

РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ АКСИОМЫ НЕПРЕРЫВНОСТИ МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

К.С.Мамий

Адыгейский государственный университет, Майкоп

Излагается содержание соответствующего спецкурса с доказательством эквивалентности 11 предложений, каждое из которых может быть принято в качестве аксиомы непрерывности \mathbb{R} и устанавливаются критерии единственности разделяющего числа двух числовых множеств.

1. Под таким названием ряд лет в Адыгейском госуниверситете нами читается 12-14 часовой спецкурс на 10-м семестре для студентов математического факультета. Разработка и чтение данного спецкурса вызваны следующими соображениями:

- 1) В различных учебных пособиях по математическому анализу и числовым системам в качестве аксиомы непрерывности множества \mathbb{R} действительных чисел принимаются различные предложения, на первый взгляд не имеющие ничего общего друг с другом.
 - 2) Приняв одно из таких предложений за аксиому непрерывности \mathbb{R} , в курсе математического анализа выводятся из него ряд важных теорем. При этом как правило, ничего не говорится о том, что эти теоремы эквивалентны принятой аксиоме непрерывности \mathbb{R} .
 - 3) На спецкурсе напоминается аксиоматическое определение множества \mathbb{R} , приводятся в систему многие хорошо известные теоремы анализа и их возможные применения, что не только повышает математическую культуру выпускников, но и помогает им лучше подготовиться к госэкзаменам.
2. В настоящей статье излагается содержание спецкурса с подробным доказательством эквивалентности 11 предложений, каждое из которых может быть принято в качестве аксиомы непрерывности \mathbb{R} . Заметим, что в работе [1] устанавливается эквивалентность лишь пяти предложений.
- В конце устанавливаются различные критерии единственности разделяющего числа двух числовых множеств и обсуждаются возможные их применения.
3. При чтении спецкурса, как и при изложении основного курса анализа, широко используем логическую символику.

§ 1. Аксиоматическое определение \mathbb{R}

Множество элементов произвольной природы называется множеством (системой) действительных чисел, а его элементы действительными числами, если на этом множестве выполняются три группы аксиом:

Первая группа - аксиомы поля

В \mathbb{R} определены две операции - сложение и умножение, т.е. каждой паре $x, y \in \mathbb{R}$ поставлен в соответствие единственный элемент из \mathbb{R} , обозначаемый $x + y$ и называемый суммой элементов x и y , и каждой паре $x, y \in \mathbb{R}$ поставлен в соответствие единственный элемент из \mathbb{R} , обозначаемый $x \cdot y$ или xy и называемый произведением x и y , причем эти операции удовлетворяют следующим условиям-аксиомам сложения и умножения:

- 1°. $\forall x, y \in \mathbb{R} / x + y = y + x$ (коммутативность сложения).
- 2°. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} / (x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность сложения).
- 3°. $\exists 0 \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} / x + 0 = x$ (элемент 0 называется **нулем** в \mathbb{R}).

4°. $\forall a \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} / a + x = 0$, при этом элемент x называется противоположным элементом к a и обозначается: $-a$.

5°. $\forall x, y \in \mathbb{R} / xy = yx$ (коммутативность умножения).

6°. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} / (xy)z = x(yz)$ (ассоциативность умножения).

7°. $\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall x \in \mathbb{R} / x \cdot 1 = x$ (элемент 1 называется единицей в \mathbb{R}).

8°. $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists u \in \mathbb{R} / a \cdot u = 1$ при этом элемент u называется обратным к элементу a и обозначается $\frac{1}{a}$.

9°. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} / (x + y)z = xz + yz$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

Вторая группа - аксиомы порядка

В \mathbb{R} задано отношение \leq (меньше или равно), называемое отношением порядка, т.е. $\forall x, y \in \mathbb{R} / x \leq y \vee y \leq x$, причем выполняются следующие условия-аксиомы порядка:

10°. $\forall x \in \mathbb{R} / x \leq x$ (рефлексивность).

