

К ИЗЛОЖЕНИЮ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ПЕДИнститУТЕ

К.С. Мамий

Адыгейский государственный университет. Майкоп

В статье освещается личный опыт автора изложения темы “Основные теоремы дифференциального исчисления и их применения” в курсе математического анализа.

1°. В действующих школьных программах по математике большое внимание уделяется применением производной для исследования функций и решения экстремальных задач. Теоретической базой этих применений являются основные теоремы дифференциального исчисления функций одной переменной. Естественно, многие из них в школе принимаются без обоснований. Однако, будущий учитель математики должен быть знаком с их доказательством.

Поэтому при чтении лекций по математическому анализу, мы обращаем особое внимание на доказательство таких предложений.

При полном исследовании функции важным моментом является установление промежутков её монотонности. В учебных пособиях [2] и [3] этот вопрос решается при помощи теоремы Лагранжа, которая только формулируется и разъясняется геометрически. При этом рекомендуется пользоваться тем фактом, что если производная функции нигде не обращается в нуль на некотором интервале, то она на нём сохраняет один и тот же знак. Это утверждение не очевидно и является, как известно следствием теоремы Дарбу [4], о которой не упоминается в пособиях [2], и [3].

Условия монотонности функции на промежутке можно получить и из условий монотонности функции в точке, как это делалось в учебном пособии [1]. Но и при таком подходе оставалось не доказанным, что из монотонности функции в каждой точке интервала следует её монотонность на всём интервале.

Считаем, что оба подхода к исследованию функции на монотонность могут найти место в лекциях по дифференциальному исчислению. При этом желательно избрать такую последовательность изложения материала, чтобы исключить дублирование и осветить все вопросы достаточно полно при минимальной затрате времени.

В статье освещается наш опыт изучения основных свойств дифференцируемых функций и их применений в Адыгейском госпединституте за последние несколько лет.

2°. Заметим, что при формулировке определений, теорем, а также при доказательстве последних мы широко пользуемся логической символикой и законами математической логики. Хотя последнее время элементы теории множеств и математической логики не рассматриваются в школьном курсе математики, считаем что в пединститутах с ними следует познакомить студентов начиная с первого курса, что мы и делаем, читая в 1-м семестре курс “Введение в современную математику” в качестве дисциплины, вводимой в соответствии с особенностями республики, предусмотренной учебным планом. При этом мы пользуемся следующими обозначениями:

“ $\forall x \in A / P(x)$ ”, “ $\exists x \in A / P(x)$ ”, которые можно прочесть так: “Любой элемент X из множества A обладает свойством $P(x)$ ”, или “для любого элемента X из множества A выполняется условие $P(x)$ ”; “существует такой элемент X из множества A , который обладает свойством $P(x)$ ”, или “найдется хотя бы один элемент X из множества A , обладающий свойством $P(x)$ ”. Эти краткие записи равносильны следующим более точным и общепринятым обозначениям: “ $\forall x (x \in A \rightarrow P(x))$ ”, “ $\exists x (x \in A \wedge P(x))$ ”. В некоторых случаях пользуемся и последними записями. Используем также символы $\Leftrightarrow, \Rightarrow, : \Leftrightarrow, U(x_0), U^0(x_0), U^-(x_0) = U(x_0 - 0), U^+(x_0) = U(x_0 + 0)$, обозначающие следующие словосочетания: “равносильно”, или “тогда и только тогда, когда”, “следует”, “равносильно по

определеню", или "тогда и только тогда по определению, когда"; "окрестность, проколотая окрестность, левая и правая полуокрестности точки x_0 ".

3°. Изучение темы начинаем с определений строго возрастающей (\nearrow) и строго убывающей (\searrow) функции в точке. Приведём их.

Пусть x_0 - внутренняя точка области определения D_f функции f . Тогда

$$1) f \nearrow (\searrow) \text{ в } (\cdot) x_0 \text{ слева: } \Leftrightarrow \exists U^-(x_0) \forall x \in U^-(x_0) / f(x) < f(x_0) (f(x) > f(x_0)).$$

$$2) f \nearrow (\searrow) \text{ в } (\cdot) x_0 \text{ справа: } \Leftrightarrow \exists U^+(x_0) \forall x \in U^+(x_0) / f(x) > f(x_0) (f(x) < f(x_0)).$$

$$3) f \nearrow (\searrow) \text{ в } (\cdot) x_0: \Leftrightarrow f \nearrow (\searrow) \text{ в } (\cdot) x_0 \text{ слева и справа.}$$

(символ (\cdot) придуман студентами и читается "точка").

