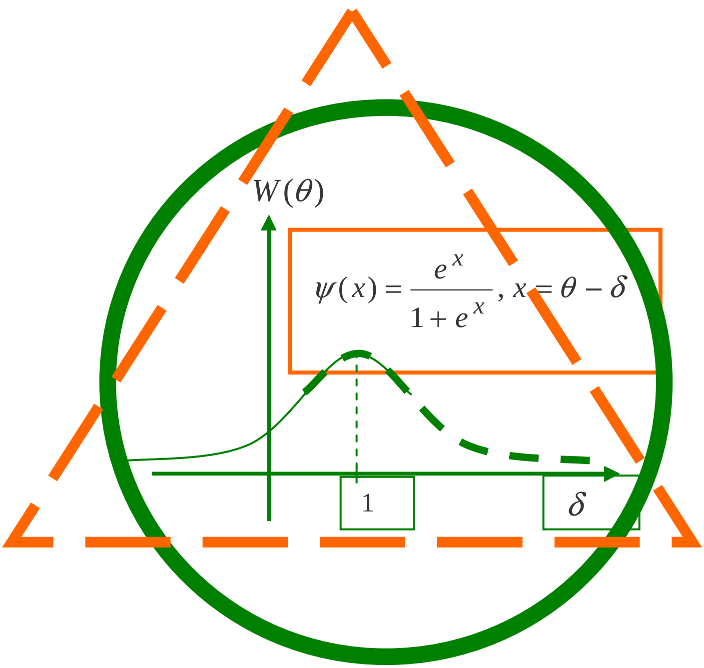
В.А. Богус

МАТЕМАТИКА



Майкоп, 2005

ББК 22.1 я 72
УДК 51(07)
Б 42

Печатается по решению редакционно-издательского Совета АГУ

Рецензенты: канд.физ.-мат.н., профессор **Мамий К.С.**,
канд.физ.-мат.н., доцент **Андрухаев Х.М.**

БОГУС ВАЛИД АХМЕДОВИЧ

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие соответствует программе по математике для профильных классов. Книга поможет всем желающим повторить изученное ранее и подготовиться к сдаче экзаменов по математике.

I S B N – 5-85109-018-098-X

ВВЕДЕНИЕ

Назначение экзамена по школьному курсу математики – обеспечение объективной оценки уровня подготовки выпускников профильных классов и всех желающих продолжить свое образование в вузах.

Поступающий в высшее учебное заведение должен показать:

а) уверенное владение математическими знаниями и навыками, предусмотренными программой, умение применять их при решении задач;

б) умение точно и сжато выражать математическую мысль в письменном изложении, использовать соответствующую символику;

в) четкое знание математических определений и теорем, предусмотренных программой, умение доказывать эти теоремы.

В настоящее время печатается много пособий, отражающих содержание школьной математики с различных точек зрения, и трудно правильно и оптимально выбрать необходимый материал для выполнения конкретных заданий. Автор данного пособия постарался максимально облегчить работу выпускников по отбору необходимого материала и компактно изложить этот материал с учетом запросов и пожеланий учителей математики.

Работу с пособием можно начинать с 9 класса, а также и после окончания средней общеобразовательной школы.

Глава I “Основные математические понятия и факты” поможет систематизировать ваши знания или овладеть обязательным минимумом знаний, чтобы правильно использовать основные математические понятия при решении задач и при доказательстве теорем.

Глава II “Основные формулы и теоремы”. Здесь даются доказательства всех основных теорем и выводятся основные формулы, необходимые для успешного выполнения экзаменационных заданий.

Глава III “Все для подготовки к экзамену” включает основные формулы и тождества, образцы оформления письменных работ, тестовые задания, которые помогут при подготовке к тестовой и иной форме контроля знаний.

Глава 1. Основные математические понятия и факты

1. Программа по математике

Настоящая программа состоит из трех разделов.

В первом разделе перечислены основные математические понятия, которыми должен владеть заканчивающий естественно-математическую профильную школу.

При подготовке к экзамену целесообразно познакомиться с формулировками утверждений из второго раздела.

В третьем разделе указано, какие навыки и умения требуются от выпускника профильной школы.

