72

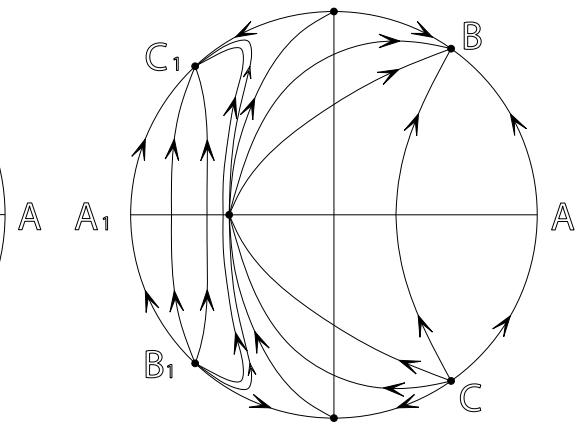


Рис. 73

Определитель матрицы линейных коэффициентов системы (2.3.75) равен $\Delta = b_{10}r_{10}(b_{00}/b_{10} - r_{00}/r_{10})$. Отсюда следует, что при $\Delta > 0 (< 0)$ точка $O(0; 0)$ — центр (седло) системы (2.3.75). Теорема доказана.

Фазовые портреты системы (2.3.28), соответствующие условиям теоремы (2.3.30) изображены на рис. 74-76 при $\Delta > 0$ и на рис. 77, 78 при $\Delta < 0$.

Теорема 2.3.31. Если $b_{20} = 0$, $b_{00}/b_{10} - r_{00}/r_{10} = 0$, то система (2.3.28) имеет в ограниченной части фазовой плоскости единственную особую точку $M(-b_{00}/b_{10}, 0)$, являющуюся топологическим седлом при $r_{10}b_{02} < 0$ и особой точкой с эллиптическим сектором при $r_{10}b_{02} > 0$.

Доказательство. Путем параллельного переноса начала координат в точку M и замены $x = \bar{y}$, $y = \bar{x}$, $d\tau = b_{10}dt$, система (2.3.28) приводится к системе:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{y} + \frac{b_{02}}{b_{10}}\bar{x}^2 \equiv \bar{y} + P_2(\bar{x}, \bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{d\tau} = \frac{r_{10}}{b_{10}}\bar{x}\bar{y} \equiv Q_2(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases} \quad (2.3.76)$$

$y = -b_{02}/b_{10}\bar{x}^2 \equiv \varphi(\bar{x})$ — решение уравнения $\bar{y} + P_2(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

$$Q_2(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = -\frac{b_{02}r_{10}}{b_{10}^2}\bar{x}^3. \quad (2.3.77)$$

Из (2.3.77) следует, что при $b_{02}r_{10} < 0 (> 0)$ коэффициент при \bar{x}^3 в правой части (2.3.77) положителен (отрицателен). Поэтому в силу тео-

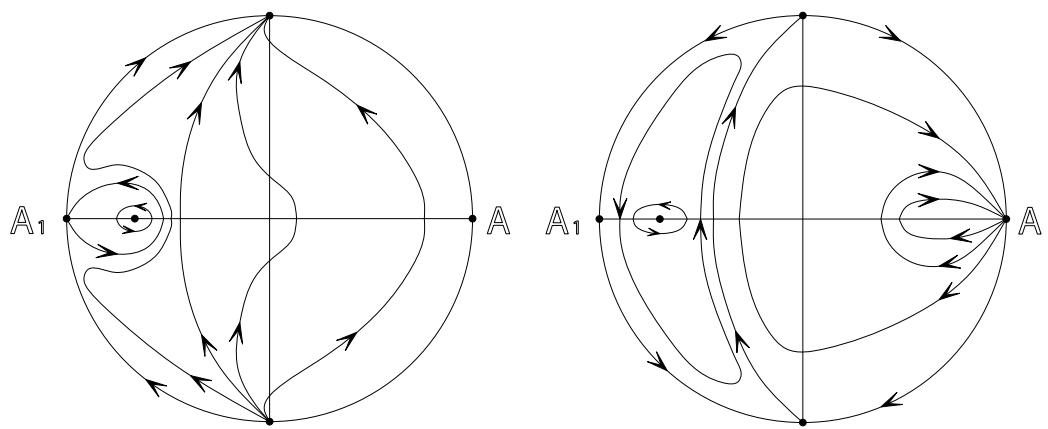


Рис. 74

Рис. 75

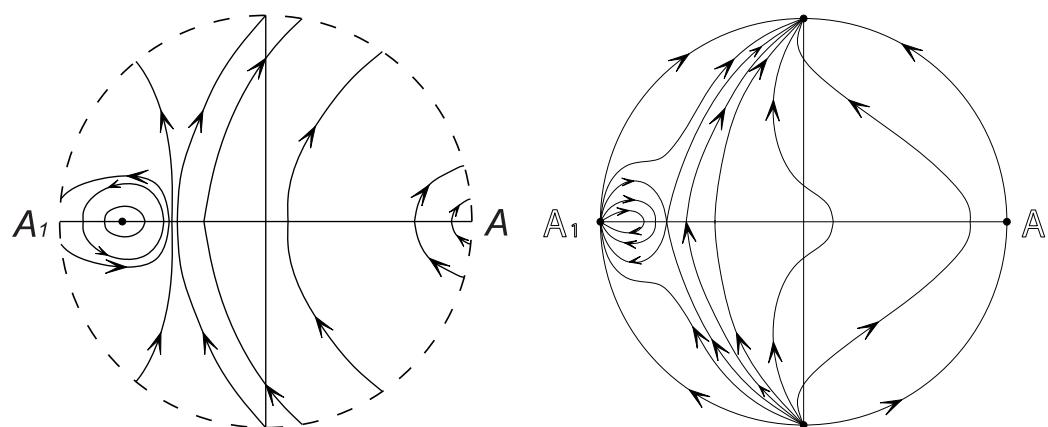


Рис. 76

Рис. 77

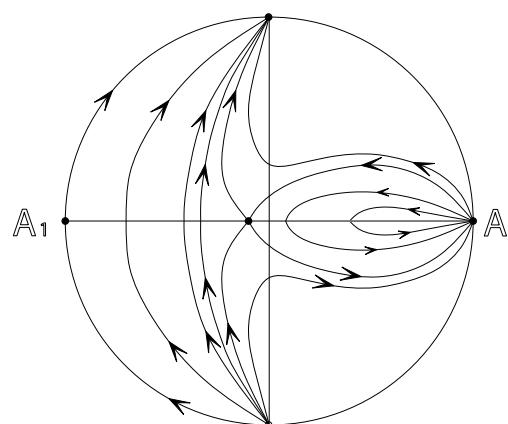
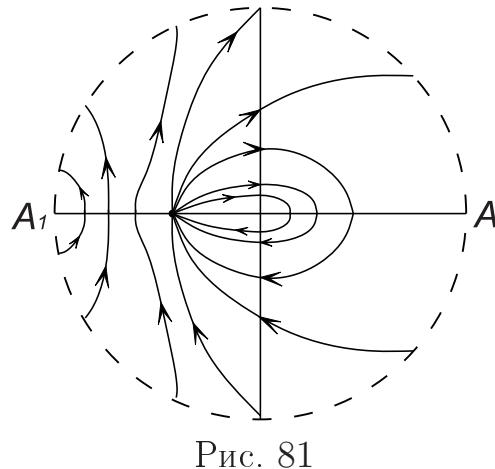
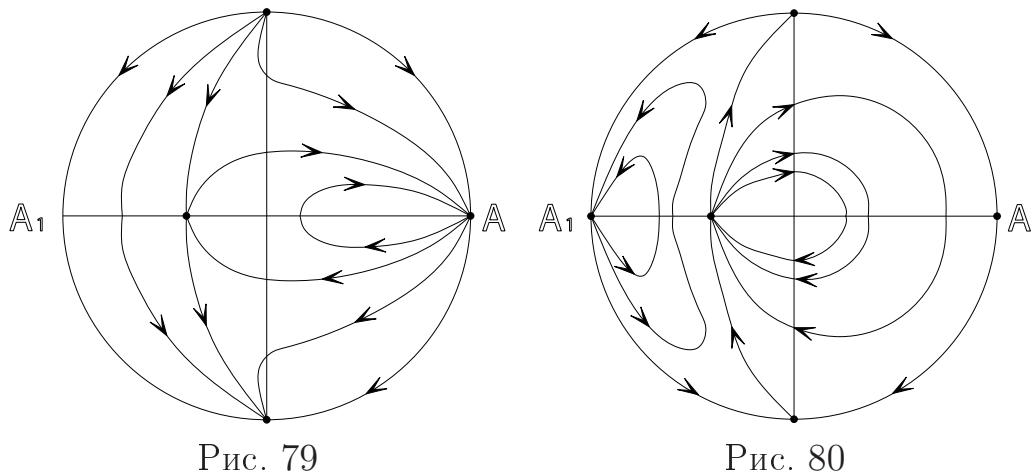


Рис. 78

ремы 66 [80] точка $O(0, 0)$ — топологическое седло (особая точка с эллиптическим сектором). Теорема доказана.

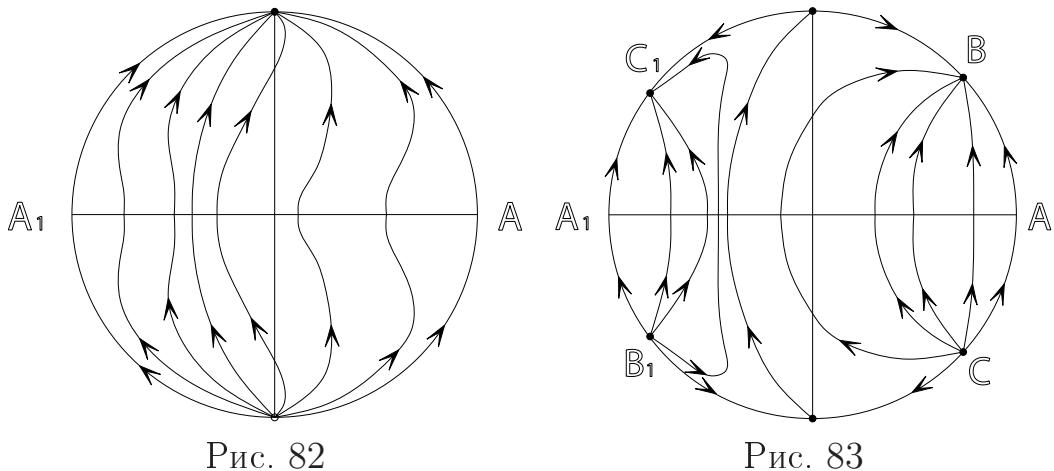
Фазовые теоремы системы (2.3.28), соответствующие условиям теоремы 2.3.31 изображены на рис. 79–81.



Теорема 2.3.32. Система дифференциальных уравнений (2.3.28) не имеет особых точек в ограниченной части фазовой плоскости, если выполняется одна из серий условий:

$$b_{10}^2 - 4b_{00}b_{20} < 0, \quad b_{20}b_{02} > 0; \quad b_{10} = b_{20} = 0, \quad b_{00}b_{02} > 0. \quad (2.3.78)$$

Фазовые портреты системы (2.3.28), соответствующие условиям теоремы 2.3.32 изображены на рис. 82 и 83.



Изучим теперь поведение траекторий квадратичной системы, имеющей только одну ось симметрии при условии, что она является осью симметрии *S*-типа. Для этого, не уменьшая общности, рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{02}y^2, \\ \frac{dy}{dt} = y(r_{00} + r_{10}x). \end{cases} \quad (2.3.79)$$

Выясним поведение фазовых траекторий системы (2.3.79) в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости. Первое преобразование Пуанкаре $x = 1/z$, $y = u/z$ переводит систему (2.3.79) в систему:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = (r_{10} - a_{20})u + (r_{00} - a_{10})uz - a_{02}u^3 - a_{00}uz^2, \\ \frac{dz}{dt} = -a_{20}z - a_{10}z^2 - a_{02}u^2z - a_{00}z^3. \end{cases} \quad (2.3.80)$$

Второе преобразование Пуанкаре $x = v/z$, $y = 1/z$ переводит систему (2.3.79) в систему:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = a_{02} + (a_{20} - r_{10})v^2 + (a_{10} - r_{00})vz + a_{00}z^2, \\ \frac{dz}{dt} = -r_{10}vz - r_{00}z^2. \end{cases} \quad (2.3.81)$$

Если $a_{02} \neq 0$, то все бесконечно удаленные особые точки системы (2.3.79) определяются системой (2.3.80) при $z = 0$ [80], а именно из си-

стемы:

$$\begin{cases} z = 0, \\ (r_{10} - a_{20})u - a_{02}u^3 = 0. \end{cases}$$

Теорема 2.3.33. Пусть выполняется неравенство $a_{02}(r_{10} - a_{20}) > 0$. Тогда система (2.3.79) имеет на экваторе сферы Пуанкаре три особые точки, причем:

a) $A(u = z = 0)$ — простое седло, $B\left(u = \sqrt{\frac{r_{10}-a_{20}}{a_{02}}}, z = 0\right)$ и $C\left(u = -\sqrt{\frac{r_{10}-a_{20}}{a_{02}}}, z = 0\right)$ — простые узлы при выполнении условий:

$$a_{20}(r_{10} - a_{20}) > 0, \quad r_{10}(r_{10} - a_{20}) > 0;$$

b) A, B и C — простые узлы при выполнении условий:

$$a_{20}(r_{10} - a_{20}) < 0, \quad r_{10}(r_{10} - a_{20}) > 0;$$

c) A — простой узел, B и C — простые седла при выполнении условий:

$$a_{20}(r_{10} - a_{20}) < 0, \quad r_{10}(r_{10} - a_{20}) < 0;$$

d) A — седлоузел, B и C — простые узлы при $a_{20} = 0, a_{10} \neq 0$ и A — седло (узел), B и C — простые узлы, если $a_{20} = a_{10} = 0, a_{00}r_{10} > 0 (< 0)$.

Доказательство. В случаях a) – c) A, B, C — простые особые точки, а в случае d) B, C — также простые особые точки. Типы простых особых точек без труда можно установить с помощью корней характеристических уравнений. Поэтому рассмотрим особую точку A в случае d). Как видно из системы (2.3.80), A — сложная особая точка, для которой $\sigma \neq 0, \Delta = 0$ [80]. Поэтому сделаем в системе (2.3.80) замену $u = \bar{z}$, $z = \bar{u}$, $d\tau = r_{10}dt$:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{d\tau} = -\frac{a_{10}}{r_{10}}\bar{u}^2 - \frac{a_{02}}{r_{10}}\bar{u}\bar{z}^2 - \frac{a_{00}}{r_{10}}\bar{u}^3 \equiv P_2(\bar{u}, \bar{z}), \\ \frac{d\bar{z}}{d\tau} = \bar{z} + \frac{(r_{00} - a_{10})}{r_{10}}\bar{u}\bar{z} - \frac{a_{02}}{r_{10}}\bar{z}^3 - \frac{a_{00}}{r_{10}}\bar{u}^2\bar{z} \equiv \bar{z} + Q_2(\bar{u}, \bar{z}). \end{cases} \quad (2.3.82)$$

Так как $\bar{z} = 0$ — решение уравнения

$$\bar{z} + Q_2(\bar{u}, \bar{z}) = 0, \quad \bar{P}_2(u, 0) = -\frac{a_{10}}{r_{10}}\bar{u}^2 - \frac{a_{00}}{r_{10}}\bar{u}^3,$$

то по теореме 65 [80] точка $O(0, 0)$ — седлоузел системы (2.3.82).

Пусть далее $a_{02} = 0$. Тогда $a_{20} \neq 0$, положим также $a_{20} \neq r_{10}$. Особая точка $D(v = z = 0)$ системы (2.3.81) является сложной. При этом система уравнений

$$\begin{cases} a_{00} + (a_{10} - r_{00})k + (a_{20} - r_{10})k^2 = 0, \\ r_{00} + r_{10}k = 0 \end{cases}$$

не имеет вещественных решений, так как в противном случае правые части уравнений системы (2.3.79) имели бы общий линейный множитель $r_{00} + r_{10}x$. Для установления типа особой точки воспользуемся результатами работы [67]. Так как $r_{10} \neq 0$ (правая часть каждого из уравнений системы (2.3.79) содержит хотя бы один квадратичный член), то следуя [67], можно считать $r_{00} = 0$. Поэтому рассмотрим дифференциальное уравнение траекторий системы (2.3.81):

$$\frac{dv}{dz} = \frac{a_{00}z^2 + a_{10}vz + (a_{20} - r_{10})v^2}{-r_{10}vz}. \quad (2.3.83)$$

Следуя работе [67] вычислим величины $\Delta = a_{10}^2 - 4a_{00}a_{20}$ и $\sigma = a_{10}^2 - 4(a_{20} - r_{10})(a_{00} - r_{10})$.

Если $\Delta < 0$, $\sigma < 0$, то $D(v = z = 0)$ — особая точка, к которой примыкают два параболических и два эллиптических сектора, либо два гиперболических сектора.

Если $\Delta < 0$, $\sigma = 0$, то $D(v = z = 0)$ — особая точка, к которой примыкают два параболических и два эллиптических сектора, два гиперболических сектора.

Если $\Delta < 0$, $\sigma > 0$, то $D(v = z = 0)$ — особая точка, к которой примыкают два параболических и два эллиптических сектора, либо два гиперболических сектора.

Если $\Delta = 0$, $\sigma < 0$, то $D(v = z = 0)$ — особая точка, к которой примыкают два параболических и два гиперболических сектора, или два параболических и два эллиптических сектора.

Если $\Delta = 0$, $\sigma = 0$, то $D(v = z = 0)$ — особая точка, к которой примыкают два эллиптических и два параболических сектора, или два гиперболических и два параболических сектора.

Если $\Delta > 0$, $\sigma < 0$, то $D(v = z = 0)$ — особая точка, к которой примыкают два параболических и два гиперболических сектора, или два эллиптических и два параболических сектора.

Если $\Delta > 0$, $\sigma = 0$, то $D(v = z = 0)$ — особая точка, к которой примыкают два эллиптических и два параболических сектора, или два параболических и два гиперболических сектора.

Если $\Delta > 0$, $\sigma > 0$, то $D(v = z = 0)$ — особая точка, к которой примыкают два параболических и два гиперболических сектора, или два параболических и два эллиптических сектора, или шесть гиперболических секторов.

Таким образом, справедлива

Теорема 2.3.34. *Если $a_{02} = 0$, $(r_{10} - a_{20})a_{20} \neq 0$, то система (2.3.79) имеет на экваторе сферы Пуанкаре две особые точки: $A(u = z = 0)$ — простой узел или простое седло, $D(v = z = 0)$ — сложную особую точку, к которой примыкают либо два гиперболических сектора, либо два параболических и два эллиптических сектора, либо два параболических и два гиперболических сектора, либо шесть гиперболических секторов.*

Теорема 2.3.35. *Если $r_{10} = a_{20}$, $a_{02}a_{20} > 0 (< 0)$, то система (2.3.79) имеет на экваторе сферы Пуанкаре единственную особую точку $A(u = z = 0)$, и она является топологическим узлом (топологическим седлом).*

Действительно, так как $a_{02} \neq 0$, то система (2.3.81) не имеет особую точку ($v = z = 0$), следовательно, все бесконечно удаленные особые точки системы (2.3.79) являются особыми точками системы (2.3.80). Система (2.3.80) при выполнении условий теоремы приводится к виду:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = \frac{(a_{10} - r_{00})}{a_{20}}uz + \frac{a_{02}}{a_{20}}u^3 + \frac{a_{00}}{a_{20}}uz^2 \equiv P_2(u, z), \\ \frac{dz}{d\tau} = z + \frac{a_{10}}{a_{20}}z^2 + \frac{a_{02}}{a_{20}}u^2z + \frac{a_{00}}{a_{20}}z^3 \equiv z + Q_2(u, z), \end{cases} \quad (2.3.84)$$

где $d\tau = -a_{20}dt$.

Так как $P_2(u, 0) = (a_{02}/a_{20})u^3$, то по теореме 65 [80] точка $O(0, 0)$ — топологический узел (топологическое седло) системы (2.3.84).

Если $a_{02} = r_{10} - a_{20} = 0$, то уравнение $(r_{10} - a_{20})u - a_{02}u^3 = 0$ вырождается и поэтому экватор сферы Пуанкаре не состоит из траекторий

систем (2.3.80) и (2.3.81).

Первое преобразование Пуанкаре $x = 1/z$, $y = u/z$ приводит систему (2.3.79) к виду:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = (r_{00} - a_{10})u - a_{00}uz, \\ \frac{dz}{dt} = -a_{20} + a_{10}z - a_{00}z^2. \end{cases} \quad (2.3.85)$$

Второе преобразование Пуанкаре $x = v/z$, $y = 1/z$ переводит систему (2.3.79) в систему

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = (a_{10} - r_{10})v - a_{00}z, \\ \frac{dz}{dt} = -r_{10}v - r_{00}z. \end{cases} \quad (2.3.86)$$

Так как $a_{20} \neq 0$, то на экваторе сферы Пуанкаре $z = 0$ система (2.3.85) не имеет особых точек.

Единственной особой точкой системы (2.3.79) в рассматриваемом случае, как следует из (2.3.86), является точка $D(v = z = 0)$.

Заметим, что определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{10} - r_{00} & a_{00} \\ -r_{10} & -r_{00} \end{vmatrix}$ отличен от нуля, в противном случае правые части системы (2.3.79) не взаимно просты. Впрочем, не взаимно просты правые части и системы (2.3.86).

Если $\sigma \equiv a_{10} - 2r_{00} = 0$, $\Delta > 0$, то $D(v = z = 0)$ — центр системы (2.3.86). Если $\Delta < 0$, то $D(v = z = 0)$ — седло.

Если $\sigma \neq 0$, то легко видеть, что

$$\sigma^2 - 4\Delta = a_{10}^2 - 4a_{00}r_{10}. \quad (2.3.87)$$

Если выражение (2.3.87) отрицательно, то $D(v = z = 0)$ — фокус, в противном случае — узел.

Таким образом, имеет место

Теорема 2.3.36. Если $a_{02} = r_{10} - a_{20} = 0$, то система (2.3.79) имеет на экваторе сферы Пуанкаре единственную особую точку $D(v = z = 0)$, и она является:

- a) центром, если $\sigma = 0$, $\Delta > 0$;
- b) фокусом, если $\sigma \neq 0$, $\sigma^2 - 4\Delta < 0$;
- c) узлом, если $\sigma \neq 0$, $\sigma^2 - 4\Delta \geq 0$;

d) седлом, если $\Delta < 0$.

Рассмотрим все возможные случаи распределения особых точек системы (2.3.79) в конечной части фазовой плоскости. Предварительно докажем теорему об отсутствии изолированных периодических решений системы (2.3.79).

Теорема 2.3.37. *Если система (2.3.79) имеет в конечной части фазовой плоскости четыре особые точки, то она не имеет предельных циклов.*

Доказательство. Система (2.3.79) имеет четыре особые точки в двух случаях:

$$a) a_{10}^2 - 4a_{00}a_{20} > 0, \quad -\frac{r_{00}}{r_{10}} \in (x_1, x_2), \quad a_{20}a_{02} > 0; \quad (2.3.88)$$

$$b) a_{10}^2 - 4a_{00}a_{20} > 0, \quad -\frac{r_{00}}{r_{10}} \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty), \quad a_{20}a_{02} < 0; \quad (2.3.89)$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2$, причем $x_1 < x_2$.

В случае b) воспользуемся критерием Дюлака, учитывая, что прямую $y = 0$ не пересекают периодические решения:

$$\left(\frac{a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2}{y} \right)'_x = \frac{a_{10} + 2a_{20}x}{y}. \quad (2.3.90)$$

Из (2.3.90) следует, что любая замкнутая траектория системы (2.3.79), если она существует, непременно пересекает прямую $x = -a_{10}/2a_{20}$. Но

$$\frac{dx}{dt} \Big|_{x=-a_{10}/2a_{20}} = \frac{-(a_{10}^2 - 4a_{00}a_{20})}{4a_{20}} + a_{02}y^2. \quad (2.3.91)$$

Выражение (2.3.91) знакопостоянно в силу условия (2.3.89), следовательно, замкнутая траектория не может пересекать прямую $x = -a_{10}/2a_{20}$, а значит доказано отсутствие не только предельных циклов, но и любых замкнутых контуров, образованных траекториями системы (2.3.79), целиком расположенных в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$ при выполнении (2.3.89). Впрочем, отсюда следует, что система не имеет особых точек типа «центр».

Пусть имеет место (2.3.88). Если имеются предельные циклы системы (2.3.79), то они расположены в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$ и окружают особые точки типа «фокус» по теореме 22.1 [9].

Для краткости введем обозначения

$$\alpha = -\frac{r_{00}}{r_{10}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{-a_{20}(\alpha - x_1)(\alpha - x_2)}{a_{02}}}.$$

Особыми точками типа "фокус" могут быть точки $M(\alpha; \beta)$ и $N(\alpha; -\beta)$.

В силу того, что $y = 0$ — ось симметрии S -типа, точки M и N являются особыми точками одного и того же типа. Поэтому достаточно доказать отсутствие предельных циклов, окружающих точку M .

Перенесем начало координат в точку M , в результате система (2.3.79) примет вид (обозначения фазовых переменных x и y оставляем неизменными):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (a_{10} + 2a_{20}\alpha)x + 2a_{02}\beta y + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 \equiv F(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = r_{10}x(\beta + y) \equiv G(x, y). \end{cases} \quad (2.3.92)$$

Вычисления показывают, что

$$\Delta(x, y) \equiv \frac{F(x, y)}{G(x, y)} + \frac{F(-x, y)}{G(-x, y)} = \frac{2(a_{10} + 2a_{20}\alpha)}{r_{10}(\beta + y)}, \quad x \neq 0. \quad (2.3.93)$$

Так как прямую $y = 0$ не пересекают замкнутые траектории системы (2.3.79), то выражение (2.3.93) знакопостоянно при $y + \beta \neq 0$ и $a_{10} + 2a_{20}\alpha \neq 0$. Поэтому согласно работе [102] нет замкнутых траекторий, окружающих особую точку M . Если же $a_{10} + 2a_{20}\alpha = 0$, то M и N — центры при условии, что $-2a_{02}r_{10}\beta^2 > 0$. Теорема доказана полностью.

Теорема 2.3.38. *Если система (2.3.79) имеет в ограниченной части фазовой плоскости четыре особые точки, то две особые точки, расположенные на прямой $y = 0$ ($x = -r_{00}/r_{10}$), являются седлами (антиседлами) или узлами (седлами) при выполнении (2.3.88).*

Действительно, при выполнении условий (2.3.88) особые точки системы (2.3.79) образуют выпуклый четырехугольник. Поэтому справедливость теоремы следует из работы [57] с учетом того, что особые точки,

расположенные на оси симметрии S -типа $y = 0$, могут быть либо узлами, либо седлами. Здесь под антиседлом мы понимаем простую особую точку, не являющуюся седлом.

Теорема 2.3.39. *Если система (2.3.79) имеет в ограниченной части фазовой плоскости четыре особые точки, и при этом выполняется условие (2.3.89), то на прямой $y = 0$ расположены седло и узел, а на прямой $x = -r_{00}/r_{10}$ либо два седла, либо два антиседла.*

При выполнении условий (2.3.89) особые точки системы (2.3.79) образуют невыпуклый четырехугольник, и согласно работе [57] внутренняя особая точка седло, а внешние особые точки антиседла или наоборот внутренняя особая точка — антиседло, а внешние точки седла.

Фазовые портреты системы (2.3.79) в случае четырех особых точек в ограниченной части фазовой плоскости изображены на рис. 84-92.

Теорема 2.3.40. *Система (2.3.79) имеет в ограниченной части фазовой плоскости три особые точки, в том числе:*

a) $A(\alpha; 0)$ — простое седло, $B(\beta; \gamma), C(\beta; -\gamma)$ — простые узлы (фокусы), если выполняется одна из серий условий:

$$a_{20} = 0, r_{00}a_{10} - a_{00}r_{10} < 0, \quad a_{10}r_{10} > 0, \quad a_{10}a_{02} < 0, \quad (2.3.94)$$

$$a_{20} = 0, r_{00}a_{10} - a_{00}r_{10} < 0, \quad a_{10}r_{10} < 0, \quad a_{10}a_{02} > 0, \quad (2.3.95)$$

и кроме этого $a_{10}^2 + 8(a_{10}r_{00} - a_{00}r_{10}) \geq 0 (< 0)$;

b) $A(\alpha; 0)$ — простой узел, $B(\beta; \gamma), C(\beta; -\gamma)$ — простые седла, если выполняется одна из серий условий:

$$a_{20} = 0, r_{00}a_{10} - a_{00}r_{10} > 0, \quad a_{10}r_{10} < 0, \quad a_{10}a_{02} < 0, \quad (2.3.96)$$

$$a_{20} = 0, r_{00}a_{10} - a_{00}r_{10} > 0, \quad a_{10}r_{10} > 0, \quad a_{10}a_{02} > 0. \quad (2.3.97)$$

Доказательство. Легко видеть, что, при выполнении условий теоремы, система (2.3.79) имеет три простые особые точки $A(\alpha; 0), B(\beta; \gamma)$ и $C(\beta; -\gamma)$, где

$$\alpha = -\frac{a_{00}}{a_{10}}, \quad \beta = -\frac{r_{00}}{r_{10}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{a_{10}r_{00} - a_{00}r_{10}}{a_{02}r_{10}}}.$$

Следуя [80], введем обозначения

$$\sigma = P'_x(x, y) + Q'_y(x, y),$$

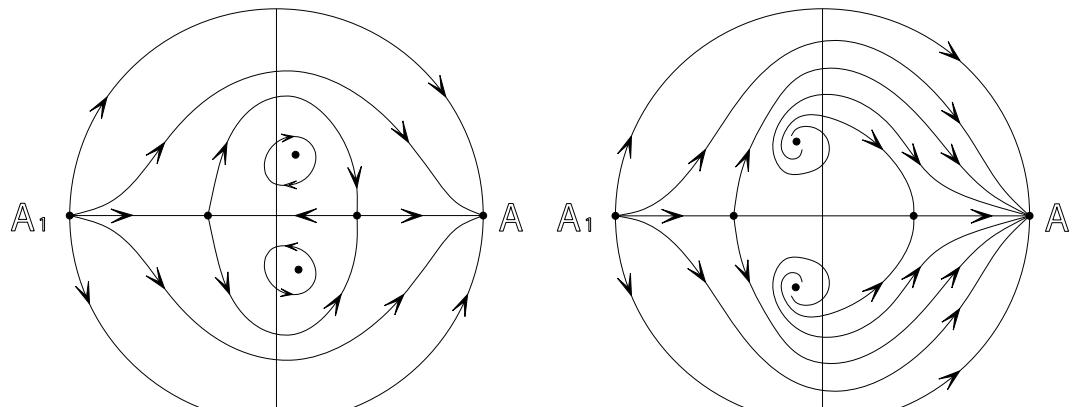


Рис. 84

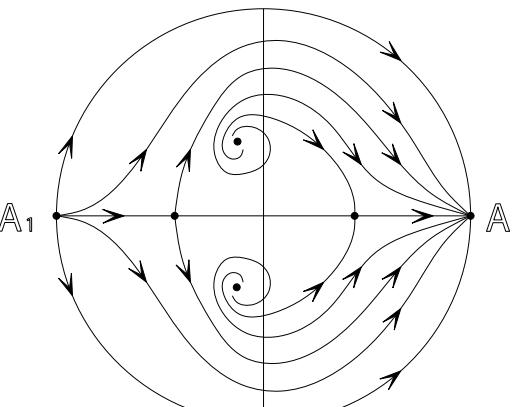


Рис. 85

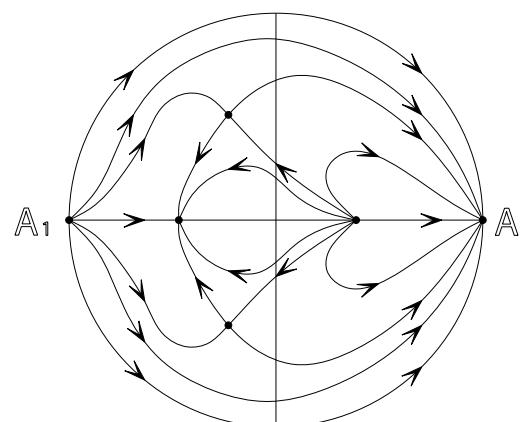


Рис. 86

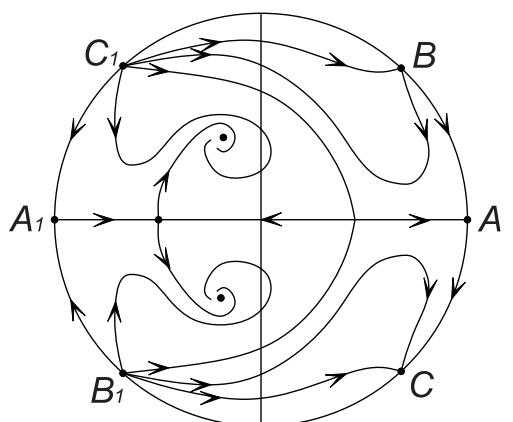


Рис. 87

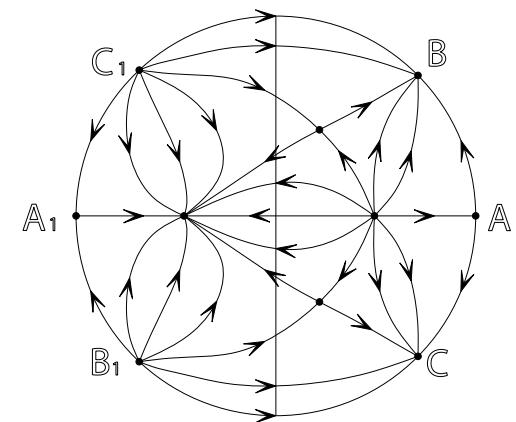


Рис. 88

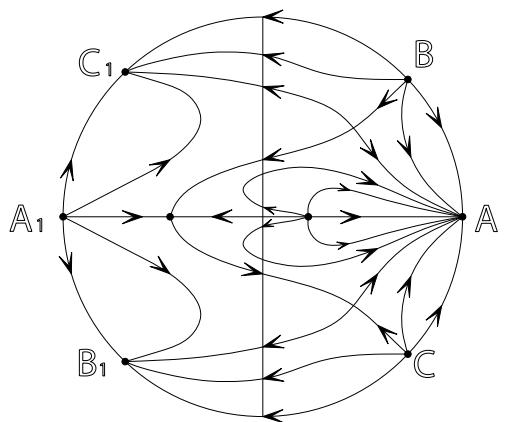


Рис. 89

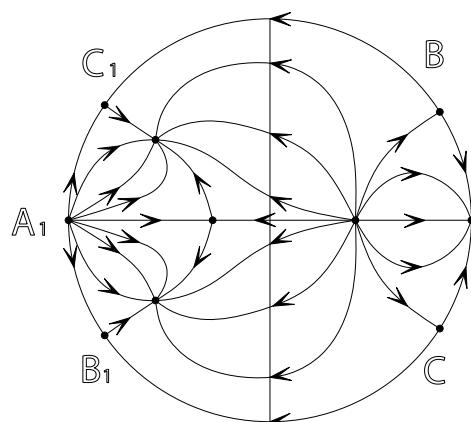


Рис. 90

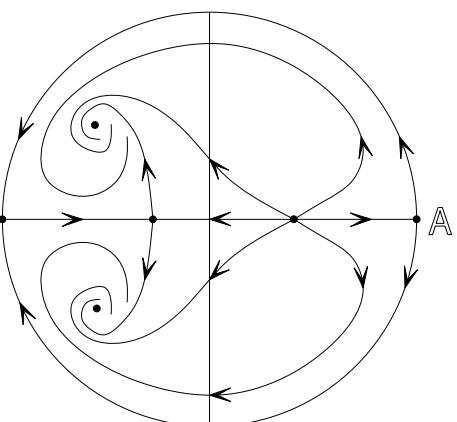


Рис. 91

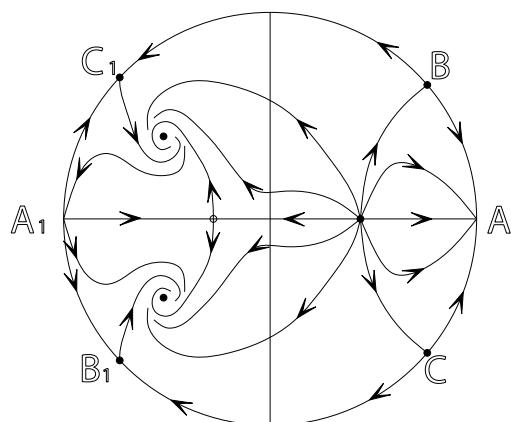


Рис. 92

$$\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} P'_x(x, y) & P'_y(x, y) \\ Q'_x(x, y) & Q'_y(x, y) \end{vmatrix},$$

где $P(x, y)(Q(x, y))$ — правая часть первого (второго) уравнения системы (2.3.79).

Тогда $\Delta(A) = r_{00}a_{10} - r_{10}a_{00}$, $\sigma(B) = a_{10}$, $\Delta(B) = -2(r_{00}a_{10} - r_{10}a_{00})$.

При выполнении (2.3.94) или (2.3.95) $\Delta(A) < 0$ и поэтому точка A является простым седлом. Если, кроме этого, $a_{10}^2 + 8(a_{10}r_{00} - a_{00}r_{10}) \geq 0 (< 0)$, то точка B — простой узел (фокус) [80]. В силу симметрии векторного поля системы (2.3.79) относительно прямой $y = 0$, точка C также является простым узлом (фокусом). Если выполняется одна из серий условий (2.3.97), то $\Delta(A) > 0$, и согласно утверждению 2.3.4 точка A — простой узел. Так как $\Delta(B) < 0$, то точка B — простое седло [80]. Теорема доказана.

Теорема 2.3.41. *Система (2.3.79) имеет в ограниченной части fazovoy плоскости три особые точки, в том числе:*

a) *седлоузел $F(\delta, 0)$ и два простых узла (фокуса), если выполняются условия: $a_{10}^2 - 4a_{00}a_{20} = 0$, $a_{20}a_{02} < 0$, и кроме этого $n > 0$,*
 $m^2 - 4n \geq 0 (< 0)$;

b) *седлоузел $F(\delta, 0)$ и два простых седла, если выполняются условия $a_{10}^2 - 4a_{00}a_{20} = 0$, $a_{20}a_{02} < 0$, $n < 0$, где*

$$\delta = \frac{-a_{10}}{2a_{20}}, \quad m = \frac{r_{10}a_{10} - 2r_{00}a_{20}}{r_{10}}, \quad n = \frac{(a_{10}r_{10} - 2r_{00}a_{20})^2}{2a_{20}r_{10}}.$$

Доказательство. Легко проверить, что $F(\delta, 0)$, $G(\beta, \eta)$ и $H(\beta, -\eta)$ особые точки системы (2.3.79), где

$$\eta = \sqrt{\frac{-(a_{10}r_{10} - 2a_{10}r_{00})^2}{4a_{20}r_{10}^2a_{02}}}.$$

Так как $\sigma(F) = (2r_{00}a_{20} - a_{10}r_{10})/2a_{20} \neq 0$, $\Delta(F) = 0$, то согласно теореме 65 [80] F — седлоузел. Если $n > 0$, $m^2 - 4n \geq 0$, то корни характеристического уравнения особой точки G действительны и одного знака, то есть точка G — узел, при выполнении неравенства $m^2 - 4n < 0$

корни характеристического уравнения особой точки G — комплексно-сопряженные с отличной от нуля действительной частью, то есть G — простой фокус [80]. Если выполняется условие $n < 0$, то нетрудно убедиться в выполнении равенства $\Delta(G) = n$, то есть G — простое седло. Теорема доказана.

Фазовые портреты системы (2.3.79) в случае трёх особых точек в ограниченной части плоскости изображены на рис. 93-98.

Замечание 2.3.8. Можно легко вывести, что в случае трёх особых точек в ограниченной части фазовой плоскости система не имеет предельных циклов.

Теорема 2.3.42. *Система 2.3.79 имеет в ограниченной части фазовой плоскости две особые точки, в том числе:*

a) *два седла или два узла на прямой $y = 0$, если*

$$a_{10}^2 - 4a_{00}a_{20} > 0, \quad -\frac{r_{00}}{r_{10}} \in (x_1, x_2), \quad a_{20}a_{02} < 0; \quad (2.3.98)$$

b) *седло и узел на прямой $y = 0$, если*

$$a_{10}^2 - 4a_{00}a_{20} > 0, \quad -\frac{r_{00}}{r_{10}} \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty), \quad a_{20}a_{02} > 0, \quad (2.3.99)$$

c) *два седла или два фокуса на прямой $x = -r_{00}/r_{10}$, если*

$$a_{10}^2 - 4a_{00}a_{20} < 0, \quad a_{20}a_{02} < 0 \quad (2.3.100)$$

d) *два седла или два центра, если*

$$a_{10} = a_{20} = 0, \quad a_{00}a_{02} < 0. \quad (2.3.101)$$

Доказательство. При выполнении условий (2.3.98) и (2.3.99) особые точки системы (2.3.79) простые и расположены на оси симметрии S -типа. Следовательно, по утверждению 2.3.4 они могут быть узлами или седлами. Так как между двумя простыми особыми точками системы (2.3.79) на прямой $y = 0$ расположена одна особая точка изоклины нуля, то обе особые точки седла или узлы.

При выполнении (2.3.100) легко показать отсутствие каких-либо замкнутых траекторий в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$ (см. доказательство

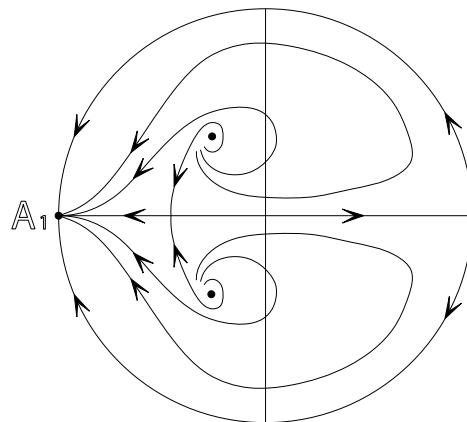


Рис. 93

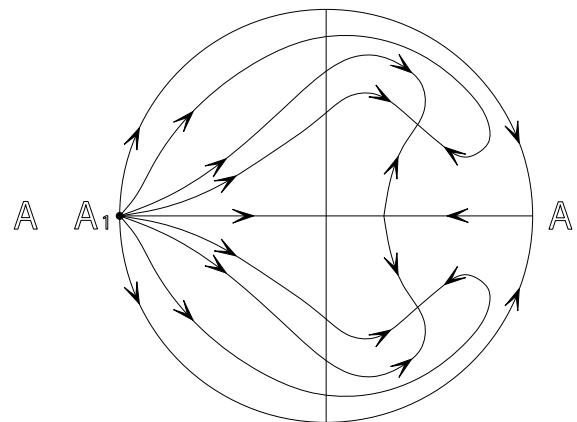


Рис. 94

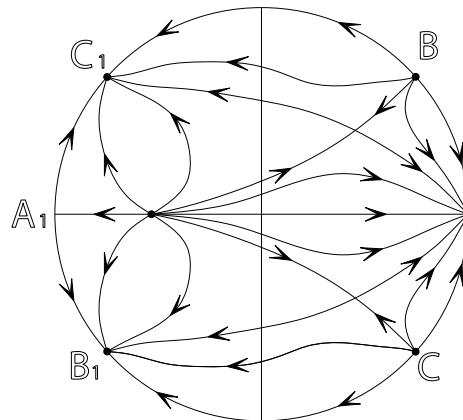


Рис. 95

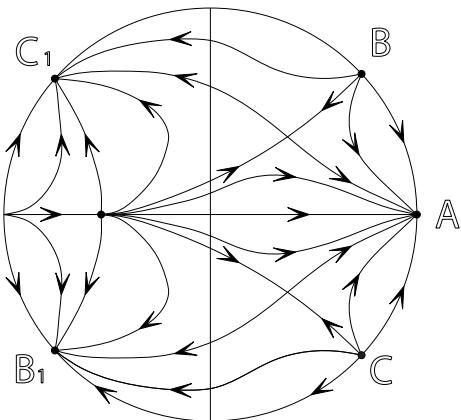


Рис. 96

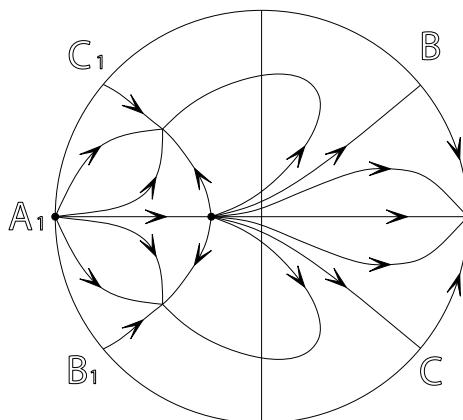


Рис. 97

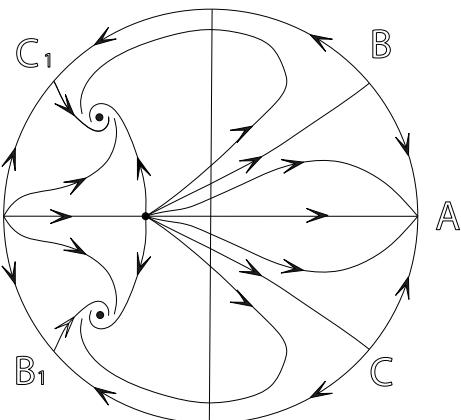


Рис. 98

теоремы 2.3.37 в случае выполнения условия (2.3.88)). Поэтому особые точки, расположенные на прямой $x = -r_{00}/r_{10}$ либо седла, либо фокусы.

При выполнении условия (2.3.101) система (2.3.79) приводится к системе

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \frac{a_{00} + a_{02}y^2}{y}, \\ \frac{dy}{d\tau} = r_{00} + r_{10}x. \end{cases} \quad (2.3.102)$$

где $dt = yd\tau$. Очевидно, система (2.3.102) является гамильтоновой, а значит простые особые точки являются либо седлами, либо центрами [10]. Теорема доказана.

Фазовые портреты системы (2.3.79) в круге Пуанкаре изображены на рис. 99–104.

Теорема 2.3.43. *Система (2.3.79) имеет одну особую точку в ограниченной части фазовой плоскости, если выполняется одно из условий:*

$$a_{10}^2 - 4a_{00}a_{02} = 0, \quad a_{20}a_{02} > 0; \quad (2.3.103)$$

$$a_{20} = 0, \quad a_{10}a_{02} \neq 0, \quad a_{00}r_{10} - a_{10}r_{00} = 0. \quad (2.3.104)$$

При выполнении условия (2.3.103) особая точка $R(-a_{10}/(2a_{20}), 0)$ является двукратным седлоузлом, если $2r_{00}a_{20} - r_{10}a_{10} \neq 0$ и двукратным седлом или особой точкой, к которой примыкают два параболических и два гиперболических сектора, если $2r_{00}a_{20} - r_{10}a_{10} = 0$.