11°. $\forall x, y \in \mathbb{R} / (x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow (x = y)$ (закон тождества).

12°. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} / (x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$ (транзитивность).

13°. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} / x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ (монотонность сложения).

14°. $\forall x, y \in \mathbb{R} / (0 \leq x \wedge 0 \leq y) \Rightarrow (0 \leq xy)$.

Третья группа - аксиома непрерывности

(в форме аксиомы о разделяющем числе)

Прежде чем сформулировать последнюю аксиому, введем некоторые понятия. Всюду дальше будем иметь дело только с действительными числами, поэтому для краткости будем их называть просто числами. Любое подмножество множества \mathbb{R} будем называть числовым множеством. Положим, по определению, что $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \geq y \Leftrightarrow y \leq x; x > y \Leftrightarrow \overline{x \leq y} \quad (\text{чертка сверху означает отрицание высказывания}); x < y \Leftrightarrow \overline{x \geq y} \Leftrightarrow y > x$.

Если A и B - два непустых числовых множества, то будем говорить, что A расположено левее B , или B расположено правее A , и писать $A \leq B$, если $\forall a \in A \forall b \in B / a \leq b$.

Далее, будем говорить, что множество $A \neq \emptyset$ расположено левее (правее) числа b и писать $A \leq b$ ($A \geq b$), если $\forall a \in A / a \leq b$ ($a \geq b$).

Пусть $A \leq B$. Говорят, что число c разделяет множества A и B , если выполняется условие $A \leq c \leq B$.

15°. **Аксиома о разделяющем числе.** Каковы бы ни были два непустых числовых множества, одно из которых расположено левее другого, найдется хотя бы одно число, разделяющее эти множества, т.е.

$$\forall A, B (A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \wedge A \leq B \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} / A \leq c \leq B).$$

В дальнейшем будем считать выполненными первые две группы аксиом, а также все следствия из них (см.[1-9]). В частности, считаем известными бесконечность множества всех натуральных чисел \mathbb{N} , неравенства Бернулли, плотность \mathbb{R} и др. Не оговаривая каждый раз особо, будем считать рассматриваемые ниже множества числовыми и, как правило, непустыми.

§ 2 Эквиваленты аксиоме непрерывности \mathbb{R}

Имеется ряд предложений, каждое из которых может быть принято в качестве аксиомы непрерывности \mathbb{R} . Эти предложения следующие:

I. **Аксиома о разделяющем числе** (см. аксиому 15°).

II. Каждое непустое, ограниченное снизу, множество имеет точную нижнюю грань.

III. Каждое непустое, ограниченное сверху, множество имеет точную верхнюю грань.

- IV. **Лемма Гейне-Бореля.** Из любого бесконечного покрытия отрезка системой интервалов можно выделить конечное подпокрытие.
V. Каждое бесконечное ограниченное множество имеет предельную точку.
VI. Всякая убывающая и ограниченная последовательность сходится.
VII. Всякая возрастающая и ограниченная последовательность сходится.
VIII. а) **Аксиома Архимеда.** $\forall a, b \in \mathbb{R} (b > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} / n \cdot b > a)$. б) **Аксиома Кантора.** Пересечение любой вложенной последовательности отрезков не пусто.
IX. **Лемма Больцано-Вейерштрасса.** Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.
X. а) **Аксиома Архимеда.** $\forall a, b \in \mathbb{R} (b > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} / n \cdot b > a)$. б) **Аксиома Коши** (полнота \mathbb{R}). Всякая фундаментальная последовательность сходится.
XI. **Аксиома Дедекинда.** Каково бы ни было сечение в \mathbb{R} либо в нижнем классе есть наибольший элемент, либо в верхнем классе есть наименьший элемент.

Теорема. Каждое из предложений I-XI эквивалентно остальным (при условии выполнения аксиом 1°-14° и их следствий).

Доказательство проведем по схеме: $I \Rightarrow II \Rightarrow \dots \Rightarrow XI \Rightarrow I$.