Заметим, что аналогично вводятся и понятия нестрогой монотонности функции в точке. Все эти понятия иллюстрируем геометрически. Здесь же подчеркиваем, что из монотонности функции в точке не следует её монотонность в какой-либо окрестности этой точки и подтверждаем это утверждение примером. После этого доказываем ряд утверждений.

Теорема 1. $f \nearrow (\searrow) \text{ в } (\cdot) x_0 \Leftrightarrow \exists U(x_0) \forall x \in U^0(x_0) / \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 (< 0).$

Теорема 2. $f \in D^1(x_0) \wedge f'(x_0) > 0 (< 0) \Rightarrow f \nearrow (\searrow) \text{ в } (\cdot) x_0.$

(Символы $f \in D^1(x_0)$, $f \in D^1(J)$ означают, что функция f дифференцируема в $(\cdot) x_0$, на множестве J . Через J всюду дальше будем обозначать любой интервал, конечный или бесконечный, являющийся частью области определения некоторой функции).

Теорема 3. $f \nearrow (\searrow) \text{ в любой точке } J \Rightarrow f \nearrow (\searrow) \text{ на } J.$

Остановимся на доказательстве теоремы 3. Сначала устанавливаем следующие две простые леммы.

Лемма 1. Если $[a; b] \subset J, a < b$ и $f(a) \geq f(b)$, то истинно высказывание: $\forall x \in [a; b] / f(x) \leq f(a) \vee f(b) \leq f(x)$.

Лемма 2. Если $[a; b] \subset J, a < b$ и $f(a) \leq f(b)$, то истинно высказывание: $\forall x \in [a; b] / f(a) \leq f(x) \vee f(x) \leq f(b)$.

Эти леммы весьма просто устанавливаются методом от противного, хотя их можно доказать также просто и прямым методом.

▲ Докажем теперь теорему 3. Рассмотрим случай, когда $f \nearrow$ в любой точке $x \in J$. Тогда надо доказать истинность высказывания:

$$\forall x_1, x_2 \in J (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)). \quad (1)$$

Допустим, что (1) - ложно. Тогда истинно его отрицание: $\exists a, b \in J (a < b \wedge f(a) \geq f(b))$. Разделим отрезок $[a; b]$ пополам с помощью точки $d = (a + b) / 2$. Тогда по лемме 1 имеем: $f(a) \geq f(d) \vee f(d) \geq f(b)$. Обозначим через $[a_1; b_1]$ тот из двух отрезков $[a; d]$ и $[d; b]$, для которого выполняется неравенство $f(a_1) \geq f(b_1)$ и разделим отрезок $[a_1; b_1]$ пополам с помощью точки $d_1 = (a_1 + b_1) / 2$. Тогда опять по лемме 1 имеем: $f(a_1) \geq f(d_1) \vee f(d_1) \geq f(b_1)$. Через $[a_2; b_2]$ обозначим тот из отрезков $[a_1; d_1]$ и $[d_1; b_1]$, для которого справедливо неравенство $f(a_2) \geq f(b_2)$. Продолжая этот процесс неограниченно, получим стягивающуюся последовательность отрезков $[a; b], [a_1; b_1], [a_2; b_2], \dots, [a_n; b_n]$ таких, что истинно высказывание:

$$\forall n \in N / f(a_n) \geq f(b_n). \quad (2)$$

Но по принципу стягивающейся последовательности отрезков $\exists! x_0 \in [a_n; b_n] \subset [a; b] \forall n \in N$ (символ " $\exists!$ " читается как существует единственный), причём $\lim a_n = \lim b_n = x_0$.