Если имеет место условие (2.3.104), то особая точка $S(-r_{00}/r_{10}, 0)$ является топологическим узлом (седлом) при выполнении неравенства $a_{02}r_{10} < 0 (> 0)$.

Доказательство. Пусть имеет место условие (2.3.103). После переноса начала координат в точку $(-a_{10}/2a_{20}; 0)$ система (2.3.79) запишется в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{20}x^2 + a_{02}y^2, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{(2r_{00}a_{20} - r_{10}a_{10})y}{2a_{20}} + r_{10}xy. \end{cases} \quad (2.3.105)$$

Если $2r_{00}a_{20} - r_{10}a_{10} \neq 0$, то по теореме 65 из [80] особая точка $(0, 0)$ системы (2.3.105) является двукратным седлоузлом.

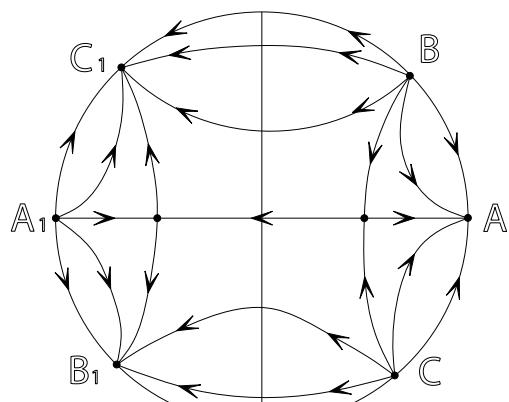


Рис. 99

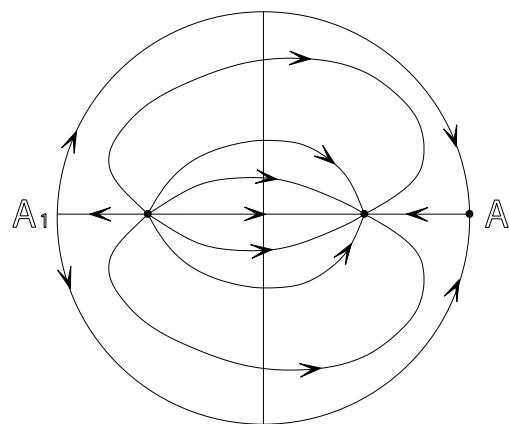


Рис. 100

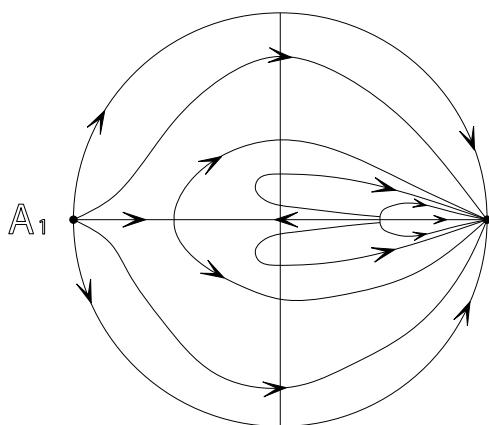


Рис. 101

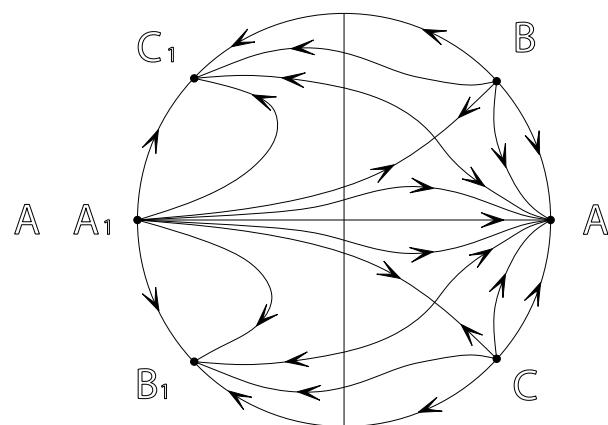


Рис. 102

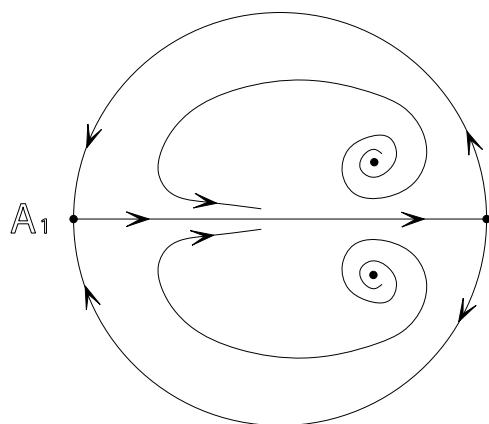


Рис. 103

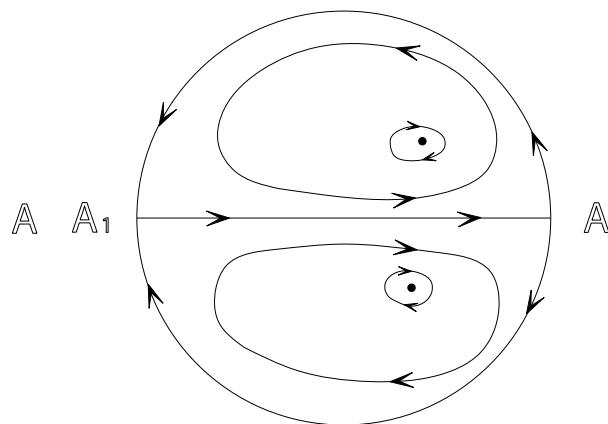


Рис. 104

Если $2r_{00}a_{20} - r_{10}a_{10} = 0$, то для установления типа особой точки $(0, 0)$ системы (2.3.105) воспользуемся результатами работы [67]. Предварительно произведем в системе (2.3.105) замену $x = \bar{y}$, $y = \bar{x}$:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = r_{10}\bar{x}\bar{y}, \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = a_{02}\bar{x}^2 + a_{20}\bar{y}^2. \end{cases} \quad (2.3.106)$$

Следуя работе [67] вычислим величины Δ и δ :

$$\Delta = -4a_{02}(a_{20} - r_{10}), \quad \sigma = -4a_{20}(a_{02} + r_{10}).$$

Если $\Delta < 0$, то как видно из системы (2.3.80) система (2.3.79) имеет на экваторе сферы Пуанкаре единственную особую точку $A(u = z = 0)$ типа «простой узел». Следовательно, индекс Пуанкаре [80] особой точки $(0, 0)$ системы (2.3.106) равен нулю. Принимая во внимание [67], приходим к выводу, что $(0, 0)$ — особая точка системы (2.3.106), к которой примыкают два гиперболических сектора (двухсепаратрисное седло).

При $\Delta > 0$ система (2.3.80) имеет три простые особые точки, в том числе седло и два узла.

При $\Delta = 0$ система (2.3.80) имеет единственную особую точку $A(u = z = 0)$ типа топологический узел. Следовательно, при $\Delta \geq 0$ сумма индексов особых точек системы (2.3.79) на экваторе сферы Пуанкаре равна 1, поэтому индекс Пуанкаре особой точки $(0, 0)$ системы (2.3.106) равен нулю. Независимо от знака σ , как показывают результаты работы [67], особая точка $(0, 0)$ системы (2.3.106) является точкой, к которой примыкают два параболических и два гиперболических сектора.

Если выполняется (2.3.104), то переносим начало координат в особую точку $(-r_{00}/r_{10}, 0)$, а затем применяем преобразование $x = \bar{y}$, $y = \bar{x}$ и замену времени $d\tau = a_{10}dt$:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{d\tau} = \frac{r_{10}}{a_{10}}\bar{x}\bar{y} \equiv P_2(\bar{x}, \bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{d\tau} = \bar{y} + \frac{a_{02}}{a_{10}}\bar{x}^2 \equiv \bar{y} + Q_2(\bar{x}, \bar{y}). \end{cases} \quad (2.3.107)$$

Из (2.3.107) видно, что $\varphi(\bar{x}) = -(a_{02}/a_{10})\bar{x}^2$ — решение уравнения

$$\bar{y} + Q_2(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Так как $P_2(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = -(r_{10}a_{02}/a_{10}^2)\bar{x}^3$, то при $a_{02}r_{10} < 0 (> 0)$ согласно теореме 65 [80], точка $(0, 0)$ — топологический узел (топологическое седло) системы (2.3.107). Теорема доказана.

Фазовые портреты системы (2.3.79) в круге Пуанкаре при наличии одной особой точки в ограниченной части фазовой плоскости изображены на рис. 105–112.

Замечание 2.3.9. В случае $a_{02} = 0, a_{20} = r_{10}$ система (2.3.79) имеет в ограниченной части фазовой плоскости также одну особую точку типа «седлоузел».

Фазовый портрет системы изображен на рис. 110 (экватор сферы Пуанкаре не состоит из траекторий).

Теорема 2.3.44. *Если $a_{10}^2 - 4a_{00}a_{20} < 0, a_{20}a_{02} > 0$, то система (2.3.79) не имеет особых точек в ограниченной части фазовой плоскости. При этом на экваторе сферы Пуанкаре система имеет либо один топологический узел, либо одно простое седло и два простых узла, либо один простой узел.*

Доказательство. При выполнении условия

$$a_{10}^2 - 4a_{00}a_{20} < 0, \quad a_{20}a_{02} > 0 \quad (2.3.108)$$

правые части системы (2.3.79) одновременно не обращаются в нуль, то есть нет особых точек у этой системы.

Если $r_{10} = a_{20}$, то учитывая условие (2.3.108), по теореме (2.3.35) имеем на бесконечности единственную особую точку $A(u = z = 0)$ — топологический узел.

Если $a_{02}(r_{10} - a_{20}) < 0$, то система (2.3.80), очевидно, имеет одну особую точку $A(u = z = 0)$ — простой узел.

Если $a_{02}(r_{10} - a_{20}) > 0$, то по теореме 2.3.33 система (2.3.80) имеет простое седло $A(u = z = 0)$ и два простых узла

$$B\left(u = \sqrt{\frac{r_{10} - a_{20}}{a_{02}}}, z = 0\right), \quad C\left(u = -\sqrt{\frac{r_{10} - a_{20}}{a_{02}}}, z = 0\right).$$

Теорема доказана.

Фазовые портреты системы (2.3.79) в условиях теоремы 2.3.44 изображены на рис. 113 и 114.

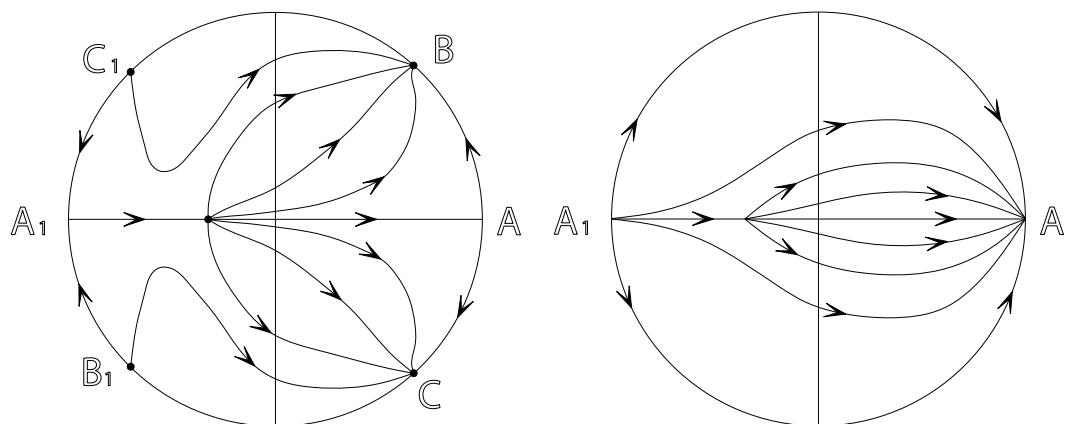


Рис. 105

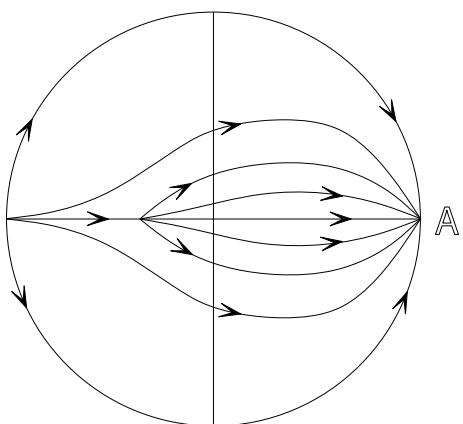


Рис. 106

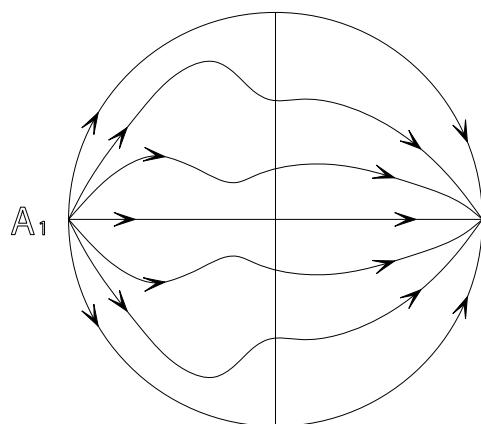


Рис. 107

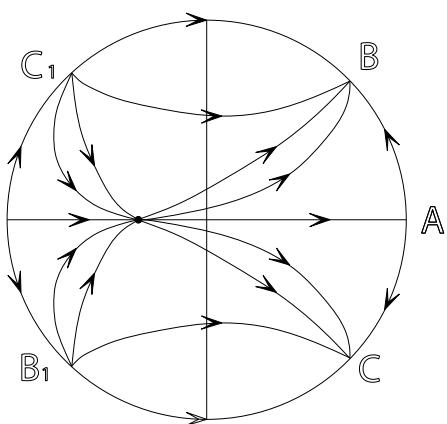


Рис. 108

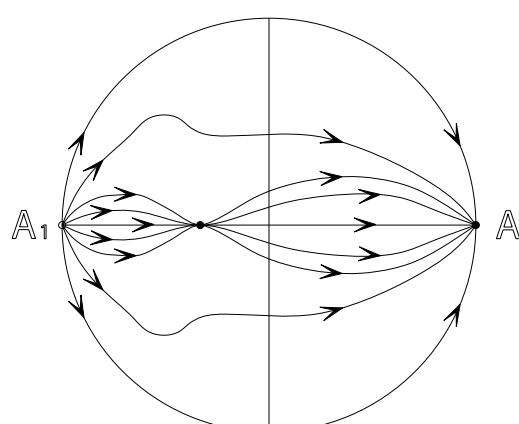


Рис. 109

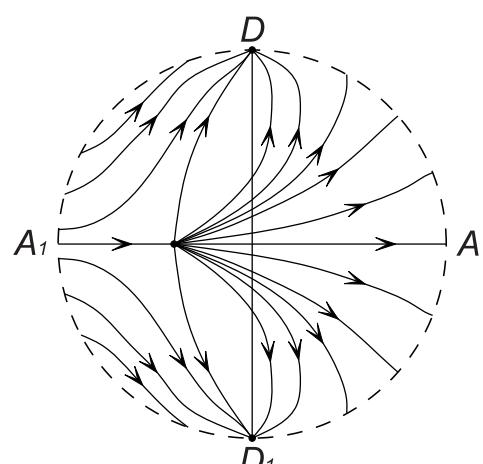


Рис. 110

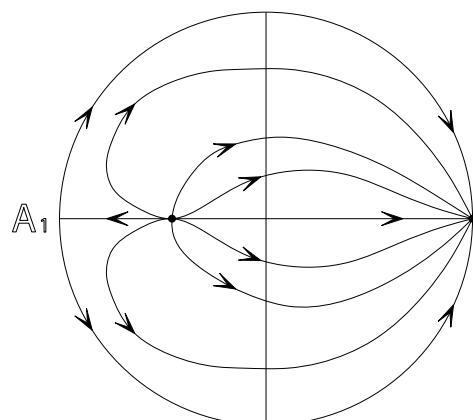


Рис. 111

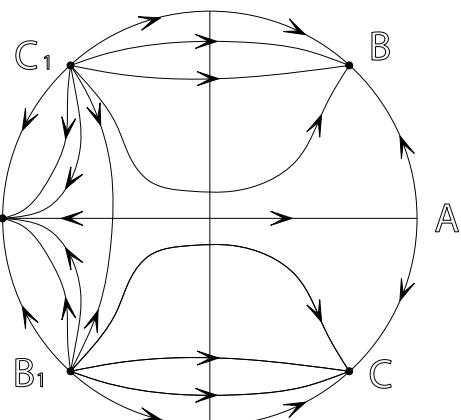


Рис. 112

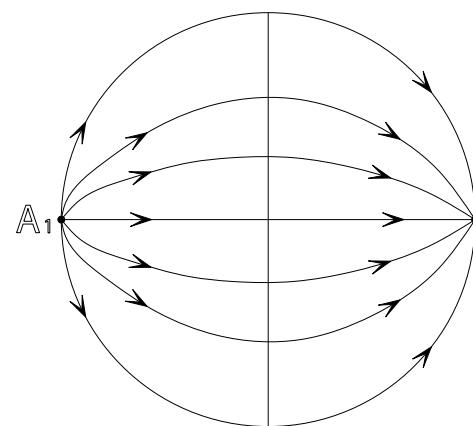


Рис. 113

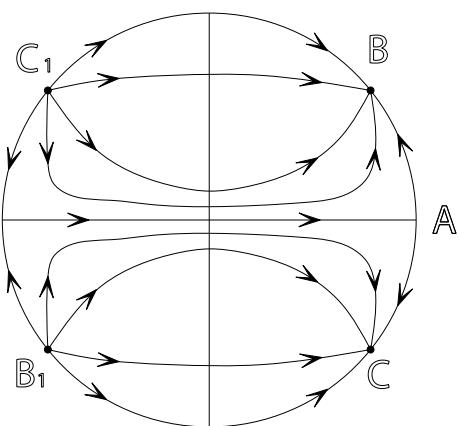


Рис. 114

На этом завершено изучение поведения траекторий квадратичной системы, имеющей одну ось симметрии.

Далее рассмотрим квадратичную систему, имеющую три оси симметрии. Сначала займемся изучением поведения траекторий квадратичной системы, имеющей три оси симметрии N -типа. Для этого рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(r_{00}\sqrt{3} - 2t_{00}x), \\ \frac{dy}{dt} = -x(r_{00}\sqrt{3} - 2t_{00}x) + t_{00}(y - \sqrt{3}x)(y + \sqrt{3}x), \end{cases} \quad (2.3.109)$$

где $t_{00} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, являющуюся частным случаем системы (2.1.44) (здесь для удобства независимая переменная обозначена через t). Система (2.3.109) имеет три оси симметрии $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$, $y = -\sqrt{3}x$.

Так как все особые точки системы (2.3.109) расположены на осях симметрии N -типа, то эта система не имеет изолированных периодических решений.

Теорема 2.3.45. *Система дифференциальных уравнений (2.3.109) имеет четыре особые точки в ограниченной части фазовой плоскости, в том числе один центр и три простых седла. На экваторе сферы Пуанкаре система имеет три простых узла.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что $r_{00} \neq 0$, в противном случае правая часть ни одного из двух дифференциальных уравнений системы (2.3.109) не содержит ни линейного, ни свободного члена. Поэтому начало координат $(0, 0)$ системы (2.3.109) является центром.

Так как четыре особые точки системы образуют невыпуклый четырехугольник, внутренняя точка $(0, 0)$ из которых является центром, то согласно работе [57] остальные три простые седла.

Таким образом, сумма индексов Пуанкаре особых точек системы в ограниченной части фазовой плоскости равна -2 .

Так как сумма индексов Пуанкаре всех особых точек (как конечных, так и бесконечно удаленных) равна 1 [94], то на экваторе сферы Пуанкаре рассматриваемая система имеет три простых узла. Теорема доказана.

Фазовый портрет системы изображен на рис. 115.

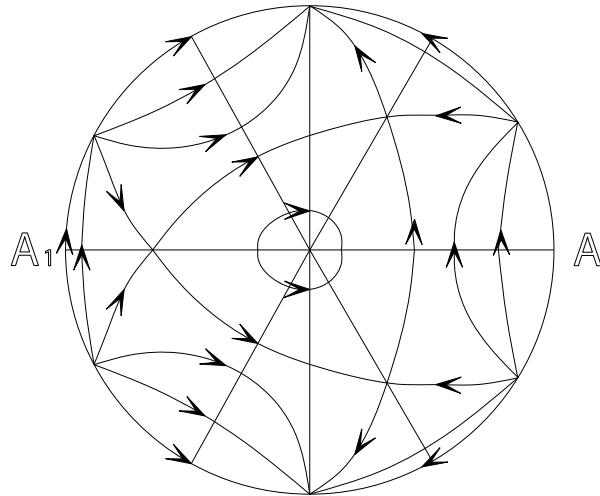


Рис. 115

Теперь рассмотрим квадратичную систему, имеющую три оси симметрии S -типа. Не уменьшая общности, рассмотрим систему дифференциальных уравнений (см.замечание 2.2.3)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(r_{00}\sqrt{3} - 2t_{00}x) + t_{00}(3x^2 - y^2), \\ \frac{dy}{dt} = y(r_{00}\sqrt{3} - 2t_{00}x), \end{cases} \quad (2.3.110)$$

где $t_{00} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Осями симметрии S -типа системы (2.3.110) являются прямые $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$, $y = -\sqrt{3}x$. Впрочем, в системе (2.3.110) $r_{00} \neq 0$, так как в противном случае, правые части уравнений этой системы однородные многочлены второй степени.

Теорема 2.3.46. *Система дифференциальных уравнений (2.3.110) имеет четыре особые точки в ограниченной части фазовой плоскости, в том числе один дикритический узел и три простых седла. На бесконечности эта система имеет три простых узла.*

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Фазовый портрет системы изображен на рис. 116.

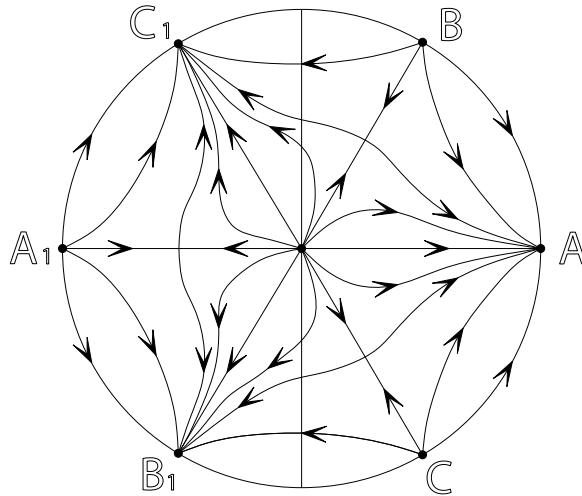


Рис. 116

2.4 Поведение траекторий кубической дифференциальной системы в случаях: трех осей симметрии N -типа (S -типа); четырех осей симметрии N -типа (S -типа)

В данном пункте показано, что при наличии трех или четырех осей симметрии N -типа (или S -типа) можно установить топологическую структуру разбиения фазовой плоскости на траектории, определяемого кубической дифференциальной системой. Для изучения поведения траекторий кубической дифференциальной системы, имеющей три оси симметрии N -типа, достаточно рассмотреть систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y[\sqrt{3}r_{00} - 2t_{00}x + r_{20}(x^2 + y^2)], \\ \frac{dy}{dt} = -x[\sqrt{3}r_{00} - 2t_{00}x + r_{20}(x^2 + y^2)] + t_{00}(y^2 - 3x^2), \end{cases} \quad (2.4.1)$$

где $r_{20}t_{00} \neq 0$.

Система (2.4.1) является частным случаем системы (2.1.31). Осями симметрии N -типа системы (2.4.1) являются прямые $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$, $y = -\sqrt{3}x$. Произведем замену времени в системе (2.4.1) по формуле $d\tau = t_{00}dt$ и введем обозначения $\sqrt{3}r_{00}/t_{00} = \alpha$, $r_{20}/t_{00} = \beta$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = y[\alpha - 2x + \beta x^2 + \beta y^2], \\ \frac{dy}{d\tau} = -x(\alpha - 2x + \beta x^2 + \beta y^2) + y^2 - 3x^2, \end{cases} \quad (2.4.2)$$

где $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

К системе (2.4.2) применим первое преобразование Пуанкаре $x = 1/z$, $y = u/z$:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\beta - z - 2\beta u^2 - \alpha z^2 + 3u^2z - \beta u^4 - \alpha u^2 z^2, \\ \frac{dz}{dt} = -\beta uz + 2uz^2 - \beta u^3 z - \alpha uz^3. \end{cases} \quad (2.4.3)$$

Второе преобразование Пуанкаре $x = v/z$, $y = 1/z$ переводит систему (2.4.2) в систему

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = P(v, z), \\ \frac{dz}{dt} = Q(v, z), \end{cases} \quad (2.4.4)$$

где $P(v, 0) = \beta \neq 0$. Таким образом, точка $(0; 0)$ не является особой для системы (2.4.4), и согласно [80] все бесконечно удаленные особые точки системы (2.4.2) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} z = 0, \\ u^4 + 2u^2 + 1 = 0, \end{cases}$$

которая не имеет действительных решений. Отсюда делаем вывод: система (2.4.2) не имеет особых точек на экваторе сферы Пуанкаре.

Теорема 2.4.1. *Система дифференциальных уравнений (2.4.2.) имеет:*

- a) *семь особых точек, в том числе четыре центра и три седла, если $1 - 4\alpha\beta > 0$;*
- b) *четыре особых точки, в том числе $(0; 0)$ — центр (шестисепаратрисное седло) и три двухсепаратрисных седла (три центра), если $1 - 4\alpha\beta = 0$ ($\alpha = 0$);*
- c) *один центр, если $1 - 4\alpha\beta < 0$.*

Доказательство. Из вида правых частей уравнений системы (2.4.2) следует, что все особые точки этой системы принадлежат осям симметрии N -типа. Поэтому для выяснения числа и характера особых точек системы (2.4.2) достаточно установить число и тип особых точек на прямой $y = 0$.

Легко видеть, что на прямой $y = 0$ система имеет три особых точки, и все они простые. Очевидно, начало координат $(0; 0)$ системы (2.4.2)

является центром. По теореме 2.1.2 любая простая особая точка, расположенная на оси симметрии N -типа, является седлом или центром. Учитывая, что на бесконечности система не имеет особых точек и сумма индексов Пуанкаре особых точек системы (2.4.2) равна 1, приходим к выводу, что на прямой $y = 0$ расположены два центра и седло при выполнении неравенства $1 - 4\alpha\beta > 0$. Следовательно, число особых точек системы равно семи, четыре из которых центры и три седла.

Пусть теперь $1 - 4\alpha\beta = 0$. Тогда на прямой $y = 0$ система имеет две особые точки: $(0, 0)$ — центр и сложную особую точку $(-1/2\beta, 0)$. Выясним тип сложной особой точки $(-1/2\beta, 0)$, для чего перенесем начало координат в эту точку. Тогда система (2.4.2) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{3}{2\beta}y + P_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = -x^2 + Q_2(x, y), \end{cases} \quad (2.4.5)$$

где P_2 и Q_2 — многочлены третьей степени, не содержащие линейных и свободных членов. По теореме 67 [80] точка $(0, 0)$ — двухсепаратрисное седло системы (2.4.5).

Таким образом, при выполнении условия $1 - 4\alpha\beta = 0$ система (2.4.2) имеет один центр и три двухсепаратрисных седла. При $\alpha = 0$ система (2.4.2) имеет в начале координат сложную особую точку и кроме этого, на прямой $y = 0$ имеется еще одна особая точка $(-1/\beta, 0)$. Нетрудно выяснить, что точка $(-1/\beta, 0)$ — центр. Поэтому, в силу наличия трех осей симметрии N -типа система имеет три центра и в начале координат сложную особую точку, индекс Пуанкаре которой равен 2. Принимая во внимание работу [67], приходим к выводу, что точка $(-1/\beta, 0)$ — шестрисепаратрисное седло. Фазовые портреты системы (2.4.2) изображены на рис. 117-120.

Для изучения поведения фазовых траекторий кубической системы, имеющей четыре оси симметрии N -типа рассмотрим систему дифференциальных уравнений (2.1.36):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(r_{00} + r_{20}x^2 + r_{02}y^2), \\ \frac{dy}{dt} = -x[r_{00} + r_{20}x^2 + r_{02}y^2 - t_{00}(y^2 - x^2)], \end{cases} \quad (2.1.36)$$

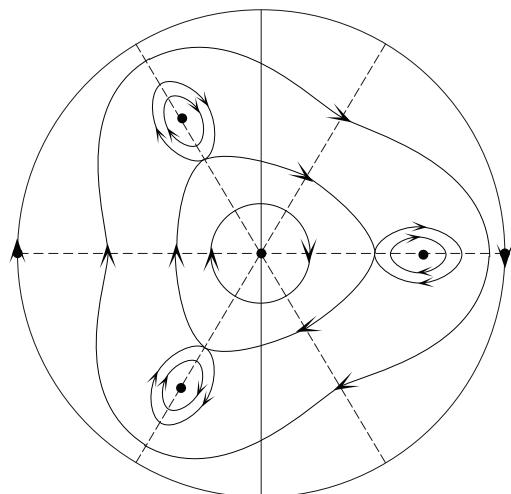


Рис. 117

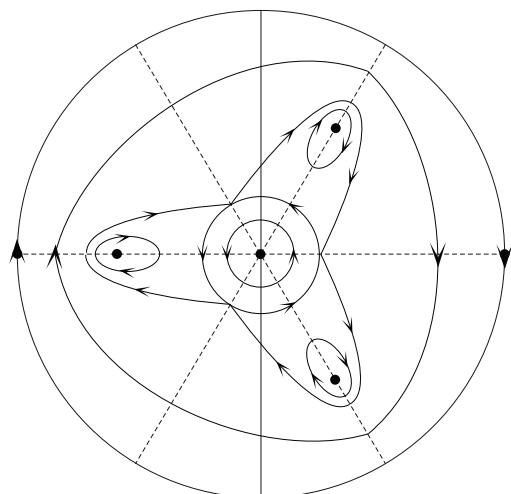


Рис. 118

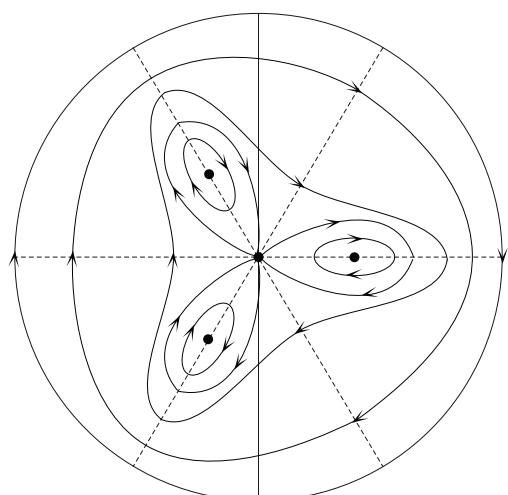


Рис. 119

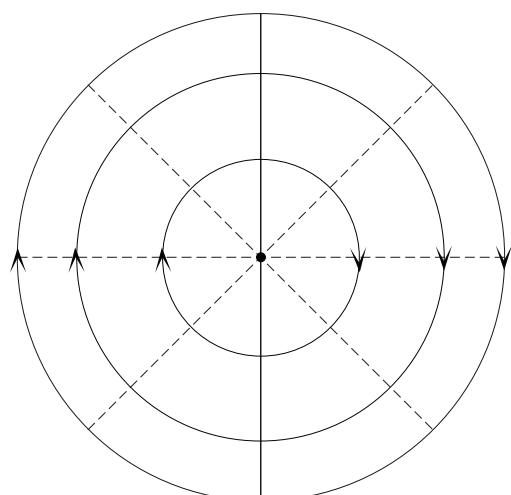


Рис. 120

где $t_{00} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $r_{02} = r_{20} + t_{00}$.

Введем в системе (2.1.36) замену времени $d\tau = t_{00}dt$ и обозначения $r_{00}/t_{00} = \alpha$, $r_{20}/t_{00} = \beta$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = y[\alpha + \beta x^2 + (\beta + 1)y^2], \\ \frac{dy}{d\tau} = -x[\alpha + (\beta + 1)x^2 + \beta y^2]. \end{cases} \quad (2.4.6)$$

Осями симметрии N -типа системы (2.1.36), а, следовательно, системы (2.4.6) являются прямые: $y = 0$, $y = x$, $y = -x$, $x = 0$. Из вида правых частей дифференциальных уравнений системы (2.1.36) следует, что все состояния равновесия этой системы, а значит и системы (2.4.6) расположены на осях симметрии. Именно поэтому система (2.4.6) не имеет изолированных периодических решений. Выясним количество и типы особых точек системы (2.4.6) на осях симметрии N -типа $y = 0$, $y = x$ в зависимости от параметров α и β . Тем самым будет установлено поведение траекторий системы (2.4.6).

Так как при $\alpha = 0$ правые части уравнений системы (2.4.6) являются однородными многочленами третьей степени, то принимаем, что $\alpha \neq 0$.

Предварительно проведем исследование поведения траекторий системы (2.4.6) в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости. Применив преобразование Пуанкаре $x = 1/z$, $y = u/z$, приведем систему (2.4.6) к виду:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -(\beta + 1) - 2\beta u^2 - \alpha z^2 - (\beta + 1)u^4 - \alpha u^2 z^2, \\ \frac{dz}{dt} = -\beta u z - (\beta + 1)u^3 z - \alpha u z^3. \end{cases} \quad (2.4.7)$$

С помощью второго преобразования Пуанкаре $x = v/z$, $y = 1/z$ система (2.4.6) приводится к виду:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \beta + 1 + 2\beta v^2 + \alpha z^2 + (\beta + 1)v^4 + \alpha v^2 z^2, \\ \frac{dz}{dt} = \beta v z + (\beta + 1)v^3 z + \alpha v z^3. \end{cases} \quad (2.4.8)$$

Если $\beta \neq -1$, то все бесконечно удаленные особые точки системы

(2.4.6) являются особыми точками системы (2.4.7) [80], и они определяются системой уравнений

$$\begin{cases} z = 0, \\ (\beta + 1)u^4 + 2\beta u^2 + \beta + 1 = 0. \end{cases} \quad (2.4.9)$$

Нетрудно видеть, что при $\beta \in (-\infty, -1) \cup (-1/2, +\infty)$ система (2.4.9) не имеет решений, то есть система (2.4.7) не имеет особых точек.

Если $\beta \in (-1, -1/2)$, то система (2.4.9) имеет четыре решения

$$M_{1,2}\left(u = \pm \sqrt{\frac{-\beta + \sqrt{-2\beta - 1}}{\beta + 1}}, z = 0\right),$$

$$M_{3,4}\left(u = \pm \sqrt{\frac{-\beta - \sqrt{-2\beta - 1}}{\beta + 1}}, z = 0\right).$$

Если $\beta = -1$, то система (2.4.7) имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 2u^2 - \alpha z^2 - \alpha u^2 z^2, \\ \frac{dz}{dt} = uz - \alpha u z^3. \end{cases} \quad (2.4.10)$$

Таким образом, при $\beta = -1$ система (2.4.6) имеет на экваторе сферы Пуанкаре две особые точки $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$.

При $\beta = -1/2$ система (2.4.7) имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{2} + u^2 - \alpha z^2 - \frac{1}{2}u^4 - \alpha u^2 z^2, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2}uz - \frac{1}{2}u^3 z - \alpha u z^3. \end{cases} \quad (2.4.11)$$

Путем переноса начала координат в особую точку $B(u = 1, z = 0)$, сохраняя обозначения переменных u и z , систему (2.4.11) преобразуем к виду:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -2u^2 - 2\alpha z^2 + P_3(u, z), \\ \frac{dz}{dt} = -uz + Q_3(u, z), \end{cases} \quad (2.4.12)$$

где P_3 и Q_3 — многочлены четвертой системы, не содержащие членов степени меньше третьей.

Теорема 2.4.2. *Система дифференциальных уравнений (2.4.6) в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости не имеет особых точек, если $\beta \in (-\infty, -1) \cup (-1/2, +\infty)$, имеет:*

- a) *четыре простых узла, если $\beta \in (-1, -1/2)$;*
- b) *две сложные особые точки $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$, к каждой из которых примыкают либо два гиперболических сектора, либо два эллиптических и два параболических сектора, если $\alpha < 0, \beta = -1$;*
- c) *две сложные особые точки $A(u = z = 0), D(v = z = 0)$, к каждой из которых примыкают либо два эллиптических и два параболических сектора, либо два гиперболических и два параболических сектора, если $\alpha > 0, \beta = -1$;*
- d) *две сложные особые точки $B(u = 1, z = 0), C(u = -1, z = 0)$, к каждой из которых примыкают либо два эллиптических и два параболических сектора, либо два гиперболических сектора если $\alpha > 0, \beta = -1/2$; либо два эллиптических и два параболических сектора; либо два гиперболических и два параболических сектора, если $\alpha < 0, \beta = -1/2$.*

Доказательство. Выше нами указано при каких значениях параметра β система (2.4.6) не имеет особых точек на экваторе сферы Пуанкаре, а также имеет четыре особые точки $M_{1,2,3,4}$. Легко видеть, что особые точки $M_i, i = \overline{1,4}$ — простые. Следовательно, в силу симметрии поля направлений системы (2.4.6) относительно четырех прямых $y = 0, y = x, y = -x, x = 0$, либо все четыре особые точки седла, либо узлы. Седлами они не могут быть в силу работы [103]. Следовательно, $M_i, i = \overline{1,4}$ — простые узлы.

В случае $\beta = -1$ характер особой точки $(0; 0)$ системы (2.4.10) определяется с помощью квадратичных членов в правых частях дифференциальных уравнений этой системы [67]. Для этого вычисляем величины: $\Delta = 4\alpha, \delta = 8(\alpha - 1)$. Согласно [67] $(0; 0)$ — особая точка, достаточно малая окрестность которой состоит либо из двух гиперболических секторов, либо из двух эллиптических и двух параболических секторов при $\alpha < 0$, либо из двух эллиптических и двух параболических секторов при $\alpha > 0$. Аналогично рассуждаем, применяя результаты работы [67] в случае $\beta = -1/2$. Теорема доказана.

Теорема 2.4.3. Система дифференциальных уравнений (2.4.6) имеет в ограниченной части фазовой плоскости:

- a) одну особую точку $(0; 0)$ — центр, если $\alpha > 0, \beta \geq -1/2 \vee \alpha < 0, \beta \leq -1$;
- b) пять особых точек, в том числе один центр и четыре простых седла, если $\alpha > 0, -1 \leq \beta < -1/2 \vee \alpha < 0, -1 < \beta \leq -1/2$;
- c) девять особых точек, в том числе пять центров и четыре седла, если $\alpha > 0, \beta < -1 \vee \alpha < 0, \beta > -1/2$;

Доказательство. Для установления количества и типов особых точек системы (2.4.6) достаточно выяснить количество и типы особых точек, расположенных на осях симметрии N -типа $y = 0$ и $y = x$.

Если $\alpha > 0, \beta \geq -1/2 \vee \alpha < 0, \beta \leq -1$, то на указанных прямых расположена одна особая точка $(0, 0)$ — центр.

Если $\alpha > 0, -1 \leq \beta < -1/2$ на прямой $y = 0$ расположена одна особая точка $(0, 0)$, а на прямой $y = x$ — три особые точки. При выполнении условий $\alpha < 0, -1 < \beta \leq -\frac{1}{2}$ на прямой $y = 0$ расположены три особые точки, а на прямой $y = x$ — одна особая точка $(0, 0)$. По теореме 2.4.2 система (2.4.6) при наличии пяти особых точек в конечной части плоскости имеет либо четыре узла на экваторе сферы Пуанкаре, либо две сложные особые точки, малая окрестность каждой из которых состоит из двух эллиптических и двух параболических секторов.

Поясним, почему в рассматриваемом случае, окрестность сложной особой точки на экваторе сферы Пуанкаре не может содержать гиперболических секторов. Согласно работе [67] индекс Пуанкаре сложной особой точки $(0, 0)$ системы (2.4.10) (или 2.4.12) может быть равен нулю, -2 или 2 . Система (2.4.6) в конечной части плоскости имеет только простые особые точки, и все они расположены на осях симметрии N -типа. Следовательно, по теореме 2.1.2 каждая из них может быть центром или седлом. Точка $(0, 0)$ — центр, поэтому остальные четыре особые точки являются седлами. В противном случае сумма индексов Пуанкаре особых точек системы (2.4.6) в конечной части плоскости равна пяти. Это невозможно, так как сумма индексов Пуанкаре всех особых точек системы, как конечных, так и бесконечно удаленных, равна единице [94], но

в силу работы [103] сумма индексов Пуанкаре особых точек кубической системы на экваторе сферы Пуанкаре не меньше чем -2 .

Таким образом, система имеет один центр и четыре седла. Именно поэтому каждая из двух сложных особых точек на бесконечности имеет индекс Пуанкаре, равный 2, то есть окрестность такой точки состоит из двух эллиптических и двух параболических секторов [67].

В случае девяти особых точек на бесконечности нет особых точек по теореме 2.4.2. Следовательно, система (2.4.6) имеет пять центров и четыре седла. Теорема доказана.

Фазовые портреты системы (2.4.6) изображены на рис. 121–125

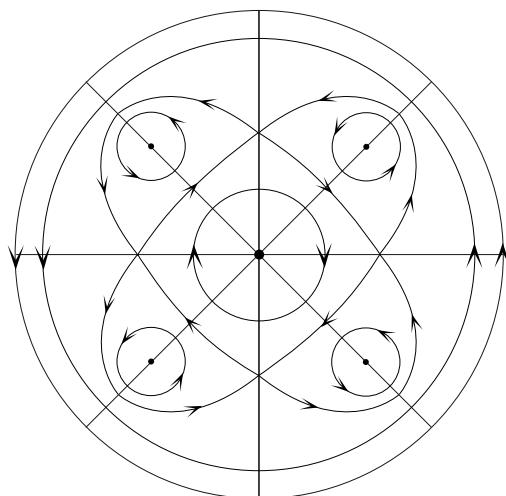


Рис. 121

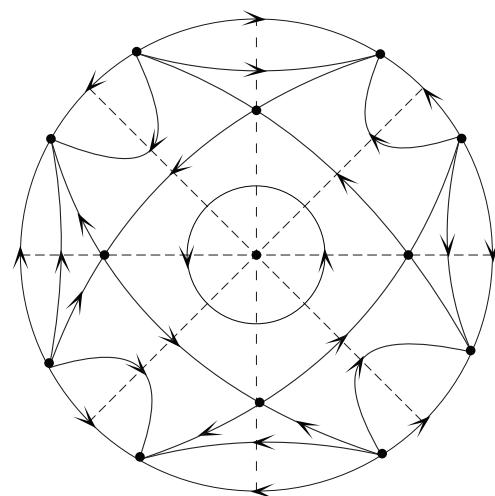


Рис. 122

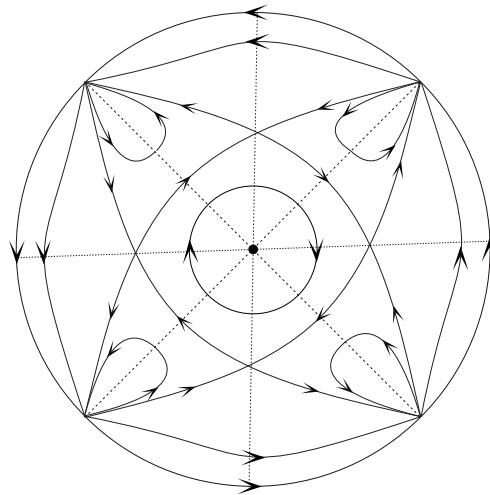


Рис. 123

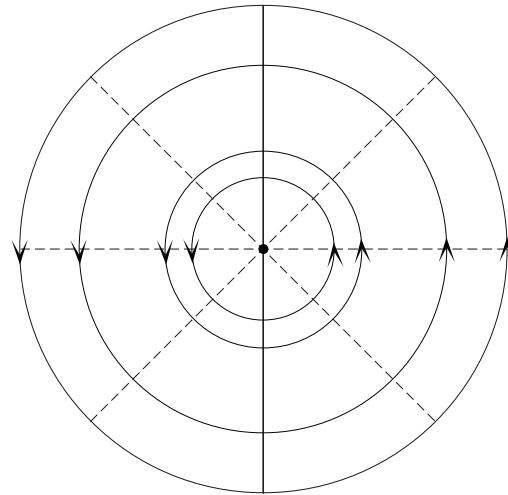


Рис. 124

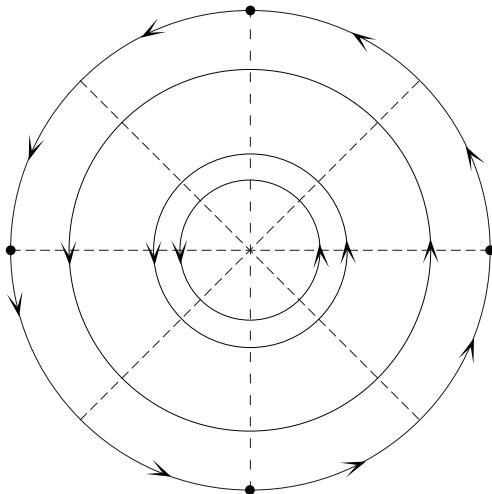


Рис. 125

Замечание 2.4.1. Фазовый портрет, изображенный на рис. 125, отличается от фазового портрета, изображенного на рис. 124, тем, что в случае рис. 125 на экваторе сферы Пуанкаре система имеет две сложные особые точки на концах осей координат (они выделены жирными точками).

Далее рассмотрим систему (2.2.14) при $k_1 = 0$

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = 2x[r_{00} + r_{10}x + r_{20}(x^2 + y^2)] + r_{10}(y^2 - 3x^2) \\ \frac{dy}{d\tau} = 2y[r_{00} + r_{10}x + r_{20}(x^2 + y^2)], \end{cases} \quad \text{где } r_{10} \cdot r_{20} \neq 0. \quad (2.4.13)$$

Вводя замену времени $dt = r_{10}d\tau$ и обозначения $2r_{00}/r_{10} = \alpha$, $2r_{20}/r_{10} = \beta$, систему (2.4.13) перепишем в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x[\alpha + 2x + \beta(x^2 + y^2)] + y^2 - 3x^2, \\ \frac{dy}{dt} = y[\alpha + 2x + \beta(x^2 + y^2)], \end{cases} \quad \text{где } \beta \neq 0. \quad (2.4.14)$$

Система (2.4.14) имеет три оси симметрии S -типа: $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$, $y = -\sqrt{3}x$.

Очевидно, все особые точки системы (2.4.14) расположены на осях симметрии. Так как каждая ось симметрии S -типа является инвариантной прямой, то никакая особая точка не может быть окружена замкнутой

траекторией, более того, система не имеет особых точек типа «фокус». Заметим также, что точка $(0, 0)$ при $\alpha \neq 0$ есть дикритический узел по терминологии [80].