1) $I \Rightarrow II$. Пусть $B \subset \mathbb{R}, B \neq \emptyset$ и ограничено снизу. Обозначим через A множество всех нижних граней B . Тогда ясно, что $A \neq \emptyset \wedge A \leq B$. Поэтому, в силу I , $\exists c \in \mathbb{R} / A \leq c \leq B \Rightarrow c = \inf B$.

2) $II \Rightarrow III$. Пусть $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ и ограничено сверху. Обозначим через B множество всех верхних граней A . Ясно, что B - ограничено снизу, следовательно, в силу II , $\exists c \in \mathbb{R} / \inf B = c$, причем $A \leq c \leq B \Rightarrow c \in B \wedge c \leq B \Rightarrow c = \sup A$.

3) $III \Rightarrow IV$. Пусть \sum - бесконечное множество интервалов, покрывающее $[a; b]$ и $A = \{x \in [a; b] / [a; x]\}$ покрывается конечным числом интервалов из \sum . Тогда $A \neq \emptyset$ и ограничено сверху. Следовательно, в силу III , $\exists c \in \mathbb{R} / c = \sup A$. Ясно, что $a \leq c \leq b$. Покажем, что $c \in A$. В самом деле,

$$c \in [a; b] \Rightarrow \exists [\alpha; \beta] \in \sum / \alpha < c < \beta, c = \sup A \Rightarrow \exists x' \in A / \alpha < x' \leq c.$$

Так как $x' \in A$, то отрезок $[a; x']$ покрывается конечным числом интервалов из \sum . Если к этому покрытию присоединить $[\alpha; \beta]$, то $[a; c]$ покроется также конечным числом интервалов $\sum_1 \subset \sum$. Следовательно, $c \in A$. Убедимся теперь, что $c = b$. Пусть это не так. Тогда $c < b$ и, в силу плотности \mathbb{R} , $\exists \gamma \in \mathbb{R} / c < \gamma < \min\{\beta; b\}$, откуда следует, что и $[a; \gamma]$ покрывается системой интервалов \sum_1 , поэтому $\gamma \in A$, но это противоречит тому, что $c < \gamma$ и $c = \sup A$. Теорема 3) доказана.

4) $IV \Rightarrow V$. Пусть A -ограниченное и бесконечное множество. Тогда:

$$\exists a, b \in \mathbb{R} / A \subset [a; b].$$

Покажем, что $A' \subset [a; b]$, где A' -множество всех предельных точек множества A . Пусть это не так и $A' \not\subset [a; b]$. Тогда:

$$\begin{aligned} \exists x_0 \in A' / x_0 \notin [a; b] \Rightarrow x_0 < a \vee x_0 > b \Rightarrow \exists U(x_0) / U(x_0) \cap [a; b] = \emptyset \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists U(x_0) / A \cap U(x_0) = \emptyset \Rightarrow x_0 \notin A'. \end{aligned}$$

Получили противоречие, следовательно, $A' \subset [a; b]$. Покажем теперь, что $A' \neq \emptyset$. Предположим противное. Тогда

$$\forall x \in [a; b] \exists U(x) / A \cap \overset{\circ}{U}(x) = \emptyset. \quad (1)$$

Рассмотрим множество \sum - всех таких окрестностей точек $x \in [a; b]$. Ясно, что \sum - бесконечное множество (т.к. A -бесконечно по условию) и покрывает $[a; b]$. Но, в силу IV ,

из \sum можно выделить конечное подмножество $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$, покрывающее $[a; b]$, причем в каждом из U_i ($i = 1, \dots, k$) имеется не более одной точки из A , в силу (1), откуда получаем, что A -конечное множество, что противоречит условию.

Прежде чем доказать истинность следующей импликации, введем некоторые понятия и обозначения.

Последовательность (x_n) называется ограниченной, ограниченной сверху (снизу), если множество ее значений $\{x_n\}$ ограничено, ограничено сверху (снизу).