Объем знаний и степень владения материалом, описанным в программе, соответствуют курсу математики средней школы. Заканчивающий школу может пользоваться всем арсеналом средств из этого курса, включая и начала анализа. Объекты и факты, не изучаемые в общеобразовательной школе, также могут использоваться, но при условии, что он способен их пояснять и доказывать.

В связи с обилием учебников и регулярным их переизданием отдельные утверждения могут в некоторых учебниках называться иначе, чем в программе, или формулироваться в виде задач, или вовсе отсутствовать. Такие случаи не освобождают выпускника от необходимости знать эти утверждения.

1. *Основные математические понятия и факты* *Арифметика, алгебра и начала анализа*

Натуральные числа (***N***). Простые и составные числа. Делитель, кратное. Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное.

Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10.

Целые числа (***Z***). Рациональные числа (***Q***), их сложение, вычитание, умножение и деление. Сравнение рациональных чисел.

Действительные числа ***(R)***, их представление в виде десятичных дробей.

Изображение чисел на прямой. Модуль действительного числа, его геометрический смысл.

Числовые выражения. Выражения с переменными. Формулы сокращенного умножения.

Степень с натуральным и рациональным показателем. Арифметический корень.

Логарифмы, их свойства.

Одночлен и многочлен.

Многочлен с одной переменной. Корень многочлена на примере квадратного трехчлена.

Понятие функции. Способы задания функции. Область определения. Множество значений функции.

График функции. Возрастание и убывание функции; периодичность, четность, нечетность.

Достаточное условие возрастания (убывания) функции на промежутке. Понятие экстремума функции. Необходимое условие экстремума функции (теорема Ферма). Достаточное условие экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке.

Определение и основные свойства функций: линейной, квадратичной $y = ax^2 + bx + c$, степенной $y = ax^n (n \in N)$, $y = \frac{k}{x}$, показательной $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, логарифмической, тригонометрических функций $(y = \sin x, y = \cos x, y = tgx,\ y = ctgx)$, арифметического корня $y = \sqrt{x}$.

Уравнение. Корни уравнения. Понятие о равносильных уравнениях.

Неравенства. Решение неравенства. Понятие о равносильных неравенствах.

Система уравнений и неравенств. Решение системы.

Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формула n-го члена и суммы первых n членов арифметической прогрессии. Формула n-го члена и суммы первых n членов геометрической прогрессии.

Синус и косинус суммы и разности двух аргументов (формулы).

Преобразование в произведение сумм $sin\alpha \pm sin\beta$; $cos\alpha \pm cos\beta$.

Определение производной. Ее физический и геометрический смысл.

Производные функций $y = sinx$; $y = cosx$; $y = tgx$; $y = ctgx$; $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$; $y = ax^n$, $n \in N$; $y = lnx$.

Геометрия

Прямая, луч, отрезок, ломаная; длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Окружность, круг. Параллельные прямые.

Примеры преобразования фигур, виды симметрии. Преобразование подобия и его свойства.

Векторы. Операции над векторами.

Многоугольник, его вершины, стороны, диагонали.

Треугольник. Его медиана, биссектриса, высота. Виды треугольников. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника.

Четырехугольник: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция.

Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр, радиус. Касательная к окружности. Дуга окружности. Сектор.

Центральные и вписанные углы. Формулы площади: треугольника, прямоугольника, параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции.

Длина окружности и длина дуги окружности. Радианная мера угла. Площадь круга и площадь сектора.

Подобие. Подобные фигуры. Отношение площадей подобных фигур.

Плоскость. Параллельные и пересекающиеся плоскости.

Параллельность прямой и плоскости.

Угол прямой с плоскостью. Перпендикуляр к плоскости.

Двугранные углы. Линейный угол двугранного угла. Перпендикулярность двух плоскостей.

Многогранники. Их вершины, ребра, грани, диагонали. Прямая и наклонная призмы; пирамиды. Правильная призма и правильная пирамида. Параллелепипеды, их виды.

Фигуры вращения: цилиндр, конус, сфера, шар. Центр, диаметр, радиус сферы и шара. Плоскость, касательная к сфере.