Так как, по условию, $f \nearrow$ в $(\cdot) x_0$, то $\exists U^0(x_0) = U^-(x_0) \cup U^+(x_0)$, что справедливо утверждение:

$$\forall x \in U^-(x_0) / f(x) < f(x_0) \wedge \forall x \in U^+(x_0) / f(x_0) < f(x). \quad (3)$$

В силу определения предела последовательности, для выбранной окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N / a_n, b_n \in U(x_0)$. Пусть $n_0 > N$. Тогда могут представиться следующие случаи:

1. $a_{n_0} < x_0 < b_{n_0}$, откуда в силу (3) имеем $f(a_{n_0}) < f(x_0) \wedge f(x_0) < f(b_{n_0}) \Rightarrow f(a_{n_0}) < f(b_{n_0})$.

2. $a_{n_0} \leq x_0 < b_{n_0} \stackrel{(3)}{\Rightarrow} f(a_{n_0}) \leq f(x_0) \wedge f(x_0) < f(b_{n_0}) \Rightarrow f(a_{n_0}) < f(b_{n_0})$.

3. $a_{n_0} < x_0 \leq b_{n_0} \stackrel{(3)}{\Rightarrow} f(a_{n_0}) < f(x_0) \wedge f(x_0) \leq f(b_{n_0}) \Rightarrow f(a_{n_0}) < f(b_{n_0})$.

(Символ " \Rightarrow " читают так: следует в силу (3)).

Таким образом, получили, что истинно высказывание: $\exists n_0 \in \mathbb{N} / f(a_{n_0}) < f(b_{n_0})$, которое противоречит высказыванию (2). Случай, когда $f \not\rightarrow$, студенты рассматривают самостоятельно с использованием леммы 2. ●

Следствие (достаточные условия монотонности функции на интервале). *Если $f \in D^1(J) \wedge f'(x) > 0 (< 0)$ на J , то $f \nearrow (\searrow)$ на J .*

Следствие моментально вытекает из теорем 2 и 3.

Замечание 1. Очевидно, что истинно высказывание, обратное теореме 3. Поэтому понятие строго монотонной функции на интервале можно было бы ввести как функцию, являющуюся строго монотонной в каждой точке интервала. Но такое определение с методической и психологической точек зрения по-видимому нецелесообразно, так как оно не пригодно для функций, рассматриваемых на произвольных множествах.

Замечание 2. *Если $f \nearrow (\searrow)$ на $[a; b]$ и непрерывна в каком-либо из его концов, то этот конец можно присоединить к этому интервалу.*

▲ Докажем это утверждение для случая, когда $f \nearrow$ на $[a; b]$ и $f \in C(a)$. Пусть $x_1, x_2 \in [a; b]$ и $x_1 < x_2$. Тогда ясно что $f(x_1) < f(x_2)$, если $a < x_1$. Пусть теперь $x_1 = a$. Покажем, что и в этом случае $f(x_1) < f(x_2)$. Пусть $x_1 < x < x_0 < x_2$. Тогда $f(x) < f(x_0) < f(x_2)$, откуда, переходя к пределу при $x \rightarrow x_1 = a$, получим

$$\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) \leq f(x_0) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_0) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Аналогично рассматриваются остальные случаи. ●

Определение. Число $f(x_0)$, где $x_0 \in D_f$, называется *наибольшим (наименьшим) значением* функции f , если $\forall x \in D_f$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$). При этом будем писать: $f(x_0) = \max f$ ($f(x_0) = \min f$).

Теорема Ферма. *Если функция f дифференцируема во внутренней точке x_0 области определения D_f и $f(x_0) = \max f$ ($f(x_0) = \min f$), то $f'(x_0) = 0$.*

▲ В самом деле. Если допустить противное, то получим:

$$f'(x_0) > 0 \vee f'(x_0) < 0 \Rightarrow f \nearrow \text{в } (\cdot)x_0 \vee f \searrow \text{в } (\cdot)x_0.$$

Следовательно, $f(x_0)$ не может быть ни наибольшим, ни наименьшим значением функции f , что противоречит условию. ●

Теорема Дарбу. *Если $f \in D^1[a; b]$ и $f'(a)f'(b) < 0$, то $\exists c \in]a; b[/ f'(c) = 0$.*

▲ $f \in D^1[a; b] \Rightarrow f \in C[a; b]$, откуда, в силу теоремы Вейерштрасса, функция f имеет на $[a; b]$ как наибольшее ($\max_{[a; b]} f$), так и наименьшее ($\min_{[a; b]} f$) значения на отрезке $[a; b]$. Пусть для определенности $f'(a) < 0$ и $f'(b) > 0$. Тогда $f \searrow$ в $(\cdot)a$ справа $\wedge f \nearrow$ в $(\cdot)b$ слева \Rightarrow
 $\Rightarrow f(a) \neq \min_{[a; b]} f \wedge f(b) \neq \min_{[a; b]} f \Rightarrow \exists c \in]a; b[/ f(c) = \min_{[a; b]} f \stackrel{(T.Ферма)}{\Rightarrow} f'(c) = 0$.