(x_n) называется сходящейся, если $\exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : (|x_n - a| < \varepsilon)$. При этом число a называют пределом x_n и пишут: $\lim x_n = a$. Заметим, что здесь под знаком \lim пока мы не можем писать $n \rightarrow +\infty$, так как из аксиом 1⁰-14⁰ не следует неограниченность \mathbb{N} , хотя из них и вытекает, что $(n) \uparrow \uparrow$ (символы $\uparrow \uparrow (\downarrow \downarrow)$ и $\uparrow (\downarrow)$ означают, что последовательность строго возрастает (убывает), возрастает (убывает) в нестрогом смысле).

$$\lim x_n = +\infty \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall M > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N / x_n > M ;$$

$$\lim x_n = -\infty \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall M > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N / x_n < -M .$$

$$(x_n) - \text{почти постоянная} \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 / x_n = x_{n_0}$$

Очевидно, что любая почти постоянная последовательность сходится.

Последовательность отрезков $([a_n; b_n])$ называется вложенной, если

$$\forall n \in \mathbb{N} / [a_n; b_n] \supset [a_{n+1}; b_{n+1}] .$$

Вложенная последовательность $([a_n; b_n])$ называется стягивающейся, если $\lim(b_n - a_n) = 0$.

5) $V \Rightarrow VI$. Пусть $(x_n) \downarrow$ и ограничена. Если (x_n) - почти постоянна, то теорема очевидна. Пусть (x_n) не является почти постоянной. Покажем, что в этом случае множество $\{x_n\}$ - бесконечное. В самом деле, если допустить, что оно конечное, то существует $\alpha = \min\{x_n\}$, следовательно, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / x_{n_0} = \alpha \Rightarrow \forall n > n_0 / x_n = \alpha$, т.е. (x_n) - почти постоянная. Итак, $\{x_n\}$ - бесконечное и ограниченное множество, поэтому, в силу V, оно имеет хотя бы одну предельную точку $c \in \mathbb{R}$. Покажем, что $\forall n \in \mathbb{N} / x_n \geq c$. Допустим противное. Тогда $\exists n_0 \in \mathbb{N} / x_{n_0} < c$, откуда, в силу того, что $(x_n) \downarrow$, имеем, что

$$\forall n > n_0 / x_n \leq x_{n_0} < c ,$$

следовательно, множество $[x_{n_0}; +\infty] \cap \{x_n\}$ - конечное, что противоречит тому, что $c \in \{x_n\}'$. Покажем, что $\lim x_n = c$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда по определению предельной точки имеем: $\exists N \in \mathbb{N} : c - \varepsilon < x_N < c + \varepsilon$. Но $(x_n) \downarrow$, следовательно,

$$\forall n > N (c \leq x_n \leq x_N \Rightarrow c - \varepsilon < x_n < c + \varepsilon \Rightarrow |x_n - c| < \varepsilon) ,$$

т.е. (x_n) сходится, что и требовалось доказать.

6) $VI \Rightarrow VII$. Пусть $(x_n) \uparrow$ и ограничена $\Rightarrow (-x_n) \downarrow$ и ограничена $\Rightarrow (-x_n)$ сходится, в силу VI,

$$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} / \lim(-x_n) = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N (|-x_n - a| = |x_n - (-a)| < \varepsilon) \Rightarrow \lim x_n = -a ,$$

т.е. (x_n) сходится.

7) $VII \Rightarrow VIII$. а) Пусть $b \in \mathbb{R} \wedge b > 0$. Тогда $(nb) \uparrow \uparrow$. Допустим, что аксиома Архимеда неверна. Тогда $\exists c, d \in \mathbb{R} (d > 0 \wedge \forall n \in \mathbb{N} / nd \leq c)$, т.е. $(nd) \uparrow \uparrow$ и ограничена. Следовательно, в силу VII, $\exists \alpha \in \mathbb{R} / \lim(nd) = \alpha$. Покажем, что при этом

$$\forall n \in \mathbb{N} / nd < \alpha. \quad (2)$$

Если допустить, что (2) ложно, то получим, что

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / n_0 d \geq \alpha \Rightarrow \forall n > n_0 / nd - \alpha \geq nd - n_0 d = (n - n_0)d \geq d > 0,$$

чего быть не может, так как $\lim(nd) = \alpha$. Итак, (2) - верно. $\lim(nd) = \alpha \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ (например, $\varepsilon = d$) $\exists N \in \mathbb{N} / |Nd - \alpha| = \alpha - Nd < d \Rightarrow \alpha < (N + 1)d$, что противоречит (2).