Формулы площади поверхности и объема призмы.

Формулы площади поверхности и объема пирамиды.

Формулы площади поверхности и объема цилиндра.

Формулы площади поверхности и объема конуса. '

Формула объема шара.

Формула площади сферы.

II. Основные формулы и теоремы
Алгебра и начала анализа

Свойства функции $y = kx + b$ и ее график.

Свойства функции $y = \frac{k}{x}$ и ее график.

Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ и ее график.

Формула корней квадратного уравнения.

Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.

Свойства числовых неравенств.

Логарифм произведения, степени, частного.

Определение и свойства функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ и их графики.

Определение и свойства функций $y = tg\ x$, $y = ctgx$ и их графики.

Решение уравнений вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$; $ctgx = a$.

Формулы приведения.

Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

Тригонометрические функции двойного аргумента.

Производная суммы двух функций.

Геометрия

Свойства равнобедренного треугольника.

Свойства точек, равноудаленных от концов отрезка.

Признаки параллельности прямых.

Сумма углов треугольника.

Сумма внешних углов выпуклого многоугольника.

Признаки параллелограмма, его свойства.

Окружность, описанная около треугольника.

Окружность, вписанная в треугольник.

Касательная к окружности и ее свойства.

Измерение угла, вписанного в окружность.

Признаки подобия треугольников.

Теорема Пифагора.

Формулы площадей параллелограмма, треугольника, трапеции.

Формула расстояния между двумя точками плоскости.

Уравнение окружности.

Признак параллельности прямой и плоскости.

Признак параллельности плоскостей.

Теорема о перпендикулярности прямой и плоскости.

Перпендикулярность двух плоскостей.

Теоремы о параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Теорема о трех перпендикулярах.

III. Основные умения и навыки

Экзаменующийся должен уметь:

Производить арифметические действия над числами, заданными в виде обыкновенных и десятичных дробей; с требуемой точностью округлять данные числа и результаты вычислений; пользоваться калькуляторами и таблицами для вычислений.

Проводить тождественные преобразования многочленов, дробей, содержащих переменные, выражений, содержащих степенные, показательные, логарифмические тригонометрические функции.

Строить графики линейной, квадратичной, степенной, показательной, логарифмической и тригонометрических функций.

Решать уравнения и неравенства первой и второй степени, уравнения и неравенства, приводящиеся к ним; решать системы уравнений и неравенств первой и второй степени и приводящиеся к ним. Сюда, в частности, относятся простейшие уравнения и неравенства, содержащие степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции.

Решать задачи на составление уравнений и систем уравнений.

Изображать геометрические фигуры на чертеже и производить простейшие построения на плоскости.

Использовать геометрические представления при решении алгебраических задач, а методы алгебры и тригонометрии – при решении геометрических задач.

Проводить на плоскости операции над векторами (сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число) и пользоваться свойствами этих операций.

Пользоваться понятием производной при исследовании функций на возрастание (убывание), на экстремумы и при построении графиков функций.

2. Арифметика, алгебра и начала анализа.

Краткий обзор вопросов данного раздела поможет в подготовке к экзамену. Тематика этих вопросов является частью теоретического материала, необходимого для формирования прочных практических навыков. В этой части не будут затрагиваться те вопросы, которые включены во II раздел и требуют доказательства.

В работе используются следующие обозначения:

$\{a\}$	– множество, состоящее из одного элемента a;
$\{a, b, \ldots, c\}$	– множество, состоящее из элементов $a, b, \ldots, c$;
$\Rightarrow$	– знак логического следования;
$A \Rightarrow B$	– читается: "если A, то B", или "из A следует B";
$\Leftrightarrow$	– знак равносильности;
$A \Leftrightarrow B$	– читается: "A равносильно B", или "A выполняется тогда и только тогда, когда выполняется B";
$\in$	– знак принадлежности;
$a \in A$	– читается: "a принадлежит множеству A";
$\subset$	– знак подмножества;
$A \subset B$	– множество A является подмножеством множества B, то есть каждый элемент множества A является элементом множества B;
$\emptyset$	–пустое множество, то есть множество, не содержащее ни одного элемента;
$\cup$	– знак объединения;
$A \cup B$	– объединение множеств A и B, то есть множество всех таких элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B;
$\cap$	– знак пересечения;
$A \cap B$	– пересечение множеств A и B, то есть множество всех таких элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B.