Рассмотрим поведение траекторий системы (2.4.14) в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости. Для этого воспользуемся преобразованиями Пуанкаре. Первое преобразование Пуанкаре $x = 1/z$, $y = u/z$ приводит систему (2.4.14) к виду [100]

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 3u - u^3, \\ \frac{dz}{dt} = -\beta + z - \beta u^2 - z^2 - u^2 z. \end{cases} \quad (2.4.15)$$

Второе преобразование Пуанкаре $x = v/z$, $y = u/z$ приводит систему (2.4.14) к виду:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = 1 - 3v^2, \\ \frac{dz}{dt} = -\beta - \beta v^2 - 2vz - \alpha z^2. \end{cases} \quad (2.4.16)$$

Из (2.4.15) и (2.4.16) следует, что система (2.4.14) не имеет бесконечно удаленных особых точек, и экватор сферы Пуанкаре не состоит из траекторий системы.

Теорема 2.4.4. *Система дифференциальных уравнений (2.4.14) имеет:*

- a) *одну особую точку $(0, 0)$ — дикритический узел, если $1 - 4\alpha\beta < 0$;*
- b) *три особые точки типа «седлоузел» и один дикритический узел, если $1 - 4\alpha\beta = 0$;*
- c) *четыре особые точки типа «узел» и три седла, если $1 - 4\alpha\beta > 0$;*
- d) *одно шестисепаратрисное седло $(0, 0)$ и три простых узла, если $\alpha = 0$.*

Доказательство. Для установления типов и количества особых точек системы (2.4.14) достаточно выяснить их количество и типы на прямой $y = 0$, так как осей симметрии нечетное число.

Если $1 - 4\alpha\beta < 0$, то на прямой $y = 0$ система имеет единственную простую особую точку $(0, 0)$ — дикритический узел.

Если $1 - 4\alpha\beta = 0$, то на прямой $y = 0$ система имеет две особые точки $(0, 0)$ и $(1/2\beta, 0)$. После переноса начала координат в точку $(1/2\beta, 0)$

система (2.4.14) примет вид (обозначения фазовых переменных x и y оставляем неизменными):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + \beta x^3 + \beta xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{3}{2\beta}y + 3xy + \beta x^2y + \beta y^3. \end{cases} \quad (2.4.17)$$

Начало координат $(0; 0)$ системы (2.4.17) является седлоузлом по теореме 65 [80]. Таким образом, система (2.4.14) имеет три седлоузла и один дикритический узел.

Если $1 - 4\alpha\beta = 0$, то на прямой $y = 0$ система имеет три особые точки $(0; 0)$, $G(\frac{1+\sqrt{1-4\alpha\beta}}{2\beta}; 0)$, $H(\frac{1-\sqrt{1-4\alpha\beta}}{2\beta}; 0)$.

После переноса начала координат в точку G система (2.4.14) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{1-4\alpha\beta}(\sqrt{1-4\alpha\beta}+1)}{2\beta}x + P_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \frac{3(1+\sqrt{1-4\alpha\beta})}{2\beta}y + Q_2(x, y). \end{cases} \quad (2.4.18)$$

Из (2.4.18) следует, что точка G — простой узел. Так как система имеет три оси симметрии S -типа, то, очевидно, она имеет четыре узла, остальные три особые точки по необходимости являются седлами (сумма индексов особых точек равна 1).

Пусть $\alpha = 0$. Тогда система (2.4.14) имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x^2 + y^2 + \beta x^3 + \beta xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = 2xy + \beta x^2y + \beta y^3. \end{cases} \quad (2.4.19)$$

На прямой $y = 0$, кроме точки $(0, 0)$, система (2.4.19) имеет простую особую точку $(1/\beta, 0)$. Мы утверждаем, что $(1/\beta, 0)$ — узел, минуя непосредственные вычисления. Начало координат $(0, 0)$ системы (2.4.19) является сложной особой точкой, индекс J которой равен 2, или -2 , или 0 [67]. Индекс $J \neq 0$, ибо в противном случае имеем сумму индексов особых точек системы, равную 3 или -3 (простая особая точка, лежащая на оси симметрии S -типа является узлом или седлом). $J \neq 2$, так как в этом случае начало координат было бы сложной особой точкой,

окрестность которой состоит из двух эллиптических и двух параболических секторов. В силу наличия у системы трех осей симметрии S -типа эллиптических секторов было бы не менее трех.

Таким образом, индекс особой точки $(0, 0)$ равен -2 , а значит имеет место шестисепаратрисное седло [67]. Именно поэтому три простые точки являются узлами. Теорема доказана.

Фазовые портреты системы (2.4.14) изображены на рис. 126–130.

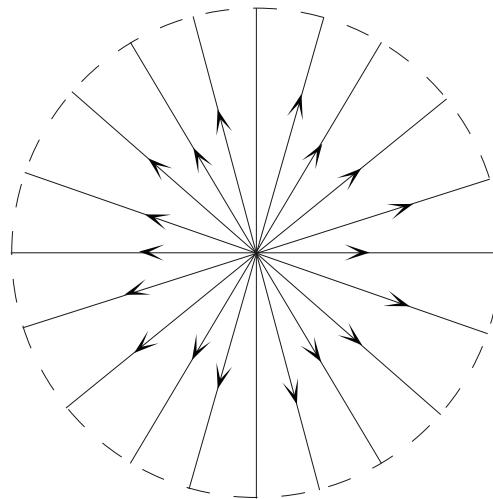


Рис. 126

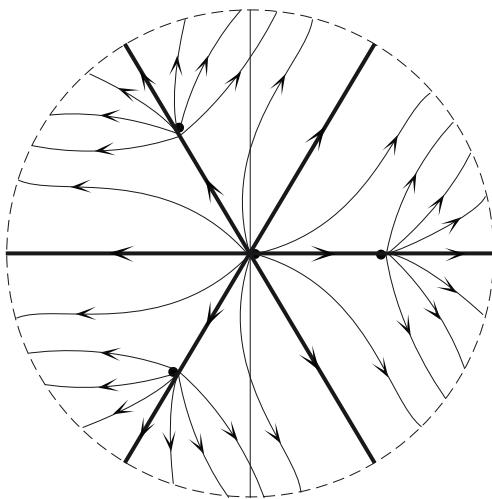


Рис. 127

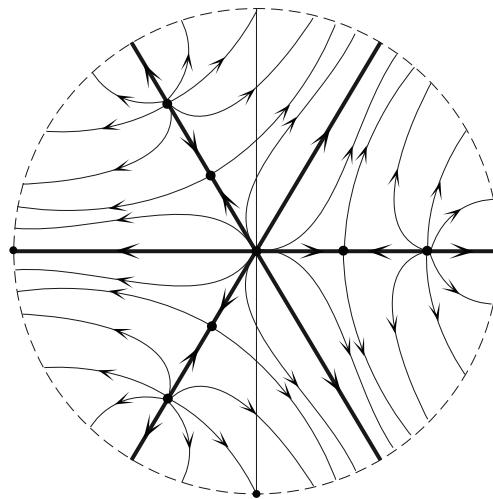


Рис. 128

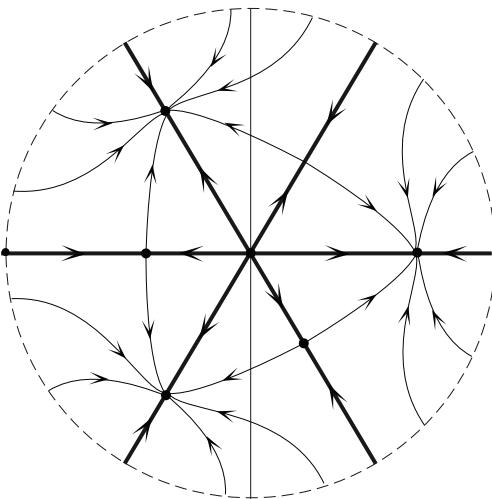


Рис. 129

Рассмотрим поведение фазовых траекторий кубической дифференциальной системы, имеющей четыре оси симметрии S -типа. С этой целью

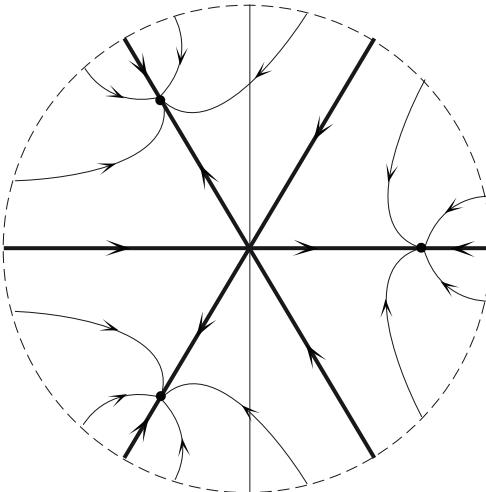


Рис. 130

обратимся к системе (см. теорему 2.2.6):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x[s_{00} + s_{20}(x^2 + y^2) + t_{00}y^2], \\ \frac{dy}{dt} = y[s_{00} + s_{20}(x^2 + y^2) + t_{00}x^2], \end{cases} \quad \text{где } t_{00} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2.4.20)$$

Сделав замену времени $d\tau = t_{00}dt$ и вводя обозначения: $\alpha = s_{00}/t_{00}$, $\beta = s_{20}t_{00}$, перепишем систему (2.4.20) в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = x[\alpha + \beta x^2 + (\beta + 1)y^2], \\ \frac{dy}{d\tau} = y[\alpha + (\beta + 1)x^2 + \beta y^2]. \end{cases} \quad (2.4.21)$$

Система (2.4.21) имеет четыре оси симметрии S -типа: $y = 0$, $y = x$, $y = -x$, $x = 0$.

Для установления разбиения фазовой плоскости на траектории, определяемого системой (2.4.21), достаточно узнать количество и типы особых точек на прямых $y = 0$ и $y = x$. Так как правые части уравнений системы (2.4.21) мы считаем неоднородными многочленами третьей степени, то $\alpha \neq 0$. Следовательно, $(0; 0)$ — дикритический узел системы (2.4.21).

Для изучения поведения траекторий в бесконечно удаленных частях

фазовой плоскости воспользуемся системой

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u - u^3, \\ \frac{dz}{dt} = -\beta z - (\beta + 1)u^2z - \alpha z^3, \end{cases} \quad (2.4.22)$$

полученной в результате применения к системе (2.4.21) преобразования $x = 1/z$, $y = u/z$.

Теорема 2.4.5. *Система дифференциальных уравнений (2.4.21) имеет четыре особые точки на экваторе сферы Пуанкаре, в том числе:*

- a) $A(u = z = 0)$, $D(v = z = 0)$ — топологические седла (топологические узлы), $B(u = 1; z = 0)$, $C(u = -1; z = 0)$ — простые узлы, если $\beta = 0$, $\alpha > 0 (< 0)$;
- b) $A(u = z = 0)$, $D(v = z = 0)$, $B(u = 1; z = 0)$, $C(u = -1; z = 0)$ — простые узлы, если $-1/2 < \beta < 0$;
- c) $B(u = 1; z = 0)$, $C(u = -1; z = 0)$ — топологические узлы (топологические седла), $A(u = z = 0)$, $D(v = z = 0)$ — простые узлы, если $\beta = -1/2$, $\alpha > 0 (< 0)$;
- d) $A(u = z = 0)$, $D(v = z = 0)$ — простые узлы, $B(u = 1; z = 0)$, $C(u = -1; z = 0)$ — простые седла, если $\beta < -1/2$.
- e) $A(u = z = 0)$, $D(v = z = 0)$ — простые седла, $B(u = 1; z = 0)$, $C(u = -1; z = 0)$ — простые узлы, если $\beta > 0$.

Доказательство. Пусть $\beta = 0$. В системе (2.4.22) делаем замену $u = \bar{z}$, $z = \bar{u}$, получим

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{dt} = -\alpha\bar{u}^3 - \bar{u}\bar{z}^2, \\ \frac{d\bar{z}}{dt} = \bar{z} - \bar{z}^3. \end{cases} \quad (2.4.23)$$

При $\alpha > 0 (< 0)$ по теореме 65 [80] $(0, 0)$ — топологическое седло (топологический узел), то есть точки $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$ — топологические седла (топологические узлы).

Перенесем начало координат в точку $B(u = 1, z = 0)$, и сохранив старые обозначения фазовых переменных u и z , перепишем систему (2.4.22)

в виде:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -2u - 3u^2 - u^3, \\ \frac{dz}{dt} = -(2\beta + 1)z - 2(\beta + 1)uz - (\beta + 1)u^2z - \alpha z^3. \end{cases} \quad (2.4.24)$$

При $\beta = 0$, очевидно точка $(0, 0)$ — простой узел системы (2.4.24). Следовательно, пункт *a*) теоремы доказан.

Если $-1/2 < \beta < 0$, то, как следует из (2.4.22) и (2.4.24), все четыре особые точки на бесконечности являются простыми узлами.

В случае $\beta = -1/2$ с помощью замены времени $d\tau = -2dt$ и преобразования $u = \bar{z}$, $z = \bar{u}$ систему (2.4.24) приводим к виду:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{d\tau} = \frac{1}{2}\bar{u}\bar{z} + \frac{\alpha}{2}\bar{u}^3 + \frac{1}{4}\bar{u}\bar{z}^2, \\ \frac{d\bar{z}}{d\tau} = \bar{z} + \frac{3}{2}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}\bar{z}^3. \end{cases} \quad (2.4.25)$$

При $\alpha > 0 (< 0)$ особая точка $(0, 0)$ — топологический узел (топологическое седло) по теореме 65 [80]. При этом, как следует из (2.4.22), $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$ — простые узлы.

Если $\beta < -1/2$, то как видно из (2.2.24) B и C — простые седла, A и D — простые узлы. Если $\beta > 0$, то в силу (2.4.22) и (2.4.24) A и D — простые седла, B и C — простые узлы. Теорема доказана.

Теорема 2.4.6. *Система дифференциальных уравнений (2.4.21) имеет в ограниченной части фазовой плоскости:*

- a) одну особую точку $(0; 0)$ — дикритический узел, если $\alpha > 0, \beta \geq 0 \vee \alpha < 0, \beta \leq -1/2$;*
- b) пять особых точек, в том числе один дикритический узел и четыре седла, если $\alpha > 0, -1/2 \leq \beta < 0 \vee \alpha < 0, -1/2 < \beta \leq 0$;*
- c) девять особых точек, в том числе пять узлов и четыре седла, если $\alpha < 0, \beta > 0 \vee \alpha > 0, \beta < -1/2$.*

Доказательство. Если $\alpha > 0, \beta \geq 0 \vee \alpha < 0, \beta \leq -1/2$, то на каждой из прямых $y = 0$ и $y = x$ расположена единственная особая точка $(0, 0)$ — дикритический узел.

Если $\alpha > 0, -1/2 \leq \beta < 0$, то на прямой $y = 0$ система имеет три особые точки, а на прямой $y = x$ — единственную особую точку $(0, 0)$.

При выполнении неравенств $\alpha < 0, -1/2 < \beta \leq 0$ на прямой $y = x$ система имеет три особые точки, а на прямой $y = 0$ — единственную особую точку $(0, 0)$.

Таким образом, система имеет пять особых точек, причем $(0, 0)$ — дикритический узел. По теореме 2.4.5 при рассматриваемых в пункте b) ограничениях на параметры α и β система имеет на экваторе сферы Пуанкаре четыре узла, то есть сумма индексов этих особых точек равна четырём. Следовательно, четыре особые точки в конечной части плоскости, отличные от $(0, 0)$ являются седлами.

Пусть выполняется хотя бы одно из условий пункта c). Тогда по теореме 2.4.5 сумма индексов Пуанкаре особых точек на экваторе сферы Пуанкаре равна 0. Следовательно, среди девяти особых точек в конечной части плоскости (все они простые) имеется пять узлов и четыре седла. Теорема доказана.

Фазовые портреты системы (2.4.21) изображены на рис. 131-133.

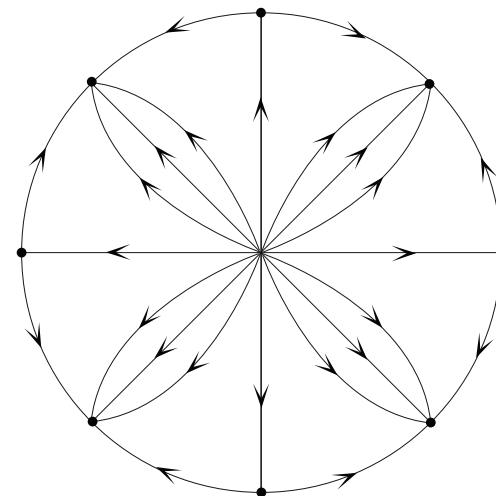


Рис. 131

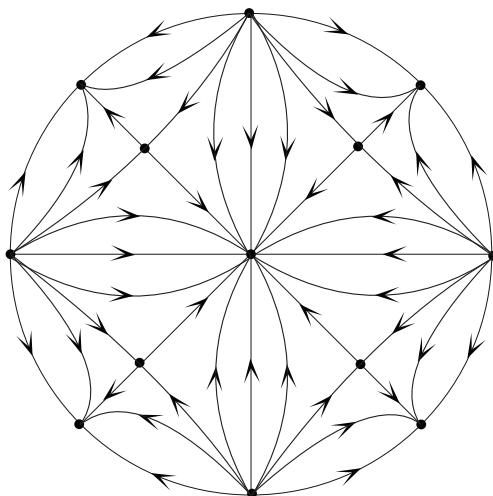


Рис. 132

Из исследования, проведенного нами во второй главе, можно сделать следующие выводы:

1. Введены понятия «ось симметрии N -типа» и «ось симметрии S -типа».
2. Найдены необходимые и достаточные условия существования у квадратичной и кубической дифференциальных систем на плоскости осей

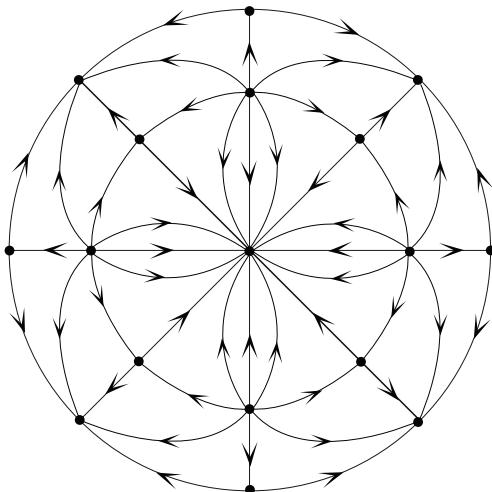


Рис. 133

симметрии как N -типа, так и S -типа.

3. Показано, что ось симметрии N -типа пересекает траектории системы под прямым углом, а ось симметрии S -типа является инвариантной прямой.

4. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X_n(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Y_n(x, y), \end{cases} \quad (*)$$

где X_n и Y_n — взаимно простые многочлены степени n с действительными коэффициентами, имеет не более $n+1$ осей симметрии N -типа (S -типа), если X_n и Y_n — неоднородные многочлены.

5. Система $(*)$ при $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ не имеет четного числа осей симметрии N -типа (S -типа). В частности, квадратичная система может иметь либо одну, либо три оси симметрии N -типа (S -типа), если правые части $(*)$ не являются однородными многочленами.

6. Существуют системы вида $(*)$ при $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, имеющие четное число осей симметрии, одна половина из которых оси симметрии N -типа, а другая — оси симметрии S -типа.

7. Если квадратичная система, правые части уравнений которой содержат хотя бы один неквадратичный член, имеет не менее двух осей симметрии, то она не может иметь прямых изоклинов, проходящих через

начало координат и отличных от осей симметрии.

8. Если кубическая система, правые части уравнений которой содержат хотя бы один многочлен размерности меньше трех, имеет не менее трех осей симметрии, то она не может иметь прямых изоклин, проходящих через начало координат и отличных от осей симметрии.

9. Если поле направлений системы (*) имеет максимальное (конечное) число осей симметрии N -типа и такое же число осей симметрии S -типа, то X_n и Y_n — однородные многочлены.

10. Если система (*) при $n \geq 2$ имеет n^2 особых точек в ограниченной части фазовой плоскости, а поле ее направлений имеет $n + 1$ ось симметрии N -типа (осей симметрии S -типа нет) или $n + 1$ ось симметрии S -типа (осей симметрии N -типа нет), то все особые точки этой системы расположены на осях симметрии, причем начало координат — особая точка.

11. Если $n^2 - n$ особых точек системы (*) расположены на алгебраической кривой $n - 1$ -го порядка, то эта кривая является изоклиной (*). В частности, если шесть особых точек кубической системы принадлежащей кривой второго порядка, то эта кривая — изоклина системы.

Следствием данного положения является следующее утверждение: если $n^2 - n$ особых точек системы (*) принадлежат кривой $n - 1$ порядка, то все остальные особые точки принадлежат одной прямой.

12. Система (*) при n нечетном и $n \geq 3$ не может иметь двух взаимно перпендикулярных осей симметрии, одна из которых ось симметрии N -типа, а другая — ось симметрии S -типа.

13. Построены фазовые портреты в круге Пуанкаре кубической системы, имеющей две оси симметрии N -типа и столько же осей симметрии S -типа.

14. Построены фазовые портреты в круге Пуанкаре квадратичной системы при наличии у системы:

- a) одной оси симметрии N -типа,
- b) трех осей симметрии N -типа,
- c) одной оси симметрии S -типа,
- d) трех осей симметрии S -типа.

15. Установлено отсутствие изолированных периодических решений

квадратичной системы, имеющей хотя бы одну ось симметрии.

16. Построены фазовые портреты в круге Пуанкаре кубической системы, имеющей:

- a) три оси симметрии N -типа,
- b) четыре оси симметрии N -типа,
- c) три оси симметрии S -типа,
- d) четыре оси симметрии S -типа.

Эта система не имеет также изолированных периодических решений.

Глава 3. Особые точки кубической дифференциальной системы на экваторе сферы Пуанкаре

При исследовании качественной структуры разбиения траекторий автономной дифференциальной системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \quad (3.1)$$

с аналитическими правыми частями важную роль играют сведения о поведении ее траекторий при неограниченно увеличивающихся (по модулю) значениях x и y , или, как говорят, «на бесконечности». Знание поведения траекторий системы (3.1) в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости может оказаться полезным также при исследовании (3.1) в ограниченной части плоскости (x, y) .

Так, например, поведение сепаратрис седла $A(-\frac{1}{\mu}; 0)$ системы [80]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - \alpha y - \mu x^2 - y^2, \end{cases} \quad \text{где } \alpha > 0, \mu > 0,$$

однозначно устанавливается посредством изучения состояний равновесия этой системы на бесконечности.

Во многих случаях установить существование предельного цикла и его устойчивость для системы (3.1) удается благодаря знанию поведения ее траекторий на бесконечности.

Таким образом, вопрос об исследовании поведения траекторий системы (3.1) в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости имеет весьма большое значение.

В данной главе дан полный качественный анализ поведения траекто-

рий системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^3 a_{ij}x^i y^j \equiv P_3(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^3 b_{ij}x^i y^j \equiv Q_3(x, y), \end{cases} \quad (3.2)$$

где

$$a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}, (P_3, Q_3) = 1, \sum_{i+j=3} |a_{ij}| > 0, \sum_{i+j=3} |b_{ij}| > 0. \quad (3.3)$$

При этом предполагается, что система, полученная в результате переноса начала координат в исследуемую особую точку на экваторе сферы Пуанкаре, имеет невырожденную линейную часть.

Для изучения особых точек системы (3.2) на бесконечности удобно пользоваться преобразованиями Пуанкаре [80]:

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{u}{z} \quad (3.4)$$

и

$$x = \frac{v}{z}, \quad y = \frac{1}{z}. \quad (3.5)$$

Применяя преобразование (3.4) к системе (3.2), мы получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = b_{30} + (b_{21} - a_{30})u + b_{20}z + (b_{12} - a_{21})u^2 + \\ \quad + (b_{11} - a_{20})uz + b_{10}z^2 + (b_{03} - a_{12})u^3 + (b_{02} - a_{11})u^2z + \\ \quad + (b_{01} - a_{10})uz^2 + b_{00}z^3 - a_{03}u^4 - a_{02}u^3z - a_{01}u^2z^2 - a_{00}uz^3, \\ \frac{dz}{dt} = -a_{30}z - a_{21}uz - a_{20}z^2 - a_{12}u^2z - a_{11}uz^2 - a_{10}z^3 - \\ \quad - a_{03}u^3z - a_{02}u^2z^2 - a_{01}uz^3 - a_{00}z^4. \end{cases} \quad (3.6)$$

Известно, что все бесконечно удаленные особые точки системы (3.2), кроме одной («концов оси y »), являются состояниями равновесия системы (3.6) [80]. Поэтому преобразование (3.5) применяем к системе (3.2)

лишь для установления характера точки покоя $v = z = 0$ системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = a_{03} + (a_{12} - b_{03})v + a_{02}z + (a_{21} - b_{12})v^2 + (a_{11} - b_{02})vz + \\ \quad + a_{01}z^2 + (a_{30} - b_{21})v^3 + (a_{20} - b_{11})v^2z + (a_{10} - b_{01})vz^2 + \\ \quad + a_{00}z^3 - b_{30}v^4 - b_{20}v^3z - b_{10}v^2z^2 - b_{00}vz^3, \\ \frac{dz}{dt} = -b_{03}z - b_{12}vz - b_{02}z^2 - b_{21}v^2z - b_{11}vz^2 - b_{01}z^3 - \\ \quad - b_{30}v^3z - b_{20}v^2z^2 - b_{10}vz^3 - b_{00}z^4. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Состояния равновесия системы (3.6) определяются из системы

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 0, \\ f(u) \equiv b_{30} + (b_{21} - a_{30})u + (b_{12} - a_{21})u^2 + \\ \quad + (b_{03} - a_{12})u^3 - a_{03}u^4 = 0. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Будем различать два случая: a) $f(u) \not\equiv 0$, b) $f(u) \equiv 0$.

Впервые попытка исчерпывающего исследования системы (3.6) в случае a) была предпринята в работе [93]. Однако ее результаты оказались далеко неполными. Об этом свидетельствует тот факт, что дифференциальная система

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x(x-1)(ckx+y+c), \\ \frac{dy}{dt} = y(y-1)[(c-ck+1)x+cy-2c-1] \end{array} \right. \quad (3.9)$$

при $c = -2$, $k = -1/2$ имеет в бесконечной части фазовой плоскости четыре точки покоя, в том числе два простых дикритических узла, одно простое седло и седлоузел. Вместе с тем в работе [93] утверждается, что в случае четырех состояний равновесия системы (3.2) на бесконечности все они являются простыми.

В [104, 105] изучаются бесконечно удаленные особые точки системы (3.2) при условии, что начало координат $(0, 0)$ — центр, а правые части уравнений этой системы содержат однородные нелинейности только третьей степени. Некоторые результаты этих работ также свидетельствуют о неполноте исследования, проведенного в [93]. Среди работ, посвященных изучению поведения траекторий системы (3.2) на бесконечности,

следует также отметить [106,107]. Заметим, что в статье [106] установлены топологические типы особой точки $O(0, 0)$ системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = p_0x^3 + p_1x^2y + p_2xy^2 + p_3y^3 \equiv X(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = ax^2 + bxy + cy^2 \equiv Y(x, y), \end{cases} \quad (3.10)$$

где $a, b, c, p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$, $(X, Y) = 1$. При этом используется метод исследования сложной особой точки, разработанный в [1,108]. Статья [107] является непосредственным продолжением [106] и посвящена изучению поведения траекторий системы (3.10) в окрестности бесконечности.

К числу работ по изучению поведения траекторий кубической дифференциальной системы на бесконечности относится также статья [103], основные результаты которой в сочетании с заметкой [100] и составляют содержание третьей главы.

3.1 Особые точки кубической системы на экваторе сферы Пуанкаре. Случай, когда экватор сферы Пуанкаре состоит из траекторий системы

Предварительно отметим, что в силу неравенства $f(u) \not\equiv 0$ ось $z = 0$ является инвариантной прямой для систем (3.6) и (3.7). Кроме того, из системы (3.8) следует, что система (3.2) имеет на бесконечности не более четырех особых точек.

Прежде чем приступить к изучению топологической структуры особых точек системы (3.2) на экваторе сферы Пуанкаре докажем некоторые утверждения, которые могут быть использованы не только в рамках этой главы, но и при изучении более сложных особых точек кубической системы на бесконечности.

3.1.1 Некоторые общие теоремы об особых точках

Рассмотрим автономную дифференциальную систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P_m(x, y) + \varphi(x, y) \equiv P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q_m(x, y) + \psi(x, y) \equiv Q(x, y), \end{cases} \quad (3.1.1.1)$$

где P и Q — аналитические функции, $(P, Q) = 1$, $P_m(x, y)$ и $Q_m(x, y)$ — однородные многочлены степени m , $m \geq 1$, $P_m^2 + Q_m^2 \neq 0$, $\varphi = 0(r^m)$, $\psi = 0(r^m)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Достаточно малая окрестность особой точки (3.1.1.1), не являющаяся особой точкой типа фокуса и центра, состоит из конечного числа эллиптических, гиперболических и параболических секторов. Индекс Пуанкаре особой точки определяется числом эллиптических и гиперболических секторов, примыкающих к ней. Вот почему важно знать число эллиптических секторов, расположенных в достаточно малой окрестности сложной изолированной особой точки системы (3.1.1.1).

И. Бендиксон в [109] показал, что число эллиптических секторов, примыкающих к точке покоя $(0, 0)$ системы (3.1.1.1) удовлетворяет неравенству

$$e \leq 2m \quad (3.1.1.2)$$

Позднее В.В. Морозовым [110] была уточнена оценка числа эллиптических секторов и установлено, что

$$e \leq 2m - 2 \quad (3.1.1.3)$$

В работе [111] приводится в качестве примера дифференциальная система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (y + x^2)(y + 3x^2)\dots(y + (2m - 1)x^2), \\ \frac{dy}{dt} = xy(y + 2x^2)(y + 4x^2)\dots(y + 2(m - 1)x^2), \end{cases} \quad (3.1.1.4)$$

имеющая $2m - 1$ эллиптических секторов в малой окрестности точки $(0; 0)$.

Система (3.1.1.4) является системой вида (3.1.1.1), однако число эллиптических секторов, примыкающих к особой точке $(0, 0)$ системы (3.1.1.4) не удовлетворяет неравенству (3.1.1.3) ни для одного значения m .

Придерживаясь терминологии [111, 112] будем называть систему (3.1.1.1) A_m -системой. В упомянутой работе [111] доказано, что для A_m -системы (3.1.1.1) верна оценка $e \leq 2m - 1$, и она не улучшаема ни для одного значения m .

В [112] были найдены все пары чисел (e, h) , которые соответствуют классам, порождаемым A_m -системами при фиксированном m , и в каждом классе установлена топологическая структура неустойчивой особой точки с минимальным для данного класса числом параболических секторов, примыкающих к точке $(0, 0)$. Здесь $e(h)$ обозначает число эллиптических (гиперболических) секторов, примыкающих к точке $(0, 0)$.

Найдем необходимые условия того, что A_m -система (3.1.1.1) имеет $2m - 1$ эллиптических секторов и инвариантную прямую, проходящую через точку покоя $(0, 0)$. Используя эти условия, затем докажем, что кубическая дифференциальная система не имеет на экваторе сферы Пуанкаре сложной особой точки, к которой примыкают $2m - 1$ эллиптических секторов, то есть верна оценка В.В. Морозова (3.1.1.3) при $m > 1$.

Лемма 3.1.1.1 *Пусть $Q(x, 0) \equiv 0$. Если $e = 2m - 1$ — число эллиптических секторов, примыкающих к точке покоя $(0, 0)$ A_m -системы (3.1.1.1), то $Q_m(x, y) \equiv 0$.*

Доказательство. Следуя терминологии [112], всякое связное подмножество O -ветви кривой (ветви кривой, входящей в начало координат $O(0, 0)$), для которого точка $O(0, 0)$ является предельной, будем называть существенной частью этой ветви. Для краткости существенную часть O -ветви изоклины бесконечности $P(x, y) = 0$ (изоклины нуля $Q(x, y) = 0$) будем обозначать $O_\infty(O_0)$.

Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$ — одна из траекторий эллиптического сектора, примыкающего к точке $(0, 0)$. Тогда как при $t \rightarrow -\infty$, так и при $t \rightarrow +\infty$, $y(t) \rightarrow 0$, $dy/dt \rightarrow 0$. Это означает, что функция $y(t)$ имеет, по крайней мере, один экстремум и две точки перегиба [112]. Поэтому справедливо утверждение о том, что каждый эллиптический сектор, примыкающий к точке $O(0, 0)$, содержит хотя бы одну O_0 -ветвь и существенные части хотя бы двух O -ветвей кривой

$$Q'_x(x, y)P(x, y) + Q'_y(x, y)Q(x, y) = 0.$$

Так как по условию прямая $y = 0$ — инвариантная прямая для системы (3.1.1.1) и $e = 2m - 1$, то к точке $O(0, 0)$ примыкают не менее $2m + 1$ O_0 -ветвей. Иначе говоря, индекс ветвления кривой $Q(x, y) = 0$ в точке $O(0, 0)$ не меньше $2m + 1$ [113]. С другой стороны при $Q_m(x, y) \not\equiv 0$

индекс ветвления кривой $Q(x, y) = 0$ в точке $O(0, 0)$ по лемме из работы [111] не превосходит $2m$. Следовательно, $Q_m(x, y) \equiv 0$. Лемма доказана.

Лемма 3.1.1.2. *A_m-система (3.1.1.1) при условии $Q_m(x, y) \equiv \alpha P_m(x, y)$, где $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, имеет не более одной инвариантной прямой, проходящей через точку $O(0, 0)$.*

Доказательство. Пусть $Q_m(x, y) \equiv \alpha P_m(x, y)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, и при этом система имеет более одной инвариантной прямой, проходящей через точку $O(0, 0)$, или что то же самое, дифференциальное уравнение фазовых траекторий системы (3.1.1.1) имеет более одной интегральной прямой вида $y = kx$.

Предположим, что $y = k_1x$ и $y = k_2x$ — интегральные прямые дифференциального уравнения $dy/dx = Q(x, y)/P(x, y)$ фазовых траекторий системы (3.1.1.1).

Тогда имеют место равенства:

$$(\alpha - k_1)P_m(x, y) \equiv k_1\varphi(x, y) - \psi(x, y) + (y - k_1x)R_m(x, y) \quad (3.1.1.5)$$

$$(\alpha - k_2)P_m(x, y) \equiv k_2\varphi(x, y) - \psi(x, y) + (y - k_2x)S_m(x, y) \quad (3.1.1.6)$$

Здесь разложения функций R_m и S_m не содержат членов размерности меньше m . Поэтому из (3.1.1.5) и (3.1.1.6) с учетом того, что $P_m(x, y) \not\equiv 0$ получаем равенство $k_1 = k_2$. Лемма доказана.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P_m(x, y) + P_{m+1}(x, y) \equiv P_n(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = yQ_m(x, y) \equiv Q_n(x, y), \end{cases} \quad (3.1.1.7)$$

где P_n и Q_n — взаимно простые многочлены степени n с действительными коэффициентами, $P_m(x, y)$ — однородный многочлен степени m , не равный нулю тождественно, $P_{m+1}(x, y)(Q_m(x, y))$ — многочлен, не содержащий одночленов размерности меньше $m + 1$ (m).

Теорема 3.1.1.1. *Если система (3.1.1.7) имеет $e = 2m - 1$ эллиптических секторов, примыкающих к особой точке $O(0; 0)$, то она не имеет траекторий, входящих в точку $O(0; 0)$ в направлении луча $\theta = \theta_0$, где $0 < \theta_0 < \pi$ ($\pi < \theta_0 < 2\pi$), если гиперболический сектор, примыкающий к точке $O(0; 0)$, расположен в полуплоскости $y \geq 0$ ($y \leq 0$).*

Доказательство. Так как $y = 0$ — инвариантная прямая системы (3.1.1.7), то гиперболический сектор, примыкающий к точке $O(0; 0)$, расположен в одной из полуплоскостей $y \geq 0$ и $y \leq 0$.

В силу работы [112] система (3.1.1.7) имеет единственный гиперболический сектор, обозначим его H . Для определенности положим, что H расположен в полуплоскости $y \geq 0$, и вопреки утверждению теоремы есть траектория L , входящая в начало координат $O(0, 0)$ в направлении луча $\theta = \theta_0$, $0 < \theta_0 < \pi$. Относительно расположения луча $\theta = \theta_0$ возможны случаи: 1) $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$; 2) $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \pi$.

Докажем теорему для случая 1) (в случаях 2) и 3) рассуждения аналогичны).

Гиперболический сектор H может содержать существенную часть O -ветви луча $\theta = \theta_0$, а может и не содержать ее. Пусть H не содержит существенную часть O -ветви луча $\theta = \theta_0$. Совершим в системе (3.1.1.7) преобразование

$$\begin{cases} \bar{x} = y - kx, \\ \bar{y} = y, \end{cases} \quad (3.1.1.8)$$

где $k = \operatorname{tg} \theta_0$.

В результате получим

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = -k\bar{P}_m(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{P}_{m+1}(\bar{x}, \bar{y}) \equiv \bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{y}\bar{Q}_m(\bar{x}, \bar{y}) \equiv \bar{Q}_n(\bar{x}, \bar{y}). \end{cases} \quad (3.1.1.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{P}_m(\bar{x}, \bar{y}) &= P_m\left(\frac{\bar{y} - \bar{x}}{k}, \bar{y}\right), \quad \bar{Q}_m(\bar{x}, \bar{y}) = Q_m\left(\frac{\bar{y} - \bar{x}}{k}, \bar{y}\right), \\ \bar{P}_{m+1}(\bar{x}, \bar{y}) &= -kP_{m+1}\left(\frac{\bar{y} - \bar{x}}{k}, \bar{y}\right) + \bar{y}\bar{Q}_m(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

В результате преобразования (3.1.1.8) луч θ_0 перешел в луч $\bar{\theta}_0 = \pi/2$ — положительную полуось \bar{y} , а траектория L — в траекторию \bar{L} . При этом существенная часть O -ветви \bar{L} и гиперболический сектор \bar{H} , в который перешел сектор H , расположены по одну сторону от оси \bar{y} . Следовательно, по лемме 1 [112] гиперболический сектор \bar{H} содержит существенную часть O_∞ -ветви, то есть ветви изоклины бесконечности $\bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

При этом существенная часть O -ветви полуправой $\bar{x} = 0, \bar{y} > 0$ может принадлежать некоторому эллиптическому сектору \bar{E} , примыкающему к точке $(0; 0)$, а может и не принадлежать. В первом случае сектору \bar{E} принадлежат, по крайней мере, две θ_∞ -ветви.

Так как индекс ветвления кривой $\bar{P}_n(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ в точке $(0; 0)$ не превосходит $2m$, то число эллиптических секторов, примыкающих к точке $(0; 0)$ не превосходит $2m - 2$, а по условию $e = 2m - 1$. Если ни один эллиптический сектор не содержит существенную часть O -ветви полуправой $\bar{x} = 0, \bar{y} > 0$, то в силу единственности гиперболического сектора \bar{H} системы (3.1.1.9), примыкающего к точке $O(0; 0)$ и непрерывности поля направлений этой системы в параболическом секторе, примыкающем к положительной полуоси \bar{y} , содержится O_∞ -ветвь.

Таким образом, и в этом случае система (3.1.1.9) имеет не более $2m - 2$ эллиптических секторов. Тем самым доказана теорема в случае, когда гиперболический сектор H не содержит существенную часть O -ветви луча $\theta = \theta_0$.

Пусть далее H содержит существенную часть O -ветви луча $\theta = \theta_0$. Совершим преобразование (3.1.1.8) в системе (3.1.1.7). При этом считаем, что $k = \operatorname{tg} \bar{\theta}$, $0 < \bar{\theta} < \theta_0$, если существенная часть O -ветви траектории L расположена ниже луча $\theta = \theta_0$. В остальном проводим те же рассуждения, которые проведены выше после осуществления преобразования (3.1.1.8).

Если существенная часть O -ветви траектории L расположена выше луча $\theta = \theta_0$, то гиперболический сектор H расположен в первой четверти и не имеет общих точек с O -ветвью полуоси $x = 0, y > 0$. Поэтому согласно лемме 1 [112] к началу координат $O(0; 0)$ примыкают существенные части, по крайней мере, двух O -ветвей изоклины бесконечности $P_n(x, y) = 0$. Это же означает, что число эллиптических секторов, примыкающих к особой точке $O(0; 0)$ не превосходит $2m - 2$. Вновь приходим к противоречию. Теорема доказана.

Теорема 3.1.1.2. *Если система (3.1.1.7) имеет $e = 2m - 1$ эллиптических секторов, примыкающих к особой точке $O(0, 0)$, то все траектории эллиптических секторов касаются прямой $y = 0$ в точке $O(0, 0)$.*

Доказательство. Не уменьшая общности, считаем, что гиперболический сектор, примыкающий к точке $O(0, 0)$, расположен в полуплоскости $y \leq 0$. По теореме 3.1.1.1 ни одна ветвь изоклины бесконечности не входит в особую точку $O(0, 0)$ вдоль луча $\theta = \theta_0$, $\pi < \theta_0 < 2\pi$.

Пусть у системы (3.1.1.7) имеется траектория L из эллиптического сектора E_1 , входящая в точку $O(0, 0)$ вдоль луча $\theta = \theta_1$, где $0 < \theta_1 < \pi$. При этом считаем, что $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, этого всегда можно добиться с помощью преобразования (3.1.1.8).

Из леммы 2 и теоремы 3.1.1.1 следует, что $x = 0$ — не инвариантная прямая системы (3.1.1.7). Следовательно $P_n(0, y) = f(y)$, $f(y) \neq 0$, и в достаточно малой окрестности точки $O(0, 0)$ — $y = 0$ $f(y) \neq 0$.

Если существенная часть O -ветви полупрямой $x = 0$, $y > 0$, принадлежит некоторому эллиптическому сектору E_2 , то, кроме O_∞ -ветви, принадлежащей сектору E_1 , существуют еще не менее двух O_∞ -ветвей, касающихся прямой $x = 0$ в начале координат [112].

Если нет эллиптического сектора, содержащего существенную часть l O -ветви полупрямой $x = 0$, $y > 0$, то l содержится в параболическом секторе примыкающим к особой точке $O(0, 0)$ (единственный гиперболический сектор, примыкающий к точке $O(0, 0)$ расположен в полуплоскости $y \leq 0$). В силу непрерывности поля направлений системы найдется O_∞ -ветвь, содержащаяся в параболическом секторе и касающаяся оси $x = 0$.

Таким образом, существует не менее двух O_∞ -ветвей, касающихся прямой $x = 0$ в точке $O(0, 0)$. Пусть $x = \alpha_1(y)$, $x = \alpha_2(y)$ — решение уравнения

$$P_m(x, y) + P_{m+1}(x, y) = 0, \quad (3.1.1.10)$$

где $\alpha_i(0) = \alpha'_i(0) = 0$, $i = 1, 2$.

Так как $\alpha_1(y)$ — решение уравнения (3.1.1.10), то

$$\begin{aligned} P_m(x, y) + P_{m+1}(x, y) &\equiv P_m(x, y) + P_{m+1}(x, y) - P_m(\alpha_1(y), y) - \\ &- P_{m+1}(\alpha_1(y), y) \equiv (x - \alpha_1(y))\bar{P}_{m-1}(x, y) + (x - \alpha_1(y))\bar{P}_m(x, y) \equiv \\ &\equiv (x - \alpha_1(y))[\bar{P}_{m-1}(x, y) + \bar{P}_m(x, y)]. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место равенство

$$P_m(x, y) + P_{m+1}(x, y) \equiv (x - \alpha_1(y))[\bar{P}_{m-1}(x, y) + \bar{P}_m(x, y)], \quad (3.1.1.11)$$

где $\bar{P}_{m-1} = 0(r^{m-1})$, $\bar{P}_m = 0(r^m)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Так как $\alpha_2(y)$ является решением уравнения (3.1.1.10), отличным от $\alpha_1(y)$, то из (3.1.1.11) следует, что $\alpha_2(y)$ также является решением уравнения $\bar{P}_{m-1}(x, y) + \bar{P}_m(x, y) = 0$, и, поэтому имеет место тождество $\bar{P}_{m-1}(\alpha_2(y), y) + \bar{P}_m(\alpha_2(y), y) \equiv 0$, используя которое, как и выше, получаем

$$\bar{P}_{m-1}(x, y) + \bar{P}_m(x, y) \equiv [x - \alpha_2(y)][\tilde{P}_{m-2}(x, y) + \tilde{P}_{m-1}(x, y)]. \quad (3.1.1.12)$$

С учетом (3.1.1.11) и (3.1.1.12) перепишем систему (3.1.1.7) в виде

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x - \alpha_1(y))(x - \alpha_2(y))[\tilde{P}_{m-2}(x, y) + \tilde{P}_{m-1}(x, y)], \\ \frac{dy}{dt} = yQ_m(x, y) \equiv Q_n(x, y), \end{cases} \quad (3.1.1.13)$$

где $\tilde{P}_{m-2} = 0(r^{m-2})$, $\tilde{P}_{m-1} = 0(r^{m-1})$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, причем $\tilde{P}_{m-2}(x, y)$ содержит хотя бы один одночлен степени $m-2$. Из (3.1.1.13) следует, что индекс ветвления изоклины бесконечности $\tilde{P}_{m-2}(x, y) + \tilde{P}_{m-1}(x, y) = 0$ не превосходит $2m - 4$ в точке $O(0, 0)$. Так как эллиптические секторы, примыкающие к оси Oy , расположены в полуплоскости $y > 0$, то их число не более двух. Приходим к выводу, что общее число эллиптических секторов, примыкающих к точке $O(0, 0)$, не превосходит $2m - 2$. Но, по условию $e = 2m - 1$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие 3.1.1.1. Если система (3.1.1.7) имеет $e = 2m - 1$ эллиптических секторов, примыкающих к точке $O(0, 0)$, то она имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y^m + P_{m+1}(x, y) \equiv P_n(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = yQ_m(x, y) \equiv Q_n(x, y). \end{cases} \quad (3.1.1.14)$$

Далее рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^3 a_{ij}x^i y^j \equiv P_3(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^3 b_{ij}x^i y^j \equiv Q_3(x, y), \end{cases} \quad (3.1.1.15)$$

где

$$a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}, (P_3, Q_3) = 1, \sum_{i+j=3} |a_{ij}| > 0, \sum_{i+j=3} |b_{ij}| > 0.$$

Покажем, что система (3.1.1.15) не имеет на бесконечности сложной особой точки, к которой примыкают более четырех эллиптических секторов.