Следствие 1. $\forall \alpha \in \mathbb{R} / \lim \frac{\alpha}{n} = 0$.

В самом деле, по аксиоме Архимеда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} / n_0 \cdot \varepsilon > |\alpha| \Rightarrow \forall n > n_0 / n\varepsilon > n_0\varepsilon > |\alpha| \Rightarrow \forall n > n_0 \left(\left| \frac{\alpha}{n} - 0 \right| = \frac{|\alpha|}{n} < \varepsilon \right).$$

Следствие 2. $\lim n = +\infty$.

Докажем это следствие. Пусть $M > 0$. Тогда по аксиоме Архимеда

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / n_0 \cdot 1 > M \Rightarrow \forall n > n_0 / n > n_0 \cdot 1 > M \Rightarrow \lim n = +\infty.$$

Заметим, что обычно вместо $\lim n = +\infty$ пишут: $n \rightarrow +\infty$.

Следствие 3. $\forall a, \alpha \in \mathbb{R} (a > 1 \Rightarrow \lim \frac{\alpha}{a^n} = 0)$.

Доказательство проводится просто с использованием неравенства Бернуlli и аксиомы Архимеда.

б) Пусть $([a_n; b_n])$ - вложенная последовательность отрезков. Тогда, очевидно, $(a_n) \uparrow$ и ограничена. Поэтому, по VII, $\exists c \in \mathbb{R} / \lim a_n = c$, откуда следует истинность высказывания: $\forall n \in \mathbb{N} / a_n \leq c$.

В самом деле, если предположить противное, то $\exists n_0 \in \mathbb{N} / a_{n_0} > c$, откуда, в силу возрастания (a_n) , будем иметь, что

$$\forall n > n_0 / a_n \geq a_{n_0} > c \Rightarrow \forall n > n_0 / a_n - c \geq a_{n_0} - c > 0,$$

но последнее неравенство противоречит тому, что $\lim a_n = c$.

Аналогично убеждаемся, что $\forall n \in \mathbb{N} / c \leq b_n$, воспользовавшись тем, что $\forall m, n \in \mathbb{N} / a_m \leq b_n$. Последнее следует из того, что $(b_n) \downarrow$, и из цепочки очевидных неравенств:

$$\forall m, n \in \mathbb{N} / a_m \leq a_{m+n} \leq b_{m+n} \leq b_n.$$

Итак, $\forall n \in \mathbb{N} / c \in [a_n; b_n]$ что и требовалось доказать.

Следствие (принцип стягивающейся последовательности отрезков).

Для любой стягивающейся последовательности отрезков $[a_n; b_n]$ существует единственная точка, принадлежащая всем им.

Доказательство проводится легко методом от противного.

8) $VIII \Rightarrow IX$. Пусть (x_n) - ограничена. Тогда $\exists a, b \in \mathbb{R} / \{x_n\} \subset [a; b]$. Разделим отрезок $[a; b]$ пополам. Тогда по крайней мере один из полученных отрезков содержит бесконеч-

ное множество членов (x_n) . Обозначим его через $[a_1; b_1]$. Разделим $[a_1; b_1]$ снова пополам и обозначим через $[a_2; b_2]$ тот из вновь полученных отрезков, который содержит бесконечное множество членов (x_n) . Продолжая этот процесс неограниченно, получим, в силу следствия 3 из аксиомы Архимеда, стягивающуюся последовательность отрезков $([a_n; b_n])$. Так как любой $[a_n; b_n]$ содержит, по построению, бесконечное множество членов (x_n) , то $\exists(x_{n_k}) \subset (x_n) \forall k \in \mathbb{N} / x_{n_k} \in [a_k; b_k]$. С другой стороны, по следствию из аксиомы Кантора $\exists! c \in \mathbb{R} \forall k \in \mathbb{N} / a_k \leq c \leq b_k$. Но тогда очевидно, что $|x_{n_k} - c| \leq b_k - a_k \Rightarrow \lim x_{n_k} = c$.