1. Натуральные числа.

Определение. Натуральными числами называются числа, появившиеся при счете предметов. Множество натуральных чисел обозначают $\mathbf{N}$. Таким образом $\mathbf{N} : 1; 2; 3; \ldots; n; n+1; \ldots$.

Определение. Натуральное число d называется *делителем натурального числа n*, если n делится на d.

Определение. Натуральное число p, большее единицы, называется *простым*, если его делителями являются только 1 и само число p.

Например: числа 2, 3, 5, 7 и т.д. являются простыми, так как они делятся только на 1 и на себя.

Определение. Натуральное число называется *составным*, если оно имеет более двух делителей.

Примеры составных чисел: 4, 12, 28, 35, 39, и т.д. Число 1 не является ни простым, ни составным.

Всякое составное число a можно записать в виде произведения простых чисел. В этом случае говорят, что число a разложено на простые множители. При разложении числа на простые множители некоторые из них могут встретиться в разложении не один раз. Принято писать этот простой множитель в степени, показывающей сколько раз он является сомножителем, например, $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$.Любое натуральное число a представимо единственным образом в виде $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ – простые числа, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ показывают сколько раз числа $p_1, p_2, \ldots, p_k$ встречаются в разложении числа a на простые множители.

Определение. Натуральное число d называется *общим делителем* натуральных чисел a и b если d является делителем и a, и b.

Например, общими делителями чисел 18 и 12 являются числа 2, 3 и 6.

Определение. Натуральное число d называется *наибольшим общим делителем* чисел a и b (НОД(a, b)), если оно является наибольшим из всех общих делителей чисел a и b.

Например, наибольшим общим делителем чисел 18 и 12 является число 6, т.е. НОД(18,12)=6. Для того чтобы найти НОД двух чисел необходимо каждое из этих чисел разложить на простые множители и составить произведение общих простых множителей, взяв каждый из них с наименьшим показателем.

Пример. Найти НОД чисел 126 и 540.

Разложим каждое из этих чисел на простые множители.

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \\ & \\ & \end{array} \quad 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \qquad \begin{array}{r|l} 540 & 2 \\ 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$$

НОД (126,540)=$2 \cdot 3^2$=18.

Замечание. Аналогично определяется и находится НОД нескольких чисел.

Определение. Число m называется *кратным* числу n, если число m делится на n.

Например, числа 32, 48 и т.д. кратны числу 16.

Определение. Число m называется *общим кратным* двух чисел a и b, если оно кратно и a, и b.

Например, общими кратными чисел 8 и 6 являются числа 24, 48, 72 и т.д.

Определение. Наименьшее из натуральных чисел, являющихся общими кратными чисел a и b, называется их *наименьшим общим кратным* и обозначается НОК $(a;b)$.

Для того чтобы найти НОК двух чисел a и b, необходимо каждое из этих чисел разложить на простые множители и составить произведение всех простых множителей, взяв каждый из них с наибольшим показателем.

Пример. Найти НОК чисел 126 и 540.

126$=2\cdot 3^2\cdot 7$; $540=2^2\cdot 3^3\cdot 5$.

НОК(126;540)$=2^2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7=3780$

2. Признаки делимости чисел.

На 2 делятся те и только те числа, которые оканчиваются нулем или четной цифрой.

На 5 делятся те и только те числа, которые оканчиваются нулем или цифрой 5.

На 4 (на 25) делятся те и только те числа, у которых две последние цифры нули или составляют число, делящееся на 4 (на 25).

На 10 делятся те и только те числа, которые оканчиваются нулем.

На 3 (на 9) делятся те и только те числа, сумма цифр которых делится на 3 (на 9).

3. Целые числа ($\mathbf{Z}$). Рациональные числа ($\mathbf{Q}$).

Два числа, отличающиеся друг от друга только знаком, называются противоположными.