Аналогично рассматривается случай, когда $f'(a) > 0 \wedge f'(b) < 0$. ●

Следствие. *Если функция f дифференцируема на некотором промежутке $j \subset D_f$ и производная её $f'(x)$ нигде не обращается в нуль на j , то $f'(x)$ сохраняет один и тот же знак на всём промежутке j .*

▲ Для доказательства следствия допустим, что $f'(x)$ меняет свой знак на промежутке j . Тогда имеем: $\exists a; b \in j (a < b \wedge f'(a) \cdot f'(b) < 0) \Rightarrow \exists c \in]a; b[\subset j / f'(c) = 0$, что противоречит условию. ●

Следствие из теоремы Дарбу и замечание 2 к теореме 3 позволяют довольно легко находить промежутки монотонности функции.

В самом деле, если из D_f удалить критические точки функции f (т.е. те внутренние точки D_f , в которых либо производная равна нулю, либо не существует), то получим некоторую систему промежутков, на каждом из которых функция f дифференцируема и производная её не обращается в нуль. Чтобы узнать знак производной на каждом из полученных промежутков, достаточно установить ее знак в какой-нибудь точке промежутка. Таким образом, получаем следующий алгоритм отыскания промежутков монотонности функции f :

1. Найти D_f .
2. Найти производную $f'(x)$ и упростить её.
3. Найти критические точки функции f .
4. Удалить из D_f критические точки и оставшуюся часть изобразить на координатной прямой.
5. Взять по одной точке в каждом из промежутков из п. 4 и установить знак производной в них (таков её знак и на всем промежутке в силу следствия из теоремы Дарбу).
6. Исследовать непрерывность f на концах промежутков из п. 4.
7. Используя замечание 2 к теореме 3, записать ответ.

4°. Теперь уже можно приступить к рассмотрению вопросов локального и глобального экстремумов, выпуклости и вогнутости функций и точек перегиба. Остановимся на некоторых из них.

Определение. Внутреннюю точку x_0 области определения функции f называют точкой максимума (строгого максимума) функции f , если $\exists U(x_0) \forall x \in \overset{0}{U}(x_0)$ выполняется неравенство: $\frac{f(x) \leq f(x_0) (f(x) < f(x_0))}{f(x) \geq f(x_0) (f(x) > f(x_0))}$.

Теорема 4. (Необходимое условие экстремума). Любая точка экстремума функции является её критической точкой.

Теорема 5. (Критерий экстремума). Для того чтобы внутренняя точка x_0 области определения функции f была её точкой строгого экстремума необходимо и достаточно, чтобы функция f при переходе x через точку x_0 меняла направление монотонности в точке x_0 .

Теорема 4 необратима. Однако, из нее следует, что точки экстремума функции следует искать только среди критических. Но чтобы из критических точек функции отсеять все точки, не являющиеся точками экстремума, желательно иметь соответствующее "сито". Такими ситами являются достаточные условия экстремума.

Теорема 6. (Сито 1). Критическая точка x_0 функции f является её точкой экстремума, если выполняются следующие условия:

- 1) $f \in C(x_0)$.
- 2) $\exists \overset{0}{U}(x_0) / f \in D^1(\overset{0}{U})$.
- 3) При переходе x через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак. При этом:
 - x_0 – точка максимума, если $f'(x)$ меняет знак с "+" на "-"
 - x_0 – точка минимума, если $f'(x)$ меняет знак с "-" на "+".

Если же $f'(x)$ не меняет знака при переходе через точку x_0 , то x_0 не является точкой экстремума.