9) $IX \Rightarrow X$. а) Пусть аксиома Архимеда неверна. Тогда найдется такое число $d > 0$, что (nd) будет ограниченной и, в силу IX., из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $(n_k d)$. Пусть $\lim(n_k d) = c$. Тогда, как и при доказательстве 7 а), можно показать, что

$$\forall k \in \mathbb{N} / n_k d < c. \quad (3)$$

Убедимся, что на самом деле справедливо более сильное утверждение:

$$\forall n \in \mathbb{N} / nd < c. \quad (4)$$

Предположим противное. Тогда $\exists n_0 \in \mathbb{N} / n_0 d \geq c$. Так как $(n_k) \uparrow \uparrow \wedge \{n_k\}$ - бесконечное множество, то натуральных чисел, меньших n_0 , конечно. Следовательно, $\exists k_0 \in \mathbb{N} / n_{k_0} \geq n_0$. Тогда $n_{k_0} d \geq n_0 d \geq c \Rightarrow n_{k_0} d \geq c$, что противоречит (3). Тем самым доказана истинность высказывания (4). Далее, так как $\lim(n_k d) = c$, то $\forall \varepsilon > 0$ (например, $\varepsilon = d$) $\exists K \in \mathbb{N} \forall k > K : c - n_k d < d \Rightarrow c < (n_k + 1)d$, что противоречит (4). Таким образом, допущение о неверности аксиомы Архимеда ложно.

б) Доказательство справедливости аксиомы Коши - традиционное.

10) $X \Rightarrow XI$. Пусть (X, Y) - произвольное сечение в \mathbb{R} и $a \in X, b \in Y$. Тогда $a < b$. Очевидно, последовательным делением отрезков пополам получим, в силу следствия 3 из аксиомы Архимеда, стягивающуюся последовательность отрезков $([a_n; b_n])$ такую, что $\forall n \in \mathbb{N} / a_n \in X \wedge b_n \in Y$, причем

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq \dots < \dots \leq b_p \leq b_{p-1} \leq \dots \leq b_1 \leq b. \quad (5)$$

$$\lim(b_n - a_n) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall n > N / b_n - a_n < \varepsilon.$$

Пусть $n_0 > N$ и n_0 - фиксировано. Тогда $b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$. Следовательно, $\forall n, m > n_0$, в силу (5), будем иметь: $|a_n - a_m| \leq b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon \wedge |b_n - b_m| \leq b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$, т.е. (a_n) и (b_n) - фундаментальные. Поэтому

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / \lim a_n = \alpha \wedge \lim b_n = \beta. \quad (6)$$

Покажем, что $\forall n \in \mathbb{N} / \alpha, \beta \in [a_n; b_n]$. Предположим, что это не так. Тогда $\exists n' \in \mathbb{N} / \alpha \notin [a_{n'}; b_{n'}] \vee \beta \notin [a_{n'}; b_{n'}]$. Пусть, для определенности, $\alpha \notin [a_{n'}; b_{n'}]$. Тогда

$$\begin{aligned} \alpha < a_{n'} \vee b_{n'} < \alpha \Rightarrow \forall n > n' / \alpha < a_{n'} \leq a_n \vee a_n \leq b_{n'} < \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall n > n' / a_n - \alpha \geq a_{n'} - \alpha > 0 \vee \alpha - a_n \geq \alpha - b_{n'} \geq \alpha - b_{n'} > 0. \end{aligned}$$