На координатной прямой (прямая с выбранными на ней началом отсчета, единичным отрезком и направлением) противоположные числа расположены симметрично относительно начала координат.

Определение. Числа натуральные, им противоположные и нуль составляют новое множество – множество целых чисел ($\mathbf{Z}$).

В результате действия $\mathbf{N}\cup\{0\}=\mathbf{N}_0$ получим множество неотрицательных чисел.

Определение. Числа вида $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}$ называются *рациональными*, а множество всех таких чисел называется *множеством рациональных чисел* и обозначается $\mathbf{Q}$.

На $\mathbf{Q}$ выполнимы действия сложения, вычитания, умножения и деления (исключая деление на нуль).

Для сравнения двух рациональных чисел достаточно привести их к одному знаменателю, используя основное свойство дроби, а затем сравнить числители полученных дробей. А если рациональные числа записаны десятичной дробью, то надо сравнить целые части, если они равны, десятые доли и т.д.

4. Действительные числа.

Рациональных чисел недостаточно для выражения результатов измерения. Так, невозможно измерить диагональ квадрата со стороной равной 1. Длина такой диагонали равна $\sqrt{2}$, а это число не является рациональным.

Определение. Числа, которые не являются рациональными, называются *иррациональными.*

Иррациональные числа записываются в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

Определение. Объединение множества рациональных чисел ($\mathbf{Q}$) и множества иррациональных чисел дает новое множество – *множество действительных чисел* ($\mathbf{R}$).

Существует взаимно однозначное соответствие между множеством точек на координатной прямой и множеством $\mathbf{R}$, т.е. каждой точке числовой прямой соответствует одно определенное число, и каждому действительному числу – одна определенная точка прямой.

5. Модуль действительного числа.

Определение. Модулем действительного числа a называется само это число, если оно положительное, противоположное ему число, если оно отрицательное и нуль, если число a=0.

Принято обозначение:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{если} \quad a > 0, \\ -a, \text{если} \quad a < 0, \\ 0, \text{если} \quad a = 0; \end{cases} = \begin{cases} a, \text{если} \quad a \geq 0, \\ -a, \text{если} \quad a < 0. \end{cases}$$

Геометрически модуль действительного числа a равен расстоянию на числовой прямой от начала координат до точки, изображающей число a.

Основные свойства модуля действительного числа:

1. $|-a| = |a|$;
2. $|a| \geq 0$ для любого $a \in \mathbf{R}$;
3. $|a|^2 = a^2$;
4. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
5. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad b \neq 0$;
6. $|a \pm b| \leq |a| + |b|$;
7. $|a - b| \geq ||a| - |b||$;
8. $|a| = b \leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a = b \end{cases} \vee \begin{cases} b \geq 0 \\ a = -b. \end{cases}$
9. $|a| = |b| \leftrightarrow a^2 = b^2$.
10. $|a| = a \iff a \geq 0$;
11. $|a| = -a \iff a \leq 0$;
12. $|a| > a \iff a < 0$;
13. $|a| < a \iff a \in \emptyset$
14. $|a| \geq a \iff a \in \mathbf{R}$
15. $|a| > 0 \iff a \neq 0$
16. $|a| > b \Leftrightarrow a > bVa < -b$
17. $|a| < b \Leftrightarrow \begin{cases} a < b \\ a > -b \end{cases}$
18. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Примеры:
1. $|5| = 5$;
2. $|-5| = 5$;
3. $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$;
4. $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, так как $\sqrt{2} < \sqrt{3}$, а значит $\sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$.

6. Числовые выражения. Выражения с переменными. Формулы сокращенного умножения.

Выражения, содержащие числа, знаки действий и скобки называются числовыми выражениями. В результате выполнения указанных в выражении действий получаем определенное число (числовое значение выражения).

Если же в выражении содержатся переменные (буквы), то при изменении значений этих переменных меняется и значение самого выражения.

Определение. Множество значений переменной, при которых все математические действия, имеющиеся в данном выражении, выполнимы, называется *областью определения* или *областью допустимых значений* (ОДЗ) этого выражения.