Для исследования бесконечно удаленных особых точек системы (3.1.1.15) воспользуемся преобразованием Пуанкаре $x = 1/z, y = u/z$:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = b_{30} + (b_{21} - a_{30})u + b_{20}z + (b_{12} - a_{21})u^2 + \\ \quad + (b_{11} - a_{20})uz + b_{10}z^2 + (b_{03} - a_{12})u^3 + \\ \quad + (b_{02} - a_{11})u^2z + (b_{01} - a_{10})uz^2 + b_{00}z^3 - \\ \quad - a_{03}u^4 - a_{02}u^3z - a_{01}u^2z^2 - a_{00}uz^3, \\ \frac{dz}{dt} = -a_{30}z - a_{21}uz - a_{20}z^2 - a_{12}u^2z - a_{11}uz^2 - a_{10}z^3 - \\ \quad - a_{03}u^3z - a_{02}u^2z^2 - a_{01}uz^3 - a_{00}z^4. \end{cases} \quad (3.1.1.16)$$

Не уменьшая общности, считаем, что исследуемая сложная особая точка системы (3.1.1.16) есть $A(u = z = 0)$, то есть $b_{30} = 0$.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} P_1(u, z) &= (b_{21} - a_{30})u + b_{20}z, \\ P_2(u, z) &= (b_{12} - a_{21})u^2 + (b_{11} - a_{20})uz + b_{10}z^2, \\ P_3(u, z) &= (b_{03} - a_{12})u^3 + (b_{02} - a_{11})u^2z + (b_{01} - a_{10})uz^2 + b_{00}z^3, \\ P_4(u, z) &= -a_{03}u^4 - a_{02}u^3z - a_{01}u^2z^2 - a_{00}uz^3, \\ Q_1(u, z) &= -a_{30}z, \\ Q_2(u, z) &= -a_{21}uz - a_{20}z^2, \\ Q_3(u, z) &= -a_{12}u^2z - a_{11}uz^2 - a_{10}z^3, \\ Q_4(u, z) &= -a_{03}u^3z - a_{02}u^2z^2 - a_{01}uz^3 - a_{00}z^4. \end{aligned}$$

С учетом введенных обозначений систему (3.1.1.16) запишем в виде:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = P_1(u, z) + P_2(u, z) + P_3(u, z) + P_4(u, z) \equiv G(u, z) \\ \frac{dz}{dt} = Q_1(u, z) + Q_2(u, z) + Q_3(u, z) + Q_4(u, z) \equiv H(u, z). \end{cases} \quad (3.1.1.17)$$

Если $A(u = z = 0)$ — сложная особая точка системы (3.1.1.17), причем $P_1^2(u, z) + Q_1^2(u, z) \not\equiv 0$, то к ней примыкает не более одного эллиптического сектора [80].

Если $P_1^2(u, z) + Q_1^2(u, z) \equiv 0$, но $P_2^2(u, z) + Q_2^2(u, z) \not\equiv 0$, то согласно работе [67] к особой точке $A(u = z = 0)$ системы (3.1.1.17) примыкает не более двух эллиптических секторов, при условии, что ветви изоклины нуля и бесконечности не касаются в точке $A(u = z = 0)$. Следовательно, остается открытым вопрос о числе эллиптических секторов, примыкающих к особой точке $A(u = z = 0)$ системы (3.1.1.17) в случае, когда ветви разноименных изоклинов касаются в точке $A(u = z = 0)$.

Пусть $P_1^2(u, z) + Q_1^2(u, z) \equiv 0, P_2^2(u, z) + Q_2^2(u, z) \equiv 0$, но при этом к особой точке $A(u = z = 0)$ примыкают три эллиптических сектора. Согласно следствию 3.1.1.1 тогда система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = b_{10}z^2 + P_3(u, z) + P_4(u, z), \\ \frac{dz}{dt} = Q_3(u, z) + Q_4(u, z), \end{cases} \quad \text{где } b_{10} \neq 0. \quad (3.1.1.18)$$

Изменив масштаб времени по формуле $\tau = tb_{10}$, перепишем систему (3.1.1.18) в виде:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = z^2 + \frac{(b_{03} - a_{12})}{b_{10}}u^3 + \frac{(b_{02} - a_{11})}{b_{10}}u^2z + \\ \quad + \frac{(b_{01} - a_{10})}{b_{10}}uz^2 + \frac{b_{00}}{b_{10}}z^3 - \frac{a_{03}}{b_{10}}u^4 - \frac{a_{02}}{b_{10}}u^3z - \\ \quad - \frac{a_{01}}{b_{10}}u^2z^2 - \frac{a_{00}}{b_{10}}uz^3, \\ \frac{dz}{d\tau} = -\frac{a_{12}}{b_{10}}u^2z - \frac{a_{11}}{b_{10}}uz^2 - \frac{a_{10}}{b_{10}}z^3 - \frac{a_{03}}{b_{10}}u^3z - \\ \quad - \frac{a_{02}}{b_{10}}u^2z^2 - \frac{a_{01}}{b_{10}}uz^3 - \frac{a_{00}}{b_{10}}z^4. \end{cases} \quad (3.1.1.19)$$

Так как прямой $z = 0$ касаются три эллиптических сектора и две O_∞ -ветви примыкают к точке $A(u = z = 0)$, то согласно [111] систему

(3.1.1.19) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = (z - \alpha_1(u))(z - \alpha_2(u))[1 + \Phi(u, z)], \\ \frac{dz}{d\tau} = z \left(-\frac{a_{12}}{b_{10}}u^2 - \frac{a_{11}}{b_{10}}uz - \frac{a_{10}}{b_{10}}z^2 - \frac{a_{03}}{b_{10}}u^3 - \frac{a_{02}}{b_{10}}u^2z - \right. \\ \left. - \frac{a_{01}}{b_{10}}uz^2 - \frac{a_{00}}{b_{10}}z^3 \right) \equiv zR(u, z). \end{cases} \quad (3.1.1.20)$$

где $\alpha_1(u)$ и $\alpha_2(u)$ — голоморфные функции в окрестности точки $u = 0$, $a_i(0) = \alpha_i'(0) = 0, i = 1, 2$, $\Phi(u, z)$ — аналитическая функция, $\Phi(0, 0) = 0$.

Так как $z = \alpha_1(u)$ и $z = \alpha_2(u)$ — ветви изоклины бесконечности системы (3.1.1.19), то по необходимости $b_{03} - a_{12} = 0$. Кроме этого, каждый эллиптический сектор, примыкающий к особой точке $A(u = z = 0)$, содержит существенную часть O -ветви изоклины нуля, касающейся прямой $z = 0$ в точке $A(u = z = 0)$ [111]. Это означает, что существует решение $z = \beta(u)$ уравнения $R(u, z) = 0$, где $\beta(u)$ — голоморфная функция, $\beta(0) = \beta'(0) = 0$. Отсюда следует, что $a_{12} = 0$, а значит и $b_{03} = 0$.

Учитывая вид системы (3.1.1.15), приходим к выводу, что второе уравнение этой системы в правой части не содержит кубических членов, что противоречит нашему предположению $\sum_{i+j=3} |b_{ij}| > 0$.

Пусть далее $P_i^2(u, z) + Q_i^2(u, z) \equiv 0, i = 1, 2$, но $P_3^2(u, z) + Q_3^2(u, z) \not\equiv 0$ в системе (3.1.1.17). При этом полагаем, что экватор сферы Пуанкаре $z = 0$ — инвариантная прямая системы (3.1.1.17).

Тогда $f(u) \equiv (b_{03} - a_{12})u^3 - a_{03}u^4 \not\equiv 0$. Предположим, что в окрестности точки $A(u = z = 0)$ система (3.1.1.17) имеет более четырех эллиптических секторов. Тогда их число будет равно пяти [113]. Принимая во внимание теорему 3.1.1.2 и следствие 3.1.1.1, приходим к выводу о том, что выполняются условия: $a_{10} = a_{11} = a_{12} = a_{30} = a_{21} = a_{20} = 0$, $b_{01} = b_{02} = b_{20} = b_{30} = b_{21} = b_{12} = b_{03} = 0$, то есть и в этом случае нарушается условие $\sum_{i+j=3} |b_{ij}| > 0$.

Тем самым доказана.

Теорема 3.1.1.3. *Если экватор сферы Пуанкаре состоит из траекторий системы (3.1.1.15), то она не имеет сложной особой точки, к которой примыкают три или пять эллиптических секторов.*

Таким образом, для системы дифференциальных уравнений (3.1.1.16) верна оценка (3.1.1.3) числа эллиптических секторов, примыкающих к сложной особой точке, полученная В.В. Морозовым при $m > 1$.

Замечание 3.1.1.1. Если для системы дифференциальных уравнений (3.1.1.15) нарушается условие

$$\sum_{i+j=3} |b_{ij}| > 0, \quad \sum_{i+j=3} |a_{ij}| > 0,$$

то, вообще говоря, на бесконечности эта система может иметь сложную особую точку, к которой примыкают три эллиптических сектора.

Пример 35.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2xy - 4y^3, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y^2. \end{cases} \quad (3.1.1.21)$$

Преобразование $x = 1/z$, $y = u/z$ переводит систему (3.1.1.21) в систему:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = (z + u^2)(z + 4u^2), \\ \frac{dz}{dt} = 2uz(z + 2u^2). \end{cases} \quad (3.1.1.22)$$

Система (3.1.1.22) имеет единственную особую точку $A(u = z = 0)$, к которой примыкают три эллиптических, четыре параболических и один гиперболический секторы.

В ограниченной части фазовой плоскости система (3.1.1.21) имеет также единственную особую точку $(0, 0)$ типа топологическое седло.

Фазовый портрет системы изображен на рис. 134.

Теорема 3.1.1.4. Индекс Пуанкаре J особой точки системы (3.1.1.15) на экваторе сферы Пуанкаре удовлетворяет неравенству $|J| \leq 3$.

Доказательство. Предположим, что индекс Пуанкаре некоторой бесконечно удаленной особой точки системы (3.1.1.15) удовлетворяет неравенству $|J| > 3$. Не уменьшая общности, считаем, что этой особой точкой является точка покоя $A(u = z = 0)$ системы (3.1.1.16). Тогда согласно [80] в правых частях уравнений системы (3.1.1.16) отсутствуют все члены до третьего измерения включительно, то есть выполняются условия:

$$a_{30} = a_{21} = a_{12} = a_{20} = a_{11} = a_{10} = 0,$$

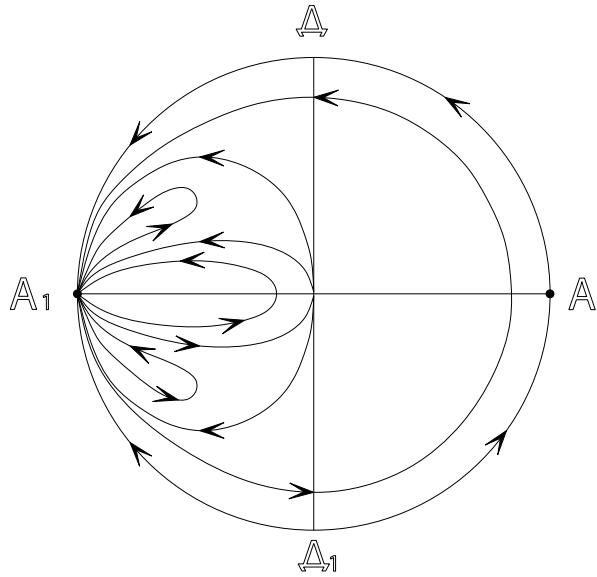


Рис. 134

$$b_{30} = b_{21} = b_{12} = b_{03} = b_{20} = b_{11} = b_{02} = b_{10} = b_{01} = b_{00} = 0.$$

Из этих равенств следует, что в правой части второго уравнения системы (3.1.1.15) отсутствуют кубические члены, что противоречит неравенству $\sum_{i+j=3} |b_{ij}| > 0$. Теорема доказана.

Лемма 3.1.1.3. Пусть $e(h)$ — число эллиптических (гиперболических) секторов, примыкающих к особой точке $O(0,0)$ системы (3.1.1.1). Тогда $e + h \leq 2m + 2$.

В самом деле, индекс ветвления [113] кривой

$$x(P_m(x,y) + \varphi(x,y)) + y(Q_m(x,y) + \psi(x,y)) = 0$$

в точке $O(0,0)$ не превосходит $2m+2$ [111]. Это означает, что окружность $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ сколь угодно малого радиуса $\varepsilon > 0$ имеет с траекториями системы (3.1.1.1) не более $2m+2$ контактов. Поскольку такая окружность имеет хотя бы один контакт с траекториями системы (3.1.1.1) в каждом гиперболическом и в каждом эллиптическом секторе, то $e + h \leq 2m + 2$. Лемма доказана.

Теорема 3.1.1.5. Если индекс Пуанкаре $J(0)$ особой точки $O(0,0)$ системы (3.1.1.16) равен $m(-m)$, где $m > 1$ и, также $e \leq 2m - 2$, то

к этой точке примыкают ровно $2m + 2$ эллиптических секторов и не примыкает ни один гиперболический сектор (примыкают ровно $2m + 2$ гиперболических секторов и не примыкает ни один эллиптический сектор).

Доказательство. Пусть $J(0) = m$. Тогда согласно формуле Бендинк-сона [80]

$$J = 1 + \frac{e - h}{2}. \quad (3.1.1.23)$$

Из (3.1.1.23) при $J = m$ получаем равенство $e = 2m - 2 + h$. Так как $e \leq 2m - 2$, то $h = 0$, следовательно, $e = 2m - 2$.

Пусть далее $J(0) = -m$. Тогда с учетом (3.1.1.23) получаем равенство $h = 2m + 2 + e$. Принимая во внимание лемму 3.1.1.3, получаем равенство $h = 2m + 2$, $e = 0$. Теорема доказана.

Следствие 3.1.1.2. Пусть

$$\sum_{i=1}^4 P_i(u, 0) \equiv 0, \quad \sum_{i=1}^4 Q_i(u, 0) \equiv 0.$$

Если $P_1^2(u, z) + Q_1^2(u, z) \equiv 0$, $P_2^2(u, z) + Q_2^2(u, z) \not\equiv 0$, $J(O) = 2(-2)$, то к особой точке $O(0, 0)$ системы (3.1.1.17) примыкают два эллиптических и два параболических сектора и не примыкает ни один гиперболический сектор (примыкают шесть гиперболических секторов и не примыкает ни один эллиптический сектор).

Если $P_i^2(u, z) + Q_i^2(u, z) \equiv 0$, $i = 1, 2$, $P_3^2(u, z) + Q_3^2(u, z) \not\equiv 0$, $J(O) = 3(-3)$, то к особой точке $O(0, 0)$ системы (3.1.1.17) примыкают четыре эллиптических и четыре параболических сектора, и не примыкает ни один гиперболический сектор (примыкают восемь гиперболических секторов и не примыкает ни один эллиптический сектор).

Справедливость данного утверждения следует из теорем 3.1.1.3 и 3.1.1.5.

Теорема 3.1.1.6. *Если система (3.1.1.15) имеет на экваторе сферы Пуанкаре сложную особую точку, индекс Пуанкаре которой равен -3 , то непременно эта система имеет в ограниченной части фазовой плоскости три простых узла, расположенных по одному на трех инвариантных прямых, и один простой узел на бесконечности.*

Доказательство. Не уменьшая общности, считаем, что $A(u = z = 0)$ — сложная особая точка системы (3.1.1.16), причем $J(A) = -3$. Тогда согласно [80] в правых частях уравнений системы (3.1.1.16) отсутствуют все члены до второго измерения включительно, но при этом имеется хотя бы один кубический член. Согласно следствию 3.1.1.2 $A(u = z = 0)$ является восьмисепаратрисным седлом.

Таким образом, в условиях данной теоремы система (3.1.1.15) имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3, \\ \frac{dy}{dt} = b_{00} + b_{01}y + b_{02}y^2 + b_{03}y^3. \end{cases} \quad (3.1.1.24)$$

Уравнение $f(u) = 0$ для системы (3.1.1.24) запишется в виде:

$$(b_{03} - a_{12} - a_{03}u)u^3 = 0. \quad (3.1.1.25)$$

Как видно из (3.1.1.25) при условии $f(u) \not\equiv 0$ выполняется неравенство $|b_{03} - a_{12}| + |a_{03}| > 0$.

Если $a_{03} = 0$, то $b_{03} - a_{12} \neq 0$, более того $b_{03} \cdot a_{12} \neq 0$. В противном случае в правой части хотя бы одного из уравнений системы (3.1.1.24) отсутствуют кубические члены.

Преобразование $x = v/z$, $y = 1/z$ переводит систему (3.1.1.24) в систему

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = (a_{12} - b_{03})v + a_{02}z + (a_{11} - b_{02})vz + (a_{10} - b_{01})vz^2 + \\ \quad + a_{01}z^2 + a_{00}z^3 - b_{00}vz^3, \\ \frac{dz}{dt} = -b_{03}z - b_{02}z^2 - b_{01}z^3 - b_{00}z^4. \end{cases} \quad (3.1.1.26)$$

Из (3.1.1.26) видно, что $D(v = z = 0)$ — особая точка системы (3.1.1.15) на экваторе сферы Пуанкаре, причем простая.

Так как $b_{03} \neq 0$, то уравнение

$$b_{00} + b_{01}y + b_{02}y^2 + b_{03}y^3 = 0 \quad (3.1.1.27)$$

имеет хотя бы один корень. При этом возможны случаи: 1) одного трехкратного корня; 2) одного простого и одного двукратного корня; 3) одного простого действительно и двух комплексно-сопряженных корней; 4) трех различных действительных корней.

В силу того, что правая часть первого уравнения системы (3.1.1.24) является линейной функцией переменной x , на каждой инвариантной прямой $y = y_i$, y_i — корень уравнения (3.1.1.27), эта система имеет не более одной особой точки. При этом простому корню уравнения (3.1.1.27) соответствует простая особая точка типа седла или узла, а двукратному (трехкратному) корню — особая точка с индексом Пуанкаре, равным 0 (1 или -1), согласно формуле $J = (p - q)/2$ [80]. Поэтому ни в одном из случаев 1)-3) сумма индексов Пуанкаре всех особых точек системы (3.1.1.24) как в ограниченной части фазовой плоскости, так и на бесконечности не равна 1. Следовательно, в ограниченной части фазовой плоскости система (3.1.1.24) имеет три простых узла и на экваторе сферы Пуанкаре, кроме $A(u = z = 0)$ простую особую точку $D(v = z = 0)$, являющуюся узлом.

Случай $a_{03} \neq 0$, $b_{03} - a_{12} = 0$ невозможен, так как на бесконечности система (3.1.1.15) имеет единственную особую точку $A(u = z = 0)$, индекс которой равен -3 . Но из рассуждений, проведенных выше следует, что сумма индексов Пуанкаре особых точек, расположенных в ограниченной части фазовой плоскости, равна -1 , или 1 , или 3 . Ни в одном из этих случаев сумма индексов Пуанкаре всех особых точек системы (3.1.1.15), включая и бесконечно удаленных, не равна 1.

Если $a_{03}(b_{03} - a_{12}) \neq 0$, то на бесконечности, кроме $A(u = z = 0)$, система (3.1.1.26) имеет еще одну особую точку $B(u = \frac{b_{03}-a_{12}}{a_{03}}, z = 0)$, которая также является простым узлом. Теорема доказана.

Пример 36. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + 2xy^2 + y^3, \\ \frac{dy}{dt} = y - y^3. \end{cases}$$

имеет в ограниченной части фазовой плоскости три простых узла: $(0, 0)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$, а на экваторе сферы Пуанкаре — восьмисепаратрисное

седло $A(u = z = 0)$ и простой узел $B(u = -3, z = 0)$. Фазовый портрет системы изображен на рис. 135.

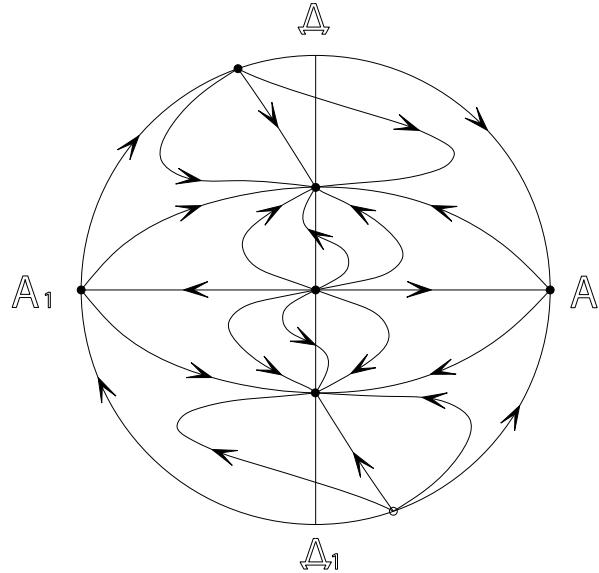


Рис. 135

Теорема 3.1.1.7. *Если система (3.1.1.15) имеет на экваторе сферы Пуанкаре сложную особую точку, индекс Пуанкаре которой равен 3, то в ограниченной части фазовой плоскости эта система имеет либо одно простое седло, либо одно простое седло и двукратный седлоузел, либо три простых седла, либо одно сложное трехкратное седло. Кроме этого, на экваторе сферы Пуанкаре наряду со сложной особой точкой система имеет также простую особую точку типа седло или узел.*

Доказательство. Пусть $A(u = z = 0)$ — сложная особая точка системы (3.1.1.17), индекс Пуанкаре которой равен 3. Тогда система (3.1.1.15) имеет вид (3.1.1.24). В конечной части фазовой плоскости любая особая точка расположена на инвариантной прямой $y = y_i$, где y_i — корень уравнения (3.1.1.27). При этом никакие две особые точки не лежат на одной инвариантной прямой. Так как каждая особая точка системы (3.1.1.24) является обычной (неособой) точкой изоклины бесконечности, то простая особая точка этой системы может быть только седлом, а сложная — либо седлоузлом, либо топологическим седлом [80].

Если уравнение (3.1.1.27) имеет два действительных корня, то один из них простой, а другой - двукратный. Следовательно, в ограниченной части фазовой плоскости система (3.1.1.24) имеет одно простое седло и один двукратный седлоузел. При этом на экваторе сферы Пуанкаре система имеет по необходимости, кроме $A(u = z = 0)$, одно простое седло. Если уравнение (3.1.1.27) имеет три различных действительных корня, то каждому из них соответствует одно простое седло, а на бесконечности, кроме $A(u = z = 0)$, система имеет еще один простой узел. Если уравнение (3.1.1.27) имеет один действительный и два комплексно-сопряженных корня, то в ограниченной части фазовой плоскости система (3.1.1.24) имеет простое седло, а на бесконечности две, в том числе $A(u = z = 0)$ и одно простое седло. Теорема доказана.

Замечание 3.1.1.2. При доказательстве данной теоремы нами использован то факт, что сумма индексов Пуанкаре всех особых точек системы как в конечной, так и в бесконечной части фазовой плоскости равна 1 [94].

Пример 37.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y + xy + y^2 + 2xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y + y^2 + y^3. \end{cases}$$

Единственная конечная особая точка системы — простое седло $(0; 0)$, а на бесконечности — особая точка $A(u = z = 0)$, к которой примыкают четыре эллиптических сектора и простое седло $D(v = z = 0)$.

Поведение траекторий системы в круге Пуанкаре изображено на рис. 136.

Пример 38.

В ограниченной части фазовой плоскости система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y + xy + 4xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y - y^3 \end{cases}$$

имеет три простых седла: $(0, 0)$, $(-1, -1)$, $(1/2, 1)$, а на бесконечности — особую точку $A(u = z = 0)$ с четырьмя эллиптическими секторами и простой узел $D(v = z = 0)$.

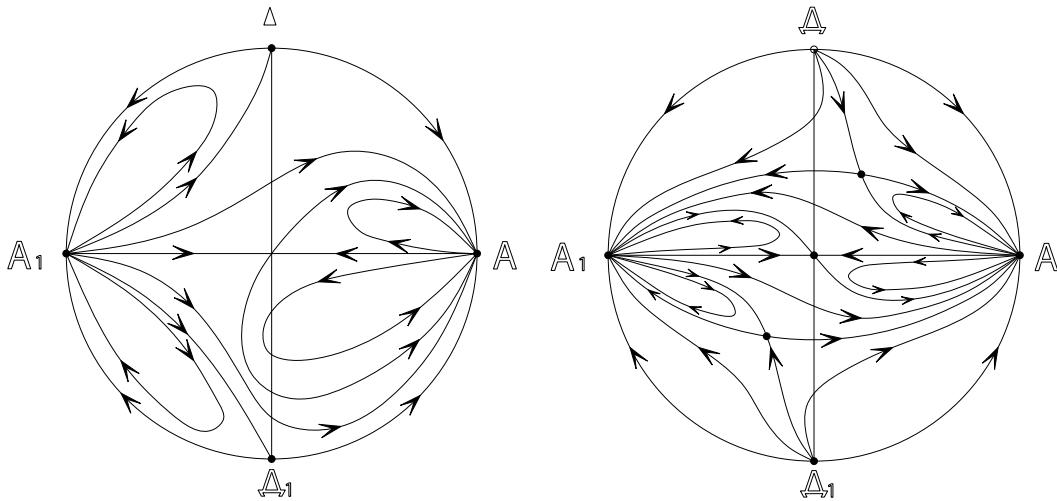


Рис. 136

Рис. 137

Поведение траекторий системы в круге Пуанкаре изображено на рис. 137.

Пример 39. В ограниченной части фазовой плоскости единственная особая точка $(0; 0)$ системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + xy + 2xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y^3. \end{cases}$$

является топологическим седлом.

На бесконечности наряду с особой точкой $A(u = z = 0)$, к которой примыкают четыре эллиптических сектора, система имеет одно простое седло $D(v = z = 0)$.

Фазовый портрет системы изображен на рис. 138

Из теорем 3.1.1.6 и 3.1.1.7 вытекает

Следствие 3.1.1.3. Пусть на экваторе сферы Пуанкаре, состоящем из траекторий кубической дифференциальной системы (3.1.1.15), расположена сложная особая точка с индексом Пуанкаре, равным 3. Тогда эта система на экваторе сферы Пуанкаре имеет еще одну простую особую точку так, что сумма индексов Пуанкаре бесконечно удаленных особых точек равна либо -2 , либо 2 , либо 4 .

Пусть к особой точке $O(0; 0)$ системы (3.1.1.1) примыкают положительная полутраектория L_1^+ и отрицательная полутраектория L_1^- , C —

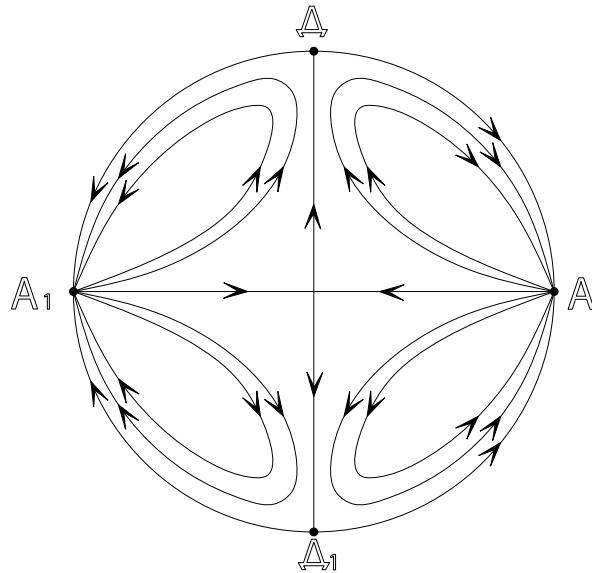


Рис. 138

окружность достаточно малого радиуса с центром в точке O , $M_1^+ = L_1^+ \cap C$, $M_2^- = L_2^- \cap C$. Обозначим через g — криволинейный сектор, в границу которого входят части OM_1^+ и OM_2^- полутраекторий L_1^+ и L_2^- соответственно, точка O и дуга $M_1^+M_2^-$ окружности C .

Лемма 3.1.1.4. *Если m — число эллиптических секторов, а n — число гиперболических секторов, расположенных в криволинейном секторе, то $m + n$ — нечетно.*

Доказательство. Согласно теореме 60 [80] и следствию из леммы 5 [80, с. 326] в секторе g имеется хотя бы один гиперболический или хотя бы один эллиптический сектор.

По лемме 2 [80, с. 326] два смежных сектора с эллиптическим сектором, примыкающим к точке $O(0, 0)$, являются параболическими. При этом один из них ω -параболический, а другой — α -параболический сектор. Поэтому поставим в соответствие каждому эллиптическому сектору g_i тройку символов $+, g_i, -$ ($-, g_i, +$), если при положительном обходе границы криволинейного сектора g мы переходим через сектор g_i в направлении от ω -параболического сектора к α -параболическому сектору (от α -параболического сектора к ω -параболическому сектору).

Аналогично, каждому гиперболическому сектору g_i будем ставить

в соответствие тройку символов $+, g_i, -$ ($-, g_i, +$), если при положительном обходе границы криволинейного сектора g мы переходим через гиперболический сектор g_i в направлении от ω -сепаратрисы к α -сепаратрисе (от α -сепаратрисы к ω -сепаратрисе).

Пусть $m+n$ — четное число. Обозначим гиперболические и эллиптические секторы, расположенные в криволинейном секторе g (не различая их) через g_1, g_2, \dots, g_{m+n} , причем переход от g_k к g_{k+1} , $1 \leq k \leq m+n-1$, осуществляется в направлении положительного обхода границы криволинейного сектора g . Тогда мы получим последовательность символов $+, g_1, -, g_2, +, \dots, +, g_{m+n-1}, -, g_{m+n}, +$, которая свидетельствует о том, что либо g_{m+n} — эллиптический сектор, переход через который осуществляется в направлении от α -параболического к ω -параболическому сектору, либо g_{m+n} — гиперболический сектор, переход через который осуществляется в направлении от α -сепаратрисы к ω -сепаратрисе. В том и другом случае согласно теореме 60 [80] и следствию из леммы 5 [80, с. 326] между сектором g_{m+n} и траекторией L_2^- имеется еще хотя бы один эллиптический или хотя бы один гиперболический сектор. Пришли к противоречию. Лемма доказана.

Пусть к особой точке $O(0, 0)$ системы (3.1.1.1) примыкают полутраектории L_1^+ и L_2^+ (или L_1^- и L_2^-). Как и выше, введем в рассмотрение криволинейный сектор σ , в границу которого входят части OM_1^+ и OM_2^+ полутраекторий L_1^+ и L_2^+ (или части OM_1^- и OM_2^- полутраекторий L_1^- и L_2^-), точка O и дуга $M_1^+M_2^+$ (или $M_1^-M_2^-$) окружности C .

Лемма 3.1.1.5. *В криволинейном секторе σ либо нет ни одного эллиптического и ни одного гиперболического сектора, то есть σ — параболический сектор, либо число эллиптических и гиперболических секторов, вместе взятых, расположенных в криволинейном секторе σ , является четным.*

Доказательство опускаем ввиду того, что оно такое же, как и доказательство предыдущей леммы.

Будем говорить, что гладкая кривая

$$F(x, y) = 0 \quad (3.1.1.28)$$

имеет контакт в точке $K(x, y)$ с траекторией системы дифференциаль-

ных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P_n(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q_n(x, y), \end{cases} \quad (3.1.1.29)$$

где $P_n(x, y)$ и $Q_n(x, y)$ — взаимно простые многочлены степени n над полем \mathbb{R} , если имеет место равенство

$$\frac{Q_n(x, y)}{P_n(x, y)} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \quad (3.1.1.30)$$

При этом точку $K(x, y)$ будем называть просто контактом на кривой (3.1.1.28).

Лемма 3.1.1.6. *Пусть уравнение (3.1.1.28) задает алгебраическую кривую k -го порядка ($k \geq 1$), а $n \geq 2$. Тогда сумма числа kontaktов и числа особых точек на кривой (3.1.1.28), не являющейся инвариантной для системы (3.1.1.29), не превосходит числа $k(k + n - 1)$.*

В самом деле, из (3.1.1.30) получаем уравнение

$$F'_x(x, y)P_n(x, y) + F'_y(x, y)Q_n(x, y) = 0 \quad (3.1.1.31)$$

Так как кривая (3.1.1.28) не является инвариантной для системы (3.1.1.29), то уравнение (3.1.1.31) не выполняется тождественно относительно x и y , а значит является алгебраическим уравнением $(k + n - 1)$ -го порядка. Поэтому кривая (3.1.1.28) имеет с кривой (3.1.1.31) не более $k(k + n - 1)$ общих точек, в числе которых, вообще говоря, могут быть и особые точки системы (3.1.1.29).

Теорема 3.1.1.8. *Пусть $A(u = z = 0)$ — особая точка системы (3.1.1.17), индекс Пуанкаре $J(A)$ которой равен -2 , причем выполняются условия:*

$$P_1^2(u, z) + Q_1^2(u, z) \equiv 0, \quad P_2^2(u, z) + Q_2^2(u, z) \not\equiv 0,$$

$$\sum_{i=2}^4 P_i(u, 0) \not\equiv 0, \quad \sum_{i=2}^4 Q_i(u, 0) \equiv 0.$$

Тогда сумма индексов Пуанкаре всех осталенных (отличных от A) бесконечно удаленных особых точек системы (3.1.1.15) не меньше нуля.

Доказательство. Так как $P_1^2(u, z) + Q_1^2(u, z) \equiv 0$, то в системе (3.1.1.17) выполняются следующие ограничения на коэффициенты:

$$b_{20} = 0, a_{30} = 0, b_{21} = 0, \quad (3.1.1.32)$$

а уравнение $f(u) = 0$ для определения координаты u_i особой точки системы (3.1.1.17) имеет вид:

$$(b_{12} - a_{21} + (b_{03} - a_{12})u - a_{03}u^2)u^2 = 0. \quad (3.1.1.33)$$

Из (3.1.1.33) следует, что система (3.1.1.15) может иметь на бесконечности не более трех особых точек.

Рассмотрим два случая 1) система (3.1.1.15) имеет на бесконечности только две особые точки; 2) система (3.1.1.15) имеет на бесконечности три особые точки.

В случае 1), не уменьшая общности, полагаем, что второй особой точкой является $B(u = 1, z = 0)$. Тогда $a_{03} \neq 0$, так как в противном случае система (3.1.1.15) имеет на бесконечности три особые точки. В самом деле, второе преобразование Пуанкаре $x = v/z, y = 1/z$ [80] переводит систему (3.1.1.15) в систему:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = (a_{12} - b_{03})v + a_{02}z + (a_{21} - b_{12})v^2 + (a_{11} - b_{02})vz + \\ \quad + (a_{30} - b_{21})v^3 + (a_{20} - b_{11})v^2z + (a_{10} - b_{01})vz^2 + \\ \quad + a_{00}z^3 + a_{01}z^2 - b_{30}v^4 - b_{20}v^3z - b_{10}v^2z^2 - \\ \quad - b_{00}vz^3 + a_{03}, \\ \frac{dz}{dt} = -b_{03}z - b_{12}vz - b_{02}z^2 - b_{21}v^2z - b_{11}vz^2 - b_{01}z^3 - \\ \quad - b_{30}v^3z - b_{20}v^2z^2 - b_{10}vz^3 - b_{00}z^4. \end{cases} \quad (3.1.1.34)$$

Из (3.1.1.34) видно, что при $a_{03} = 0 D(v = z = 0)$ — особая точка системы (3.1.1.15) на бесконечности. Точка B может быть простой, а может быть сложной особой точкой. Рассмотрим два подслучаев:

- 1 a) $u = 1$ — простой корень уравнения (3.1.1.33);
- 1 b) $u = 1$ — двукратный корень уравнения (3.1.1.33).

В случае 1 а) $b_{12} - a_{21} = 0, b_{03} - a_{12} = a_{03}$. Можно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} G'_u(1, 0) &= -a_{03}, G'_z(1, 0) = b_{11} - a_{20} + b_{02} - a_{11} - a_{02}, \\ H'_u(1, 0) &= 0, H'_z(1, 0) = -a_{21} - a_{12} - a_{03}. \end{aligned} \quad (3.1.1.35)$$

Из (3.1.1.35) следует, что характеристические числа особой точки $B(u = 1, z = 0)$ есть $\lambda_1 = -a_{03}$, $\lambda_2 = -a_{21} - a_{12} - a_{03}$. Если $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, то $B(u = 1, z = 0)$ — простое седло системы (3.1.1.17), к которому примыкают, как известно [80], четыре гиперболических сектора.

По условию теоремы $J(A) = -2$, и согласно следствию 3.1.1.2 к особой точке $A(u = z = 0)$ примыкают шесть гиперболических секторов и не примыкает ни один эллиптический сектор.

Так как $G(u, 0)$ при переходе через точку $A(u = z = 0)$ меняет свой знак на противоположный, то при $a_{03} > 0$ ($a_{03} < 0$) к точке A вдоль экватора $z = 0$ стремятся две полураектории при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$).

По лемме 3.1.1.5 в достаточно малой окрестности точки $A(u = z = 0)$ в каждой из полуплоскостей $z > 0$ и $z < 0$ имеется четное число гиперболических секторов, то есть хотя бы в одной из этих полуплоскостей мы имеем не менее четырех гиперболических секторов, примыкающих к точке $A(u = z = 0)$.

Для определенности положим, что не менее четырех гиперболических секторов расположены в полуплоскости $z > 0$. Тогда найдется прямая $x = a$, где $a > 0$ — достаточно большое число, такое, что сепаратрисы особых точек A и B пересекаются с этой прямой.

Таким образом, прямая $x = a$ имеет с траекториями системы (3.1.1.15) не менее четырех контактов, что противоречит лемме 3.1.1.6. (На рис. 139 изображен случай, когда в полуплоскости $z > 0$ расположены четыре гиперболических сектора из шести, примыкающих к особой точке $A(u = z = 0)$, причем $a_{03} > 0$).

Пусть $B(u = 1, z = 0)$ — сложная особая точка системы (3.1.1.17). Так как $G'_u = -a_{03} \neq 0$, то согласно [80] точка B может быть либо седлоузлом $J(B) = 0$, либо узлом $J(B) = 1$, либо седлом $J(B) = -1$.

Если индекс особой точки B равен 0 или 1, то теорема справедлива.

Если $J(B) = -1$, то рассуждения аналогичны, как и выше. Таким образом, теорема доказана в случае 1 а).

Пусть далее имеет место случай 1 б). Тогда выполняются условия на коэффициенты системы (3.1.1.17):

$$b_{03} - a_{12} = 2a_{03}, b_{12} - a_{21} = -a_{03} \quad (3.1.1.36)$$

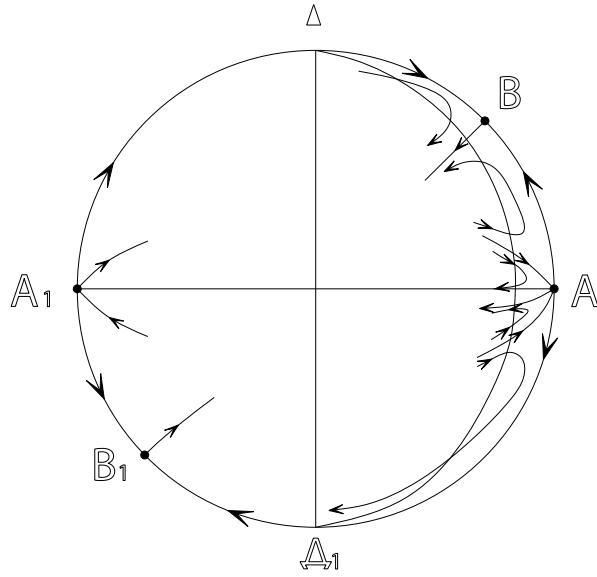


Рис. 139

Вычисления показывают, что с учетом (3.1.1.36)

$$\begin{aligned} G'_u(1, 0) &= 0, H'_z(1, 0) = -a_{03} - a_{21} - a_{12}, \\ G'_z(1, 0) &= b_{11} - a_{20} + b_{02} - a_{11} - a_{02}, H'_u(1, 0) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.1.37)$$

Из (3.1.1.37) следует, что $B(u = 1, z = 0)$ — сложная особая точка. Если $|H'_z(1, 0)| + |G'_z(1, 0)| > 0$, то $J(B) = 0$, либо $J(B) = 1$, либо $J(B) = -1$. Этот случай также рассмотрен.

Пусть $H'_z(1, 0) = G'_z(1, 0) = 0$. Так как $G''_{u^2}(1, 0) = -2a_{03} \neq 0$, то правые части системы дифференциальных уравнений, полученной из (3.1.1.17) после переноса начала координат в точку $B(u = 1, z = 0)$, содержат квадратичные члены. Следовательно, $|J(B)| \leq 2$ [80]. Покажем, что случай $J(B) = -1$ невозможен, тогда тем более невозможен и случай $J(B) = -2$, так как при $J(B) = -2$ к точке B примыкают шесть гиперболических секторов.

Итак, если $J(B) = -1$, то по формуле Бендиксона [80] $J = 1 + \frac{e-h}{2}$ получаем, что $h = 4 + e$, где h — число гиперболических секторов, e — число эллиптических секторов, примыкающих к точке B .

Так как число гиперболических секторов не меньше четырех, то h и e — числа одинаковой четности, то общее число гиперболических и

эллиптических секторов, примыкающих к точке В не менее шести. Следовательно, в одной из полуплоскостей $z > 0$ и $z < 0$ сумма числа гиперболических и числа эллиптических секторов не меньше четырех.

Далее рассуждаем так же как и в случае 1 а). Рассмотрим случай 2) трех особых точек системы (3.1.1.15) на бесконечности. При этом, не нарушая общности, полагаем, что особыми точками, отличными от $A(u = z = 0)$, являются точки $B(1, 0)$, $D(v = z = 0)$. Тогда $a_{03} = 0$, $a_{21} - b_{12} = b_{03} - a_{12} \neq 0$. Так как $G'_u(1, 0) = b_{03} - a_{12}$, $H'_z(1, 0) = -a_{21} - a_{12}$, то характеристические числа особой точки В будут: $\lambda_1(B) = b_{03} - a_{12}$, $\lambda_2(B) = -a_{21} - a_{12}$. Как следует из системы (3.1.1.34), характеристические числа особой точки $D(v = z = 0)$ будут $\lambda_1(D) = a_{12} - b_{03}$, $\lambda_2(D) = -b_{03}$.

Так как $G(u, 0) = (b_{12} - a_{21})u^2 + (b_{03} - a_{12})u^3$, то при переходе через точку $A(u = z = 0)$ знак du/dt не меняется. Следовательно, одна полутраектория стремится при $t \rightarrow +\infty$ к точке A вдоль экватора $z = 0$, а другая — при $t \rightarrow -\infty$, и по лемме 3.1.1.4 в каждой из полуплоскостей $z > 0$ и $z < 0$ в достаточно малой окрестности точки A расположены по три гиперболических сектора. В силу того, что одно характеристическое число каждой из особых точек B и D отлично от нуля, то $J(B)$, $J(D) \in \{0, 1, -1\}$. Поэтому рассмотрим случаи: $J(B) + J(D) = -1$ или $J(B) + J(D) = -2$.

При выполнении равенства $J(B) + J(D) = -1$, одна из особых точек B и D — седлоузел, а другая — седло. Здесь возможны два предположения: с) D — седлоузел, B — седло д) D — седло, B — седлоузел.

Пусть имеет место с). Так как при переходе через точку D dv/dt меняет знак на противоположный, то к точке D вдоль экватора $z = 0$ стремится одна полутраектория при $t \rightarrow +\infty$, а другая при $t \rightarrow -\infty$. По лемме 3.1.1.5 два гиперболических сектора, примыкающих к особой точке D , расположены в полуплоскости $z > 0$ ($z < 0$), а параболический сектор — в полуплоскости $z < 0$ ($z > 0$). Обратимся к рис. 140.

Рис. 140 соответствует случаю $b_{12} - a_{21} > 0$. Прямая $y = x - b$, где $b > 0$ — достаточно большое число, такое, что она пересекает три сепаратрисы, примыкающие к точке $A(u = z = 0)$ и одну сепаратрису, примыкающую к седлоузлу D . Прямая $y = x - b$, таким образом, име-

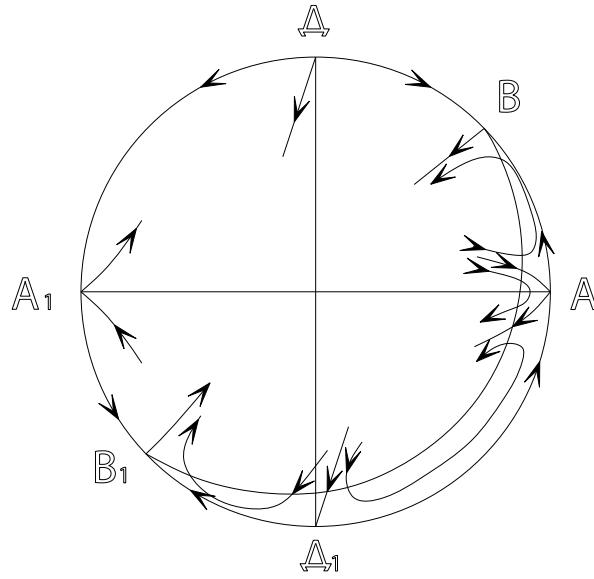


Рис. 140

ет не менее четырех контактов с траекториями системы (3.1.1.15), что противоречит лемме 3.1.1.6.

Если гиперболические секторы будут примыкать к точке $D(v = z = 0)$, находясь в полуплоскости $z > 0$, то вместо прямой $y = x - b$, будем рассматривать прямую $y = x + b$, где $b > 0$ — достаточно большое число. В случае, когда D — седлоузел, B — седло справедливость утверждения теоремы установлена.

Если D — седло, B — седлоузел и гиперболические секторы, примыкающие к B , расположены в полуплоскости $z > 0$ (рис. 141), рассмотрим прямую $x = a$, где $a > 0$, a — достаточно большое число.

Прямая $x = a$ имеет не менее четырех контактов с траекториями системы 3.1.1.5). Если гиперболические секторы, примыкающие к точке $B(u = 1, z = 0)$, расположены в полуплоскости $z < 0$, то рассматриваем прямую $x = -a$, где $a > 0$ — достаточно большое число. Теорема доказана в случае когда $J(D) + J(B) = -1$.

Если сумма индексов Пуанкаре особых точек B и D будет равна -2 , то B и D — седла, к которым примыкают по четыре гиперболических седла. Поэтому, тем более, найдется прямая $x = a$, где a достаточно большое положительное число, имеющая не менее четырех контактов с

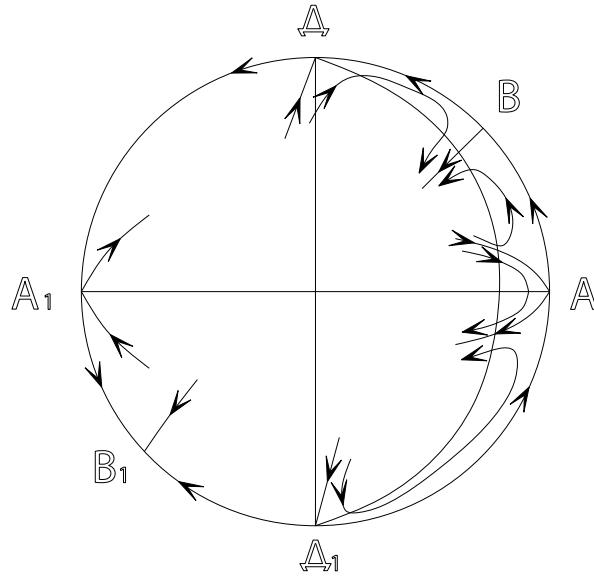


Рис. 141

траекториями системы (3.1.1.15). Теорема доказана полностью.