Но эти неравенства противоречат условию (6). Итак, $\forall n \in \mathbb{N} / \alpha, \beta \in [a_n; b_n]$, откуда получаем, что $\forall n \in \mathbb{N} / |\alpha - \beta| \leq b_n - a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha = \beta$. Пусть $\gamma = \alpha = \beta$. Тогда ясно, что $\gamma \in X \vee \gamma \in Y$, по определению сечения. Покажем, что $\gamma \in X \Rightarrow \gamma = \max X$. Если допустить противное, то $\exists \gamma' \in X / \gamma' > \gamma$. Но

$$(\gamma' - \gamma > 0 \wedge \lim b_n = \gamma) \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} / b_{n_0} - \gamma < \gamma' - \gamma \Rightarrow b_{n_0} < \gamma',$$

чего быть не может, т.к. $b_{n_0} \in Y$, а $\gamma' \in X$. Следовательно, наше допущение неверно.

Аналогично устанавливается, что $\gamma \in Y \Rightarrow \gamma = \min Y$. Тем самым теорема 10) доказана.

11) XI $\Rightarrow I$. Пусть $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \wedge A \leq B$. Покажем, что найдется число, разделяющее множества A и B . Положим: $X = \{x \in \mathbb{R} / x < B\}, Y = R \setminus X$. Покажем, что $(X; Y)$ - сечение в \mathbb{R} . Очевидно, что $B \subset Y \Rightarrow Y \neq \emptyset$. $A \leq B \Rightarrow \forall a \in A / a \leq B$. Если $x < a \wedge a \in A$, то $x < B \Rightarrow x \in X \Rightarrow X \neq \emptyset$. То, что $X < Y$ и $X \cup Y = \mathbb{R}$, следует из конструкций множеств X и Y . Следовательно, $(X; Y)$ - сечение в \mathbb{R} . Поэтому $\exists \alpha \in \mathbb{R} / \alpha = \max X \vee \alpha = \min Y$ по условию XI.

Убедимся, что α разделяет A и B . Пусть $\alpha = \max X$. Тогда $\alpha \in X \Rightarrow \forall b \in B / \alpha < b \Rightarrow \alpha < B$. Покажем, что $A \leq \alpha$. Предположим противное. Тогда $\exists a' \in A / \alpha < a' \Rightarrow \alpha < \frac{1}{2}(\alpha + a') < a'$. Но, с другой стороны,

$$\forall b \in B / a' \leq b \Rightarrow \forall b \in B / \frac{\alpha + a'}{2} < a' \leq b \Rightarrow \frac{\alpha + a'}{2} \in X,$$

что противоречит условию: $\alpha = \max X$. Таким образом, $A \leq \alpha < B$. Аналогично рассматривается случай, когда $\alpha = \min Y$.

§ 3. Критерий единственности разделяющего числа

Здесь докажем теорему (ее мы называем основной), из которой автоматически получаются критерии единственности разделяющего числа двух множеств. При этом считаем, что теория действительного числа и теория пределов известны.

Основная теорема. Пусть $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \wedge A \leq B$. Тогда эквивалентны следующие высказывания:

$$1^0. \exists! c \in \mathbb{R} / A \leq c \leq B.$$

$$2^0. \sup A = \inf B = c.$$

$$3^0. \exists (x_n) \subset A \exists (y_n) \subset B / \lim x_n = \lim y_n = c.$$

$$4^0. \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A \exists y \in B / y - x < \varepsilon.$$

Доказательство проводится по схеме: $1^0 \Rightarrow 2^0 \Rightarrow 3^0 \Rightarrow 4^0 \Rightarrow 1^0$.

1) $1^0 \Rightarrow 2^0$. Очевидно, что A - ограничено сверху, а B - ограничено снизу, следовательно, $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R} / c_1 = \sup A \wedge c_2 = \inf B$, причем справедливы "неравенства" $A \leq c_1 \leq c \leq c_2 \leq B$. Если допустить, что $c_1 < c_2$, то все точки $[c_1; c_2]$ будут разделяющими для множеств A и B , что противоречит единственности разделяющего числа. Следовательно, $c_1 = c_2 = c$, что и требовалось доказать.