Например, областью допустимых значений выражения $\frac{1}{x^2-1}$ являются все действительные числа, кроме 1 и -1. Областью допустимых значений выражения $\sqrt{x+2}$ является множество $x \in [-2; +\infty)$.

Равенства, верные при всех допустимых значениях переменных, называются тождествами.

Например, формулы сокращенного умножения: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$; $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$; $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3b^2a \pm b^3$; $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ всегда справедливы.

7. Степень с натуральным и рациональным показателем. Арифметический корень.

Определение степени с рациональным показателем состоит из определения степени a^n с показателем n:

1) $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$;

2) $n = 1$;

3) $n = 0$;

4) $n = -m$, где $m \in \mathbf{N}$;

5) $n = \frac{m}{k}$, где $m \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{N}$.

Определение.

1. Если $a \in \mathbf{R}$ и $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, то

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \text{ раз}},$$

где a – основание степени, n – показатель степени.

2. Если $a \in \mathbf{R}$ и $n = 1$, то $a^1 = a$.

3. Если $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ и $n = 0$, то $a^0 = 1$.

4. Если $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, $n = -m$, где $m \in \mathbf{N}$, то $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

5. Если $a > 0$, $n = \frac{m}{k}$, то $a^{\frac{m}{k}} = \sqrt[k]{a^m}$ (знак $\sqrt[k]{\ }$ означает арифметический корень, определение которого дано ниже).

Свойства степени с рациональным показателем:

Если $a > 0$, $b > 0$, $m \in \mathbf{Q}$, $n \in \mathbf{Q}$, то:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$; 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$;
3. $(a^m)^n = a^{mn}$;

Определение. Арифметическим корнем n-ной степени ($n \in \mathbf{N}$, $n > 1$) из неотрицательного числа a называется неотрицательное число b, n - ная степень которого равна a.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Свойства арифметических корней.

Для любых натуральных n и k, больших 1, и любых $a \geq 0$, $b \geq 0$ верны равенства:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;
2. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$;
3. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$;
4. $\sqrt{a^2} = |a|$, $(a \in \mathbf{R})$;
5. $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$, если $0 \le a < b$;
6. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;
7. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a}$;
8. $(\sqrt[n]{a})^n = a$;
9. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$, $(a \in \mathbf{R})$;
10. $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$.

9. Одночлен и многочлен.

Выражение, состоящее из произведения чисел, переменных и их степеней с натуральным показателем, называется одночленом. Степень одночлена стандартного вида определяется суммой показателей всех переменных входящих в выражение одночлена. Одночлены, которые отличаются только числовым коэффициентом называются подобными. Например, $3x^2y$ и $\frac{1}{2}x^2y$ – подобны.

Алгебраическая сумма одночленов называется многочленом. За степень многочлена принимается наибольшая из степеней одночленов входящих в этот многочлен. Тождественное преобразование многочленов, заключающееся в замене нескольких многочленов их суммой (путем сложения коэффициентов) называют приведением подобных членов (повторите по учебнику правила действия над одночленами и многочленами).

Преобразование многочлена в произведение двух или нескольких многочленов называют разложением многочлена на множители. Очевидно, что среди этих множителей могут быть и одночлены.

Существует несколько способов разложения на множители:

1. Вынесение за скобки общего множителя;
2. Способ группировки;
3. Применение формул сокращенного умножения.

Пример. Разложить на множители многочлен $5ax^2 - 10ax - yx + 2y - x + 2$.

Решение. $5ax^2 - 10ax - yx + 2y - x + 2 = (5ax^2 - 10ax) - (xy - 2y) - (x - 2) = 5ax(x-2) - y(x-2) - (x-2) = (x-2)(5ax - y - 1)$.

10. Многочлен с одной переменной.

Определение. Многочленом n-ой степени с одной переменной x называется выражение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

$$\text{где} \quad n \in \mathbf{N}, \quad a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}, \quad a_0 \ne 0$$

Определение. $x = x_0$ называется *корнем многочлена*, если значение многочлена при $x = x_0$ равно нулю.

При решении уравнений полезны следующие теоремы.

Теорема 1. Если многочлен n-ой степени с целыми коэффициентами имеет рациональные корни, то они находятся среди дробей вида $\frac{m}{n}$, где m – делители свободного члена a_n, n – делители старшего коэффициента a_0.