Теорема 3.1.1.9. Пусть $A(u = z = 0)$ — особая точка системы (3.1.1.17), $J(A) = 2 u$, кроме того, выполняются условия:

$$P_1^2(u, z) + Q_1^2(u, z) \equiv 0, \quad P_2^2(u, z) + Q_2^2(u, z) \not\equiv 0,$$

$$\sum_{i=2}^4 P_i(u, 0) \not\equiv 0, \quad \sum_{i=2}^4 Q_i(u, 0) \equiv 0.$$

Тогда сумма индексов Пуанкаре бесконечно удаленных особых точек системы (3.1.1.15) равна либо 0, либо 1, либо 2, либо 3, либо 4.

Доказательство. При доказательстве предыдущей теоремы в случае двух особых точек $A(u = z = 0)$ и $B(u = 1, z = 0)$ было установлено, что B может быть простым седлом, простым узлом, сложным узлом или седлом (во всех случаях $|J(B)| = 1$), или седлоузлом ($J(B) = 0$) или сложной особой точкой, к которой примыкают два эллиптических сектора ($J(B) = 2$) или шесть гиперболических секторов ($J(B) = -2$).

Из сказанного следует, что сумма Σ индексов Пуанкаре бесконечно удаленных особых точек системы (3.1.1.15) удовлетворяет условию $\Sigma \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Если, кроме A на бесконечности система (3.1.1.15) имеет

еще две особые точки $B(u = 1, z = 0)$, $D(v = z = 0)$, то $|J(B)| \leq 1$, $|J(D)| \leq 1$. Отсюда следует, что $\Sigma \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Теорема доказана.

Из теорем 3.1.1.6-3.1.1.9 следует

Теорема 3.1.1.10. *Пусть система (3.1.1.17) имеет хотя бы одну особую точку $(u = u_0, z = 0)$, удовлетворяющую условиям: $G'_u(u_0, 0) = G'_z(u_0, 0) = H'_u(u_0, 0) = H'_z(u_0, 0) = 0$, и, кроме этого, $H(u, 0) \equiv 0$, $G(u, 0) \not\equiv 0$. Тогда сумма \sum индексов Пуанкаре особых точек системы (3.1.1.15) на бесконечности удовлетворяет условию $-2 \leq \sum \leq 4$.*

3.1.2 Распределение особых точек кубической системы на экваторе сферы Пуанкаре. Случай трех особых точек, индекс Пуанкаре одной из которых удовлетворяет условию $|J| = 2$

В предыдущем пункте нами установлено, что система (3.1.1.15) на бесконечности имеет не более трех особых точек, если для одной особой точки индекс Пуанкаре равен 2 или -2.

Пусть $A(u = z = 0)$ — сложная особая точка системы (3.1.1.17) и $J(A) = -2$.

Теорема 3.1.2.1. *Для двух простых особых точек системы (3.1.1.15) на экваторе сферы Пуанкаре, отличных от $A(u = z = 0)$ возможны только следующие случаи их распределения: а) узел и седло; б) два узла.*

Справедливость данной теоремы следует из теоремы 3.1.1.10.

Пример 40. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4 - 4x^2y - 5xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = 7x + 7y - 7xy^2 - 7y^3 \end{cases}$$

имеет в ограниченной части фазовой плоскости три простых фокуса: $(0, 0)$, $(2, -2)$, $(-2, 2)$, а на бесконечности — шестисепаратрисное седло $B(u = -\frac{3}{2}, z = 0)$. Поведение фазовых траекторий системы изображено на рис. 142.

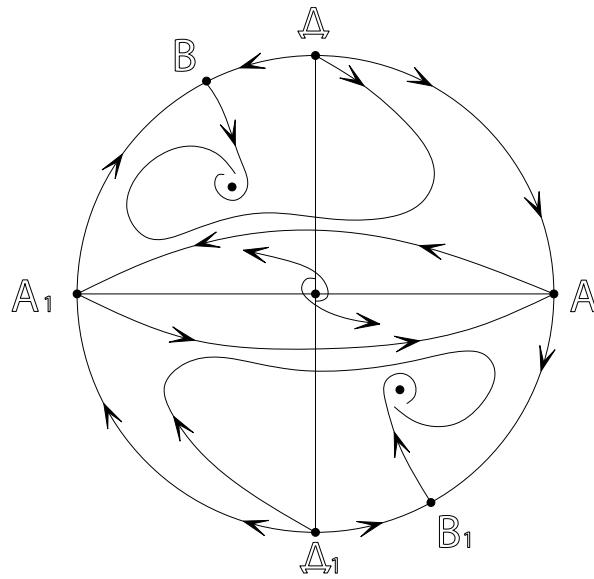


Рис. 142

Пример 41.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4y - 6x^2y - 5xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = 7x + 7y - 7xy^2 - 7y^3. \end{cases}$$

Точка $(0; 0)$ — единственная особая точка системы в ограниченной части фазовой плоскости, и она является простым фокусом. Бесконечно удалеными особыми точками являются шестисепаратрисное седло $A(u = z = 0)$ и два простых узла $D(v = z = 0)$ и $B(u = -1/2, z = 0)$. Разбиение круга Пуанкаре на траектории для системы изображено на рис. 143.

Теорема 3.1.2.2. *Пусть система (3.1.1.15) имеет на бесконечности три особые точки, в том числе две сложные. Если одна из сложных особых точек имеет индекс Пуанкаре $J = -2$, то для двух других особых точек возможны только следующие случаи распределения: 1) топологический узел и простой узел; 2) топологическое седло и простой узел; 3) седлоузел и простой узел.*

Доказательство. Не уменьшая общности, считаем, что $A(u = z = 0)$, $B(u = 1, z = 0)$ и $D(v = z = 0)$ — исследуемые особые точки, и $J(A) = -2$. Поэтому для системы (3.1.1.17) выполняется условие $P_1^2(u, z) +$

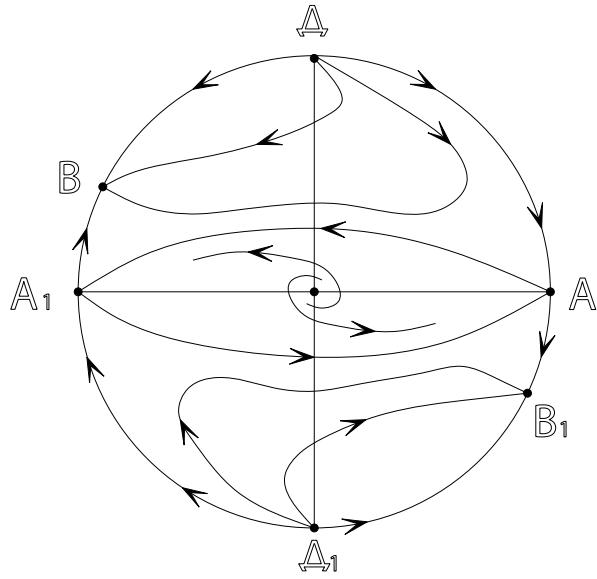


Рис. 143

$Q_1^2(u, z) \equiv 0, P_2^2(u, z) + Q_2^2(u, z) \not\equiv 0$, кроме этого,

$$a_{03} = a_{30} = b_{30} = b_{21} = b_{20} = 0, b_{12} - a_{21} + b_{03} - a_{12} = 0 \quad (3.1.2.1)$$

Точка $A(u = z = 0)$ является шестисепаратрисным седлом в силу следствия 3.1.1.2.

Перенесем начало координат системы (3.1.1.17) в точку B :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = (b_{03} - a_{12})u + (b_{11} - a_{20} + b_{02} - a_{11} - a_{02})z + \\ + 2(b_{03} - a_{12})u^2 + (b_{11} - a_{20} + 2b_{02} - 2a_{11} - 3a_{02})uz + \\ + (b_{10} + b_{01} - a_{10} - a_{01})z^2 + (b_{03} - a_{12})u^3 + \\ + (b_{02} - a_{11} - 3a_{02})u^2z + (b_{01} - a_{10} - 2a_{01})uz^2 + \\ + (b_{00} - a_{00})z^3 - a_{02}u^3z - a_{01}u^2z^2 - a_{00}uz^3, \\ \frac{dz}{dt} = -(a_{21} + a_{12})z - (a_{21} + 2a_{12})uz - (a_{20} + a_{11} + a_{02})z^2 - \\ - a_{12}u^2z - (a_{11} + 2a_{02})uz^2 - (a_{10} + a_{01})z^3 - a_{02}u^2z^2 - \\ - a_{01}uz^3 - a_{00}z^4. \end{array} \right. \quad (3.1.2.2)$$

Система (3.1.1.34) в условиях данной теоремы запишется в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = (a_{12} - b_{03})v + a_{02}z + (b_{03} - a_{12})v^2 + (a_{11} - b_{02})vz + \\ + a_{01}z^2 + (a_{20} - b_{11})v^2z + (a_{10} - b_{01})vz^2 + a_{00}z^3 - \\ - b_{10}v^2z^2 - b_{00}vz^3, \\ \frac{dz}{dt} = -b_{03}z - b_{12}vz - b_{02}z^2 - b_{11}vz^2 - b_{01}z^3 - \\ - b_{10}vz^3 - b_{00}z^4. \end{array} \right. \quad (3.1.2.3)$$

Из (3.1.2.2) и (3.1.2.3) согласно [80] следует, что будучи кратной особой точкой, каждая из точек B и D является либо седлоузлом, либо топологическим седлом, либо топологическим узлом (один из характеристических корней отличен от нуля). Одновременно B и D не могут быть сложными (кратными) особыми точками, так как в противном случае $b_{03} = a_{21} + a_{12} = 0$ и с учетом (3.1.2.1) получаем равенство $b_{12} = 0$. Это означает, что в правой части второго уравнения системы (3.1.1.15) отсутствуют кубические члены. Отсюда в силу теоремы 3.1.1.10 логически возможны следующие случаи распределения особых точек B и D : 1) топологический узел и простой узел; 2) топологическое седло и простой узел; 3) седлоузел и простой узел; 4) топологический узел и простое седло.

Покажем, что случай 4) не реализуется и приведем примеры систем (3.1.1.15), удовлетворяющих случаям 1)-3).

Предположим, что B — сложная особая точка типа топологический узел по терминологии [80], а D — простое седло.

Перепишем систему (3.1.1.17) при сделанных ограничениях на коэффициенты:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = (a_{12} - b_{03})u^2 + (b_{11} - a_{20})uz + b_{10}z^2 + (b_{03} - a_{12})u^3 + \\ + (b_{02} - a_{11})u^2z + (b_{01} - a_{10})uz^2 + b_{00}z^3 - \\ - a_{02}u^3z - a_{01}u^2z^2 - a_{00}uz^3 \equiv \bar{P}(u, z), \\ \frac{dz}{dt} = a_{12}uz - a_{20}z^2 - a_{12}u^2z - a_{11}uz^2 - a_{10}z^3 - a_{02}u^2z^2 - \\ - a_{01}uz^3 - a_{00}z^4 \equiv \bar{Q}(u, z). \end{array} \right. \quad (3.1.2.4)$$

Уравнение возможных критических направлений [2] в особой точке $(0; 0)$ системы (3.1.2.4) имеет вид:

$$z(b_{03}u^2 - b_{11}uz - b_{10}z^2) = 0. \quad (3.1.2.5)$$

Из (3.1.2.5) в силу $b_{03} \neq 0$ следует, что $z = 0$ — простое обыкновенное критическое направление. Следуя Фроммеру [2], рассмотрим функцию

$$\psi(\mu, u) = \frac{\bar{Q}(u, \mu u)}{\bar{P}(u, \mu u)} - \mu. \quad (3.1.2.6)$$

Производная функции (3.1.2.6) по μ в точке $(0; 0)$ выражается формулой

$$\psi'_\mu(0, 0) = \frac{b_{03}}{a_{12} - b_{03}}. \quad (3.1.2.7)$$

По предположению D — простое седло, следовательно, имеет место неравенство $b_{03}(a_{12} - b_{03}) > 0$ (см. систему (3.1.2.3)). Из последнего неравенства с учетом (3.1.2.7) следует неравенство $\psi'_\mu(0, 0) > 0$. Это означает, что в направлении прямой $z = 0$ в особую точку $A(u = z = 0)$ входит бесконечное множество траекторий [2], причем как слева, так и справа от A .

Особо следует отметить, что в достаточно малой окрестности точки $A(u = z = 0)$ как в положительной части полуплоскости $z > 0$, так и в полуплоскости $z < 0$ расположено бесконечное множество траекторий, стремящихся к A в направлении $z = 0$. При этом траектории, расположенные слева (справа) от точки A , стремятся к ней при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) или при $t \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow +\infty$), так как du/dt при переходе через точку $A(u = z = 0)$ не меняет знак (см. первое уравнение системы (3.1.2.4)).

Рассмотрим прямую $x = a$, $a > 0$ — сколь угодно большое число. В результате преобразования $x = 1/z$, $y = u/z$ эта прямая перешла в прямую $z = 1/a$, которую в достаточно малой окрестности точки $A(u = z = 0)$ пересекают положительные (отрицательные) полутраектории, входящие в A вдоль оси $z = 0$, а в достаточно малой окрестности топологического узла B — отрицательные (положительные) полутраектории, входящие в B . В силу непрерывности векторного поля системы (3.1.2.4) прямая

$z = 1/a$ имеет хотя бы один контакт в полосе плоскости $0 < u < 1$. Кроме этого, прямая $z = 1/a$ пересекает три гиперболических сектора, примыкающих к точке $A(u = z = 0)$ и расположенных выше оси u . Таким образом, прямая $z = 1/a$ имеет с траекториями системы (3.1.2.4) не менее четырех контактов. Следовательно прямая $x = a$ имеет не менее четырех контактов с траекториями системы (3.1.1.15), что противоречит лемме 3.1.1.6.

Пусть теперь D — топологический узел, а B — простое седло, тогда

$$b_{03} = 0, b_{12} = a_{21} + a_{12}, a_{12}(a_{12} - a_{21}) < 0 \quad (3.1.2.8)$$

Впрочем, из неравенства (3.1.2.8) следует также, что $a_{21} \neq 0$. При сделанных нами предположениях система (3.1.1.17) имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = a_{12}u^2 + (b_{11} - a_{20})uz + b_{10}z^2 - a_{12}u^3 + \\ \quad + (b_{02} - a_{11})u^2z + (b_{01} - a_{10})uz^2 + b_{00}z^3 - \\ \quad - a_{02}u^3z - a_{01}u^2z^2 - a_{00}uz^3, \\ \frac{dz}{dt} = -a_{21}uz - a_{20}z^2 - a_{12}u^2z - a_{11}uz^2 - a_{10}z^3 - \\ \quad - a_{02}u^2z^2 - a_{01}uz^3 - a_{00}z^4. \end{array} \right. \quad (3.1.2.9)$$

Уравнение возможных критических направлений в особой точке $(0; 0)$ системы (3.1.2.9) имеет вид: $z((a_{21} + a_{12})u^2 + b_{11}uz + b_{10}z^2) = 0$. Так как $a_{21} + a_{12} \neq 0$, то $z = 0$ — простое обыкновенное критическое направление. Производная функции (3.1.2.6) задается формулой

$$\psi'_\mu(0, 0) = -\frac{a_{21} + a_{12}}{a_{12}}. \quad (3.1.2.10)$$

Из (3.1.2.10) в силу неравенства (3.1.2.8) следует, что $\psi'_\mu(0, 0) > 0$, то есть в точку $A(u = z = 0)$ в направлении $z = 0$ входит бесконечное множество траекторий. Прямая $y = (1 + \varepsilon)x + b$, где ε — сколь угодно малое положительное число, b — сколь угодно большое положительное число в рассматриваемом случае имеет не меньше четырех контактов с траекториями системы (3.1.1.15). Снова приходим к противоречию с леммой 3.1.1.6.

Приведем примеры, иллюстрирующие случаи 1)-3) распределения особых точек B и D .

Пример 42.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 8y - x^2 - 4xy + y^2 + 4x^2y - 4xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -8x + 8y + 8xy^2 - 8y^3. \end{cases}$$

Система имеет в ограниченной части фазовой плоскости две особые точки: $(3, 3)$ — простой устойчивый фокус, $(0, 0)$ — простой неустойчивый фокус.

Разбиение круга Пуанкаре на фазовые траектории данной системы изображено на рис. 144.

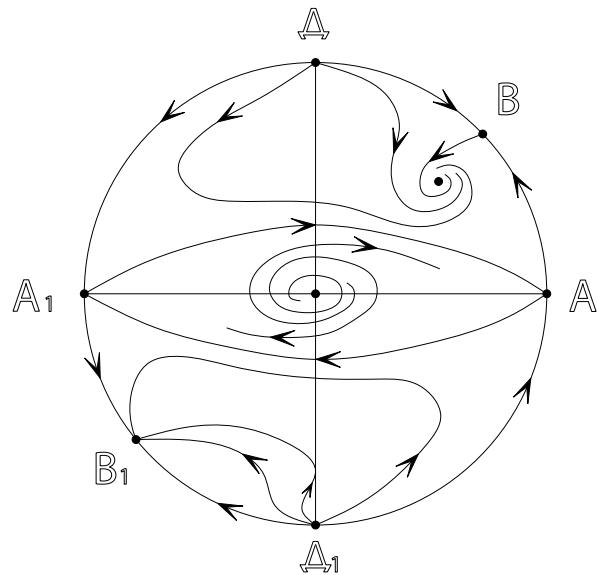


Рис. 144

Пример 43.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y - x^2y - xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2xy^2. \end{cases}$$

В ограниченной части фазовой плоскости система имеет два седлоузла $(-1, 1), (1, -1)$ и простой устойчивый фокус $(0, 0)$. Особыми точками

на бесконечности являются шестисепаратрисное седло $A(u = z = 0)$, топологический узел $D(v = z = 0)$ и простой неустойчивый узел $B(u = 1, z = 0)$. Фазовый портрет изображен на рис. 145.

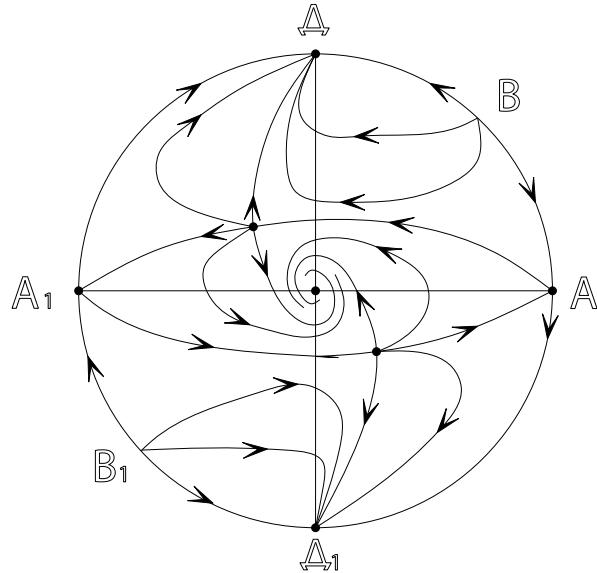


Рис. 145

Пример 44.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 20x + 36y - 7x^2 + 9xy - 11x^2y - 11xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = 22x(1 - y^2). \end{cases}$$

В ограниченной части плоскости система имеет пять простых особых точек: $(0, 0)$ — седло, $(-1, 1)$, $(3, -1)$, $(2, 1)$, $(-3, -1)$ — узлы, а на бесконечности — шестисепаратрисное седло $A(u = z = 0)$, топологическое седло $D(v = z = 0)$ и простой узел $B(u = 1, z = 0)$. Фазовый портрет системы изображен на рис. 146.

Теорема доказана.

На этом завершается изучение бесконечно удаленных особых точек системы (3.1.1.15) в случае, когда их число равно трем, и среди них имеется одна точка с индексом Пуанкаре $J = -2$.

Далее рассмотрим случай, когда система (3.1.1.15) имеет три особых точки, в том числе особую точку с индексом Пуанкаре $J = 2$.

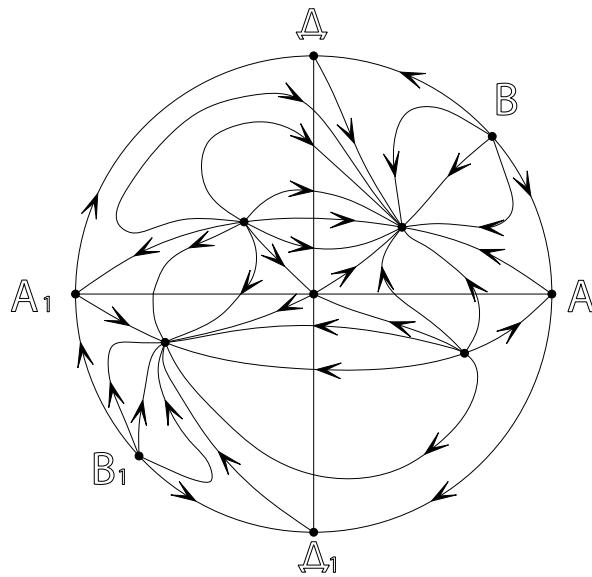


Рис. 146

В этом случае по теореме 3.1.1.3 к особой точке с индексом Пуанкаре $J = 2$ примыкают два эллиптических и два параболических сектора и не примыкает ни один гиперболический сектор.

Теорема 3.1.2.3. *Пусть система (3.1.1.15) имеет на бесконечности три особые точки, в том числе две сложные. Если индекс Пуанкаре одной из них равен 2, то для двух других особых точек возможны следующие случаи их распределения:*

- 1) топологическое седло и простой узел;
- 2) топологическое седло и простое седло;
- 3) топологический узел и простой узел;
- 4) топологический узел и простое седло;
- 5) седлоузел и простое седло;
- 6) седлоузел и простой узел.

Справедливость теоремы следует из теоремы 3.1.1.9.

Приведем примеры систем, удовлетворяющих условиям теоремы 3.1.2.3.

Пример 45.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = 1 - x + y^2 - xy^2. \end{cases}$$

В ограниченной части фазовой плоскости данная система имеет две особые точки: $(1, 0)$ — простое седло; $(1, 2)$ — простой фокус, а на бесконечности — три особые точки, в том числе $A(u = z = 0)$ — точка, к которой примыкают два эллиптических и два параболических сектора, $D(v = z = 0)$ — седлоузел, $B(u = 1, z = 0)$ — простое седло.

Пример 46.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + x^2y - xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x - y - xy^2 + y^3. \end{cases}$$

Начало координат $(0, 0)$ — единственная особая точка данной системы в конечной части фазовой плоскости, и она является простым седлом. Особыми очками на экваторе сферы Пуанкаре являются: точка $A(u = z = 0)$, к которой примыкают два эллиптических и два параболических сектора, топологическое седло $B(u = 1, z = 0)$ и простой узел $D(v = z = 0)$.

Пример 47. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + 36y - 7x^2 + 9xy - 11x^2y + 13xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 2xy^2 \end{cases}$$

имеет в ограниченной части фазовой плоскости пять простых особых точек, в их числе: $(-1, 1), (2, 1), (-3, -1), (3, -1)$ — сёдла, $(0, 0)$ — фокус. На бесконечности система имеет три особые точки: $A(u = z = 0)$ — точка с двумя эллиптическими и двумя параболическими секторами, $B(u = 1, z = 0)$ — простой узел, $D(v = z = 0)$ — топологический узел.

Пример 48.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - 17y + 3x^2y - xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -2y + 2xy^2. \end{cases}$$

Единственная особая точка $(0, 0)$ данной системы в конечной части фазовой плоскости является простым узлом. На экваторе сферы Пуанкаре наряду с особой точкой $A(u = z = 0)$, к которой примыкают два эллип-

тических и два параболических сектора, система имеет простое седло $B(u = 1, z = 0)$ и топологическое седло $D(v = z = 0)$.

Пример 49.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + 17y + 3x^2y - xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -2y + 2xy^2. \end{cases}$$

Система имеет простые особые точки: $(0, 0)$ — узел, $(4, 1/4)$, $(-4, -1/4)$ — сёдла, расположенные в ограниченной части фазовой плоскости. Бесконечно удаленными особыми точками системы являются: $A(u = z = 0)$ — точка с двумя эллиптическими и параболическими секторами, $B(u = 1, z = 0)$ — простое седло, $D(v = z = 0)$ — топологический узел.

Пример 50.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3 - x^2y + 2xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -x + xy^2. \end{cases}$$

Система имеет в конечной части фазовой плоскости два простых седла $(3, 1)$ и $(-1, 1)$, а на бесконечности — три особые точки, в том числе: $A(u = z = 0)$ — точка с двумя эллиптическими и двумя параболическими секторами, $B(u = 1, z = 0)$ — простой узел и седлоузел в точке $D(v = z = 0)$.

Теорема 3.1.2.4. *Пусть система (3.1.1.15) имеет на бесконечности три особые точки, в том числе одну с индексом Пуанкаре $J = 2$. Тогда для двух простых особых точек возможны следующие случаи распределения: 1) два узла; 2) два седла; 3) седло и узел.*

Справедливость теоремы следует из теоремы 3.1.1.9.

Пример 51.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -8x - 51y + 12x^2y - 9xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -6y + 9xy^2 - 6y^3. \end{cases}$$

На бесконечности система имеет особую точку $A(u = z = 0)$ с двумя эллиптическими и двумя параболическими секторами, два простых сед-

ла $B(u = 1, z = 0)$ и $D(v = z = 0)$. Единственной особой точкой системы в конечной части фазовой плоскости является простой узел $(0, 0)$.

Пример 52.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{2}{3}x - \frac{16}{9}y - x^2y + 2xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -2y + 3xy^2 - 2y^3. \end{cases}$$

В ограниченной части фазовой плоскости система имеет три простых седла: $(0, 0)$, $(4/3, 1)$, $(-4/3, -1)$, а на бесконечности — два простых узла $B(u = 1, z = 0)$, $D(v = z = 0)$ и сложную особую точку $A(u = z = 0)$ с двумя эллиптическими и двумя параболическими секторами.

Пример 53.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -6x + 16y - 6x^2y + 2xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -2y - 2xy^2 - 2y^3. \end{cases}$$

Система имеет в ограниченной части фазовой плоскости два простых седла $(2, -1)$, $(-2, 1)$ и простой узел $(0, 0)$. На экваторе сферы Пуанкаре расположены простое седло $B(u = 1, z = 0)$, простой узел $D(v = z = 0)$ и сложная особая точка $A(u = z = 0)$ с двумя эллиптическими и двумя параболическими секторами.

Подводя итог исследованию, проведенному в пунктах 3.1.1 и 3.1.2, можно отметить следующее.

1. Индекс Пуанкаре J сложной особой точки системы (3.1.1.15) на бесконечности удовлетворяет условию $|J| \leq 3$.
2. Если система (3.1.1.15) имеет на бесконечности особую точку, для которой $|J| = 3$, то ее фазовый портрет в круге Пуанкаре строится однозначно с точностью до топологической эквивалентности.
3. Если система (3.1.1.15) имеет на бесконечности три особые точки, в том числе одну сложную, для которой $|J| = 2$, то полностью устанавливаются типы остальных двух особых точек.

Дальнейшее изучение поведения траекторий системы (3.1.1.15) в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости проведем при выполнении

следующих условий:

$$\begin{aligned} f(u) \equiv b_{30} + (b_{21} - a_{30})u + (b_{12} - a_{21})u^2 + \\ + (b_{03} - a_{12})u^3 - a_{03}u^4 \not\equiv 0, \\ P_1^2(u_0, z) + Q_1^2(u_0, z) \not\equiv 0, \end{aligned} \quad (3.1.2.11)$$

где $(u_0, 0)$ — особая точка системы (3.1.1.17), $|a_{12} - b_{03}| + |b_{03}| + |a_{02}| > 0$.

Последнее неравенство является условием того, что система (3.1.1.34) в особой точке $D(v = z = 0)$ имеет невырожденную линейную часть.

Таким образом, будем считать, что условия (3.1.2.11) выполнены, и каждый раз не будем оговаривать.

3.1.3 Исследование типов бесконечно удаленных особых точек кубической системы. Случай четырех особых точек

Теорема 3.1.3.1. *Если кубическая система (3.1.1.15) имеет на бесконечности четыре особые точки, и все они простые, то они не могут быть одновременно седлами.*

Доказательство. Непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что корни характеристического уравнения особой точки $(\bar{u}, 0)$ системы (3.1.1.16) определяются по формулам:

$$\lambda_1(u) = -a_{30} - a_{21}\bar{u} - a_{12}\bar{u}^2 - a_{03}\bar{u}^3, \quad \lambda_2(\bar{u}) = f'(\bar{u}), \quad (3.1.3.1)$$

а особые точки $(0; 0)$ системы (3.1.1.34) — определяются по формулам:

$$\lambda_1(0) = -b_{03}, \quad \lambda_2(0) = a_{12} - b_{03}. \quad (3.1.3.2)$$

Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что $A(u = z = 0)$, $B(u = 1, z = 0)$, $C(u = u_0, z = 0)$, $D(v = z = 0)$ — простые особые точки системы (3.1.1.15) на экваторе сферы Пуанкаре, разумеется, при этом $u_0 \neq 0; 1$. Тогда по необходимости выполняются условия:

$$b_{30} = a_{03} = 0; \quad (3.1.3.3)$$

$$(b_{21} - a_{30})(a_{12} - b_{03}) \neq 0; \quad (3.1.3.4)$$

$$b_{12} - a_{21} = a_{12} - b_{03} + a_{30} - b_{21}; \quad (3.1.3.5)$$

$$u_0 = \frac{b_{21} - a_{30}}{b_{03} - a_{12}}. \quad (3.1.3.6)$$

С учетом (3.1.3.1), (3.1.3.3)–(3.1.3.6) корни характеристических уравнений особых точек A , B и C запишем в виде:

$$\lambda_1(0) = -a_{30}, \quad \lambda_2(0) = b_{21} - a_{30}; \quad (3.1.3.7)$$

$$\lambda_1(1) = -a_{30} - a_{21} - a_{12}, \quad \lambda_2(1) = a_{30} - b_{21} + b_{03} - a_{12}; \quad (3.1.3.8)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1(u_0) &= -\frac{a_{12}(b_{21} - a_{30})^2}{(b_{03} - a_{12})^2} - \frac{a_{21}(b_{21} - a_{30})}{b_{03} - a_{12}} - a_{30}, \\ \lambda_2(u_0) &= \frac{(b_{21} - a_{30})(b_{21} - a_{30} + a_{12} - b_{03})}{b_{03} - a_{12}}. \end{aligned} \quad (3.1.3.9)$$

Простая особая точка, как известно [80], является седлом, если произведение ее характеристических корней отрицательно. С учетом (3.1.3.2), (3.1.3.7)–(3.1.3.8) можно утверждать, что A , B , C и D являются седлами, если имеет место система неравенств:

$$b_{30}(a_{12} - b_{03}) > 0, a_{30}(b_{21} - a_{30}) > 0, (a_{30} + a_{21} + a_{12})(a_{30} - b_{21} + b_{03} - a_{12}) > 0,$$

$$\frac{(b_{21} - a_{30})(b_{21} - a_{30} + a_{12} - b_{03})}{b_{03} - a_{12}} \left[\frac{a_{12}(b_{21} - a_{30})^2}{(b_{03} - a_{12})^2} + \frac{a_{21}(b_{21} - a_{30})}{b_{03} - a_{12}} + a_{30} \right] > 0.$$

Но эта система не совместна. Теорема доказана.

Теорема 3.1.3.2. *Если система (3.1.1.15) имеет на экваторе сферы Пуанкаре четыре особые точки, то среди них не более трех — сложные.*

Доказательство. Так как по условию система (3.1.1.15) имеет четыре особые точки на бесконечности, то согласно (3.1.3.4) ни один из коэффициентов $b_{21} - a_{30}$ и $a_{12} - b_{03}$ в уравнении

$$\begin{aligned} f(u) &\equiv b_{30} + (b_{21} - a_{30})u + (b_{12} - a_{21})u^2 + \\ &+ (b_{03} - a_{12})u^3 - a_{03}u^4 = 0. \end{aligned} \quad (3.1.3.10)$$

не равен нулю. Если же предположить, что все четыре особые точки $A(u = z = 0)$, $B(u = 1, z = 0)$, $C(u = u_0, z = 0)$, $D(v = z = 0)$ — сложные, то для каждой из них, по крайней мере, один характеристический корень равен нулю. Поэтому $a_{30} = b_{03} = 0$. Но в силу (3.1.3.2) и (3.1.3.7)

$b_{21}a_{12} \neq 0$. Более того, $b_{21} + a_{12} \neq 0$. (В противном случае точки B и C совпадут). Таким образом, $\lambda_2(1) \neq 0$, но $\lambda_1(1) = -a_{21} - a_{12} = 0$ и $\lambda_2(u_0) \neq 0$, но

$$\lambda_1(u_0) = -\left(\frac{a_{12}b_{21}^2}{a_{12}^2} - \frac{a_{21}b_{21}}{a_{12}}\right) = 0.$$

Из системы уравнений

$$a_{21} + a_{12} = 0,$$

$$b_{21} - a_{21} = 0$$

следует равенство $b_{21} + a_{12} = 0$ противоречащее тому, что точки B и C — не совпадающие особые точки. Теорема доказана.

Теорема 3.1.3.3. *Если система (3.1.1.15) имеет на экваторе сферы Пуанкаре четыре особые точки, то среди них не может быть ни одной с двумя нулевыми характеристическими корнями.*

В самом деле, в силу неравенства (3.1.3.4) и формул (3.1.3.2) и (3.1.3.7) два нулевых характеристических корня могут иметь разве что особые точки B и C . Если предположить, что хотя бы одна из этих особых точек имеет два нулевых характеристических корня, то непременно будет выполнено равенство $b_{21} - a_{30} = b_{03} - a_{12}$, из которого следует, что $u_0 = 1$, то есть B и C совпадают. Но это не так.

Следствие 3.1.3.1. *Если система (3.1.1.15) имеет четыре особые точки на экваторе сферы Пуанкаре, то сложные из них могут быть только седлоузлами, либо топологическими узлами, либо топологическими седлами (см. теорему 65 [80]).*

Теорема 3.1.3.4. *Если система (3.1.1.15) имеет на экваторе сферы Пуанкаре четыре особые точки A, B, C и D , в том числе три сложных, то A и D — сложные.*

Доказательство. Предположим, что D — простая особая точка. Тогда в силу (3.1.3.2) $b_{03}(a_{12} - b_{03}) \neq 0$ и по теореме 3.1.3.3 точки A, B, C имеют по одному нулевому характеристическому корню. Принимая во внимание неравенство $b_{21} \neq b_{03} - a_{12}$ (в противном случае B и C совпадают) и выражения (3.1.3.8) и (3.1.3.9) для характеристических корней особых точек B и C , получаем систему уравнений

$$a_{21} + a_{12} = 0,$$

$$\frac{a_{12}b_{21}^2}{(b_{03} - a_{12})^2} + \frac{a_{21}b_{21}}{b_{03} - a_{12}} = 0.$$

Из последней системы следует равенство:

$$\frac{a_{12}b_{21}}{b_{03} - a_{12}} \left(\frac{b_{21}}{b_{03} - a_{12}} - 1 \right) = 0. \quad (3.1.3.11)$$

Из (3.1.3.11) следует равенство $a_{12} = 0$, а значит $a_{21} = 0$. Это противоречит предположению $\sum_{i+j=3} |a_{ij}| > 0$.

Пусть A — простая особая точка системы (3.1.1.16), тогда $a_{30}(b_{21} - a_{30}) \neq 0$. По теореме 3.1.3.3 особые точки B, C и D имеют по одному нулевому характеристическому корню. Учитывая неравенство $b_{21} - a_{30} \neq 0$ и выражения (3.1.3.8), (3.1.3.9) для характеристических корней особых точек B и C , получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a_{30} + a_{21} + a_{12} = 0, \\ a_{30} - \frac{a_{21}(b_{21} - a_{30})}{a_{12}} + \frac{(b_{21} - a_{30})^2}{a_{12}} = 0. \end{cases} \quad (3.1.3.12)$$

Из системы (3.1.3.12) следует, что $b_{21} = 0$ или $b_{21} = -a_{21} - 2a_{12}$. Если $b_{21} = -a_{21} - 2a_{12}$, то $u_0 = 1$, следовательно, точки B и C совпадают, что недопустимо. Если $b_{21} = 0$, то мы противоречим условию $\sum_{i+j=3} |b_{ij}| > 0$, так как в силу первого уравнения системы (3.1.3.12) и (3.1.3.5) $b_{12} = 0$. Теорема доказана.

Теорема 3.1.3.5. *Если система (3.1.1.15) имеет на экваторе сферы Пуанкаре три сложных и одну простую особые точки, то простая особая точка непременно является узлом.*

Доказательство. Пусть A, B, C и D , являются особыми точками системы (3.1.1.15) на бесконечности, такое предположение не умаляет общности рассуждений. Тогда по теореме 3.1.3.4 A и D — сложные особые точки, и с учетом (3.1.3.4) имеем условие $a_{30} = b_{03} = 0, a_{12}b_{21} \neq 0$. Кроме этого, $a_{12} + b_{21} \neq 0$ (в противном случае B и C совпадают).

Пусть B — простая особая точка, тогда $a_{12} + a_{21} \neq 0, b_{21}^2/a_{12} - a_{21}b_{21}/a_{12} = 0$. Отсюда следует равенство $b_{21} = a_{21}$. Это означает в соответствии с (3.1.3.8), что характеристические корни особой точки B равны и отличны от нуля, то есть B — узел. Если предположить, что

C — простая особая точка, то будет выполнено условие $a_{12} + a_{21} = 0$, $b_{21}^2/a_{12} + b_{21} \neq 0$. Отсюда следует, что характеристические корни особой точки C будут равны $-\frac{b_{21}}{a_{12}}(b_{12} + a_{12})$, то есть точка C является узлом. Теорема доказана.

Для краткости дальнейшего изложения введем обозначения: $у$ — простой узел, $с$ — простое седло, $су$ — седлоузел, к которому примыкают два гиперболических и один параболический секторы, $ту$ — топологический узел (сложная особая точка, достаточно малая окрестность U_ε которой не содержит ни эллиптических, ни гиперболических секторов так, что любая траектория, проходящая через U_ε , стремится к этой точке в определенном направлении при $t \rightarrow +\infty$ (либо при $t \rightarrow -\infty$); mc — топологическое седло (сложная особая точка, к которой примыкают четыре гиперболических сектора); $сэ$ — особая точка, к которой примыкают один гиперболический и один эллиптический секторы.

Теорема 3.1.3.6. *Если система (3.1.1.15) имеет на экваторе сферы Пуанкаре четыре особые точки, из которых три сложные, то возможны следующие случаи распределения этих сложных особых точек:*

- 3су;
- 3mc;
- 3ту;
- 2су, 1ту;
- 2су, 1mc;
- 1су; 2ту;
- 1су, 2mc;
- 1су, 1ту, 1mc;
- 2ту, 1mc;
- 2mc, 1ту.

Справедливость теоремы следует из следствия 3.1.3.1.

Очевидно, в условиях теоремы 3.1.3.6 четвертая особая точка является простым узлом.

Приведем примеры систем (3.1.1.15), удовлетворяющих условиям теоремы 3.1.3.6.

Пример 54.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + x^2 + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y + x^2y + xy^2. \end{cases}$$

Особыми точками системы на бесконечности являются: $A(u = z = 0)$, $C(u = -1, z = 0)$ — седлоузлы, $D(v = z = 0)$ — топологическое седло, $B(u = 1, z = 0)$ — простой узел.

Пример 55.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + x^2 + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -y + x^2y + xy^2. \end{cases}$$

Седлоузлы: $A(u = z = 0)$, $C(u = -1, z = 0)$, топологический узел $D(v = z = 0)$ и простой устойчивый узел $B(u = 1, z = 0)$ являются особыми точками системы на бесконечности.

Пример 56.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3x^2y - xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -y + 3x^2y - xy^2. \end{cases}$$

Система имеет на экваторе сферы Пуанкаре два топологических седла $A(u = z = 0)$, $D(v = z = 0)$, топологический узел $C(u = 3, z = 0)$ и простой устойчивый узел $B(u = 1, z = 0)$.

Пример 57.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 3x^2y - xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -y + 3x^2y - xy^2. \end{cases}$$

Особыми точками системы на бесконечности являются: топологические узлы $A(u = z = 0)$, $C(u = 3, z = 0)$, топологическое седло $D(v = z = 0)$ и простой устойчивый узел $B(u = 1, z = 0)$.

Пример 58.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = 3xy + y^2 + 3x^2y + xy^2. \end{cases}$$

На бесконечности система имеет четыре особые точки, в том числе: $D(v = z = 0)$ — седлоузел, $A(u = z = 0)$ — топологическое седло, $C(u = -3, z = 0)$ — топологический узел, $B(u = 1, z = 0)$ — простой устойчивый узел.

Пример 59.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3x^2y - xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y + 3xy - y^2 + 3x^2y - xy^2. \end{cases}$$

На экваторе сферы Пуанкаре расположены четыре особые точки: $A(u = z = 0)$, $C(u = 3, z = 0)$ — топологические седла, $D(v = z = 0)$ — седлоузел, $B(u = 1, z = 0)$ — простой устойчивый узел.

Пример 60.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 3x^2y - xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -y + 3xy - y^2 + 3x^2y - xy^2. \end{cases}$$

Бесконечно удаленными особыми точками системы являются: топологические узлы $A(u = z = 0)$ и $C(u = 3, z = 0)$, седлоузел $D(v = z = 0)$, простой устойчивый узел $B(u = 1, z = 0)$.

Далее рассмотрим случай двух сложных особых точек из четырех, расположенных на экваторе сферы Пуанкаре.

Теорема 3.1.3.7. *Пусть A , B , C и D — особые точки системы (3.1.1.15) на экваторе сферы Пуанкаре, причем A и D — простые, а B и C — сложные. Тогда A и D — не могут быть одновременно седлами.*

Доказательство. По условию $a_{30}(b_{21} - a_{30}) \neq 0$, $b_{03}(a_{12} - b_{03}) \neq 0$. Согласно теореме 3.1.3.3 точки B и C имеют только по одному нулевому характеристическому корню, а так как $(b_{21} - a_{30})/(b_{03} - a_{12}) \neq 1$, то в силу (3.1.3.8) и (3.1.3.9) имеем систему уравнений:

$$a_{30} = -a_{21} - a_{12}, \quad \frac{a_{12}(b_{21} - a_{30})^2}{(b_{03} - a_{12})^2} + \frac{a_{21}(b_{21} - a_{30})}{(b_{03} - a_{12})} = 0. \quad (3.1.3.13)$$

Из (3.1.3.13) следует равенство

$$a_{30} = \frac{a_{12}b_{21}}{b_{03}}. \quad (3.1.3.14)$$

Теперь покажем, что система неравенств

$$\begin{cases} a_{30}(b_{21} - a_{30}) > 0, \\ b_{03}(a_{12} - b_{03}) > 0 \end{cases} \quad (3.1.3.15)$$

несовместна. Это и будет означать, что A и D не могут быть одновременно седлами.

В силу (3.1.3.14) система (3.1.3.15) запишется в виде:

$$\begin{cases} \frac{a_{12}b_{21}^2}{b_{03}^2}(b_{03} - a_{12}) > 0, \\ b_{03}(a_{12} - b_{03}) > 0. \end{cases} \quad (3.1.3.16)$$

Но система (3.1.3.16) несовместна. Теорема доказана.

Теорема 3.1.3.8. *Пусть A, B, C и D – особые точки системы (3.1.1.15) на экваторе сферы Пуанкаре, причем A и D – простые, а B и C – сложные. Тогда A и D – узлы в том и только в том случае, когда $a_{12}b_{03} < 0$.*

Доказательство. Пусть A и D – узлы. Согласно условиям теоремы имеет место равенство:

$$a_{30}(b_{21} - a_{30}) = \frac{a_{12}b_{21}^2}{b_{03}^2}(b_{03} - a_{12}), \quad (3.1.3.17)$$

а также система неравенств:

$$\begin{cases} a_{30}(b_{21} - a_{30}) < 0, \\ b_{03}(a_{12} - b_{03}) > 0. \end{cases} \quad (3.1.3.18)$$

Пусть $a_{12} > 0$. Тогда из (3.1.3.17) и (3.1.3.18) следует неравенство $b_{03} - a_{12} < 0$, которое равносильно неравенству $a_{12} - b_{03} > 0$. Из последнего неравенства и второго неравенства системы (3.1.3.18) следует, что $b_{03} < 0$, то есть $a_{12}b_{03} < 0$. Если $a_{12} < 0$, $b_{03} - a_{12} > 0$, то $a_{12} - b_{03} < 0$. Принимая во внимание второе неравенство системы (3.1.3.18), получаем неравенство $b_{03} > 0$, то есть и в этом случае $a_{12}b_{03} < 0$.

Пусть теперь выполняется неравенство $a_{12}b_{03} < 0$. Воспользуемся условием (3.1.3.17), которое выполняется. Если $a_{12} < 0$, то $b_{03} > 0$, то есть D – устойчивый узел. Согласно условию (3.1.3.17) A – также узел. Если $a_{12} > 0$, то $b_{03} < 0$, $a_{12} - b_{03} > 0$, то есть D – неустойчивый узел. В силу условия (3.1.3.17) A – также узел. Теорема доказана.

Из теорем 3.1.3.7 и 3.1.3.8 следует

Теорема 3.1.3.9. *Пусть A, B, C и D – особые точки системы (3.1.1.15) на экваторе сферы Пуанкаре, причем A и D – простые, а B и C – сложные. Тогда, если $a_{12}b_{03} > 0$, то A – седло, D – узел, либо A – узел, D – седло.*

Далее предположим, что A и D сложные, а B и C — простые особые точки системы (3.1.1.15) на экваторе сферы Пуанкаре. Тогда согласно теореме 3.1.3.3 $a_{30} = b_{03} = 0$, но в силу (3.1.3.4) $a_{12}b_{21} \neq 0$.

Покажем, что B и C не могут быть одновременно седлами.

Допустим, что это не так. Тогда принимая во внимание (3.1.3.2), (3.1.3.7)-(3.1.3.9), получаем систему неравенств

$$\begin{cases} (a_{21} + a_{12})(b_{21} + a_{12}) < 0, \\ \frac{b_{21}^2}{a_{12}^2}(b_{21} - a_{21})(b_{21} + a_{12}) < 0. \end{cases} \quad (3.1.3.19)$$

Перепишем систему (3.1.3.19) в равносильном виде:

$$\begin{cases} (a_{21} + a_{12})(b_{21} + a_{12}) < 0, \\ (b_{21} - a_{21})(b_{21} + a_{12}) < 0. \end{cases} \quad (3.1.3.20)$$

Складывая оба неравенства системы (3.1.3.20), получаем неравенство $(b_{21} + a_{12})^2 < 0$.

