2018 г. **№23**

Т р у д ы Ф О Р А

ОБ ОТСУТСТВИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ КУБИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ, ИМЕЮЩИХ ОСОБУЮ ТОЧКУ ТИПА «ЦЕНТР»

В.Б. Тлячев, Д.С. Ушхо, А.Д. Ушхо

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Рассматривается вопрос об отсутствии предельных циклов кубической системы, имеющей особые точки типа «центр». Показано, что сумма числа особых точек полиномиальной системы n–го порядка и числа контактов, расположенных на гладкой алгебраической кривой порядка m, $m \geqslant 1$, не превосходит числа $N = m(m + n - 1)$, если эта кривая не состоит из траекторий самой системы. При $n = 3$ доказано, что если система имеет хотя бы одну ось симметрии N–типа и не менее трех центров, два из которых не лежат на оси симметрии N–типа, то тогда эта система не имеет предельных циклов. Это же утверждение справедливо при наличии оси симметрии S–типа и четырех центров.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P_n(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q_n(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где $P_n(x,y)$ и $Q_n(x,y)$ – взаимно простые многочлены степени n над полем $\mathbb{R}$.

Особая точка $M(x_0, y_0)$ системы (1) называется особой точкой второй группы, если выполняются условия

$$P'_{nx}(x_0,y_0) + Q'_{ny}(x_0,y_0) = 0, \tag{2}$$

$$P'_{nx}(x_0,y_0) \cdot Q'_{ny}(x_0,y_0) - P'_{ny}(x_0,y_0) \cdot Q'_{nx}(x_0,y_0) > 0.$$

Как известно [1], особая точка второй группы является либо центром, либо сложным фокусом. Поэтому возникает проблема различения центра и фокуса. Обширный список публикаций, посвященных проблеме центра-фокуса, приведен в монографии [1]. В процессе изучения поведения траекторий системы (1), имеющей особую точку типа «центр», возникает проблема сосуществования предельных циклов и центров полиномиальных дифференциальных систем. В работе [2] доказано, что система (1) при $n = 2$ не имеет предельных циклов, если она обладает хотя бы одной особой точкой типа «центр». В [3] доказано отсутствие предельных циклов системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + P_3(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + Q_3(x,y), \end{cases} \tag{3}$$

имеющей центр $O(0,0)$, где $P_3(x,y)$ и $Q_3(x,y)$ – однородные многочлены третьей степени.

После опубликования работ [2,3] естественным образом Н.П. Еругиным была поставлена задача обнаружения полиномиальных дифференциальных систем с особой точкой типа «центр», допускающих предельные циклы [4].

В работе М.В. Долова [5] установлено, что наименьшая степень n полиномов $P_n(x,y)$ и $Q_n(x,y)$, при которой система (1) может иметь предельные циклы в случае центра, равна трем. В заметке [6] построена кубическая система, имеющая два центра и предельный цикл. Поэтому в [7] была поставлена задача: если E_m – класс кубических систем, имеющих m центров, то при каком наибольшем значении m система (1) при $n = 3$ имеет предельные циклы? Отметим, в [8] показано, что $m \leqslant 5$. В [7] доказано утверждение: в классе E_m ($m \geqslant 3$) существуют системы с предельными циклами.

В данной работе рассматривается вопрос об отсутствии предельных циклов кубической системы, имеющей особые точки типа «центр».

Определение 1. Точка $M(x_0, y_0)$, принадлежащая гладкой кривой L, называется контактом на L, если вектор $\overrightarrow{V} = (P_n(x_0, y_0), Q_n(x_0, y_0))$ является направляющим вектором касательной к кривой L в точке M.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} F(x,y) = 0, \\ F'_x(x,y) \cdot P_n(x,y) + F'_y(x,y) Q_n(x,y) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где $F(x,y) = 0$ – гладкая алгебраическая кривая порядка m, $m \geqslant 1$.

Система (4) имеет не более $m(m+n-1)$ решений [9]. Поэтому справедлива

Теорема 1. *Сумма числа особых точек системы* (1) *и числа контактов, расположенных на гладкой алгебраической кривой порядка* m, $m \geqslant 1$, *не превосходит числа* $N = m(m+n-1)$, *если эта кривая не состоит из траекторий системы* (1).