2) $2^0 \Rightarrow 3^0$. Из 2^0 имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in A \exists y_\varepsilon \in B / c - \varepsilon < x_\varepsilon \leq c \wedge c \leq y_\varepsilon < c + \varepsilon.$$

Взяв в качестве ε последовательность чисел $\frac{1}{n}$ получим, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in A \exists y_n \in B / c - \frac{1}{n} < x_n \leq c \wedge c \leq y_n < c + \frac{1}{n},$$

откуда следует 3^0 на основании теоремы о пределе промежуточной последовательности.

3) $3^0 \Rightarrow 4^0$. $3^0 \Rightarrow \lim(y_n - x_n) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} / y_{n_0} - x_{n_0} < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

4) $4^0 \Rightarrow 1^0$. Пусть выполнено условие 4^0 . Тогда существование хотя бы одного числа, разделяющего A и B , следует из аксиомы 15^0 . Предположим, что существуют два разделяющих числа c_1 и c_2 , причем $c_1 < c_2$ и возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}(c_2 - c_1)$. Тогда, в силу 4^0 , $\exists x \in A \exists y \in B / y - x < \frac{1}{2}(c_2 - c_1)$. Но

$$x \leq c_1 < c_2 \leq y \Rightarrow 0 < c_2 - c_1 \leq y - x \Rightarrow 0 < c_2 - c_1 < \frac{1}{2}(c_2 - c_1),$$

чего быть не может.

Из основной теоремы сразу же получаются следующие **критерии единственности разделяющего числа**: если A и B - два не пустых числовых множества таких, что $A \leq B$, то для единственности разделяющего числа c этих множеств необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из трех условий: 2^0 , 3^0 или 4^0 .

Далее, мы останавливаемся на возможных применениях основной теоремы при введении ряда фундаментальных понятий анализа: степени с иррациональным показателем, площади, объема, определенного и кратных интегралов и др. В различных школьных и вузовских пособиях по разному определяются эти понятия. Однако, из основной теоремы получается эквивалентность этих определений. Например, из нее следует правомерность "школьного" определения площади круга как общего предела последовательностей площадей правильных вписанных и описанных многоугольников при неограниченном удвоении числа сторон или объема пирамиды как в [10]. В спецкурсе, а в последнее время, и в обычном курсе анализа, мы определяем перечисленные выше понятия как единственное число, разделяющее соответствующие числовые множества. Основная теорема особенно эффективна именно при таком подходе к этим понятиям.

Л и т е р а т у р а

1. Дубовицкий А.Я. Аксиоматическое построение действительных чисел., Математическое просвещение, в.2, 1957, 320 стр., 157-168.
2. Ляпунов А.А. Действительные числа, там же, 147-156.
3. Фихтенгольц Г.М. Иррациональные числа в средней школе, там же, 133-148.
4. Мордкович А.Г. Построение теории действительного числа по Кантору. Проблемы подготовки учителя математики в пединститутах, сб. трудов, в.41, 1974, 313 стр., 90-122.
5. Дьеноде Ж. Основы современного анализа. - М.: Наука, - 1964, стр. 28-39.
6. Шилов Г.Е. Математический анализ, функции одного переменного, части 1-2, М., 1969, 528 стр., 13-40.
7. Виленкин Н.Я., Куницкая Е.С. Математический анализ. Введение в анализ. - М.: Просвещение, - 1973, стр. 6-32, 112-120.
8. Лихтарников Л.Н., Поволоцкий А.И. Введение в математический анализ, Л., 1975, 114 стр., 10-20, 40-44, 61-64.
9. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. т.1, - М.: Высшая школа, - 1970, 592 стр., 11-38.
10. Погорелов А.В. Геометрия, 6-10. - М.: Просвещение, - 1981, 272 стр., 147-149, 233-237.

Differences in formulating continuity axioms of real number set

K.S. Mami

The author discusses ways of teaching highe mathematics, proving that the 11 sentences are equivalent to each other, each of them being a possible axioms continuity \mathbb{R} . Uniqueness criteria for the separating number of two number sets are given.