Тем самым доказана

Теорема 3.1.3.10. *Если A и D — сложные, а B и C — простые особые точки системы (3.1.1.15) на экваторе сферы Пуанкаре, то B и C не могут быть одновременно седлами.*

Теорема 3.1.3.11. *Если A и D — сложные, а B и C — простые особые точки системы (3.1.1.15) на экваторе сферы Пуанкаре, то B и C узлы тогда и только тогда, когда $(a_{21} + a_{12})(b_{21} - a_{21}) > 0$.*

Доказательство. Пусть B и C — узлы, тогда в силу (3.1.3.8) и (3.1.3.9) должны быть выполнены неравенства

$$\begin{cases} (a_{21} + a_{12})(b_{21} + a_{12}) > 0, \\ (b_{21} - a_{21})(b_{21} + a_{12}) > 0. \end{cases} \quad (3.1.3.21)$$

Перемножим оба неравенства системы (3.1.3.21) и получим требуемое неравенство $(a_{21} + a_{12})(b_{21} - a_{21}) > 0$.

Пусть теперь выполняется неравенство $(a_{21} + a_{12})(b_{21} - a_{21}) > 0$, но при этом $(b_{21} - a_{21})(b_{21} + a_{12}) < 0$, тогда имеет место система неравенств.

$$\begin{cases} (a_{21} + a_{12})(b_{21} - a_{21}) > 0, \\ (b_{21} - a_{21})(-b_{21} - a_{12}) > 0. \end{cases} \quad (3.1.3.22)$$

Складывая оба неравенства системы (3.1.3.22), получаем невыполнимое неравенство $(b_{21} - a_{21})^2 < 0$.

Если допустить, что наряду с неравенством $(a_{21} + a_{12})(b_{21} - a_{21}) > 0$ выполняется неравенство $(a_{21} + a_{12})(b_{21} + a_{12}) < 0$, то аналогичными рассуждениями получим противоречивое неравенство $(a_{21} + a_{12})^2 < 0$.

Теорема доказана.

Теорема 3.1.3.12. *Если A и D — сложные, а B и C — простые особые точки системы (3.1.1.15) на экваторе сферы Пуанкаре, то при $(a_{21} + a_{12})(b_{21} - a_{21}) < 0$ B — седло и C — узел, либо B — узел и C — седло.*

Справедливость данной теоремы следует из теорем 3.1.3.10 и 3.1.3.11.

Пусть далее A и B — сложные особые точки, то есть $a_{30}b_{21} \neq 0$, кроме того, $b_{21} \neq b_{03} - a_{12}$ (B и C не совпадают), $b_{03}(a_{12} - b_{03}) \neq 0$, $a_{12} + a_{21} = 0$.

Теорема 3.1.3.13. *Если A и B — сложные, а D и C — простые особые точки системы (3.1.1.15) на экваторе сферы Пуанкаре, то D и C не могут быть одновременно седлами.*

Доказательство. Характеристические корни особой точки C задаются формулами:

$$\begin{aligned}\lambda_1(C) &= \frac{a_{12}b_{21}}{a_{12} - b_{03}} \left(\frac{b_{21}}{b_{03} - a_{12}} - 1 \right), \\ \lambda_2(C) &= \frac{b_{21}}{(b_{03} - a_{12})^2} \left(\frac{b_{21}}{b_{03} - a_{12}} - 1 \right).\end{aligned}\tag{3.1.3.23}$$

Предположим, что D и C — седла. Тогда с учетом (3.1.3.23) получаем систему неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{03}(a_{12} - b_{03}) > 0, \\ \frac{a_{12}b_{21}^2}{(a_{12} - b_{03})^3} \left(\frac{b_{21}}{b_{03} - a_{12}} - 1 \right)^2 < 0, \end{array} \right.$$

которая равносильна системе

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{12}(a_{12} - b_{03}) < 0, \\ -b_{03}(a_{12} - b_{03}) < 0. \end{array} \right.\tag{3.1.3.24}$$

Из (3.1.3.24) следует противоречивое неравенство $(a_{12} - b_{03})^2 < 0$.

Теорема доказана.

Теорема 3.1.3.14. *Если A и B — сложные, а D и C — простые особые точки системы (3.1.1.15) на экваторе сферы Пуанкаре, то D и C — узлы в том и только в том случае, когда $a_{12}b_{03} < 0$.*

Доказательство. Пусть D и C — простые узлы, A и B — сложные особые точки системы (3.1.1.15) на экваторе сферы Пуанкаре. Тогда имеет место система неравенств:

$$\begin{cases} b_{03}(a_{12} - b_{03}) < 0, \\ \frac{a_{12}b_{21}^2}{(a_{12} - b_{03})^3} \left(\frac{b_{21}}{b_{03} - a_{12}} - 1 \right)^2 > 0, \end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} a_{12}(a_{12} - b_{03}) > 0, \\ -b_{03}(a_{12} - b_{03}) > 0. \end{cases} \quad (3.1.3.25)$$

Из (3.1.3.25) следует, что $a_{12}b_{03} < 0$.

Обратно, пусть $a_{12}b_{03} < 0$. Тогда $-a_{12}b_{03} > 0$, и имеет место система (3.1.3.25), либо система

$$\begin{cases} a_{12}(a_{12} - b_{03}) < 0, \\ -b_{03}(a_{12} - b_{03}) < 0. \end{cases}$$

Последняя система несовместна согласно теореме 3.1.3.13, а в силу (3.1.3.25) D и C — узлы. Теорема доказана.

Вышеприведенными рассуждениями доказываются ниже сформулированные теоремы.

Теорема 3.1.3.15. *Пусть A и B — простые, а D и C — сложные особые точки системы (3.1.1.15) на экваторе сферы Пуанкаре. Тогда A и B не могут быть одновременно седлами.*

Теорема 3.1.3.16. *Пусть A и B — простые, а D и C — сложные особые точки системы (3.1.1.15) на экваторе сферы Пуанкаре. Тогда A и B узлы в том и только в том случае, когда $b_{21}a_{30} < 0$.*

Теорема 3.1.3.17. *Пусть A и C — сложные, а D и B — простые особые точки системы (3.1.1.15) на экваторе сферы Пуанкаре. Тогда D и B не могут быть одновременно седлами.*

Теорема 3.1.3.18. Пусть A и C — сложные, а D и B — простые особые точки системы (3.1.1.15) на экваторе сферы Пуанкаре. Тогда D и B узлы в том и только в том случае, когда $a_{12}b_{03} < 0$.

Теорема 3.1.3.19. Пусть A и C — простые, а D и B — сложные особые точки системы (3.1.1.15) на экваторе сферы Пуанкаре. Тогда A и C не могут быть одновременно седлами.

Теорема 3.1.3.20. Пусть A и C — простые, а D и B — сложные особые точки системы (3.1.1.15) на экваторе сферы Пуанкаре. Тогда A и C узлы в том и только в том случае, когда $b_{21}a_{30} < 0$.

Из выше приведенных теорем следует

Теорема 3.1.3.21. Если система (3.1.1.15) имеет на экваторе сферы Пуанкаре две сложные и две простых особых точки, то простые точки не могут быть одновременно седлами.

Из теоремы 3.1.3.21 и следствия 3.1.3.1 вытекает

Теорема 3.1.3.22. Если система (3.1.1.15) имеет на экваторе сферы Пуанкаре две простых и две сложных особых точки, то возможны следующие случаи их распределения и только они: а) 2су, 1с, 1у; б) 2су, 2у; в) 1су, 1му, 1с, 1у; г) 1су, 1му, 2у; д) 1су, 1mc, 1с, 1у; е) 1су; 1mc, 2у; ж) 2му, 1с, 1у; з) 2му, 2у; и) 1му, 1mc, 1с, 1у; к) 1му, 1mc, 2у; л) 2mc, 1с, 1у; м) 2mc, 2у.

Приведем примеры дифференциальных систем, удовлетворяющих условиям теоремы 3.1.3.22.

Пример 61.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + x^2 + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y + y^2 + 2x^2y. \end{cases}$$

На бесконечности данная система имеет два седлоузла $A(u = z = 0)$, $D(v = z = 0)$, а также простые узлы $B(u = 1, z = 0)$ и $C(u = -2, z = 0)$.

Пример 62.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + x^2 + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y + y^2 - 2x^2y + 4xy^2. \end{cases}$$

Особыми точками системы на бесконечности являются: седлоузлы $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$, простой узел $C(u = -2, z = 0)$ и простое

седло $B(u = 1, z = 0)$.

Пример 63. Седлоузел $A(u = z = 0)$, топологический узел $D(v = z = 0)$, простое седло $B(u = 1, z = 0)$ и простой узел $C(u = 2, z = 0)$ — особые точки системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + x^2 + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -y - 2x^2y + 4xy^2. \end{cases}$$

на бесконечности.

Пример 64. Для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + x^2 + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y - 2x^2y + 4xy^2. \end{cases}$$

особыми точками на бесконечности являются: седлоузел $A(u = z = 0)$, топологическое седло $D(v = z = 0)$, простое седло $B(u = 1, z = 0)$, простой узел $C(u = 2, z = 0)$.

Пример 65.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + x^2 + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -2y + 3x^2y - xy^2. \end{cases}$$

Особыми точками системы на бесконечности являются: седлоузел $A(u = z = 0)$, топологический узел $D(v = z = 0)$, простые узлы $B(u = 1, z = 0)$ и $C(u = -3, z = 0)$.

Пример 66.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + x^2 + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y + 3x^2y - xy^2. \end{cases}$$

На бесконечности система имеет четыре особые точки, в том числе: седлоузел $A(u = z = 0)$, $D(v = z = 0)$ — топологическое седло, $B(u = 1, z = 0)$ и $C(u = -3, z = 0)$ — простые узлы.

Пример 67.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y + 3x^2y - xy^2. \end{cases}$$

Топологические узлы $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$, простые узлы $B(u = 1, z = 0)$ и $C(u = -3, z = 0)$ являются особыми точками данной системы на бесконечности.

Пример 68. На экваторе сферы Пуанкаре система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + y - 3x^2y + 5xy^2 \end{cases}$$

имеет четыре особые точки: $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$ — топологические узлы, $B(u = 1, z = 0)$ — простое седло, $C(u = 3, z = 0)$ простой узел.

Пример 69.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + y + 3x^2y - xy^2. \end{cases}$$

Особыми точками системы на бесконечности являются: топологический узел $A(u = z = 0)$, топологическое седло $D(v = z = 0)$, простые узлы $B(u = 1, z = 0)$ и $C(u = -3, z = 0)$.

Пример 70.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + y - 3x^2y + 5xy^2. \end{cases}$$

Система имеет на экваторе сферы Пуанкаре четыре особые точки: топологический узел $A(u = z = 0)$, топологическое седло $D(v = z = 0)$, простое седло $B(u = 1, z = 0)$ и простой узел $C(u = 3, z = 0)$.

Пример 71.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + 3x^2y - xy^2. \end{cases}$$

Система имеет на бесконечности два топологических седла $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$, а также два простых узла $B(u = 1, z = 0)$ и $C(u = -3, z = 0)$.

Пример 72.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y - 2x^2y + 4xy^2. \end{cases}$$

Особыми точками системы на бесконечности являются: топологические седла $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$, простое седло $B(u = 1, z = 0)$ и простой узел $C(u = 2, z = 0)$.

Далее исследуем систему (3.1.1.15) в случае, когда из четырех особых точек на экваторе сферы Пуанкаре только одна кратная.

Из теоремы 3.1.3.3 и [80] следует

Теорема 3.1.3.23. *Если система (3.1.1.15) имеет на экваторе сферы Пуанкаре четыре особые точки, то единственная кратная из них может быть либо седлоузлом, либо топологическим узлом, либо топологическим седлом.*

Теорема 3.1.3.24. *Если система (3.1.1.15) имеет на экваторе сферы Пуанкаре четыре особые точки, в том числе одну кратную, то остальные три не могут быть одновременно седлами.*

Доказательство. Доказательство проведем в случае, когда из четырех особых точек A, B, C и D точка A является сложной. В остальных случаях, когда сложной особой точкой является одна из точек B, C и D , рассуждения аналогичны.

Допустим противное, то есть A — сложная особая точка, а точки B, C и D — простые седла. Тогда имеет место система:

$$a_{30} = 0,$$

$$-b_{03}(a_{12} - b_{03}) < 0,$$

$$-(a_{21} + a_{12})(b_{03} - b_{21} - a_{12}) < 0,$$

$$-\left(\frac{a_{12}b_{21}^2}{(b_{03} - a_{12})^2} + \frac{a_{21}b_{21}}{b_{03} - a_{12}}\right)\frac{b_{21}(b_{21} + a_{12} - b_{03})}{b_{03} - a_{12}} < 0,$$

из которой вытекает следующая система неравенств:

$$(a_{21} + a_{12})(b_{21} + a_{12} - b_{03}) < 0, \quad (3.1.3.26)$$

$$\frac{b_{21}^2}{(b_{03} - a_{12})^2} \left(\frac{a_{12}b_{21}}{b_{03} - a_{12}} + a_{21} \right) (b_{21} + a_{12} - b_{03}) > 0, \quad (3.1.3.27)$$

$$b_{03}(b_{03} - a_{12}) < 0. \quad (3.1.3.28)$$

Пусть $b_{21} + a_{12} - b_{03} > 0$ (в случае $b_{21} + a_{12} - b_{03} < 0$ рассуждения аналогичны). Тогда из (3.1.3.26) и (3.1.3.27) следуют неравенства:

$$a_{21} + a_{12} < 0, \quad (3.1.3.29)$$

$$\frac{a_{12}b_{21}}{b_{03} - a_{12}} + a_{21} > 0. \quad (3.1.3.30)$$

Из (3.1.3.29) и (3.1.3.30) легко получим, что

$$\frac{a_{12}b_{21}}{b_{03} - a_{12}} - a_{12} > 0.$$

Из последнего неравенства следует неравенство:

$$a_{12}(b_{03} - a_{12}) > 0. \quad (3.1.3.31)$$

Умножив обе части неравенства (3.1.3.31) на -1 и сложив с неравенством (3.1.3.28), получаем невыполнимое неравенство $(b_{03} - a_{12})^2 < 0$. Теорема доказана.

Теорема 3.1.3.25. *Если система (3.1.1.15) имеет на бесконечности четыре особые точки, в том числе A — сложную, то остальные три особые точки B, C и D — простые узлы в том и только в том случае, когда*

$$a_{12}b_{03} < 0, \quad (a_{21} + a_{12}) \left(\frac{a_{12}b_{21}}{b_{03} - a_{12}} + a_{21} \right) < 0. \quad (3.1.3.32)$$

Доказательство. Пусть A — сложная особая точка системы (3.1.3.15) на бесконечности. Тогда в силу теоремы 3.1.3.3 и неравенства (3.1.3.4) выполняется условие $a_{30} = 0, b_{21} \neq 0$. Потребуем, чтобы точки B, C и D были простыми узлами, то есть выполнения неравенств:

$$b_{03}(b_{03} - a_{12}) > 0, \quad (3.1.3.33)$$

$$(a_{21} + a_{12})(b_{21} + a_{12} - b_{03}) > 0, \quad (3.1.3.34)$$

$$(b_{21} + a_{12} - b_{03}) \left(\frac{a_{12}b_{21}}{b_{03} - a_{12}} + a_{21} \right) < 0. \quad (3.1.3.35)$$

Из (3.1.3.34) и (3.1.3.35) следует второе неравенство системы (3.1.3.32). Сложим неравенство (3.1.3.34) с неравенством (3.1.3.35), умножив предварительно обе части первого на -1 . В результате получим неравенство

$$(b_{21} + a_{12} - b_{03})^2 \frac{a_{12}}{b_{03} - a_{12}} < 0,$$

из которого следует, что

$$a_{12}(b_{03} - a_{12}) < 0. \quad (3.1.3.36)$$

Из (3.1.3.33) и (3.1.3.36) следует неравенство $a_{12}b_{03} < 0$. Необходимость доказана.

Докажем теперь достаточность. Пусть выполняется условие (3.1.3.32). Из неравенства $a_{12}b_{03} < 0$ следует (3.1.3.33), то есть D — простой узел. Покажем, что B и C — также простые узлы.

Предположим противное, то есть: а) либо B и C — седла; либо одна из особых точек B и C — седло. В случае а) мы имеем систему неравенств:

$$(a_{21} + a_{12})(b_{21} + a_{12} - b_{03}) < 0, \quad (3.1.3.37)$$

$$(b_{21} + a_{12} - b_{03}) \left(\frac{a_{12}b_{21}}{b_{03} - a_{12}} + a_{21} \right) > 0. \quad (3.1.3.38)$$

Из (3.1.3.37) и (3.1.3.38) следует неравенство $a_{12}(b_{03} - a_{12}) > 0$, что противоречит неравенству $a_{12}b_{03} < 0$. В случае б) ради определенности полагаем, что B — простое седло, C — узел. Тогда выполняется система неравенств:

$$(a_{21} + a_{12})(b_{21} + a_{12} - b_{03}) < 0, \quad (3.1.3.39)$$

$$(b_{21} + a_{12} - b_{03}) \left(\frac{a_{12}b_{21}}{b_{03} - a_{12}} + a_{21} \right) < 0. \quad (3.1.3.40)$$

Из (3.1.3.39) и (3.1.3.40) следует неравенство

$$(a_{21} + a_{12}) \left(\frac{a_{12}b_{21}}{b_{03} - a_{12}} + a_{21} \right) > 0,$$

что противоречит второму из двух неравенств (3.1.3.32). Теорема доказана.

Из двух последних теорем следует

Теорема 3.1.3.26. *Если система (3.1.1.15) имеет на экваторе сферы Пуанкаре четыре особые точки, в том числе одну сложную и три простые, то возможны следующие случаи их распределения, и только они: а) 1су, 3у; б) 1су, 2у, 1с; в) 1су, 2с, 1у; г) 1му, 3у; д) 1му, 2с, 1у; е) 1му, 2у, 1с; ж) 1mc, 3у; з) 1mc, 2с, 1у; и) 1mc, 2у, 1с.*

Ниже приведены примеры систем дифференциальных уравнений, удовлетворяющих условиям теоремы 3.1.3.26.

Пример 73.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + x^2 + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y + 4x^2y - xy^2 - y^3. \end{cases}$$

На бесконечности система имеет четыре особые точки, в том числе: седлоузел $A(u = z = 0)$, $B(u = 1, z = 0)$, $C(u = -2, z = 0)$ и $D(v = z = 0)$ — простые узлы.

Пример 74.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + x^2 + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y - 4x^2y + 4xy^2 + 2y^3. \end{cases}$$

Особыми точками системы на экваторе сферы Пуанкаре являются: седлоузел $A(u = z = 0)$, простые седла $B(u = 1, z = 0)$, $C(u = -4, z = 0)$ и простой узел $D(v = z = 0)$.

Пример 75.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + x^2 + x^2y + 2xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + 2x^2y + y^3. \end{cases}$$

Система имеет четыре особые точки на экваторе сферы Пуанкаре, в том числе: седлоузел $A(u = z = 0)$, простые узлы $B(u = 1, z = 0)$ и $C(u = -2, z = 0)$, простое седло $D(v = z = 0)$.

Пример 76. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + 4x^2y - xy^2 - y^3 \end{cases}$$

имеет на экваторе сферы Пуанкаре четыре особые точки: топологический узел $A(u = z = 0)$, простые узлы $B(u = 1, z = 0)$ и $C(u = -2, z = 0)$, простое седло $D(v = z = 0)$.

Пример 77. Для дифференциальной системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + y - 4x^2y + 4xy^2 + 2y^3 \end{cases}$$

бесконечно удаленными особыми точками являются: топологический узел $A(u = z = 0)$, простые седла $B(u = 1, z = 0)$ и $C(u = -4, z = 0)$, простой узел $D(v = z = 0)$.

Пример 78.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + x^2y + 2xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + 5y + 2x^2y + y^3. \end{cases}$$

На бесконечности система имеет четыре особые точки: топологический узел $A(u = z = 0)$, простые узлы $B(u = 1, z = 0)$ и $C(u = -2, z = 0)$, простое седло $D(v = z = 0)$.

Пример 79. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + 4x^2y - xy^2 - y^3 \end{cases}$$

на бесконечности система имеет четыре особые точки: топологическое седло $A(u = z = 0)$, простые узлы $B(u = 1, z = 0)$ и $D(v = z = 0)$, простое седло $C(u = -2, z = 0)$.

Пример 80. На экваторе сферы Пуанкаре система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + y - 4x^2y + 4xy^2 + 2y^3 \end{cases}$$

имеет четыре особые точки: топологическое седло $A(u = z = 0)$, простые седла $B(u = 1, z = 0)$ и $C(u = -4, z = 0)$, простой узел $D(v = z = 0)$.

Пример 81. Бесконечно удаленными особыми точками системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + x^2y + 2xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + 5y + 2x^2y + y^3 \end{cases}$$

являются: $A(u = z = 0)$ — топологическое седло, $B(u = 1, z = 0)$ и $C(u = -2, z = 0)$ — простые узлы, $D(v = z = 0)$ — простое седло.

3.1.4 Исследование типов бесконечно удаленных особых точек кубической системы. Случай трех особых точек

Теорема 3.1.4.1. *Если система (3.1.1.15) имеет на экваторе сферы Пуанкаре три особые точки и только три, то, по крайней мере, одна из них кратная.*

Доказательство. Не уменьшая общности рассуждений, считаем, что $A(u = z = 0)$ — особая точка системы (3.1.1.16). Предположим, что $D(v = z = 0)$ не является особой точкой системы (3.1.1.34). Тогда $a_{03} \neq 0$, и уравнение (3.1.3.10), как алгебраическое уравнение четвертой степени, имеет два простых и один двукратный корень. При этом, очевидно, кратному корню уравнения (3.1.3.10) соответствует кратная (сложная) особая точка.

Если $D(v = z = 0)$ — особая точка системы (3.1.1.34), то $a_{03} = 0$. Следовательно, при $b_{03} - a_{12} \neq 0$ кубическое уравнение (3.1.3.10) имеет один простой и один двукратный корень, которому соответствует сложная особая точка.

Если же $b_{03} - a_{12} = 0$, то сама точка $D(v = z = 0)$ - кратная особая точка системы (3.1.1.34). Теорема доказана.

Для исследования характера трех бесконечно удаленных особых точек системы (3.1.1.15) считаем, не умаляя общности, что $A(u = z = 0)$, $B(u = 1, z = 0)$ — особые точки системы (3.1.1.16), а $D(v = z = 0)$ — особая точка системы (3.1.1.34). Тогда выполняется (3.1.3.3).

Случай 1. $b_{03} - a_{12} \neq 0$.

Уравнение (3.1.3.10) запишется в виде: $u[(b_{03} - a_{12})u^2 + (b_{12} - a_{21})u + b_{21} - a_{30}] = 0$.

Из тождества

$$(b_{03} - a_{12})u^2 + (b_{12} - a_{21})u + b_{21} - a_{30} \equiv (b_{03} - a_{12})(u^2 - 2u + 1). \quad (3.1.4.1)$$

следуют соотношения:

$$b_{12} - a_{21} = -2(b_{03} - a_{12}), \quad (3.1.4.2)$$

$$b_{21} - a_{30} = b_{03} - a_{12}. \quad (3.1.4.3)$$

Отметим, что рассматриваемый нами случай 1 является предельным для случая четырех особых точек, когда B и C сливаются в одну точку ($u_0 = 1$).

Характеристические корни особых точек A , B и D будут иметь соответственно вид: (3.1.3.7); $\lambda_1(B) = -a_{30} - a_{21} - a_{12}$, $\lambda_2(B) = 0$.

Нетрудно увидеть, что точки A и D , будучи простыми узлами, имеют противоположную устойчивость.

Пусть A — простой устойчивый узел, а D — простой неустойчивый узел системы (3.1.1.15) на бесконечности. Тогда выполняются условия: $a_{30} > 0$, $b_{21} - a_{30} < 0$, $b_{03} < 0$, $a_{12} - b_{03} > 0$.

Выясним характер кратной особой точки $B(u = 1, z = 0)$ системы (3.1.1.16). Для этого начало координат системы (3.1.1.16) совместим с

точкой B . Тогда система примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = (b_{20} + b_{11} - a_{20} + b_{02} - a_{11} - a_{02})z + (b_{03} - a_{12})u^2 + \\ \quad + (b_{11} - a_{20} + 2b_{02} - 2a_{11} - 3a_{02})uz + (b_{10} + b_{01} - \\ \quad - a_{10} - a_{01})z^2 + (b_{03} - a_{12})u^3 + (b_{02} - a_{11} - 3a_{02})u^2z + \\ \quad + (b_{01} - a_{10} - 2a_{01})uz^2 + (b_{00} - a_{00})z^3 - a_{02}u^3z - \\ \quad - a_{01}u^2z^2 - a_{00}uz^3, \\ \frac{dz}{dt} = -(a_{30} + a_{21} + a_{12})z - (a_{21} + 2a_{12})uz - (a_{20} + a_{11} + \\ \quad + a_{02})z^2 - a_{12}u^2z - (a_{11} + 2a_{02})uz^2 - (a_{10} + a_{01})z^3 - \\ \quad - a_{02}u^2z^2 - a_{01}uz^3 - a_{00}z^4. \end{array} \right. \quad (3.1.4.4)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} b &= b_{20} + b_{11} - a_{20} + b_{02} - a_{11} - a_{02}, \\ d &= -(a_{30} + a_{21} + a_{12}). \end{aligned}$$

Если $b = 0$, то $d \neq 0$ и особая точка $(0, 0)$ системы (3.1.4.4) является седлоузлом кратности 2 [80].

Если $d = 0$, то $b \neq 0$, и оба корня характеристического уравнения особой точки $(0, 0)$ системы (3.1.4.4) равны нулю.

Перепишем систему (3.1.4.4) в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{d\tau} = \frac{1}{b} \left[(b_{03} - a_{12})u^2 + (b_{11} - a_{20} + 2b_{02} - 2a_{11} - 3a_{02})uz + \right. \\ \quad + (b_{10} + b_{01} - a_{10} - a_{01})z^2 + (b_{03} - a_{12})u^3 + (b_{02} - a_{11} - \\ \quad - 3a_{02})u^2z + (b_{01} - a_{10} - 2a_{01})uz^2 + (b_{00} - a_{00})z^3 - \\ \quad \left. - a_{02}u^3z - a_{01}u^2z^2 - a_{00}uz^3 \right] + z \equiv P_2(u, z) + z, \\ \frac{dz}{d\tau} = -\frac{1}{b} \left[(a_{21} + 2a_{12})uz + (a_{20} + a_{11} + a_{02})z^2 + a_{12}u^2z + \right. \\ \quad + (a_{11} + 2a_{02})uz^2 + (a_{10} + a_{01})z^3 + a_{02}u^2z^2 + \\ \quad \left. + a_{01}uz^3 + a_{00}z^4 \right] \equiv Q_2(u, z), \end{array} \right. \quad (3.1.4.5)$$

где $d\tau = bdt$.

Решение уравнения $z + P_2(u, z) = 0$ представляется рядом

$$z = \frac{(a_{12} - b_{03})u^2}{b} + \dots \equiv \varphi(u).$$

Если $a_{21} + 2a_{12} \neq 0$, то

$$Q_2(u, \varphi(u)) = \frac{(a_{21} + 2a_{12})(b_{03} - a_{12})u^3}{b^2} + \dots \quad (3.1.4.6)$$

Из равенства (3.1.4.6) согласно теореме 66 [80, с.397] следует, что, если $(a_{21} + 2a_{12})(b_{03} - a_{12}) > 0$, то точка B является топологическим седлом. Если же $(a_{21} + 2a_{12})(b_{03} - a_{12}) < 0$, то B может быть только особой точкой с эллиптическим сектором. Убедимся в этом.

В самом деле,

$$P'_{2u}(u, \varphi(u)) + Q'_{2z}(u, \varphi(u)) = \frac{(2(b_{03} - a_{12}) - a_{21} - 2a_{12})u}{b} + \dots \equiv \sigma(u).$$

Младший член разложения функции $\sigma(u)$ имеет степень 1, то есть $n = 1$ — нечетное число. Младший член разложения функции $Q_2(u, \varphi(u))$, как видно из (3.1.4.6), имеет степень $2m + 1 = 3$, то есть $m = 1$. Точка B не может быть ни фокусом, ни центром, так как окружность круга Пуанкаре состоит из траекторий системы (3.1.4.4). Кроме этого, $m = n = 1$ — нечетное число, поэтому в силу упомянутой выше теоремы 66 [80] точка B — особая точка с эллиптическим сектором.

Если $a_{21} + 2a_{12} = 0$, то разложение функции $Q_2(u, \varphi(u))$ может начинаться с члена нечетной (четной) степени.

В случае нечетной степени точка B является либо топологическим седлом, либо особой точкой с эллиптическим сектором. В случае четной степени $k = 2m$, $m \geq 2$ согласно теореме 67 [80, с. 404] точка B является только седлоузлом.

Таким образом, справедлива

Теорема 3.1.4.2. *Если $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$ — простые узлы системы (3.1.1.15) на бесконечности, а третья особая точка $B(u = 1, z = 0)$ — сложная, то она может быть либо седлоузлом, либо топологическим седлом, либо особой точкой с эллиптическим сектором.*

Пример 82. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x^3 - x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x - x^2y + 3xy^2 - y^3 \end{cases}$$

имеет на бесконечности три особые точки: простые узлы $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$, седлоузел $B(u = 1, z = 0)$ кратности 2.

Пример 83. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + x^2 + 2x^3 - 3x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x - xy + xy^2 - y^3 \end{cases}$$

имеет три особые точки на экваторе сферы Пуанкаре: простые узлы $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$, топологическое седло $B(u = 1, z = 0)$.

Пример 84.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + x^2 + x^3 - 3x^2y + 2xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x - xy - 2x^2y + 3xy^2 - y^3. \end{cases}$$

Система имеет на бесконечности три особые точки: простые узлы $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$, особую точку $B(u = 1, z = 0)$ с эллиптическим сектором.

Теорема 3.1.4.3. *Если $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$ — простые узлы и седло, соответственно, а $B(u = 1, z = 0)$ — сложная особая точка системы (3.1.1.15) на экваторе сферы Пуанкаре, то B является либо седлоузлом, либо топологическим седлом, либо особой точкой с эллиптическим сектором.*

Теорема 3.1.4.4. *Если $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$ — простые седла системы (3.1.1.15) на бесконечности, а $B(u = 1, z = 0)$ — сложная особая точка этой же системы с двумя нулевыми характеристическими корнями, то B не может быть топологическим седлом.*

Доказательство двух последних теорем аналогично доказательству теоремы 3.1.4.2.

Пример 85.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + xy + x^3 - x^2y + 2xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y + xy + xy^2 + y^3. \end{cases}$$

Система имеет на бесконечности три особые точки: простой узел $A(u = z = 0)$, простое седло $D(v = z = 0)$ и седлоузел $B(u = 1, z = 0)$.

Пример 86.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2xy + x^3 - 3x^2y + 2xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y + 2xy - xy^2 + y^3. \end{cases}$$

На экваторе сферы Пуанкаре система имеет три особые точки:
 $A(u = z = 0)$ — простой узел, $D(v = z = 0)$ — простое седло,
 $B(u = 1, z = 0)$ — точка с эллиптическим сектором.

Пример 87.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2xy + 3x^3 - 5x^2y + 2xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y + 2xy + 2x^2y - 3xy^2 + y^3. \end{cases}$$

Особыми точками системы на бесконечности являются: простой узел $A(u = z = 0)$, простое седло $D(v = z = 0)$, топологическое седло $B(u = 1, z = 0)$.

Теорема 3.1.4.5. *Если $A(u = z = 0)$, $D(v = z = 0)$ — простые седла системы (3.1.1.15) на бесконечности, то $B(u = 1, z = 0)$ — либо седлоузел, либо особая точка с эллиптическим сектором.*

Пример 88.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2xy - x^3 + x^2y + 2xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y + 2xy - 2x^2y + 3xy^2 + y^3. \end{cases}$$

Система имеет на бесконечности два простых седла $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$, а также седлоузел $B(u = 1, z = 0)$ кратности 2.

Пример 89.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2xy - x^3 - x^2y + 2xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y + 2xy - 2x^2y + xy^2 + y^3. \end{cases}$$

Особыми точками системы на бесконечности являются: простые седла $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$, а также точка $B(u = 1, z = 0)$ с эллиптическим сектором.

Пусть из трех бесконечно удаленных особых точек A , B и D системы (3.1.1.15) только одна простая. Для определенности полагаем, что $A(u = z = 0)$ — простая особая точка. Рассмотрим случай, когда A — устойчивый узел, то есть будем считать выполненными условия:

$$\begin{aligned} b_{21} - a_{30} &< 0, \quad a_{30} > 0, \quad b_{03} = 0, \\ b_{21} &= a_{30} - a_{12}, \quad a_{12} > 0, \quad b_{12} = a_{21} + 2a_{12}. \end{aligned} \tag{3.1.4.7}$$

При выполнении (3.1.4.7) сложная особая точка $D(v = z = 0)$ системы (3.1.3.34) имеет только один нулевой характеристический корень. Поэтому, в силу теоремы 65 [80, с. 379] точка D может быть либо седлоузлом, либо топологическим узлом, либо топологическим седлом, а точка B , как сказано выше — седлоузлом, топологическим седлом или особой точкой с эллиптическим сектором.

Таким образом, справедлива

Теорема 3.1.4.6. *Если система (3.1.1.15) имеет на бесконечности только три особые точки, в том числе один простой узел и две сложные особые точки, то возможны следующие случаи их распределения:*

а) 1у, 1my, 1mc; б) 1у, 2mc; в) 1у, 1mc, 1cy; г) 1у, 1mc, 1сэ; д) 1у, 1my, 1сэ, ; е) 1у, 1cy, 1сэ; ж) 1у, 2cy; з) 1у, 1cy, 1my.

В случае, когда среди трех бесконечно удаленных особых точек системы (3.1.1.15) только одна простая, и она является седлом, справедлива

Теорема 3.1.4.7. *Если система (3.1.1.15) имеет на бесконечности три особые точки, а именно, одно простое седло и две сложные особые точки, то возможны следующие случаи распределения сложных особых точек: а) 2cy; б) 1cy, 1сэ; в) 1cy, 1my; г) 1cy, 1mc; д) 1my, 1сэ; е) 1mc, 1сэ.*

Пример 90.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 2x^2 + 3x^3 - x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y^2 + 2x^2y + xy^2. \end{cases}$$

Система имеет на бесконечности простой узел $A(u = z = 0)$, седлоузлы $B(u = 1, z = 0)$ и $D(v = z = 0)$.

Пример 91.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 2x^3 - 3x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y^2 + x^2y - xy^2. \end{cases}$$

Особыми точками системы на бесконечности являются: узел $A(u = z = 0)$, топологическое седло $B(u = 1, z = 0)$, седлоузел $D(v = z = 0)$.

Пример 92.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 0,5x^3 - 1,5x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y^2 - 0,5x^2y + 0,5xy^2. \end{cases}$$

Система имеет три особые точки на экваторе сферы Пуанкаре: простой узел $A(u = z = 0)$, седлоузел $D(v = z = 0)$, точку $B(u = 1, z = 0)$ с эллиптическим сектором.

Пример 93.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 0,5x^3 - 1,5x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -y + x^2 - 0,5x^2y + 0,5xy^2. \end{cases}$$

Особыми точками системы на экваторе сферы Пуанкаре являются: простой узел $A(u = z = 0)$, топологический узел $D(v = z = 0)$, особая точка с эллиптическим сектором $B(u = 1, z = 0)$.

Пример 94.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + 0,5x^3 - 1,5x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y + x^2 - 0,5x^2y + 0,5xy^2. \end{cases}$$

Особыми точками системы на экваторе сферы Пуанкаре являются: простой узел $A(u = z = 0)$, топологическое седло $D(v = z = 0)$, $B(u = 1, z = 0)$ — особая точка с эллиптическим сектором.

Пример 95.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + 2x^3 - 3x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -y + x^2 + x^2y - xy^2. \end{cases}$$

На бесконечности система имеет три особые точки: простой узел $A(u = z = 0)$, топологическое седло $B(u = 1, z = 0)$, топологический узел $D(v = z = 0)$.

Пример 96.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + x^2 + 2x^3 + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -y + xy + x^2y + 3xy^2. \end{cases}$$

На экваторе сферы Пуанкаре система имеет три особые точки: простой узел $A(u = z = 0)$, седлоузел $B(u = 1, z = 0)$, топологический узел $D(v = z = 0)$.

Пример 97.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + x^2 - 3x^3 - x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + y^2 - 4x^2y + xy^2. \end{cases}$$

На бесконечности система имеет три особые точки: простое седло $A(u = z = 0)$, седлоузлы $B(u = 1, z = 0)$ и $D(v = z = 0)$.

Пример 98.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 4x^3 + 3x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y + y^2 - 5x^2y + 5xy^2. \end{cases}$$

На бесконечности система имеет три особые точки: простое седло $A(u = z = 0)$, седлоузел $D(v = z = 0)$, особую точку $B(u = 1, z = 0)$ с эллиптическим сектором.

Пример 99.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 2x^3 + 2x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -3x^2y + 4xy^2. \end{cases}$$

Бесконечно удаленными особыми точками системы являются: простое седло $A(u = z = 0)$, седлоузел $B(u = 1, z = 0)$, топологический узел $D(v = z = 0)$.

Пример 100.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - 2x^3 + 2x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -3x^2y + 4xy^2. \end{cases}$$

Бесконечно удаленными особыми точками системы являются: простое седло $A(u = z = 0)$, седлоузел $B(u = 1, z = 0)$, топологическое седло $D(v = z = 0)$.

Пример 101.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^3 + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = xy - 2x^2y + 2xy^2. \end{cases}$$

Бесконечно удаленными особыми точками системы являются: простое седло $A(u = z = 0)$, топологический узел $D(v = z = 0)$, особая точка $B(u = 1, z = 0)$ с эллиптическим сектором.

Пример 102.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - x^3 + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = xy - 2x^2y + 2xy^2. \end{cases}$$

Система имеет на бесконечности три особые точки: простое седло $A(u = z = 0)$, топологическое седло $D(v = z = 0)$, точку $B(u = 1, z = 0)$ с эллиптическим сектором.

Рассмотрим случай, когда все три особые точки системы (3.1.1.15) на бесконечности являются сложными. Здесь считаются выполненными условия:

$$a_{30} = b_{03} = 0, b_{21} = -a_{12} \neq 0. \quad (3.1.4.8)$$

Характеристические корни особых точек A , B и D задаются соответственно формулами:

$$\begin{aligned}\lambda_1(A) &= 0, \quad \lambda_2(A) = b_{21}; \quad \lambda_1(B) = -a_{21} - a_{12}, \quad \lambda_2(B) = 0; \\ \lambda_1(D) &= 0, \quad \lambda_2(D) = a_{12}.\end{aligned}\quad (3.1.4.9)$$

Теорема 3.1.4.8. *Пусть система (3.1.1.15) имеет на экваторе сферы Пуанкаре три особые точки, и они кратные при выполнении (3.1.4.8). Тогда среди этих трех особых точек не более одной с двумя нулевыми характеристическими корнями. Если есть такая особая точка, то она является точкой с эллиптическим сектором.*

Доказательство. Пусть A , B и D — особые точки системы (3.1.1.15) на экваторе сферы Пуанкаре. Тогда в силу (3.1.4.9) точки A и D имеют по одному нулевому характеристическому корню.

Пусть точка $B(u = 1, z = 0)$ имеет два нулевых характеристических корня, тогда $a_{21} = -a_{12}$ и равество (3.1.4.6) примет вид:

$$Q_2(u, \varphi(u)) = -\frac{a_{12}^2}{b^2}u^3 + \dots \quad (3.1.4.10)$$

Так как коэффициент при u^3 в разложении (3.1.4.10) отрицательный, то $B(u = 1, z = 0)$ может быть только особой точкой с эллиптическим сектором (см. доказательство теоремы 3.1.4.2). Теорема доказана.

Из теоремы 3.1.4.8 следует

Теорема 3.1.4.9. *Если система (3.1.1.15) удовлетворяет условиям теоремы 3.1.4.8, то она не может иметь на экваторе сферы Пуанкаре три топологических седла, а также три топологических узла.*

В свою очередь из двух последних теорем вытекает

Теорема 3.1.4.10. *Если система (3.1.1.15) удовлетворяет условиям теоремы 3.1.4.8, то возможны следующие случаи распределения трех кратных особых точек и только они на экваторе сферы Пуанкаре: а) 3су; б) 2су, 1сэ; в) 2су, 1mc; г) 2су, 1my; д) 2my, 1су; е) 2my, 1сэ; ж) 2mc, 1су; з) 2mc, 1сэ; и) 1су, 1mc, 1сэ; к) 1су, 1my, 1сэ; л) 1су, 1mc, 1my.*

Пример 103.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 + 3x^2y - xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y^2 + x^2y + xy^2. \end{cases}$$

Система имеет на бесконечности три седлоузла $A(u = z = 0)$, $B(u = 1, z = 0)$, $D(v = z = 0)$.

Пример 104. Особыми точками системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + x^2 + x^2y - xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y^2 + xy + x^2y - xy^2 \end{cases}$$

на бесконечности служат седлоузлы $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$, а также точка $B(u = 1, z = 0)$ с эллиптическим сектором.

Пример 105.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + x^2 + x^2y - xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + x^2y - xy^2. \end{cases}$$

На экваторе сферы Пуанкаре расположены три особые точки системы: седлоузел $A(u = z = 0)$, топологическое седло $D(v = z = 0)$ и точка $B(u = 1, z = 0)$ с эллиптическим сектором.

Пример 106.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x^2 + x^2y - xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + x^2y + xy^2. \end{cases}$$

Система имеет на бесконечности три особые точки: седлоузел $A(u = z = 0)$, топологический узел $D(v = z = 0)$ и точку $B(u = 1, z = 0)$ с эллиптическим сектором.

Пример 107.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - y + x^2y - xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = xy + x^2y - xy^2. \end{cases}$$

Особыми точками системы на бесконечности являются: топологические узлы $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$, а также точка $B(u = 1, z = 0)$ с эллиптическим сектором.

Пример 108.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y + x^2y - xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -y + xy + x^2y - xy^2. \end{cases}$$

Система имеет на бесконечности три особые точки, в том числе: топологический узел $A(u = z = 0)$, топологическое седло $D(v = z = 0)$ и точка $B(u = 1, z = 0)$ с эллиптическим сектором.

Пример 109.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y + x^2y - xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -x + xy + x^2y - xy^2. \end{cases}$$

Особыми точками системы на бесконечности служат: топологические узлы $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$, а также точка $B(u = 1, z = 0)$ с эллиптическим сектором.

Пример 110.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x^2y - 2xy^2. \end{cases}$$

На бесконечности система имеет три особые точки: топологические седла $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$, а также седлоузел $B(u = 1, z = 0)$.

Пример 111.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -x^2y + 2xy^2. \end{cases}$$

Особыми точками системы на экваторе сферы Пуанкаре являются: топологические узлы $A(u = z = 0)$, $D(v = z = 0)$ и седлоузел $B(u = 1, z = 0)$.

Пример 112.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y^2 - x^2y + 2xy^2. \end{cases}$$

Бесконечно удаленными особыми точками системы являются: седлоузлы $B(u = 1, z = 0)$, $D(v = z = 0)$ и топологический узел $A(u = z = 0)$.

Пример 113.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y + 2x^2y - xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -x + xy + x^2y. \end{cases}$$

Особыми точками системы на экваторе сферы Пуанкаре являются: седлоузлы $D(v = z = 0)$, $B(u = 1, z = 0)$ и топологическое седло $A(u = z = 0)$.

Замечание 3.1.4.1. В случае трех особых точек системы (3.1.1.15) на бесконечности и выполнения условия $b_{03} - a_{12} = 0$ получаются те же возможности распределения особых точек, что и в рассмотренном первом случае ($b_{03} - a_{12} \neq 0$).

Тем самым исчерпано исследование бесконечно удаленных особых точек системы (3.1.1.15), когда их число равно трем.

Замечание 3.1.4.2. Так как автор статьи [93] допускает в случае трех бесконечно удаленных особых точек системы (3.1.1.15) только одну кратную, которая может быть только седлоузлом, то тогда неверна теорема 2 [93].

3.1.5 Исследование типов бесконечно удаленных особых точек кубической системы. Случай двух особых точек

Без ограничения общности считаем $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$ - особыми точками системы (3.1.1.15) на бесконечности. Тогда уравнение

$$f(u) \equiv u((b_{03} - a_{12})u^2 + (b_{12} - a_{21})u + b_{21} - a_{30}) = 0 \quad (3.1.5.1)$$

имеет единственный корень $u = 0$.

Случай 1. $b_{03} - a_{12} \neq 0$. Тогда, как видно из (3.1.5.1), по необходимости выполняется одно из условий: а) $(b_{12} - a_{21})^2 - 4(b_{03} - a_{12})(b_{21} - a_{30}) < 0$; б) $b_{12} - a_{21} = b_{21} - a_{30} = 0$.

Пусть имеет место б). Так как система (3.1.1.16) имеет невырожденную линейную часть, то $|b_{20}| + |a_{30}| > 0$. Если $b_{20}a_{30} \neq 0$, то к системе

(3.1.1.16) применяем невырожденное преобразование $\bar{u} = a_{30}u + b_{20}z$, $\bar{z} = b_{20}z$ и замену времени $d\tau = -a_{30}dt$. В результате получаем систему

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{d\tau} = \frac{(a_{12} - b_{03})\bar{u}^3}{a_{30}^4} - \frac{\varphi(\bar{u}, \bar{z})}{a_{30}} \equiv P_2(\bar{u}, \bar{z}), \\ \frac{d\bar{z}}{d\tau} = \bar{z} - \frac{\phi(\bar{u}, \bar{z})}{a_{30}}, \end{cases} \quad (3.1.5.2)$$

где $\varphi(\bar{u}, \bar{z})$ и $\phi(\bar{u}, \bar{z})$ не содержат линейных и свободных членов.

Так как

$$P_2(\bar{u}, 0) = \frac{(a_{12} - b_{03})\bar{u}^3}{a_{30}^4} + \dots,$$

то согласно теореме 65 [80, с. 379] $A(u = z = 0)$ — топологический узел (топологическое седло), если $a_{12} - b_{03} > 0$ ($a_{12} - b_{03} < 0$).

Если $b_{20} = 0$, $a_{30} \neq 0$, то в системе (3.1.1.16) делаем замену времени $d\tau = -a_{30}dt$

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = \frac{(a_{12} - b_{03})u^3}{a_{30}} + \varphi(u, z), \\ \frac{dz}{d\tau} = z + \phi(u, z), \end{cases}$$

где $\varphi(u, 0) \equiv 0$, $\phi(u, 0) \equiv 0$, $\varphi(u, z)$ и $\phi(u, z)$ не содержат линейных и свободных членов.

Таким образом, $A(u = z = 0)$ — топологический узел (топологическое седло), если $a_{30}(a_{12} - b_{03}) > 0$ ($a_{30}(a_{12} - b_{03}) < 0$).