Следствие из теоремы. Если у многочлена с целыми коэффициентами старший коэффициент равен 1, и он имеет рациональные корни, то они целые, причем находятся среди делителей свободного члена.

Теорема 2. Если $x = x_0$ является корнем многочлена n-ой степени, то этот многочлен делится на двучлен $x - x_0$, т.е. представим в виде

$$a_0x^n + \ldots + a_n = (x - x_0)\left(b_0x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}\right).$$

Приведем пример на использование этих теорем.

Пример. Найти корни многочлена $x^3 - x^2 - 9x - 6$.

Решение. Делителями свободного члена, числа 6, являются числа: ±1, ±2, ±3, ±6. Проверкой убеждаемся, что $x = -2$ является корнем этого многочлена. Разделим x^3-x^2-9x-6 на двучлен $x+2$. Для этого слагаемые и делителя, и делимого записываем в порядке убывания степеней и выполняем деление "уголком", подобное делению чисел.

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -\ x^2 & -\ 9x & -\ 6 & x+2 \\ \cline{5-5}
x^3 & +\ 2x^2 & & & x^2-3x-3 \\ \cline{1-2}
 & -\ 3x^2 & -\ 9x & -\ 6 & \\
 & -\ 3x^2 & -\ 6x & & \\ \cline{2-4}
 & & -\ 3x & -\ 6 & \\
 & & -\ 3x & -\ 6 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Многочлен перепишется

$$x^3 - x^2 - 9x - 6 = (x+2)(x^2 - 3x - 3)$$

Найдем корни квадратного трехчлена:

$$x^2 - 3x - 3 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Ответ: -2; $\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$.

11. Понятие функции.

Определение. Зависимость переменной "y" от переменной "x", называют *функцией*, если каждому значению переменной x, взятому из некоторого множества X ставится в соответствие единственное значение y.

Функцию обозначают $y = f(x)$.

Область X называют областью определения функции и обозначают $D(f)$ или $D(y)$.

Множество значений, которые принимает функция называют областью значений функции и обозначают $E(f)$ или $E(y)$.

Функцию можно задать графическим, табличным или аналитическим способами.

Графический способ задания функции заключается в том, что функция задается с помощью некоторого графика.

При аналитическом способе задания функция задается с помощью формулы $y = f(x)$. При этом способе, если область определения не указана, то ее определяют следующим образом.

Определение. Областью определения функции $y = f(x)$, называется множество значений переменной x, при которых правая часть формулы $y = f(x)$ имеет смысл.

Например, областью определения функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ является множество значений x, при которых $1 - x^2 \geq 0 \Longleftrightarrow x \in [1-; 1]$.

При нахождении $D(y)$ необходимо помнить, что если:

а) $y = \frac{1}{f(x)}$, то $f(x) \neq 0$;

б) $y = \sqrt{f(x)}$, то $f(x) \geq 0$;

в) $y = \log_a f(x)$, то $f(x) > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$;

г) $y = \arcsin f(x)$ или $y = \arccos f(x)$, то $|f(x)| \leq 1$.

12. График функции. Свойства функции.

Определение. Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек $(x; y)$ координатной плоскости xOy, координаты которых удовлетворяют условию $y = f(x)$.

Необходимо знать графики элементарных функций, изучаемых в школе.

1. $y = x^{2n}$, $n \in \mathbf{N}$.

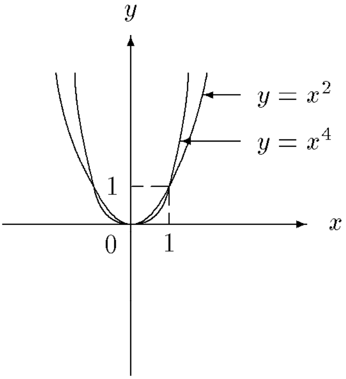


Рис. 1

2. $y = x^{2n+1}$, $n \in \mathbf{N}$.