Теорема 7. (Сито 2). Если x_0 – внутренняя точка D_f , $f \in D^2(x_0)$, $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) \neq 0$, то x_0 – точка экстремума. При этом

$$\begin{aligned} x_0 &- (\cdot) \max, \text{ если } f''(x_0) < 0 \text{ и} \\ x_0 &- (\cdot) \min, \text{ если } f''(x_0) > 0. \end{aligned}$$

▲ Приведем доказательство этой теоремы. Ясно, что из условия $f \in D^2(x_0)$ следует, что f дифференцируема в некоторой окрестности $(\cdot)x_0$. Далее, $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f' \downarrow$ в $(\cdot)x_0$. Поэтому $\exists \overset{0}{U}(x_0) =]a; x_0] \cup]x_0; b[$, что $f'(x) < f'(x_0) = 0 \quad \forall x \in [a; x_0[$ и $f'(x) > f'(x_0) = 0 \quad \forall x \in]x_0; b]$, откуда следует в силу теоремы 6, что x_0 – точка минимума.

Аналогично рассматривается случай $f''(x_0) > 0$. ●

После рассмотрения этих теорем даем алгоритм исследования функции на экстремум. Далее рассматриваем вопросы выпуклости и точек перегиба только для дифференцируемых функций и продолжаем рассмотрение основных теорем дифференциального исчисления.

Теорема Ролля. Если $f \in D^1]a; b[$, $f \in C\{a; b\}$ и $f(a) = f(b)$, то $\exists c \in]a; b[$: $f'(c) = 0$.

▲ Пусть $f'(x) \neq 0 \forall x \in]a; b[$. Тогда по следствию из теоремы Дарбу, $f'(x)$ сохраняет знак на $]a; b[$, т.е. либо $f'(x) > 0 \forall x \in]a; b[$, либо $f'(x) < 0 \forall x \in]a; b[$, откуда имеем, что $f \nearrow(\searrow)$ на $]a; b[$ и, так как $f \in C\{a; b\}$, то $f \nearrow(\searrow)$ на $[a; b]$ и поэтому $f(a) \neq f(b)$, что противоречит условию. ●

Теорема Коши. Если $f, g \in D^1]a; b[$ и $f, g \in C\{a; b\}$, то $\exists c \in]a; b[$:

$$[f(b) - f(a)] \cdot g'(c) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(c).$$

▲ Для доказательства теоремы Коши достаточно проверить, что функция $h(x) = [f(b) - f(a)] \cdot g(x) - [g(b) - g(a)] \cdot f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. ●

Следствие (Формула Коши). Если выполнены все условия теоремы Коши и кроме того $g'(x) \neq 0$ на $]a; b[$, то найдется такое число $c \in]a; b[$, что справедливо равенство:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Из теоремы Коши получаем как простое следствие теорему Лагранжа. При рассмотрении теорем Ролля, Коши и Лагранжа выясняем их геометрический смысл и останавливаемся на существенности условий этих теорем.

Затем останавливаемся на правилах Лопиталя. При этом все правила формулируем в виде одной теоремы.

Теорема Лопиталя. Пусть выполнены следующие условия:

1. $a \in \{x_0; x_0 - 0; x_0 + 0; -\infty; +\infty; \infty\}$, где $x_0 \in R$.

2. Функции f и g бесконечно малые или бесконечно большие при $x \rightarrow a$ и дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности точки a , причём $g'(x) \neq 0$.

3. $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in R \cup \{-\infty; +\infty; \infty\}$.

Тогда $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Подробное доказательство теоремы Лопиталя не проводим. Рассматриваем лишь два случая: когда f, g - бесконечно малые при $x \rightarrow x_0 + 0$ и $x \rightarrow \infty$.

После правила Лопиталя устанавливаем условия постоянства и критерии монотонности функции, выводим формулу Тэйлора в форме Пеано.

В заключение рассматриваем задачи полного исследования функций и построения их графиков, а также правила отыскания наибольших и наименьших значений функций на различных промежутках.

Л и т е р а т у р а .

1. Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 9 класса средней школы. Под ред. А.Н.Колмогорова. -М.: Просвещение, -1975
2. Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы. Под ред. А.Н. Колмогорова. - М.: Просвещение, -1980.
3. Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 9-10 классов средней школы. Под ред. А.Н. Колмогорова.- М.: Просвещение, -1986.
4. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1, М.: Наука,-1970.

Ways of teaching infinitesimal calculus to would-be mathematics teachers**K.S. Mami**

The author discusses his personal teaching experience in the sphere of mathematical analysis.