Если $a_{30} = 0$, $b_{20} \neq 0$, и в системе (3.1.1.16) делаем замену времени $d\tau = b_{20}dt$:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = z + \frac{(b_{11} - a_{20})uz}{b_{20}} + \frac{b_{10}z^2}{b_{20}} + \frac{(b_{03} - a_{12})u^3}{b_{20}} + \\ + \frac{(b_{02} - a_{11})u^2z}{b_{20}} + \frac{(b_{01} - a_{10})uz^2}{b_{20}} + \frac{b_{00}z^3}{b_{20}} - \\ - \frac{a_{02}u^3z}{b_{20}} - \frac{a_{01}u^2z^2}{b_{20}} - \frac{a_{00}uz^3}{b_{20}} \equiv z + P_2(u, z), \\ \frac{dz}{d\tau} = -\frac{a_{21}uz}{b_{20}} - \frac{a_{20}z^2}{b_{20}} - \frac{a_{12}u^2z}{b_{20}} - \frac{a_{11}uz^2}{b_{20}} - \frac{a_{10}z^3}{b_{20}} - \\ - \frac{a_{02}u^2z^2}{b_{20}} - \frac{a_{01}uz^3}{b_{20}} - \frac{a_{00}z^4}{b_{20}} \equiv Q_2(u, z). \end{cases}$$

Решение уравнения $z + P_2(u, z) = 0$ представляет собой ряд, младший член разложения которого имеет третью степень, то есть

$$\varphi(u) = \frac{(a_{12} - b_{03})u^3}{b_{20}} + \dots$$

Если при этом $a_{21} \neq 0$, то

$$Q_2(u, \varphi(u)) = \frac{a_{21}(b_{03} - a_{12})u^4}{b_{20}} + \dots,$$

и согласно теореме 67 [80] $A(u = z = 0)$ — седлоузел.

Если же $a_{21} = 0$, то $a_{12} \neq 0$ и

$$Q_2(u, \varphi(u)) = \frac{a_{12}(b_{03} - a_{12})u^5}{b_{20}} + \dots$$

Отсюда по теореме 66 [80] следует, что $A(u = z = 0)$ — топологическое седло, если $(a_{12}(b_{03} - a_{12}))/b_{20} > 0$ и топологический узел, если $(a_{12}(b_{03} - a_{12}))/b_{20} < 0$.

Так как при $b_{03} - a_{12} \neq 0$ один из характеристических корней особой точки $D(v = z = 0)$ всегда отличен от нуля, то характер $D(v = z = 0)$ вполне определяется теоремой 65 [80], если, разумеется, эта точка является сложной точкой покоя.

Пусть далее выполняется условие а). Тогда очевидно, имеет место неравенство $(b_{03} - a_{12})(b_{21} - a_{30}) > 0$. Корни характеристических уравнений особых точек A и D соответственно записываются в виде:

$$\begin{aligned} \lambda_1(A) &= -a_{30}, \quad \lambda_2(A) = b_{21} - a_{30}, \\ \lambda_1(D) &= -b_{03}, \quad \lambda_2(D) = a_{12} - b_{03}. \end{aligned} \tag{3.1.5.3}$$

Из (3.1.5.3), очевидно, следует

Теорема 3.1.5.1. *Если система (3.1.1.15) имеет на экваторе сферы Пуанкаре две простые особые точки, то возможны следующие случаи их распределения и только они: а) 2y; б) 1y, 1c; в) 2c.*

Пример 114.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2x^3 + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y + x^2y + 3xy^2 - y^3. \end{cases}$$

Система имеет на бесконечности две особые точки: простые узлы $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$.

Пример 115.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2x^3 + x^2y + 3xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y + x^2y + 3xy^2 + y^3. \end{cases}$$

Для данной системы бесконечно удаленными особыми точками являются простой узел $A(u = z = 0)$ и простое седло $D(v = z = 0)$.

Пример 116.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - x^3 + x^2y + 3xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y - 2x^2y + 3xy^2 + y^3. \end{cases}$$

Система имеет на бесконечности два простых седла $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$.

Теорема 3.1.5.2. *Если система (3.1.1.15) имеет на экваторе сферы Пуанкаре две простые особые точки, причем одна из них кратная, то возможны следующие случаи их распределения: а) 1cy, 1y; б) 1cy, 1c; в) 1mc, 1y; г) 1my, 1c; д) 1my, 1y; е) 1mc, 1c.*

Пример 117.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + x^2 + x^2y + 2xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y + x^2y + 2xy^2 + 3y^3. \end{cases}$$

Система имеет на бесконечности две особые точки, в том числе седлоузел $A(u = z = 0)$ и простой узел $D(v = z = 0)$.

Пример 118.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + x^2 + x^2y + 3xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y - x^2y + 2xy^2 + 2y^3. \end{cases}$$

Система имеет две особые точки на экваторе сферы Пуанкаре: $A(u = z = 0)$ — седлоузел, $D(v = z = 0)$ — простое седло.

Пример 119.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + xy + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + x^2y + xy^2 + 2y^3. \end{cases}$$

На бесконечности система имеет две особые точки: топологическое седло $A(u = z = 0)$, простой узел $D(v = z = 0)$.

Пример 120.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + 4xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x - x^2y + 2xy^2 + 2y^3. \end{cases}$$

Особыми точками системы на экваторе сферы Пуанкаре служат: топологический узел $A(u = z = 0)$ и простое седло $D(v = z = 0)$.

Пример 121.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x - y - x^2y + 2xy^2 - y^3. \end{cases}$$

Бесконечно удаленными особыми точками системы являются: топологический узел $A(u = z = 0)$ и простой узел $D(v = z = 0)$.

Пример 122.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y + 3xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + y - x^2y + xy^2 + 2y^3. \end{cases}$$

Система имеет на бесконечности две особые точки: топологическое седло $A(u = z = 0)$ и простое седло $D(v = z = 0)$.

Пусть A и D — сложные особые точки, для каждой из которых один характеристический корень равен нулю. Тогда каждая из этих особых точек может быть либо седлоузлом, либо топологическим узлом, либо топологическим седлом [80].

Учитывая исследование особой точки $A(u = z = 0)$, проведенное выше при выполнении б), приходим к следующему утверждению.

Теорема 3.1.5.3. Пусть A и D — сложные особые точки системы (3.1.1.15) на бесконечности, и при этом выполняется неравенство $b_{03} - a_{12} \neq 0$. Тогда возможны следующие случаи их распределения и только они: а) 2cy; б) 1cy, 1mc; в) 1cy, 1my; г) 2mc; д) 1mc, 1my; е) 2my.

Пример 123.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x^2 + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y - x^2y. \end{cases}$$

Особыми точками системы на бесконечности являются: седлоузел $A(u = z = 0)$ и топологическое седло $D(v = z = 0)$.

Пример 124.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + x^2 + 2x^2y - xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = y + y^2 + x^2y + 3xy^2. \end{cases}$$

Особыми точками системы на бесконечности являются седлоузлы $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$.

Пример 125.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x^2 + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -y - x^2y. \end{cases}$$

Бесконечно удаленными особыми точками системы являются: седлоузел $A(u = z = 0)$, топологический узел $D(v = z = 0)$.

Пример 126.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - x^2y + xy^2. \end{cases}$$

Для данной системы существуют только две бесконечно удаленные особые точки: топологические седла $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$.

Пример 127.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y - x^2y + xy^2. \end{cases}$$

На бесконечности система имеет две особые точки: топологическое седло $A(u = z = 0)$ и топологический узел $D(v = z = 0)$.

Пример 128.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + x^2y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y - x^2y + xy^2. \end{cases}$$

Система имеет на бесконечности две особые точки, а именно, два топологических узла $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$.

Случай 2. $b_{03} - a_{12} = b_{12} - a_{21} = 0$, $b_{21} - a_{30} \neq 0$.

Для установления характера особых точек A и D запишем системы (3.1.1.16) и (3.1.1.34):

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = (b_{21} - a_{30})u + b_{20}z + (b_{11} - a_{20})uz + b_{10}z^2 + \\ + (b_{02} - a_{11})u^2z + (b_{01} - a_{10})uz^2 + b_{00}z^3 - \\ - a_{02}u^3z - a_{01}u^2z^2 - a_{00}uz^3, \\ \frac{dz}{dt} = -a_{30}z - a_{21}uz - a_{20}z^2 - a_{12}u^2z - a_{11}uz^2 - a_{10}z^3 - \\ - a_{02}u^2z^2 - a_{01}uz^3 - a_{00}z^4; \end{cases} \quad (3.1.5.4)$$

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = a_{02}z + (a_{11} - b_{02})vz + a_{01}z^2 + (a_{30} - b_{21})v^3 + \\ + (a_{20} - b_{11})v^2z + (a_{10} - b_{01})vz^2 + a_{00}z^3 - \\ - b_{20}v^3z - b_{10}v^2z^2 - b_{00}vz^3, \\ \frac{dz}{dt} = -b_{03}z - b_{12}vz - b_{02}z^2 - b_{21}v^2z - b_{11}vz^2 - b_{01}z^3 - \\ - b_{20}v^2z^2 - b_{10}vz^3 - b_{00}z^4. \end{cases} \quad (3.1.5.5)$$

Так как линейная часть системы (3.1.5.5) невырожденная, то $|a_{02}| + |b_{03}| > 0$.

Если $a_{02}b_{03} \neq 0$, то систему (3.1.5.5) посредством неособого преобразования $\bar{v} = b_{03}v + a_{02}z$, $\bar{z} = a_{02}z$ можно привести к виду:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{v}}{dt} = P_2(\bar{v}, \bar{z}), \\ \frac{d\bar{z}}{dt} = \bar{z} + Q_2(\bar{v}, \bar{z}). \end{cases} \quad (3.1.5.6)$$

Поэтому, не нарушая общности, считаем, что в системе (5.1.5.5) $a_{02} = 0$ и делаем замену времени $d\tau = -b_{03}dt$:

$$\begin{cases} \frac{dv}{d\tau} = \frac{1}{b_{03}} \left[(b_{02} - a_{11})vz - a_{01}z^2 + (b_{21} - a_{30})v^3 + \right. \\ \left. + (b_{11} - a_{20})v^2z + (b_{01} - a_{10})vz^2 - a_{00}z^3 + \right. \\ \left. + b_{20}v^3z + b_{10}v^2z^2 + b_{00}vz^3 \right] \equiv P_2(v, z), \\ \frac{dz}{d\tau} = z + \frac{b_{12}}{b_{03}}vz + \frac{b_{02}}{b_{03}}z^2 + \frac{b_{21}}{b_{03}}v^2z + \frac{b_{11}}{b_{03}}vz^2 + \frac{b_{01}}{b_{03}}z^3 + \\ + \frac{b_{20}}{b_{03}}v^2z^2 + \frac{b_{10}}{b_{03}}vz^3 + \frac{b_{00}}{b_{03}}z^4 \equiv z + Q_2(v, z). \end{cases} \quad (3.1.5.7)$$

Система (5.1.5.7) имеет вид системы (5.1.5.6) так как

$$P_2(v, 0) = \frac{(b_{21} - a_{30})}{b_{03}}v^3 + \dots,$$

и, зная характер простого состояния равновесия $A(u = z = 0)$, можем сделать вывод о характере состояния равновесия $D(v = z = 0)$ согласно теореме 65 [80]. А именно. если $A(u = z = 0)$ — простое седло, то $D(v = z = 0)$ может быть топологическим седлом или топологическим узлом. К аналогичному выводу приходим и в случае, когда точка A — простой узел.

Если A — сложное состояние равновесия, то $a_{30} = 0$, так как $b_{21} - a_{30} \neq 0$. Отсюда следует, что $b_{21} \neq 0$. Очевидно, тип особой точки A определяется все той же теоремой 65 [80], то есть A — либо седлоузел, либо топологический узел, либо топологическое седло. Отсюда делаем вывод, что новых возможностей распределения особых точек A и D , отличных от полученных в случае 1, нет.

Случай 3. $b_{03} - a_{12} = b_{21} - a_{30} = 0$, $b_{21} - a_{21} \neq 0$. Системы (3.1.1.16) и (3.1.1.34) перепишем в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = b_{20}z + (b_{12} - a_{21})u^2 + (b_{11} - a_{20})uz + b_{10}z^2 + \\ \quad + (b_{02} - a_{11})u^2z + (b_{01} - a_{10})uz^2 + b_{00}z^3 - \\ \quad - a_{02}u^3z - a_{01}u^2z^2 - a_{00}uz^3, \\ \frac{dz}{dt} = -a_{30}z - a_{21}uz - a_{20}z^2 - a_{12}u^2z - a_{11}uz^2 - a_{10}z^3 - \\ \quad - a_{02}u^2z^2 - a_{01}uz^3 - a_{00}z^4; \end{array} \right. \quad (3.1.5.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = a_{02}z + (a_{21} - b_{12})v^2 + (a_{11} - b_{02})vz + a_{01}z^2 + \\ \quad + (a_{20} - b_{11})v^2z + (a_{10} - b_{01})vz^2 + \\ \quad + a_{00}z^3 - b_{20}v^3z - b_{10}v^2z^2 - b_{00}vz^3, \\ \frac{dz}{dt} = -b_{03}z - b_{12}vz - b_{02}z^2 - b_{21}v^2z - b_{11}vz^2 - \\ \quad - b_{01}z^3 - b_{20}v^2z^2 - b_{10}vz^3 - b_{00}z^4. \end{array} \right. \quad (3.1.5.9)$$

Из (3.1.5.8) и (3.1.5.9) следует обязательное выполнение неравенств: $|b_{20}| + |a_{30}| > 0$, $|a_{02}| + |b_{03}| > 0$.

Рассмотрим случай $a_{30} = b_{03} = 0$. Преобразуем системы (3.1.5.8) и (3.1.5.9):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{d\tau} = z + \frac{(b_{12} - a_{21})}{b_{20}}u^2 + \frac{(b_{11} - a_{20})}{b_{20}}uz + \frac{b_{10}}{b_{20}}z^2 + \\ \quad + \frac{(b_{02} - a_{11})}{b_{20}}u^2z + \frac{(b_{01} - a_{10})}{b_{20}}uz^2 + \frac{b_{00}}{b_{20}}z^3 - \\ \quad - \frac{a_{02}}{b_{20}}u^3z - \frac{a_{01}}{b_{20}}u^2z^2 - \frac{a_{00}}{b_{20}}uz^3 \equiv z + \bar{P}_2(u, z), \\ \frac{dz}{d\tau} = -\frac{a_{21}}{b_{20}}uz - \frac{a_{20}}{b_{20}}z^2 - \frac{a_{12}}{b_{20}}u^2z - \frac{a_{11}}{b_{20}}uz^2 - \frac{a_{10}}{b_{20}}z^3 - \\ \quad - \frac{a_{02}}{b_{20}}u^2z^2 - \frac{a_{01}}{b_{20}}uz^3 - \frac{a_{00}}{b_{20}}z^4 \equiv \bar{Q}_2(u, z), \end{array} \right. \quad (3.1.5.10)$$

где $d\tau = b_{20}dt$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{d\mu} = z + \frac{(a_{21} - b_{12})}{a_{02}}v^2 + \frac{(a_{11} - b_{02})}{a_{02}}vz + \frac{a_{01}}{a_{02}}z^2 + \\ \quad + \frac{(a_{20} - b_{11})}{a_{02}}v^2z + \frac{(a_{10} - b_{01})}{a_{02}}vz^2 + \frac{a_{00}}{a_{02}}z^3 - \\ \quad - \frac{b_{20}}{a_{02}}v^3z - \frac{b_{10}}{a_{02}}v^2z^2 - \frac{b_{00}}{a_{02}}vz^3 \equiv z + \bar{\bar{P}}_2(v, z), \\ \frac{dz}{d\mu} = -\frac{b_{12}}{a_{02}}vz + \frac{b_{02}}{a_{02}}z^2 - \frac{b_{21}}{a_{02}}v^2z - \frac{b_{11}}{a_{02}}vz^2 - \frac{b_{01}}{a_{02}}z^3 - \\ \quad - \frac{b_{20}}{a_{02}}v^2z^2 - \frac{b_{10}}{a_{02}}vz^3 - \frac{b_{00}}{a_{02}}z^4 \equiv \bar{\bar{Q}}_2(v, z), \end{array} \right. \quad (3.1.5.11)$$

где $d\mu = a_{02}dt$.

Так как $a_{30} = b_{03} = 0$, то из равенства $b_{03} - a_{12} = b_{21} - a_{30} = 0$ следует $a_{12} = b_{21} = 0$. Так как правые части системы (3.1.1.15) содержат хотя бы один кубический член, то $a_{21} \cdot b_{12} \neq 0$.

Пусть решение уравнения $z + \bar{\bar{P}}_2(u, z) = 0$ найдено в виде ряда

$$z = \frac{(a_{21} - b_{12})u^2}{b_{20}} + \dots = \varphi(u),$$

а решение уравнения $z + \bar{\bar{P}}_2(u, z) = 0$ — в виде ряда

$$z = \frac{(b_{12} - a_{21})v^2}{a_{02}} + \dots = \phi(v).$$

Тогда из (3.1.5.10) и (3.1.5.11) имеем:

$$\bar{\bar{Q}}_2(u, \varphi(u)) = \frac{a_{21}(b_{12} - a_{21})u^2}{b_{20}^2} + \dots, \quad (3.1.5.12)$$

$$\bar{\bar{Q}}_2(v, \phi(v)) = \frac{b_{12}(a_{21} - b_{12})v^3}{a_{02}^2} + \dots. \quad (3.1.5.13)$$

Из (3.1.5.12) и (3.1.5.13) следует, что A и D одновременно не могут быть топологическими седлами в рассматриваемом случае. В самом деле, полагая, что A и D — топологические седла, в силу теоремы 66 [80], получаем систему неравенств $a_{21}(b_{12} - a_{21}) > 0$, $-b_{12}(b_{12} - a_{21}) > 0$, из которой вытекает невыполнимое неравенство $-(b_{12} - a_{21})^2 > 0$.

Таким образом, справедлива

Теорема 3.1.5.4. *Если система (3.1.1.15) имеет на бесконечности две особые точки A и D , и они сложные, то при $b_{03} = a_{30} = 0, a_{12} = b_{21} = 0, b_{12} - a_{21} \neq 0$ возможны следующие случаи их распределения и только они: а) 2сэ; б) 1mc, 1сэ.*

Пример 129.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y^2 + 2x^2y, \\ \frac{dy}{dt} = y + x^2 - xy^2. \end{cases}$$

Данная система имеет на бесконечности два состояния равновесия $A(u = z = 0)$ и $D(v = z = 0)$ с эллиптическим сектором.

Пример 130.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y^2 + 2x^2y, \\ \frac{dy}{dt} = y + x^2 + xy^2. \end{cases}$$

Состояниями равновесия системы на бесконечности являются топологическое седло $D(v = z = 0)$ и точка $A(u = z = 0)$ с эллиптическим сектором.

3.1.6 Изучение характера единственной бесконечно удаленной особой точки кубической системы

Не уменьшая общности, считаем, что $A(u = z = 0)$ является единственной бесконечно удаленной особой точкой системы (3.1.1.15). Тогда уравнение $f(u) = 0$ имеет единственный корень $u = 0$.

Поэтому $b_{30} = 0, a_{03} \neq 0, b_{21} - a_{30} = 0$.

Таким образом, уравнение $f(u) = 0$ равносильно уравнению

$$u^2(b_{12} - a_{21} + (b_{03} - a_{12})u - a_{03}u^2) = 0.$$

Следовательно, необходимо требовать выполнения неравенства

$$(b_{03} - a_{12})^2 + 4a_{03}(b_{12} - a_{21}) < 0 \quad (3.1.6.1)$$

если, разумеется, $b_{12} - a_{21} \neq 0$.

если $b_{12} - a_{21} = 0$, то

$$b_{03} - a_{12} = 0 \quad (3.1.6.2)$$

и $u = 0$ четырехкратный корень уравнения $f(u) = 0$.

Пусть имеет место (3.1.6.1). Если при этом $a_{30} \neq 0$, тогда, в силу $b_{12} - a_{21} \neq 0$, точка A — только седлоузел кратности 2. Если $a_{30} = 0$, то $b_{21} = 0$ и вместе с тем $b_{20} \neq 0$ (линейная часть системы (3.1.1.16) невырожденная). Система (3.1.1.16) запишется в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{d\tau} = z + \frac{(b_{12} - a_{21})}{b_{20}} u^2 + \frac{(b_{11} - a_{20})}{b_{20}} uz + \frac{b_{10}}{b_{20}} z^2 + \\ \quad + \frac{(b_{03} - a_{12})}{b_{20}} u^3 + \frac{(b_{02} - a_{11})}{b_{20}} u^2 z + \frac{(b_{01} - a_{10})}{b_{20}} uz^2 + \\ \quad + \frac{b_{00}}{b_{20}} z^3 - \frac{a_{03}}{b_{20}} u^4 - \frac{a_{02}}{b_{20}} u^3 z - \frac{a_{01}}{b_{20}} u^2 z^2 - \\ \quad - \frac{a_{00}}{b_{20}} uz^3 \equiv z + \tilde{P}_2(u, z), \\ \frac{dz}{d\tau} = -\frac{a_{21}}{b_{20}} uz - \frac{a_{20}}{b_{20}} z^2 - \frac{a_{12}}{b_{20}} u^2 z - \frac{a_{11}}{b_{20}} uz^2 - \frac{a_{10}}{b_{20}} z^3 - \\ \quad - \frac{a_{03}}{b_{20}} u^3 z - \frac{a_{02}}{b_{20}} u^2 z^2 - \frac{a_{01}}{b_{20}} uz^3 - \frac{a_{00}}{b_{20}} z^4 \equiv \tilde{Q}_2(u, z), \end{array} \right. \quad (3.1.6.3)$$

где $d\tau = b_{20} dt$.

Пусть уравнение $z + \tilde{P}_2(u, z) = 0$ имеет решение в виде ряда

$$z = \frac{(a_{21} - b_{12})u^2}{b_{20}} + \dots \equiv \varphi(u).$$

Тогда

$$\tilde{Q}_2(u, \varphi(u)) = \frac{a_{21}(b_{12} - a_{21})u^3}{b_{20}^2} + \dots \quad (3.1.6.4)$$

Из (3.1.6.4) следует, что точка покоя $(0; 0)$ системы (3.1.6.3) является топологическим седлом, если $a_{21}(b_{12} - a_{21}) > 0$ и точкой с эллиптическим сектором, если $a_{21}(b_{12} - a_{21}) < 0$.

Если $a_{21} = 0$, то $b_{12} \neq 0$, и при этом выполняется неравенство

$$\frac{b_{12}}{b_{20}^2} \left(a_{12} - \frac{a_{20}b_{12}}{b_{20}} \right) \neq 0.$$

Поэтому $O(0, 0)$ — седлоузел кратности четыре для системы (3.1.6.3).

Пусть далее имеет место (3.1.6.2). Тогда система (3.1.1.16) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = b_{20}z + (b_{11} - a_{20})uz + b_{10}z^2 + (b_{02} - a_{11})u^2z + \\ \quad + (b_{01} - a_{10})uz^2 + b_{00}z^3 - a_{03}u^4 - a_{02}u^3z - \\ \quad - a_{01}u^2z^2 - a_{00}uz^3, \\ \frac{dz}{dt} = -a_{30}z - a_{21}uz - a_{20}z^2 - a_{12}u^2z - a_{11}uz^2 - a_{10}z^3 - \\ \quad - a_{03}u^3z - a_{02}u^2z^2 - a_{01}uz^3 - a_{00}z^4. \end{array} \right. \quad (3.1.6.5)$$

Из (3.1.6.5) видно, что при условии $a_{30} \neq 0$ точка $A(u = z = 0)$ — четырехкратный седлоузел. Если $a_{30} = 0$, то $b_{20} \neq 0$ и тогда при выполнении $a_{21} \neq 0$ точка $A(u = z = 0)$ — топологическое седло, либо точка с эллиптическим сектором. Если $a_{21} = 0$, то $a_{12} \neq 0$, поэтому $A(u = z = 0)$ — седлоузел.

Таким образом, имеет место

Теорема 3.1.6.1. *Если система (3.1.1.15) имеет на бесконечности одно и только одно состояние равновесия, то оно может быть либо седлоузлом, либо топологическим седлом, либо точкой с эллиптическим сектором.*

Пример 131. Топологическое седло $A(u = z = 0)$ является единственным состоянием равновесия системы

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x + x^2y + xy^2 - y^3, \\ \frac{dy}{dt} = y + x^2 + 2xy^2 + 2y^3, \end{array} \right.$$

на экваторе сферы Пуанкаре.

Пример 132. Точка $A(u = z = 0)$ — единственное состояние равновесия системы

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x + x^2y + xy^2 + y^3, \\ \frac{dy}{dt} = y + x^2 - xy^2 + 2y^3, \end{array} \right.$$

на бесконечности, и оно является точкой с эллиптическим сектором.

Пример 133. Для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + xy^2 + y^3, \\ \frac{dy}{dt} = y + x^2 + y^3, \end{cases}$$

точка $A(u = z = 0)$ единственное состояние равновесия на бесконечности, и оно является седлоузлом.

Замечание 3.1.6.1. Утверждение автора [93] о том, что для системы (3.1.1.15) единственная бесконечно удаленная особая точка может быть либо узлом, либо седлом, либо седлоузлом неверно потому, что она не может быть узлом. Кроме этого автор [93] не допускает наличие особой точки с эллиптическим сектором.

Основные выводы из результатов исследования, проведенного в п.3.1 третьей главы

1. Система (3.1.1.15) имеет на экваторе сферы Пуанкаре не более четырех особых точек.
2. Если система (3.1.1.15) имеет на бесконечности четыре особые точки, и все они простые, то они не могут быть одновременно седлами.
3. Если система (3.1.1.15) имеет на экваторе сферы Пуанкаре четыре особые точки, то среди них более трех сложных.
4. Если система (3.1.1.15) имеет на экваторе сферы Пуанкаре четыре особые точки, то среди них не может быть ни одной с двумя нулевыми характеристическими корнями.
5. Если система (3.1.1.15) имеет на бесконечности четыре особые точки, в том числе три сложные, то простая особая точка является только узлом.
6. Если система (3.1.1.15) имеет на бесконечности четыре особые точки, в том числе хотя бы одну кратную, то в конечной части фазовой плоскости эта система имеет менее девяти особых точек.
7. Пусть система (3.1.1.15) имеет на бесконечности одну простую и три сложных особых точек. Тогда сложные особые точки не могут быть одновременно седлами.
8. Если система (3.1.1.15) имеет на бесконечности две простые и две сложные особые точки, то простые особые точки не могут быть одно-

временно седлами.

9. Если система (3.1.1.15) имеет на бесконечности четыре особые точки, в том числе одну кратную, то остальные три особые точки не могут быть седлами одновременно.

10. Если система (3.1.1.15) имеет на бесконечности три и только три особые точки, то по крайней мере, одна из них кратная.

11. Если система (3.1.1.15) имеет на бесконечности три и только три особые точки, и все они кратные, то в их числе не более одной особой точки с двумя нулевыми корнями характеристического уравнения. Если такая особая точка есть, то она непременно является особой точкой с эллиптическим сектором.

12. Если система (3.1.1.15) имеет на бесконечности три и только три особые точки, то все они не могут быть одновременно ни топологическими седлами, ни топологическими узлами.

13. Если система (3.1.1.15) имеет на бесконечности две и только две особые точки, то либо они обе простые, либо обе кратные, либо одна простая, а другая кратная.

14. Если система (3.1.1.15) имеет на бесконечности две и только две особые точки, то кратная из них, имеющая два нулевых характеристических корня, может быть только особой точкой с эллиптическим сектором.

15. Если система (3.1.1.15) имеет на бесконечности одну и только одну особую точку, то она непременно является кратной и одного из следующих типов: седлоузел, топологическое седло, особая точка с эллиптическим сектором.

16. Сумма \sum индексов особых точек системы (3.1.1.15), расположенных на экваторе сферы Пуанкаре, удовлетворяет двойному неравенству $-2 \leq \sum \leq 4$.

3.2 Особые точки кубической дифференциальной системы на экваторе сферы Пуанкаре. Случай, когда экватор сферы Пуанкаре не содержит целой траектории, отличной от состояния равновесия

В монографии [80] на с. 248 отмечается, что обычно ось $z = 0$ состоит из траекторий системы (3.1.1.16), но в исключительных случаях это может быть не так. Например, система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + x^2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y + xy^2, \end{cases}$$

имеет особые точки на экваторе $z = 0$ сферы Пуанкаре, но при этом ось $z = 0$ не состоит из траекторий данной системы. В этом пункте изучаются особые точки системы (3.1.1.15) при условии, что все коэффициенты уравнения (3.1.3.10) равны нулю, то есть

$$f(u) \equiv 0. \quad (3.2.1)$$

Можно показать то, что авторами монографии [80] называется исключительным тот случай, когда выполняется условие (3.2.1).

С учетом (3.2.1) запишем систему (3.1.1.15) в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \\ \quad + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + \\ \quad + a_{30}x^2y + a_{21}xy^2 + a_{12}y^3. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Преобразование Пуанкаре $x = 1/z$, $y = u/z$ переводит систему (3.2.2) в систему:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = b_{20} + (b_{11} - a_{20})u + b_{10}z + (b_{02} - a_{11})u^2 + \\ \quad + (b_{01} - a_{10})uz + b_{00}z^2 - a_{02}u^3 - a_{01}u^2z - a_{00}uz^2, \\ \frac{dz}{dt} = -a_{30} - a_{21}u - a_{20}z - a_{12}u^2 - a_{11}uz - a_{10}z^2 - \\ \quad - a_{02}u^2z - a_{01}uz^2 - a_{00}z^3. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

В результате применения к системе (3.2.2) второго преобразования Пуанкаре $x = v/z, y = 1/z$ получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = a_{02} + (a_{11} - b_{02})v + a_{01}z + (a_{20} - b_{11})v^2 + \\ \quad + (a_{10} - b_{01})vz + a_{00}z^2 - b_{20}v^3 - b_{10}v^2z - b_{00}vz^2, \\ \frac{dz}{dt} = -a_{12} - a_{21}v - b_{02}z - a_{30}v^2 - b_{11}vz - b_{01}z^2 - \\ \quad - b_{20}v^2z - b_{10}vz^2 - b_{00}z^3. \end{cases} \quad (3.2.4)$$

В работе [114] изучаются особые точки системы (3.2.2.) при условии отсутствия в правых частях ее уравнений свободных и квадратичных членов. Здесь эти ограничения снимаются.

Из вида правых частей уравнений системы (3.2.2) следует, что $|a_{30}| + |a_{21}| + |a_{12}| > 0$, так как в противном случае эта система вырождается в квадратичную. Поэтому система (3.2.2) имеет на бесконечности не более двух особых точек. Действительно, особые точки системы (3.2.3) удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} z = 0, \\ b_{20} + (b_{11} - a_{20})u + (b_{02} - a_{11})u^2 - a_{02}u^3 = 0, \\ a_{30} + a_{21}u + a_{12}u^2 = 0. \end{cases} \quad (3.2.5)$$

Очевидно, если $v = z = 0$ — особая точка системы (3.2.4), то система (3.2.5) имеет не более одного решения.

3.2.1 Случай одной особой точки

Не уменьшая общности, будем считать, что единственной особой точкой системы (3.2.2) на экваторе сферы Пуанкаре является особая точка $A(u = z = 0)$. Тогда выполняются условия $|a_{02}| + |a_{12}| > 0$, $a_{30} = b_{20} = 0$. Кроме этого $a_{12} = 0$, $a_{21} \neq 0$ или $a_{12} \neq 0$, $a_{21} = 0$ или $a_{12} \cdot a_{21} \neq 0$, $b_{11} - a_{20} + \frac{(a_{11} - b_{02})a_{21}}{a_{12}} - \frac{a_{02}a_{21}^2}{a_{12}^2} \neq 0$.

Теорема 3.2.1.1. *Если $A(u = z = 0)$ — единственная особая точка системы (3.2.2) на бесконечности, причем простая, то она может быть либо узлом, либо седлом, либо фокусом, либо особой точкой второй группы.*

Для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что корни характеристического уравнения $\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$, где $\sigma = b_{11} - 2a_{20}$, $\Delta = (a_{20} - b_{11})a_{20} + a_{21}b_{10}$ могут быть: либо действительными одного знака, либо действительными разных знаков, либо комплексно-сопряженными с отличной от нуля действительной частью, либо чисто мнимыми числами.

Замечание 3.2.1.1. Под особой точкой второй группы подразумевается особая точка, для которой возникает проблема различения центра и фокуса [9].

Пусть далее $A(u = z = 0)$ — сложная особая точка системы (3.2.3), т.е. выполняется равенство $\Delta = 0$. Очевидно, в рассматриваемом случае система (3.2.3) имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = (b_{11} - a_{20})u + b_{10}z + (b_{02} - a_{11})u^2 + (b_{01} - a_{10})uz + \\ \quad + b_{00}z^2 - a_{02}u^3 - a_{01}u^2z - a_{00}uz^2, \\ \frac{dz}{dt} = -a_{21}u - a_{20}z - a_{12}u^2 - a_{11}uz - a_{10}z^2 - a_{02}u^2z - \\ \quad - a_{01}uz^2 - a_{00}z^3. \end{cases} \quad (3.2.11)$$

Теорема 3.2.1.2. Если $A(u = z = 0)$ — единственная особая точка системы (3.2.2) на бесконечности, причем сложная, то она может быть либо седлоузлом, либо топологическим узлом, либо топологическим седлом, либо вырожденным седлом, либо особой точкой с эллиптическим сектором, либо особой точкой второй группы.

Доказательство. Пусть $a_{12} = 0$, $a_{21} \neq 0$. Полагая в системе (3.2.1.1) выполненными условиями $a_{20} = b_{11} = b_{10} = 0$ применим к этой системе преобразование $\bar{u} = z$, $\bar{z} = -a_{21}u$. В результате получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{dt} = \bar{z} + \frac{a_{11}}{a_{21}}\bar{u}\bar{z} - a_{10}\bar{u}^2 + \frac{a_{01}}{a_{21}}\bar{u}^2\bar{z} - \\ \quad - \frac{a_{02}}{a_{21}^2}\bar{u}\bar{z}^2 - a_{00}\bar{u}^3 \equiv \bar{z} + \bar{P}(\bar{u}, \bar{z}), \\ \frac{d\bar{z}}{dt} = (b_{01} - a_{10})\bar{u}\bar{z} - \frac{b_{00}}{a_{21}}\bar{u}^2 + \frac{(a_{11} - b_{02})}{a_{21}}\bar{z}^2 - \\ \quad - a_{00}\bar{u}^2\bar{z} + \frac{a_{01}}{a_{21}}\bar{u}\bar{z}^2 - \frac{a_{02}}{a_{21}^2}\bar{z}^3 \equiv \bar{Q}(\bar{u}, \bar{z}). \end{cases} \quad (3.2.1.2)$$

Если $b_{00}a_{10} \neq 0$, и $b_{02} - 3a_{10} \neq 0$, то в силу теоремы 67 из [80] точка $A(\bar{u} = \bar{z} = 0)$ — вырожденное состояние равновесия (двуихсепаратрисное седло) системы (3.2.1.2).

Если $a_{10} = b_{00} = 0$, $a_{00}b_{01} \neq 0$, то $A(\bar{u} = \bar{z} = 0)$ — седлоузел системы (3.2.1.2) (см. теорему 65 [80]).

Если $a_{10} \neq 0$, $b_{01} = 3a_{10}$, $(3a_{11} - 2b_{02})a_{10} - 4a_{00}a_{21} \neq 0$, то $A(\bar{u} = \bar{z} = 0)$ — сложный фокус или центр системы (3.2.1.2) (см. теорему 66 [80]).

Если $a_{10} = b_{01} = 0$, $b_{00} = 0$, $3a_{11} - 2b_{02} = 0$, $a_{00} \neq 0$, то согласно теореме 66 [80] $A(\bar{u} = \bar{z} = 0)$ — топологический узел системы (3.2.1.2).

Если $b_{00} = 0$, $a_{10}(b_{01} - a_{10}) > 0$, то $A(\bar{u} = \bar{z} = 0)$ — топологическое седло системы (3.2.1.2) (см. теорему 66 [80]).

Если $a_{10}(b_{01} - a_{10}) < 0$, $b_{00} = 0$, то $A(\bar{u} = \bar{z} = 0)$ — особая точка с эллиптическим сектором системы (3.2.1.2) (см. теорему 66 [80]).

Согласно [80] при выполнении условий

$$\begin{aligned}\Delta &= 0, \\ |b_{11} - a_{20}| + |a_{20}| + |a_{21}| + |b_{10}| &> 0\end{aligned}$$

система (3.2.1.1) в начале координат не может иметь особой точки, которая не является ни седлоузлом, ни топологическим узлом, ни топологическим седлом, ни вырожденным седлом, ни особой точкой с эллиптическим сектором, ни особой точкой второй группы (теоремы 65-67 [80]). Таким образом, теорема доказана.

Отметим, что единственная особая точка системы (3.1.1.15) на бесконечности, являющаяся сложной, в случае $f(u) \not\equiv 0$ не может быть ни топологическим узлом, ни вырожденным состоянием равновесия.

3.2.2 Случай двух особых точек (одна сложная, а другая — простая)

Не уменьшая общности, будем считать, что точки $A(u = z = 0)$ и $B(v = z = 0)$ — особые точки системы (3.2.3) и (3.2.4), соответственно. При этом выполняются условия:

$$b_{20} = a_{30} = a_{02} = a_{12} = 0. \quad (3.2.2.1)$$

В силу (3.2.2.1) и нашего предположения о наличии в правых частях уравнений системы (3.1.1.15) хотя бы одного кубического члена, очевидно, выполняется неравенство $a_{21} \neq 0$.

С учетом условий (3.2.2.1) перепишем системы (3.2.3) и (3.2.4) в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = (b_{11} - a_{20})u + b_{10}z + (b_{02} - a_{11})u^2 + (b_{01} - a_{10})uz + \\ \quad + b_{00}z^2 - a_{01}u^2z - a_{00}uz^2, \\ \frac{dz}{dt} = -a_{21}u - a_{20}z - a_{11}uz - a_{10}z^2 - a_{01}uz^2 - a_{00}z^3. \end{array} \right. \quad (3.2.2.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = (a_{11} - b_{02})v + a_{01}z + (a_{20} - b_{11})v^2 + (a_{10} - b_{01})vz + \\ \quad + a_{00}z^2 - b_{10}v^2z - b_{00}vz^2, \\ \frac{dz}{dt} = -a_{21}v - b_{02}z - b_{11}vz - b_{01}z^2 - b_{10}vz^2 - b_{00}z^3. \end{array} \right. \quad (3.2.2.3)$$

Теорема 3.2.2.1. *Если система (3.2.2) имеет на экваторе сферы Пуанкаре одну сложную и одну простую особые точки, то сложная особая точка может быть либо седлоузлом, либо вырожденным седлом, либо топологическим узлом, либо топологическим седлом, либо особой точкой второй группы, либо особой точкой с эллиптическим сектором. При этом простая особая точка может быть либо узлом, либо фокусом, либо седлом, либо особой точкой второй группы.*

Доказательство. Учитывая неравенство $a_{21} \neq 0$ и полагая выполненные условия: $a_{20} = b_{11} = b_{10} = 0$, совершим в системе (3.2.2.2) преобразование $\bar{u} = z$, $\bar{z} = u$, $d\tau = -a_{21}dt$. В результате получим систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{u}}{d\tau} = \bar{z} + \frac{a_{11}}{a_{21}}\bar{u}\bar{z} + \frac{a_{10}}{a_{21}}\bar{u}^2 + \frac{a_{01}}{a_{21}}\bar{u}^2\bar{z} + \\ \quad + \frac{a_{00}}{a_{21}}\bar{u}^3 \equiv \bar{z} + \bar{P}_2(\bar{u}, \bar{z}), \\ \frac{d\bar{z}}{d\tau} = -\frac{b_{00}}{a_{21}}\bar{u}^2 + \frac{(a_{10} - b_{01})}{a_{21}}\bar{u}\bar{z} + \\ \quad + \frac{(a_{11} - b_{02})}{a_{21}}\bar{z}^2 + \frac{a_{00}}{a_{21}}\bar{u}^2\bar{z} + \frac{a_{01}}{a_{21}}\bar{u}\bar{z}^2 \equiv \bar{Q}_2(\bar{u}, \bar{z}). \end{array} \right. \quad (3.2.2.4)$$

Если $b_{00}a_{10}(3a_{10} - b_{01}) \neq 0$, то решение уравнения $\bar{z} + \bar{P}_2(\bar{u}, \bar{z}) = 0$ относительно \bar{z} имеет вид: $\bar{z} = -\frac{a_{10}}{a_{21}}\bar{u}^2 + \dots \equiv \bar{\varphi}(\bar{u})$.

Так как

$$\overline{Q}_2(\bar{u}, \bar{\varphi}(\bar{u})) = -\frac{b_{00}}{a_{21}}\bar{u}^2 + \dots, \quad \sigma(\bar{u}, \bar{\varphi}(\bar{u})) = \frac{3a_{10} - b_{01}}{a_{21}}\bar{u} + \dots,$$

где $\sigma(\bar{u}, \bar{z}) = \bar{P}'_{2\bar{u}} + \bar{Q}'_{2\bar{z}}$, то имеет место случай $m = n = 1$, $b_n = 3a_{10} - b_{01}/a_{21} \neq 0$. Следовательно, по теореме 67 [80] $A(\bar{u} = \bar{z} = 0)$ — вырожденное седло.

Если в системе (3.2.2.4) $a_{10} = b_{00} = 0$, $a_{00}b_{01} \neq 0$, то $A(u = z = 0)$ — седлоузел системы (3.2.2.2) (см. теорему 67 [80]).

Если $b_{00} = 0$, $a_{10}(a_{10} - b_{01}) < 0$, то согласно теореме 66 [80] точка $A(u = z = 0)$ — топологическое седло системы (3.2.2.2).

Если $a_{10}(a_{10} - b_{01}) > 0$, $b_{00} = 0$, $b_{01} - 3b_{10} \neq 0$, то по теореме 66 [80] $A(u = z = 0)$ — особая точка с эллиптическим сектором системы (3.2.2.2).

Если же $a_{10}(a_{10} - b_{01}) > 0$, $b_{01} = 3a_{10}$, $b_{00} = 3a_{11} - 2b_{02} = 0$, то точка $A(u = z = 0)$ — фокус или центр системы (3.2.2.2).

Полагая в системе (3.2.2.2) выполненные условия: $a_{20} = b_{10} = 0$, $b_{11} \neq 0$, применим преобразование $\bar{u} = -b_{11}u - a_{21}z$, $\bar{z} = -a_{21}z$, $\tau = b_{11}t$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{u}}{d\tau} = \left(\frac{2a_{21}b_{00}}{b_{11}^3} + \frac{a_{11}}{b_{11}a_{21}} + \frac{a_{00}}{b_{11}^2} - \frac{2a_{10}}{b_{11}^2} - \frac{b_{01}}{b_{11}^2} \right) \bar{u} \bar{z} + \\ \quad + \left(\frac{a_{10}}{b_{11}^2} - \frac{a_{21}b_{00}}{b_{11}^3} - \frac{a_{00}}{b_{11}^2} + \frac{b_{01}}{b_{11}^2} - \frac{b_{02}}{b_{11}a_{21}} \right) \bar{z}^2 - \frac{a_{00}}{b_{11}^3} \bar{u}^3 - \\ \quad - \frac{a_{01}}{a_{21}b_{11}^2} \bar{u}^2 \bar{z} + \frac{1}{b_{11}^3} (a_{10}b_{11} - a_{21}b_{00}) \bar{u}^2 + \\ \quad + \left(\frac{a_{01}}{b_{11}^2 a_{21}} - \frac{a_{00}}{b_{11}^3} \right) \bar{u} \bar{z}^2 \equiv \tilde{P}_2(\bar{u}, \bar{z}), \\ \frac{d\bar{z}}{d\tau} = \bar{z} - \frac{a_{00}}{b_{11}^3} \bar{u}^2 \bar{z} + \left(\frac{2a_{21}b_{00}}{b_{11}^3} + \frac{a_{10}}{b_{11}^2} - \frac{b_{01}}{b_{11}^2} \right) \bar{u} \bar{z} + \\ \quad + \left(\frac{b_{01}}{b_{11}^2} + \frac{a_{11}}{a_{21}b_{11}} - \frac{b_{02}}{a_{21}b_{11}} - \frac{a_{10}}{b_{11}^2} - \frac{a_{21}b_{00}}{b_{11}^3} \right) \bar{z}^2 + \\ \quad + \left(\frac{2a_{00}}{b_{11}^3} - \frac{a_{01}}{b_{11}^2 a_{21}} \right) \bar{u} \bar{z}^2 + \left(\frac{a_{01}}{b_{11}^2 a_{21}} - \frac{a_{00}}{b_{11}^3} \right) \bar{z}^3 - \\ \quad - \frac{a_{21}b_{00}}{b_{11}^3} \bar{u}^2 \equiv \bar{z} + \tilde{Q}_2(\bar{u}, \bar{z}). \end{array} \right. \quad (3.2.2.5)$$

Если $a_{10}b_{11} - a_{21}b_{00} \neq 0$, то $A(\bar{u} = \bar{z} = 0)$ — седлоузел системы (3.2.2.5) по теореме 65 [80].

Пусть $a_{10} = b_{00} = 0$. Тогда решение уравнения $\bar{z} + \tilde{Q}_2(\bar{u}, \bar{z}) = 0$ имеет вид: $\bar{z} = 0$, то есть $\tilde{\varphi}(\bar{u}) \equiv 0$. Поэтому $\tilde{P}_2(u, 0) = -\frac{a_{00}}{b_{11}^3}u^3$, и согласно теореме 65 [80] точка $A(\bar{u} = \bar{z} = 0)$ является топологическим седлом (узлом) при выполнении неравенства $b_{11}a_{00} > 0$ ($b_{11}a_{00} < 0$).

Поскольку $B(v = z = 0)$ простая особая точка системы (3.2.2.3), то имеет место неравенство $b_{02}(b_{02} - a_{11}) + a_{21}a_{01} \neq 0$.

Отметим, что аналитические условия, определяющие тип простой особой точки $B(v = z = 0)$ системы (3.2.2.3), не зависят от условий на коэффициенты, приведенных нами выше и от которых зависит тип сложной особой точки $A(u = z = 0)$ системы (3.2.2.2). Следовательно, теорема доказана.