Определение 2 [10]. Прямая $y = kx$ называется осью симметрии N – типа системы (1), если преобразование

$$\begin{cases} \overline{x} = x + ky, \\ \overline{y} = -kx + y, \end{cases} \tag{5}$$

переводит систему (1) в систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = \overline{P}_n(\overline{x}, \overline{y}), \\ \dfrac{d\overline{y}}{dt} = \overline{Q}_n(\overline{x}, \overline{y}), \end{cases} \tag{6}$$

где $\overline{P}_n(\overline{x}, -\overline{y}) = -\overline{P}_n(\overline{x}, \overline{y})$, $\overline{Q}_n(\overline{x}, -\overline{y}) = \overline{Q}_n(\overline{x}, \overline{y})$.

В монографии [10] доказывается, что ось симметрии N–типа системы (1) является изоклиной, которую пересекают траектории системы (1) под прямым углом.

Определение 3 [11]. Прямая $y = kx$ называется осью симметрии S–типа системы (1), если преобразование (5) переводит систему (1) в систему (6), где $\overline{P}_n(\overline{x}, -\overline{y}) = \overline{P}_n(\overline{x}, \overline{y})$, $\overline{Q}_n(\overline{x}, -\overline{y}) = -\overline{Q}_n(\overline{x}, \overline{y})$.

В [11] доказывается, что ось симметрии S–типа системы (1) является ее инвариантной прямой.

Теорема 2. *Пусть система* (1) *при* $n = 3$ *имеет хотя бы одну ось симметрии* N*–типа и не менее трех центров, два из которых не лежат на оси симметрии* N*–типа. Тогда эта система не имеет предельных циклов.*

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что прямая $y = 0$ является осью симметрии N–типа системы (1) при $n = 3$. По условию хотя бы один центр лежит на оси симметрии N–типа. В противном случае система имела бы более пяти центров, что противоречит теореме об оценке сверху числа центров кубической системы [8]. Перенося начало координат в один из центров, лежащих на оси симметрии N–типа, придадим системе (1) при $n = 3$ вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y(a_{01} + a_{11}x + a_{21}x^2 + a_{03}y^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{12}xy^2. \end{cases} \tag{7}$$

Дивергенция векторного поля системы (6) имеет вид:

$$\sigma(x,y) = y[a_{11} + 2b_{02} + 2(a_{21} + b_{12})x]. \tag{8}$$

Если $\sigma(x,y) \equiv 0$, то система (7) консервативна и не имеет изолированных периодических решений [12]. Поэтому полагаем, что $\sigma(x,y) \not\equiv 0$. Тогда центры принадлежат кривой $\sigma(x,y) = 0$ [1,12]. По условию два центра не принадлежат оси симметрии N- типа, то есть прямой $y = 0$. Следовательно, согласно (8) они принадлежат прямой $l_0 : a_{11} + 2b_{02} + 2(a_{21} + b_{12})x = 0$. Как следует из признака Бендиксона [12], предельные циклы пересекают кривую $\sigma(x,y) = 0$. В силу симметрии векторного поля системы (7) относительно прямой $y = 0$ предельный цикл системы не пересекает эту прямую.

Так как $y = 0$ – ось симметрии N–типа, а значит, изоклина бесконечности, то точка пересечения прямой l_0 с осью абсцисс является контактом на l_0 (см. определение 1). Если допустить существование предельного цикла системы (7), то сумма числа особых точек системы (7) на прямой l_0 и числа контактов на этой прямой окажется не менее пяти. Это противоречит теореме 1.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть система* (1) *при* $n = 3$ *имеет ось симметрии* S*–типа и четыре центра. Тогда эта система не имеет предельных циклов.*

Доказательство. Не уменьшая общности, можно рассмотреть систему (1) при $n = 3$ в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{12}xy^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = y(b_{01} + b_{11}x + b_{21}x^2 + b_{03}y^2). \end{cases} \tag{9}$$

Очевидно, все четыре центра расположены на кривой второго порядка

$$L_0 : b_{01} + b_{11}x + b_{21}x^2 + b_{03}y^2 = 0. \tag{10}$$

Кривая (10) может быть эллипсом, или гиперболой, или параболой, или парой прямых.