3.2.3 Случай двух сложных особых точек

Нетрудно видеть, что $A(u = z = 0)$ ($B(v = z = 0)$) является сложной особой точкой системы (3.2.2.2) ((3.2.2.3)), если выполняется условие

$$\begin{aligned} a_{20}(a_{20} - b_{11}) + a_{21}b_{10} &= 0, \\ (b_{02}(b_{02} - a_{11}) + a_{21}a_{01}) &= 0. \end{aligned} \tag{3.2.3.1}$$

Теорема 3.2.3.1. *Если система (3.2.2) имеет на экваторе сферы Пуанкаре две сложные особые точки, то ни одна из них не может быть особой точкой второй группы.*

Доказательство. Преобразование $\bar{u} = -z$, $\bar{z} = -b_{10}u - a_{20}z$, где

$b_{10} \neq 0$, позволяет системе (3.2.2.2) придать вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{u}}{dt} = \bar{z} + \left(a_{11} - b_{02} + \frac{a_{20}(b_{01} - a_{10})}{b_{10}} - \frac{b_{00}a_{20}^2}{b_{10}^2} \right) \bar{u}^2 + \\ \quad + \left(\frac{2b_{00}a_{20}}{b_{10}^2} + \frac{a_{10} - b_{01}}{b_{10}} \right) \bar{u}\bar{z} - \frac{b_{00}}{b_{10}^2} \bar{z}^2 + \\ \quad + \left(\frac{a_{01}a_{20}}{b_{10}} - \frac{a_{00}a_{20}^2}{b_{10}^2} \right) \bar{u}^3 + \left(\frac{2a_{00}a_{20}}{b_{10}^2} - \frac{a_{01}}{b_{10}} \right) \bar{u}^2 \bar{z} - \\ \quad - \frac{a_{00}}{b_{10}^2} \bar{u} \bar{z}^2 \equiv \bar{z} + R_2(\bar{u}, \bar{z}), \\ \frac{d\bar{z}}{dt} = \left(\frac{b_{01}a_{20}^2}{b_{10}} - \frac{b_{00}a_{20}^3}{b_{10}^2} - a_{20}b_{02} \right) \bar{u}^2 + \\ \quad + \left(a_{11} - \frac{a_{10}a_{20}}{b_{10}} + \frac{2b_{00}a_{20}^2}{b_{10}^2} - \frac{a_{20}b_{01}}{b_{10}} \right) \bar{u}\bar{z} + \\ \quad + \left(\frac{a_{10}}{b_{10}} - \frac{a_{20}b_{00}}{b_{10}^2} \right) \bar{z}^2 + \left(\frac{a_{01}a_{20}}{b_{10}} - \frac{a_{00}a_{20}^2}{b_{10}^2} \right) \bar{u}^2 \bar{z} + \\ \quad + \left(\frac{2a_{00}a_{20}}{b_{10}^2} - \frac{a_{01}}{b_{10}} \right) \bar{u} \bar{z}^2 - \frac{a_{00}}{b_{10}^2} \bar{z}^3 \equiv S_2(\bar{u}, \bar{z}). \end{array} \right. \quad (3.2.3.2)$$

Если $(0, 0)$ — особая точка второй группы системы (3.2.3.2), то согласно [80] выполняется равенство

$$b_{01}a_{20}^2b_{10} - b_{00}a_{20}^3 - a_{20}b_{02}b_{10}^2 = 0. \quad (3.2.3.3)$$

Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{u}, \varphi(\bar{u})) &\equiv R'_{2\bar{u}}(\bar{u}, \varphi(\bar{u})) + S'_{2\bar{z}}(\bar{u}, \varphi(\bar{u})) = \\ &= \left(3a_{11} - 2b_{02} + \frac{a_{20}b_{01} - 3a_{20}a_{10}}{b_{10}} \right) \bar{u} + \dots, \end{aligned} \quad (3.2.3.4)$$

где

$$\varphi(\bar{u}) = \left(\frac{b_{00}a_{20}^2}{b_{10}^2} + \frac{(a_{10} - b_{01})a_{20}}{b_{10}} + b_{02} - a_{11} \right) \bar{u}^2 + \dots$$

решение уравнения $\bar{z} + R_2(\bar{u}, \bar{z}) = 0$.

Коэффициент при \bar{u} в разложении функции $\sigma(\bar{u}, \varphi(\bar{u}))$ (3.2.3.4) равен нулю [80], то есть

$$3a_{11} - 2b_{02} + \frac{a_{20}b_{01} - 3a_{20}a_{10}}{b_{10}} = 0. \quad (3.2.3.5)$$

Решая систему уравнений (3.2.3.3) и (3.2.3.5) при $a_{20} \neq 0$, получим

$$b_{02} = \frac{b_{01}a_{20}}{b_{10}} - \frac{b_{00}a_{20}^2}{b_{10}^2}, \quad a_{11} = \frac{a_{20}b_{01} + 3a_{20}a_{10}}{3b_{10}} - \frac{2b_{00}a_{20}^2}{3b_{10}^2}. \quad (3.2.3.6)$$

С учетом (3.2.3.6) легко видеть, что

$$S_2(\bar{u}, \varphi(\bar{u})) = 2\left(\frac{2b_{02}a_{20}^2}{3b_{10}^2} - \frac{a_{20}b_{01}}{3b_{10}}\right)\bar{u}^3 + \dots,$$

то есть точка $(0, 0)$ системы (3.2.3.2) является топологическим седлом (см. теорему 66 [81]). При $a_{20} = 0$ приходим к аналогичному выводу.

Если же к системе (3.2.2.3) применить преобразование $\bar{v} = -z$, $\bar{z} = a_{01}v - b_{02}z$, $a_{01} \neq 0$, то придет к такому же выводу. Теорема доказана

Замечание 3.2.3.1. Если $b_{10} = 0$ в случае системы (3.2.2.2) и $a_{01} = 0$ в случае системы (3.2.2.3), то в силу равенств (3.2.3.1) $b_{02} = a_{11} = a_{20} = b_{11} = 0$. Поэтому системы (3.2.2.2) и (3.2.2.3) приводятся к системе вида (3.2.3.2), если поменять ролями u и z и v и z соответственно.

Введем следующие обозначения сложных особых точек: су — седлоузел, ту — топологический узел, тс — топологическое седло, вс — вырожденное седло, эс — особая точка с эллиптическим сектором, а также $W = \{\text{су, ту, тс, вс, эс}\}$, $A(a)$ — особая точка $A(u = z = 0)$ является точкой типа $a \in W$, $B(b)$ — особая точка $B(v = z = 0)$ является точкой типа $b \in W$.

Теорема 3.2.3.2. Пусть $A(u = z = 0)$ и $B(v = z = 0)$ сложные особые точки системы (3.2.2) на экваторе сферы Пуанкаре. Тогда упорядоченная пара (a, b) пробегает все множество W^2 .

Доказательство. Как следует из теоремы 3.2.3.1 ни одна из особых точек $A(u = z = 0)$ и $B(v = z = 0)$ не может быть особой точкой второй группы. Поэтому в силу теорем 65-67 [80] $a, b \in W$. Пусть $b_{02} = a_{11} = a_{01} = b_{11} = a_{20} = b_{10} = 0$. Применяя к системам (3.2.2.2) и (3.2.2.3) преобразования

$$\begin{cases} \bar{u} = z, \\ \bar{z} = -a_{21}u \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \bar{v} = z, \\ \bar{z} = -a_{21}v, \end{cases}$$

соответственно, получим

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{dt} = \bar{z} - a_{10}\bar{u}^2 - a_{00}\bar{u}^3, \\ \frac{d\bar{z}}{dt} = -a_{21}b_{00}\bar{u}^2 + (b_{01} - a_{10})\bar{u}\bar{z} - a_{00}\bar{u}^2\bar{z}. \end{cases} \quad (3.2.3.7)$$

$$\begin{cases} \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{z} - b_{01}\bar{v}^2 - b_{00}\bar{v}^3, \\ \frac{d\bar{z}}{dt} = -a_{21}a_{00}\bar{v}^2 + (a_{10} - b_{01})\bar{v}\bar{z} - b_{00}\bar{v}^2\bar{z}. \end{cases} \quad (3.2.3.8)$$

Типы сложных особых точек $A(u = z = 0)$ и $B(v = z = 0)$ систем (3.2.3.7) и (3.2.3.8), соответственно, вполне определяются с помощью теорем 66 и 67 [80]. Результаты исследования систем (3.2.3.7) и (3.2.3.8) отражены в таблице 1.

Таблица №1

Классификация особых точек $A(u = z = 0)$ и $B(v = z = 0)$ в соответствии с условиями на коэффициенты (3.2.3.7) и (3.2.3.8)

N_0	Условия на коэффициенты	Тип точки A	Тип точки B
1.	$a_{00}b_{00}(a_{10} - 3b_{01})(b_{01} - 3a_{10}) \neq 0$	вс	вс
2.	$a_{11}b_{00} \neq 0, a_{00} = a_{10} - b_{01} = 0$	вс	су
3.	$(b_{01} - 3a_{10})(a_{10} - 3b_{01}) \neq 0,$ $a_{00} = 0, b_{00} = 0, (b_{01} - a_{10})a_{10} > 0,$ $(b_{01} - a_{10})b_{01} < 0$	mc	mc
4.	$a_{00} = 0, b_{00} \neq 0, (a_{10} - b_{01})b_{01} > 0$	вс	mc

Пусть выполняются условия $a_{20} = b_{10} = 0, b_{11} \neq 0, b_{02} = a_{11} = a_{01}$. Тогда с помощью преобразования $\bar{v} = z, \bar{z} = -a_{21}v$ систему (3.2.2.3.) приведем к виду:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{z} - b_{01}\bar{v}^2 + \frac{b_{11}}{a_{21}}\bar{v}\bar{z} - b_{00}\bar{v}^3 - \\ \quad - b_{10}\bar{v}^2z - b_{00}\bar{v}z^2, \\ \frac{d\bar{z}}{dt} = -a_{21}a_{00}\bar{v}^2 + (a_{10} - b_{01})\bar{v}\bar{z} + \frac{b_{11}}{a_{21}}\bar{z}^2 - b_{00}\bar{v}^2\bar{z}. \end{cases} \quad (3.2.3.9)$$

Рассмотрим системы (3.2.2.5) и (3.2.3.9).

Типы особых точек $A(\bar{u} = \bar{z} = 0)$ и $B(\bar{v} = \bar{z} = 0)$ этих систем определяются с помощью теорем 65-67 [80]. Результаты исследования систем (3.2.2.5) и (3.2.3.9) отражены в таблице 2.

Таблица №2

Классификация особых точек $A(\bar{u} = \bar{z} = 0)$ и $B(\bar{v} = \bar{z} = 0)$ в соответствии с условиями на коэффициенты (3.2.2.5) и (3.2.3.9)

N_0	Условия на коэффициенты	Тип точки A	Тип точки B
1.	$a_{00} = 0, a_{10}b_{11} - a_{21}b_{00} \neq 0,$ $(a_{10} - b_{01})b_{01} > 0$	cy	mc
2.	$a_{10} = b_{00} = 0, a_{00}b_{11} < 0,$ $a_{10} - 3b_{01} \neq 0$	my	bc
3.	$a_{00} = 0, a_{10}b_{11} - a_{21}b_{00} = 0,$ $b_{01}a_{21}b_{00}b_{11} < 0, (a_{10} - b_{01})b_{01} > 0$	my	mc
4.	$a_{00} = 0, a_{10}b_{11} - a_{21}b_{00} = 0,$ $b_{01}a_{21}b_{00}b_{11} < 0, (a_{10} - b_{01})b_{01} < 0,$ $a_{10} - 3b_{01} \neq 0$	my	ec
5.	$a_{00} = 0, a_{20}b_{11} - a_{21}b_{00} = 0,$ $b_{01}a_{21}b_{00}b_{11} > 0, (a_{10} - b_{01})b_{01} < 0,$ $a_{10} - 3b_{01} \neq 0$	mc	ec
6.	$a_{00} = a_{10} - b_{01} = 0, b_{01}(b_{11}/a_{21} -$ $-b_{00}) \neq 0, a_{10}b_{11} - a_{21}b_{00} = 0,$ $b_{01}a_{21}b_{00}b_{11} < 0$	my	cy
7.	$a_{10}b_{11} - a_{21}b_{00} \neq 0, (a_{10} - b_{01})b_{01} < 0,$ $a_{10} - 3b_{01} \neq 0$	cy	ec

Если выполняются условия

$$a_{20} = b_{10} = b_{11} = b_{00} = b_{02} = a_{01} = a_{11} = a_{00} = 0. \quad (3.2.3.10)$$

то системы (3.2.2.2) и (3.2.2.3) примут соответственно вид:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = (b_{01} - a_{10})uz, \\ \frac{dz}{dt} = -a_{21}u - a_{10}z^2. \end{cases} \quad (3.2.3.11)$$

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = (a_{10} - b_{01})vz, \\ \frac{dz}{dt} = -a_{21}v - b_{01}z^2. \end{cases} \quad (3.2.3.12)$$

Применяя к системам (3.2.3.11) и (3.2.3.12) преобразования

$$\begin{cases} \bar{u} = z, \\ \bar{z} = -a_{21}u \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \bar{v} = z, \\ \bar{z} = -a_{21}v \end{cases}$$

соответственно, получим системы

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{dt} = \bar{z} - a_{10}\bar{u}^2, \\ \frac{d\bar{z}}{dt} = (b_{01} - a_{10})\bar{u}\bar{z}. \end{cases} \quad (3.2.3.13)$$

$$\begin{cases} \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{z} - b_{01}\bar{v}^2, \\ \frac{d\bar{z}}{dt} = (a_{10} - b_{01})\bar{v}\bar{z}. \end{cases} \quad (3.2.3.14)$$

При выполнении условий: $(b_{01} - a_{10})a_{10} < 0$, $(b_{01} - a_{10})b_{01} > 0$, $(b_{01} - 3a_{10})(a_{10} - 3b_{01}) \neq 0$, как видно из (3.2.3.13) и (3.2.3.14), $A(\bar{u} = \bar{z} = 0)$ и $B(\bar{v} = \bar{z} = 0)$ особые точки с эллиптическим сектором.

Наконец, полагая выполнеными условия $b_{11} = a_{20} \neq 0$, $b_{10} = 0$, $a_{11} = b_{02} \neq 0$, $a_{01} = 0$, с помощью преобразований

$$\bar{u} = u, \quad \bar{z} = \frac{a_{21}}{a_{20}}u + z$$

и

$$\bar{v} = v, \quad \bar{z} = \frac{a_{21}}{b_{02}}v + z,$$

а также перехода к новой переменной по времени система (3.2.3) приво-

дится к виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{u}}{d\tau} = -\frac{a_{21}}{a_{20}^2} \left(a_{10} - b_{01} + \frac{b_{00}a_{21}}{a_{20}} \right) \bar{u}^2 + \\ \quad + \left(\frac{a_{10}}{a_{20}} - \frac{b_{01}}{a_{20}} + \frac{2b_{00}a_{21}}{a_{20}^2} \right) \bar{u} \bar{z} - \\ \quad - \frac{b_{00}}{a_{20}} \bar{z}^2 + \frac{a_{00}a_{21}^2}{a_{20}^3} \bar{u}^3 - \frac{2a_{00}a_{21}}{a_{20}^2} \bar{u}^2 \bar{z} + \frac{a_{00}}{a_{20}} \bar{u} \bar{z}^2, \\ \frac{d\bar{z}}{d\tau} = \bar{z} + \left(\frac{b_{01}a_{21}^2}{a_{20}^3} - \frac{b_{00}a_{21}^3}{a_{20}^4} - \frac{b_{02}a_{21}}{a_{20}^2} \right) \bar{u}^2 + \\ \quad + \left(\frac{b_{02}}{a_{20}} + \frac{2b_{00}a_{21}^2}{a_{20}^3} - \frac{b_{01}a_{21}}{a_{20}^2} - \frac{a_{10}a_{21}}{a_{20}^2} \right) \bar{u} \bar{z} + \\ \quad + \left(\frac{a_{10}}{a_{20}} - \frac{a_{21}b_{00}}{a_{20}^2} \right) \bar{z}^2 + \frac{a_{00}a_{21}^2}{a_{20}^3} \bar{u}^2 \bar{z} - \frac{2a_{00}a_{21}}{a_{20}^2} \bar{u} \bar{z}^2 + \frac{a_{00}}{a_{20}} \bar{z}^3. \end{array} \right. \quad (3.2.3.15)$$

а система (3.2.4) — к виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{v}}{d\mu} = -\frac{a_{21}}{b_{20}^2} \left(b_{01} - a_{10} + \frac{a_{00}a_{21}}{b_{02}} \right) \bar{v}^2 + \\ \quad + \left(\frac{b_{01}}{b_{02}} - \frac{a_{10}}{b_{02}} + \frac{2a_{00}a_{21}}{b_{02}^2} \right) \bar{v} \bar{z} - \frac{a_{00}}{b_{02}} \bar{z}^2 + \\ \quad + \frac{b_{00}a_{21}^2}{b_{02}^3} \bar{v}^3 - \frac{2b_{00}a_{21}}{b_{02}^2} \bar{v}^2 \bar{z} + \frac{b_{00}}{b_{02}} \bar{v} \bar{z}^2, \\ \frac{d\bar{z}}{d\mu} = \bar{z} + \left(\frac{a_{10}a_{21}^2}{b_{02}^3} - \frac{a_{20}a_{21}}{b_{02}^2} - \frac{a_{00}a_{21}^3}{b_{02}^4} \right) \bar{v}^2 + \\ \quad + \left(\frac{a_{20}}{b_{02}} + \frac{2a_{00}a_{21}^2}{b_{02}^3} - \frac{b_{01}a_{21}}{b_{02}^2} - \frac{a_{10}a_{21}}{b_{02}^2} \right) \bar{v} \bar{z} + \\ \quad + \left(\frac{b_{10}}{b_{02}} - \frac{a_{21}a_{00}}{b_{02}^2} \right) \bar{z}^2 + \frac{b_{00}a_{21}^2}{b_{02}^3} \bar{v}^2 \bar{z} - \frac{2b_{00}a_{21}}{b_{02}^2} \bar{v} \bar{z}^2 + \frac{b_{00}}{b_{02}} \bar{z}^3. \end{array} \right. \quad (3.2.3.16)$$

Для систем (3.2.3.15) и (3.2.3.16) особые точки $A(\bar{u} = \bar{z} = 0)$ и $B(\bar{v} = \bar{z} = 0)$, соответственно, могут быть одновременно седлоузлами или топологическими узлами или топологическими седлами в силу теоремы 65 [80]. Ничто не мешает нам поменять ролями особые точки $A(u = z = 0)$ и $B(v = z = 0)$ в проведенных рассуждениях. Следовательно, теорема доказана.

Замечание 3.2.3.2. При выполнении условий (3.2.3.10) система (3.2.2)

имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{10}x + a_{21}x^2y, \\ \frac{dy}{dt} = b_{01}y + a_{21}xy^2. \end{cases} \quad (3.2.3.17)$$

где $a_{21}b_{01} \neq 0$. Если $a_{21}b_{01} < 0$, то система (3.2.3.17) имеет на бесконечности две особые точки $A(u = z = 0)$ и $B(v = z = 0)$ с эллиптическим сектором и простое седло $(0; 0)$ в конечной части фазовой плоскости.

Вместе с тем в теореме из статьи [114] утверждается, что система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{10}x + a_{01}y + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = b_{10}x + b_{01}y + a_{30}x^2y + a_{21}xy^2 + a_{12}y^3, \end{cases} \quad (3.2.3.18)$$

имеет на экваторе сферы Пуанкаре два центра, если единственная особая точка системы (3.2.3.18) в ограниченной части фазовой плоскости является седлом. Так как система (3.2.3.17) — частный случай системы (3.2.3.18), то можно утверждать, что в [114] рассмотрены не все случаи распределения особых точек системы (3.2.3.18) на бесконечности.

Фазовый портрет системы (3.2.3.17) в круге Пуанкаре изображен на рис. 147.

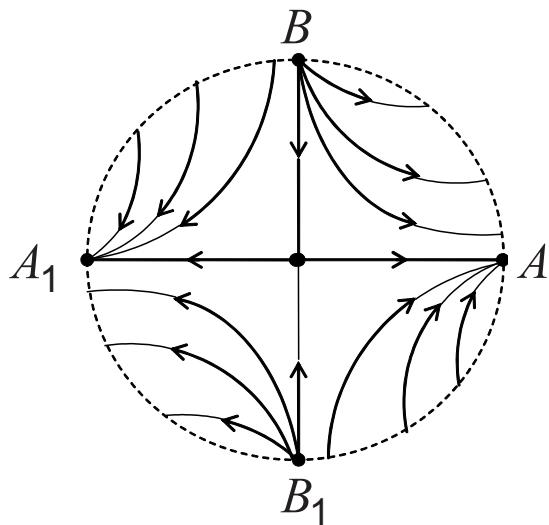


Рис. 147

3.2.4 Случай двух простых особых точек

Считая, что $A(u = z = 0)$ и $B(v = z = 0)$ являются простыми особыми точками систем (3.2.3) и (3.2.4), соответственно, получаем следующие ограничения на коэффициенты системы (3.2.2): $b_{20} = a_{30} = 0$, $a_{02} = a_{12} = 0$, $[a_{20}(a_{20} - b_{11}) + a_{21}b_{10}] \cdot [b_{02}(b_{02} - a_{11}) + a_{21}a_{01}] \neq 0$. Введем обозначения для простых особых точек: у — узел, с — седло, ф — фокус, вг — особая точка второй группы, $\bar{W} = \{y, c, \phi, \text{вг}\}$, $A(a)$ — особая точка $A(u = z = 0)$ является точкой типа $a \in \bar{W}$, $B(b)$ — особая точка $B(v = z = 0)$ является точкой типа $b \in \bar{W}$.

Теорема 3.2.4.1. *Пусть $A(u = z = 0)$ и $B(v = z = 0)$ — простые особые точки системы (3.2.2) на экваторе сферы Пуанкаре. Тогда упорядоченная пара (a, b) пробегает все множество \bar{W}^2 .*

Справедливость теоремы легко устанавливается с помощью величин:

$$\begin{aligned}\sigma(A) &= b_{11} - 2a_{20}, & \Delta(A) &= a_{20}(a_{20} - b_{11}) + a_{21}b_{10}, \\ \sigma(B) &= a_{11} - 2b_{02}, & \Delta(B) &= b_{02}(b_{02} - a_{11}) + a_{21}a_{01}, \\ \sigma^2(A) - 4\Delta(A), & & \sigma^2(B) - 4\Delta(B).\end{aligned}$$

Выводы из исследования, проведенного в пункте 3.2

1. Установлено, что кубическая дифференциальная система с вырожденной бесконечностью (экватор сферы Пуанкаре не содержит целой траектории, отличной от состояния равновесия) имеет не более двух бесконечно удаленных особых точек.

2. Полностью изучено распределение особых точек кубической системы с вырожденной бесконечностью в случаях:

- а) двух сложных особых точек; б) двух простых особых точек.

Классификация сложных особых точек системы в соответствии с ограничениями на коэффициенты системы отражена в двух таблицах.

3. Изучен тип единственной сложной и единственной простой особой точки системы.

Замечание. Всюду в п. 3.2 рассматриваются особые точки системы с невырожденной матрицей линейных коэффициентов.

Литература

- [1] Андреев А.Ф. Особые точки дифференциальных уравнений. - Минск: Высшая школа, 1979. — 136 с.
- [2] Фроммер М. Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер // УМН. — 1941. — № 9. — С. 212-253.
- [3] Куклес И.С. О первой и второй проблемах различия Фроммера // Известия ВУЗов. Серия «Математика». — 1959. — № 2(9). — С. 101–117.
- [4] Куклес И.С., Суяршаев Ф.М. Обобщенный метод Фроммера // Известия ВУЗов. Серия «Математика». — 1960. — № 3(16). — С. 173–187.
- [5] Немыцкий В.В., Малышев Ю.В. Слабая структурная устойчивость однородных систем // Известия ВУЗов. Серия «Математика». — 1965. — № 3(46). — С. 133–145.
- [6] Малышев Ю.В. Исследование и классификация исключительных множеств // Дифференциальные и интегральные уравнения. — Межвуз. Сб. — Горький.: Горьковский госуниверситет, 1979. — С. 53–59.
- [7] Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.-Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1947. — 392 с.
- [8] Ляпунов А.М. Общая задача устойчивости движения. — М.: Гостехиздат, 1950. — 472 с.
- [9] Амелькин В.В. Нелинейные колебания в системах второго порядка / В.В. Амелькин, Н.А. Лукашевич, А.П. Садовский. — Минск: Изд-во БГУ, 1982. — 208 с.

- [10] Андронов А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин — М.: Наука, 1981. — 568 с.
- [11] Волокитин Е.П. Достаточные условия центра для некоторых классов полиномиальных совершенно изохронных систем // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2008. — Т. 11. — № 1. — С. 37-45.
- [12] Волокитин Е.П. Параметрический анализ динамической модели процесса кристаллизации // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2000. — Т. III. — № 2(6). — С. 35-42.
- [13] Калитин Б.С. Математические модели экономики. — Минск.: БГУ, 2004. — 182 с.
- [14] Капранов М.В. Теория колебаний в радиотехнике. / М.В. Капранов, В.Н. Кулешов, Г.М. Уткин. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
- [15] Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. — М.: Мир, 1983. — 400 с.
- [16] Немыцкий В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений / В.В. Немыцкий, В.В. Степанов. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 552 с.
- [17] Немыцкий, В.В. Некоторые современные проблемы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. — 1965. — Т. 20. — Вып. 4(124). — С. 3–36.
- [18] Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. — 232 с.
- [19] Эрроусмит Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. / Д. Эрроусмит, К. Плейс. — М.: Мир, 1986. — 243 с.
- [20] Broer H.W., Gaiko V.A. Global Qualitative Analysis of a Quartic Ecological Model // Elsevier Preprint 16 February 2009. — 13 p.

- [21] Mello L.F., Ribeiro Y.C. The Aharonov-Bohm Effect: Mathematical Aspects of the Quantum Flow // Applied Mathematical Sciences. — 2007. — Vol. 1. — No. 8. — P. 383-394.
- [22] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989. — 472 с.
- [23] Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела / М.В. Шамолин. — М.: Экзамен, 2007. — 349 с.
- [24] Wilson H.R. Spikes, decisions and actions. The dynamical foundations of neuroscience. — New York: Oxford university Press, 2005. — 307 p.
- [25] Волокитин Е.П., Треков С.А. Параметрический портрет системы уравнений Фиц-Хью // Матем. Моделирование. — 1994. — Т. 6. — № 12. — С. 65-78.
- [26] Llibre J., Valls C. Analytic first integrals of the FitzHugh-Nagumo systems // Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). — 2009. — Vol. 60. — P. 237-245.
- [27] Huang X., Wang Y., Cheng A. Limit cycles in a cubic predator-prey differential system // J. Korean Math. Soc. — 2006. — Vol. 43. — No. 4. — P. 829-843.
- [28] Proceedings of the Tenth SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics) International Conference on Data Mining / Edited by Srinivasan Parthasarathy, Bing Liu, Bart Goethals, Jian Pei, and Chandrika Kamath // Symposium held in Columbus, OH, April 29-May 1, 2010. — 953 p. (URL: <http://www.siam.org/catalog/pr.php>)
- [29] Proceedings of the 7th AIMS International Conference Dynamical Systems and Differential Equations (Arlington, Texas, uSA), 2009. — 878 p. The 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications. Dresden university of Technology Dresden , Germany, May 25–28, 2010. (URL: <http://aimsciences.org/journals/displayPapers1.jsp?pubID=262>).

- [30] Classical problems on planar polynomial vector fields. November 23–28, 2008. BIRS, Banff, Canada.
- [31] Ильяшенко Ю.С. Столетняя история 16-й проблемы Гильберта. В: «Глобус: Общематематический семинар. Вып. 1», М.: МЦНМО, 2004. // Centennial history of Hilbert's 16th problem, Bull. AMS, 2002. – Vol. 39. – No 3. – P. 301–354.
- [32] Андреев А.Ф., Садовский А.П., Цикалюк В.А. Проблема центрофокуса для системы с однородными нелинейностями в случае нулевых собственных значений линейной части // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39. — № 2. — С. 147-153.
- [33] Горбузов В.Н., Королько И.В. Траектории полиномиальных дифференциальных систем на сфере Пуанкаре // Дифференциальные уравнения. — 2002. — Т. 38. — № 6. — С. 845-846.
- [34] Горбузов В.Н. Интегралы дифференциальных систем. — Гродно: ГрГУ, 2006. — 447 с.
- [35] Долов М.В., Мулько А.Н. О предельных циклах двумерных систем дифференциальных уравнений с частным интегралом // Вестник ННГУ, сер. Математика. — 2003. — Вып. 1. — С. 4-9.
- [36] Долов М.В. О числе алгебраических инвариантных кривых полиномиальных векторных полей // Дифференциальные уравнения. — 2004. — Т. 40. — № 6. — С. 838-839.
- [37] Садовский А.П. Кубические системы нелинейных колебаний с семью предельными циклами // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39. — № 4. — С. 472-481.
- [38] Садовский А.П. Об условиях центра одной кубической системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 2000. — Т. 36. — № 1. — С. 98-102.
- [39] Черкас Л.А., Шевцов И.Л. Методы вспомогательных функций Дюлака и Пуанкаре оценки числа предельных циклов автономных систем на плоскости // Доклады БГУИР. — 2004. — № 1. — С. 115-125.

- [40] Bondar Y.L., Sadovskii A.P. Variety of the center and limit cycles of a cubic system, which is reduced to Lienard form // Jour Bul. Acad. Științe Repub. Mold. Mat. - 2004. — No 3(46). — P. 71-90.
- [41] Roussarie R., Schlomiuk D. On the geometric structure of the class of planar quadratic differential systems // Qualitative Theory of Dynamical Systems. — 2002. — Vol. 3. — No 1. — P. 93-121.
- [42] Carriao P.C., Gomes M.E.S., Ruas A.A.G. Planar Quadratic vector Fields with Finite Saddle Connection on a Straight Line (Non-convex Case) // Qualitative Theory of Dynamical Systems. — 2009. — Vol. 7. — C. 417-433.
- [43] Carriao P.C., Gomes M.E.S., Ruas A.A.G. Planar quadratic vector fields with finite saddle connection on a straight line (Convex case) // Qualitative Theory of Dynamical Systems. — 2005. — Vol. 6. — No. 2. - 181–202.
- [44] Schlomiuk D., Vulpe N. Planar Quadratic Vector Fields With Invariant Lines of Total Multiplicity at Least Five // Qualitative Theory of Dynamical Systems. — 2004. — Vol. 5. — P. 135-194.
- [45] Schlomiuk D., Vulpe N. Integrals and phase portraits of planar quadratic differential systems with invariant lines of at least five total multiplicity // Rocky Mountain Journal of Mathematics. — 2008. — Vol. 38. — No 6. — P. 2015-2036.
- [46] Cozma D., Șubă A. Solution of the Problem of the Centre for a Cubic Differential System with Three Invariant Straight Lines // Qualitative Theory of Dynamical Systems. — 2001. — Vol. 2. — P. 129-143.
- [47] Șubă A., Cozma D. Solution of the Problem of the Centre for Cubic Differential System with Three Invariant Straight Lines in Generic Position // Qualitative Theory of Dynamical Systems. — 2005. — Vol. 6. — P. 45-58.
- [48] Dumortier F., Herssens C. Tracing Phase Portraits of Planar Polynomial vector Fields with Detailed Analysis of the Singularities // Qualitative Theory of Dynamical Systems. — 1999. — Vol. 1. — P. 97-130.

- [49] Feng H., Xu R., Liu Q., Yang P. Limit cycles for a class of polynomial systems and applications // Electronic Journal of Differential Equations. — 2003. — Vol. 105. — P. 1–7. (URL: <http://ejde.math.txstate.edu> or <http://ejde.math.unt.edu>; ftp ejde.math.txstate.edu (login: ftp))
- [50] Gaiko V.A. Limit Cycle Bifurcations in a Quadratic System With Two Parallel Straight Line-Isoclines // Reports 08-06 of the Department of Applied Mathematical Analysis Delft: Delft University of Technology, 2008. — 13 p.
- [51] Zhao Y., Zhang Z. Bifurcations of Limit Cycles from Cubic Hamiltonian Systems with a Center and a Homoclinic Saddle-Loop // Publicacions Matem`antiques. — 2000. — Vol. 44. — P. 205-235.
- [52] Xiangdong Xie and Qingyi Zhan. Uniqueness of Limit Cycles for a Class of Cubic System With an Invariant Straight Line // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. — 2009. — Vol. 70. — Issue 12. — P. 4217-4225
- [53] Puțunitică V., Șubă A. The cubic differential system with six real invariant straight lines along three directions // Jour Bul. Acad. Științe Repub. Mold. Mat. — 2009. — No 2(60). — P. 111-130.
- [54] Gaiko V.A. On an application of two isoclines method to investigation of two-dimensional dynamical systems // Advanc. Synergetics. — 1994. — Vol. 2. — P. 104-109.
- [55] Gaiko V.A. Global Bifurcation Theory and Hilbert's Sixteenth Problem. Series: Mathematics and its applications. Vol. 562. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. — 182 p.
- [56] Берлинский А.Н. Некоторые вопросы качественного исследования дифференциального уравнения $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$, где P и Q — многочлены не выше второй степени. Дис. канд. физ.-мат. наук. — Ташкент, 1959. - 115 с.
- [57] Берлинский А.Н. О поведении интегральных кривых одного дифференциального уравнения // Известия ВУЗов. Сер. Математика. — 1960. — № 2(15). — С. 3-18.

- [58] Шахова Л.В. О прямых изоклинах // Труды Самаркандского государственного университета им. Алишера Навои. — 1964. — № 144. — С. 93-105.
- [59] Тун Цинь-чжу. Расположение предельных циклов системы $dx/dt = \sum_{i+k=0}^2 a_{ik}x^i y^k$, $dy/dt = \sum_{i+k=0}^2 b_{ik}x^i y^k$ // Периодический сборник переводов иностранных статей: Математика. — 1962. — Т.6. — № 2. — С. 150-168.
- [60] Сибирский К.С. Принцип симметрии и проблема центра // Ученые записки Кишиневского госуниверситета. — 1955. — Т. XVII. — С. 27 - 34.
- [61] Сибирский К.С., Плешкан И.И. Условия симметрии поля направлений некоторого дифференциального уравнения// Ученые записки Кишинёвского государственного университета. — 1957. — Т. 29. — С. 11-14.
- [62] Любимова Р.А. Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми // Дифференциальные и интегральные уравнения. Межвуз. Сб. — Горький: Горьк. гос. ун-т, 1977. — С. 19-22.
- [63] Любимова Р.А. Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми // Дифференциальные и интегральные уравнения. Межвуз. Сб. — Горький, 1984. — С. 66-69.
- [64] Artés J., Grünbaum B., Llibre J. On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems // Pacific journal of mathematics. — 1998. — Vol. 184. — No 2. — P. 207-230.
- [65] Sokulski J. On the number of invariant lines of polynomial vector fields // Nonlinearity. — 1996. — No. 9. — P. 479-485.
- [66] Лягина Л.С. Поведение интегральных кривых в окрестности начала координат уравнения $y' = (ax^2 + bxy + cy^2)/(dx^2 + exy + fy^2)$ // Успехи математических наук. — 1951. — Т.6. — Вып. 2. — С. 171-183.

- [67] Малышев Ю.В. Исследование дифференциальных уравнений, близких к однородным // Вестник Московского университета. — 1965. — № 6. — С. 15–26.
- [68] Дружкова Т.А. Дифференциальные уравнения с алгебраическими интегралами: дисс. канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. — Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского. — Горький, 1975. — 129 с.
- [69] Дружкова Т.А. Алгебраические дифференциальные уравнения с алгебраическими интегралами. Методическое пособие. Часть первая. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2005. — 37 с.
- [70] Лукашевич Н.А. Интегральные кривые одного дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. — 1965. — Т. 1. — № 1. — С. 82–95.
- [71] Лункевич В.А., Сибирский К.С. Условия центра при однородных нелинейностях третьей степени // Дифференциальные уравнения. — 1965. — Т. 1. — № 11. — С. 1482–1487.
- [72] Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н.П. Еругин. — Минск: Наука и техника, 1979. — 744 с.
- [73] Лукашевич Н.А. К вопросу о предельных циклах для системы $dx/dt = y + P(x, y)$, $dy/dt = -x + Q(x, y)$, $P(tx, ty) = t^3 P(x, y)$, $Q(tx, ty) = t^3 Q(x, y)$, если $(0; 0)$ — особая точка типа "центр" // Доклады АН БССР. — 1961. — Т. 5. — № 10. — С. 424–426.
- [74] Долов М.В. О предельных циклах в случае центра // Дифференциальные уравнения. — 1972. — Т. 8. — № 9. — С. 1691–1692.
- [75] Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю. Частные интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Математический сборник. — 1992. — Т. 183. — № 3. — С. 76–94.
- [76] Ушхо Д.С., Ушхо А.Д. О существовании предельных циклов и линейных частных интегралов кубических дифференциальных си-

- стем на плоскости // Труды ФОРА. — 2004. — № 9. — С. 20–24. (URL: <http://fora.adygnet.ru>)
- [77] Ушхо Д.С. О числе особых точек второй группы кубической системы // Дифференциальные уравнения. — 1993. — Т. 29. — № 2. — С. 240–245.
- [78] Ушхо Д.С., Ушхо А.Д. Оценка числа особых точек второй группы кубической дифференциальной системы // Труды ФОРА. — 2005. — № 10. — С. 44–50. (URL: <http://fora.adygnet.ru>)
- [79] Ушхо Д.С. О прямых изоклинах кубической дифференциальной системы // Труды ФОРА. — 2003. — № 8. — С. 7–21. (URL: <http://fora.adygnet.ru>)
- [80] Андronov A.A. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андronов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон , А.Г. Майер. — М.: Наука, 1966. — 568 с.
- [81] Ушхо Д.С. Прямые изоклины и канонические формы полиномиальных дифференциальных систем на плоскости. — Майкоп: АГУ, 2007. — 93 с.
- [82] Тлячев В.Б. К вопросу о прямых изоклинах полиномиальных дифференциальных систем на плоскости / В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо, Д.С. Ушхо // Вестник Нижегородского университета. Серия «Математика». — 2010. — № 1. — С. 156–162. URL: <http://www.unn.ru/e-library/vestnik.html?jnum=84>
- [83] Ушхо А.Д. Параллельные прямые изоклины кубичных дифференциальных систем на плоскости // Вестник АГУ. Серия "Естественно-математические и технические науки". — 2009. — № 2(49). — С. 16–25. (URL: <http://vestnik.adygnet.ru>)
- [84] Gaiko V.A. Geometric Methods of Qualitative Analysis and Global Bifurcation Theory // Nonlinear Phenomena in complex systems. — 2002. — Vol. 5. — No 1. — Pp.1–20.
- [85] Чересиз В.М. Об изоклинах полиномиальных векторных полей // Сибирский математический журнал. — 1994. — Т. 35. — № 6. — С. 1390–1396.

- [86] Млодзеевский Б.К. Основы аналитической геометрии на плоскости / Б. К. Млодзеевский. - Перераб. и доп. изд. — М.: Петроград, Гос. изд-во, 1923. — 323 с.
- [87] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1981. — 232 с.
- [88] Дружкова Т.А. О квадратичном дифференциальном уравнении с алгебраическим интегралом // Дифференциальные и интегральные уравнения. Межвуз. сборник: Горький, 1977. — С. 3–6
- [89] Тлячев В.Б. Прямые изоклины и особые точки кубических дифференциальных систем на плоскости / В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо, Д.С. Ушхо // Вестник АГУ. Серия «Естественно-математические и технические науки». — 2010. — № 1(53). — С. 32–57.
- [90] Xiang Z., Yanqian Y. On the number of invariant lines for polynomial systems // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1998. — Vol. 126. — No. 8. — P. 2249–2265.
- [91] Puțunitică V.M. The cubic differential system with real invariant straight lines along six directions // Материалы международной конференции, посвященной столетию Н.Н. Боголюбова и 70-летию Н.И. Нагнибиды. — Черновцы: Изд-во Черновицкого гос. ун-та, 2009. — С. 245–247.
- [92] Тлячев В.Б., Ушхо А.Д. Оценка числа различных направлений действительных инвариантных прямых кубической дифференциальной системы на плоскости // Труды ФОРА, 2009. — № 14. — С. 1–4.
- [93] Шарипов Ш.Р. О распределении особых точек на экваторе сферы Пуанкаре // Труды Самаркандинского госуниверситета имени Алишера Навои. — 1964. — Вып. 144. — С. 88–92.
- [94] Баутин Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонович. — М.: Наука, 1976. — 496 с.
- [95] Альмухамедов М.И. К проблеме центра. — Казань: Изв.физ.-мат. об-ва, (1936-37). — С. 29–36.

- [96] Куклес С.И. Некоторые признаки отличия фокуса от центра // Труды Узбекского университета. — 1951. — Вып. 47. — С. 30, 41, 42.
- [97] Сахарников Н.А. Об условиях существования центра и фокуса // Прикладн. матем. и механика. — 1950. — Т. 14. — Вып. 5. — С. 524–525.
- [98] Уокер Р. Алгебраические кривые. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1952. — 236 с.
- [99] Ушхо Д.С. Новое доказательство одной теоремы об оценке числа особых точек второй группы кубической дифференциальной системы // Вестник АГУ. Серия "Естественно-математические и технические науки". — 2007. — № 4(28). — С. 14–19.
- [100] Ушхо А.Д. Бесконечно удаленные особые точки кубической системы в специальном случае // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2011. — № 1. — С. 17–33. (Электронный журнал Санкт-Петербургского госуниверситета, пер. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010. Доступен URL: <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>)
- [101] Андронов А.А. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. — М.: Наука, 1967. — 488 с.
- [102] Авдонин Н.И. Некоторые признаки существования и отсутствия замкнутых траекторий одной системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 1968. — Т. 4. — № 4. — С. 639–645.
- [103] Ушхо А.Д., Ушхо Д.С. Особые точки кубической дифференциальной системы на экваторе сферы Пуанкаре // Труды ФОРА, 2006. — № 11. — С. 40–68. (URL: <http://fora.adygnet.ru>)
- [104] Хайрутдинов И.В. О бесконечно удаленных особых точках системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + bx^3 + (c - \beta)x^2y + (3d - \gamma)xy^2 + fy^3, \\ \frac{dy}{dt} = -x + ax^3 - (3b + \alpha)x^2y - (c - \beta)xy^2 - dy^3, \end{cases}$$

если $(0, 0)$ — центр // Ученые записки Душанбинского пед. ин-та. — 1963. — Вып. 4. — С. 53–58.

[105] Хайрутдинов И.В. О сожительстве особых точек различных типов на сфере Пуанкаре для одной системы дифференциальных уравнений // Ученые записки Душанбинского пед. ин-та. — 1963. — Вып. 4. — С. 59–62.

[106] Андреев А.Ф., Андреева И.А. Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2007. — № 4. — С. 17–26. Электронный журнал Санкт-Петербургского госуниверситета, пер. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010. Доступен URL: <http://www.neva.ru/journal>; <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>

[107] Андреев А.Ф., Андреева И.А. Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2008. — № 3. — С. 39–53. Электронный журнал Санкт-Петербургского госуниверситета, пер. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010. Доступен URL: <http://www.neva.ru/journal>; <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>

[108] Андреев А.Ф. Введение в локальную качественную теорию дифференциальных уравнений. — СПб: Изд-во СПб университета, 2003. — 160 с.

[109] Bendixson I. Sur les courbes définies par des équations différentielles // Acta Mathematica. — 1901. — Vol. 24. — Issue 1. — P. 1–88.

[110] Морозов В.В. О кривых, определяемых дифференциальным уравнением // Труды Казанского института инженеров коммунального строительства. — 1936. — Вып.4. — С.7–13.

[111] Берлинский А.Н. О числе эллиптических областей, примыкающих к особой точке // ДАН СССР. — 1967. — Т.178. — Вып. 4. — С. 759–762.

- [112] Берлинский А.Н. К вопросу о структуре окрестности особой точки двумерной автономной системы // ДАН СССР. — 1969. — Т.187. — Вып. 3. — С. 502–506.
- [113] Пархоменко А.С. Что такое линия. — М.: ГИТТЛ, 1954. — 142 с.
- [114] Латипов Х.Р., Шарипов Ш.Р. Исследование характеристик уравнения $dy/dx = (b_{10}x + b_{01}y + Q_3(x, y))/(a_{10}x + a_{01}y + P_3(x, y))$ на сфере Пуанкаре // Известия АН Уз. ССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1963. — № 3. — С. 13–17.

Оглавление

Предисловие	2
Введение	3
Глава 1. Прямые изоклины полиномиальных дифференциальных систем на плоскости. Основные понятия, определения, теоремы	9
1.1 Некоторые общие сведения об изоклинах автономной дифференциальной системы второго порядка	9
1.2 Параллельные прямые изоклины дифференциальной системы на плоскости с полиномами произвольной степени в правых частях	16
1.3 Квадратичные дифференциальные системы на плоскости с параллельными прямыми изоклинами	22
1.4 Оценка числа прямых изоклин квадратичной системы	26
1.5 Прямые изоклины и канонические формы квадратичной системы	33
1.6 Параллельные прямые изоклины кубической дифференциальной системы	48
1.7 Оценка общего числа прямых изоклин кубической дифференциальной системы	56
1.8 Траектории кубической дифференциальной системы, имеющей инвариантные прямые максимального числа различных направлений	81
Глава 2. Оси симметрии поля направлений квадратичных и кубических дифференциальных систем на плоскости	100
2.1 Оси симметрии N -типа полиномиальных дифференциальных систем на плоскости	102

2.2	Оси симметрии S -типа полиномиальных дифференциальных систем на плоскости	116
2.3	Поведение траекторий полиномиальных дифференциальных систем, имеющих оси симметрии N - и S -типа.	124
2.4	Поведение траекторий кубической дифференциальной системы в случаях: трех осей симметрии N -типа (S -типа); четырех осей симметрии N -типа (S -типа)	185
Глава 3. Особые точки кубической дифференциальной системы на экваторе сферы Пуанкаре		205
3.1	Особые точки кубической системы на экваторе сферы Пуанкаре. Случай, когда экватор сферы Пуанкаре состоит из траекторий системы	208
3.1.1	Некоторые общие теоремы об особых точках	208
3.1.2	Распределение особых точек кубической системы на экваторе сферы Пуанкаре. Случай трех особых точек, индекс Пуанкаре одной из которых удовлетворяет условию $ J = 2$	236
3.1.3	Исследование типов бесконечно удаленных особых точек кубической системы. Случай четырех особых точек	248
3.1.4	Исследование типов бесконечно удаленных особых точек кубической системы. Случай трех особых точек	267
3.1.5	Исследование типов бесконечно удаленных особых точек кубической системы. Случай двух особых точек	280
3.1.6	Изучение характера единственной бесконечно удаленной особой точки кубической системы	290
3.2	Особые точки кубической дифференциальной системы на экваторе сферы Пуанкаре. Случай, когда экватор сферы Пуанкаре не содержит целой траектории, отличной от состояния равновесия	295
3.2.1	Случай одной особой точки	296
3.2.2	Случай двух особых точек (одна сложная, а другая – простая)	298

3.2.3 Случай двух сложных особых точек	301
3.2.4 Случай двух простых особых точек	309

Научное издание

Вячеслав Бесланович Тлячев

Адам Дамирович Ушхо

Дамир Салихович Ушхо

**ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ
ПОЛЯ НА ПЛОСКОСТИ**

Избранные вопросы

Лицензия ЛР N 040050 от 15. 08. 96 г.

Подписано в печать 18. 12. 2012. Формат 60x90 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 9,3. Уч.-изд. л. 7,81. Тираж 100 экз. Заказ 85.

Издательство Адыгейского государственного университета

385000, Майкоп. ул. Жуковского, 7 /9.

Оригинал-макет данного издания и оформление обложки

выполнены авторами в пакете L^AT_EX.