Пусть L_0 – эллипс. Тогда L расположен симметрично относительно оси симметрии S–типа $y = 0$. По условию система (9) имеет четыре центра, следовательно, два из них расположены в полуплоскости $y > 0$, а два других – в полуплоскости $y < 0$. По теореме Пуанкаре [13] на кривой L_0 между центрами расположены седла. Так как на кривой L_0 система (9) имеет не более шести особых точек, то эта система не имеет особой точки с индексом Пуанкаре [12] $I = +1$, которую окружал бы предельный цикл. Если L_0 – гипербола, парабола или пара прямых, то рассуждая так же, как и в случае эллипса приходим к такому же выводу.

Теорема доказана.

Замечание. Если кубическая дифференциальная система имеет ось симметрии S–типа и четыре центра, то, как следует из процедуры доказательства теоремы 3, для этой системы не возникает проблема существования предельных циклов.

Список литературы

1. *Амелькин В. В.* Нелинейные колебания в системах второго порядка / В.В. Амелькин, Н.А. Лукашевич, А.П. Садовский. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1982.

2. *Лукашевич Н. А.* Интегральные кривые одного дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1965. – Т. 1. – No 1. – С. 82–95.

3. *Лукашевич Н. А.* К вопросу о предельных циклах для системы $\dfrac{dx}{dt} = y + P(x, y)$, $\dfrac{dy}{dt} = -x + Q(x, y)$, $P(tx, ty) = t^3P(x, y)$, $Q(tx, ty) = t^3Q(x, y)$, если $O(0, 0)$ – особая точка типа «центр» // Доклады АН БССР. – 1961. – Т. 5. – No10. – С. 424–426.

4. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: Наука и техника, 1979.

5. *Долов М. В.* О предельных циклах в случае центра // Дифференциальные уравнения. – 1972. – Т. 8. – No 9. – С. 1691–1692.

6. *Щеглова Н. Л.* Исследование систем с однородными кубическими нелинейностями, имеющих фокус и центр. // Дифференциальные уравнения, 1993. – Т. 29. – No 2. – С. 246–255.

7. *Ушхо Д. С.* О сосуществовании предельных циклов и особых точек типа «центр» кубических дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31. – No 1. – С. 173–174.

8. *Ушхо Д. С.* О числе особых точек второй группы кубической системы // Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т. 29. – No 2. – С. 240–245.

9. *Уокер Р.* Алгебраические кривые. М: Издательство иностранной литературы, 1952.

10. *Тлячев В. Б., Ушхо А. Д., Ушхо Д. С.* Полиномиальные векторные поля на плоскости. Избранные вопросы. Майкоп: АГУ, 2012.

11. *Тлячев В. Б., Ушхо А. Д., Ушхо Д. С.* Оси симметрии полиномиальных дифференциальных систем на плоскости // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2010. – Т. 10. – No 2. – С. 41–49.

12. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний, 2-е изд., перераб. и испр. М.: Наука, 1981.

13. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. М., Майер А. Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967.

ON THE ABSENCE OF LIMIT CYCLES BY CUBIC DIFFERENTIAL SYSTEMS HAVING A SINGULAR POINT OF TYPE «CENTER»

V.B. Tlyachev, D.S. Ushkho , A.D. Ushkho

The question of the absence of limit cycles of a cubic system with singular points of the type «center» is considered. It is shown that the sum of the number of singular points of the polynomial system of n–th order and the number of contacts located on a smooth algebraic curve of order m, $m \geqslant 1$, does not exceed the number $N = m(m + n - 1)$ if this curve does not consist of the trajectories of the system itself. For $n = 3$, it is proved that if the system has at least one axis of symmetry of N–type and at least three centers, two of which do not lie on the axis of symmetry of N–type, then this system does not have limit cycles. The same statement is true in the presence of the axis of symmetry of S–type and four centers.