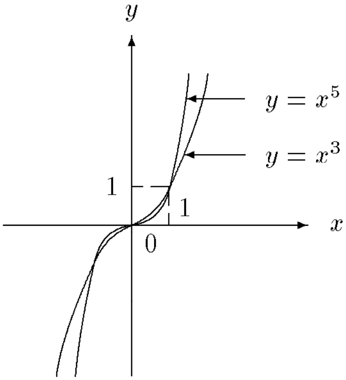


Рис.2

3. $y = x^{-2n}$, $n \in \mathbf{N}$.

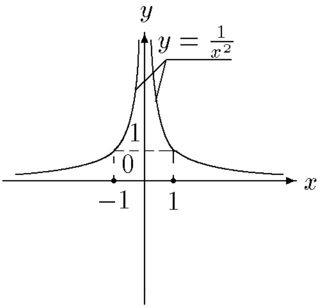


Рис. 3

4. $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in \mathbf{N}$.

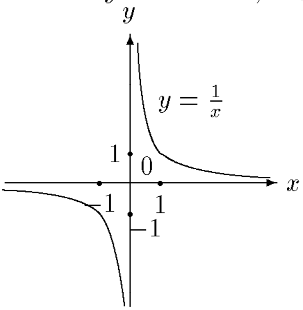


Рис.4

5. $y = \sqrt[2n]{x}$.

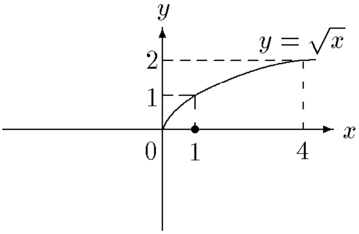


Рис. 5

6. $y = \sqrt[2n+1]{x}$.

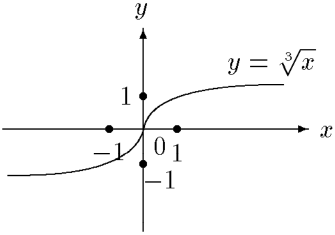


Рис.6

7. $y = a^x$.

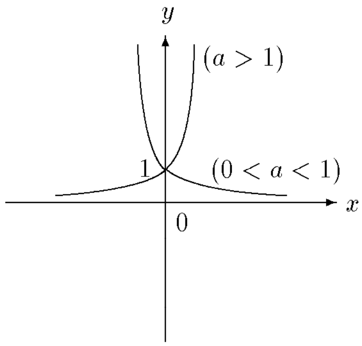


Рис. 7

8. $y = \log_a x$.

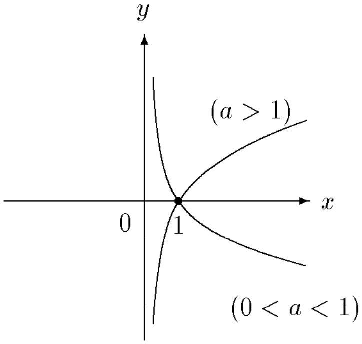


Рис.8

9. $y = \sin x$.

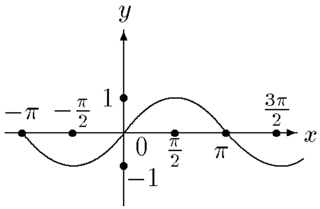


Рис. 9

10. $y = \cos x$.

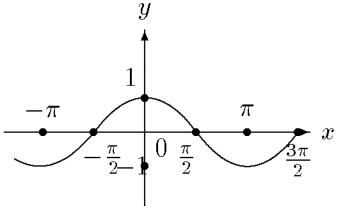


Рис.10

11. $y = \mathrm{tg}x$.

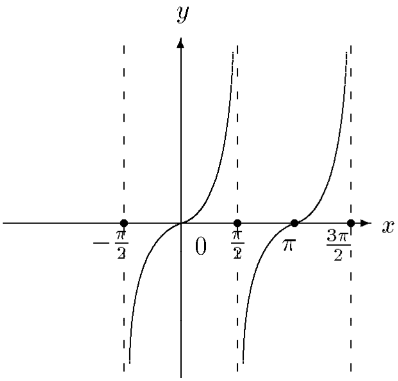


Рис. 11

12. $y = \mathrm{ctg}x$.

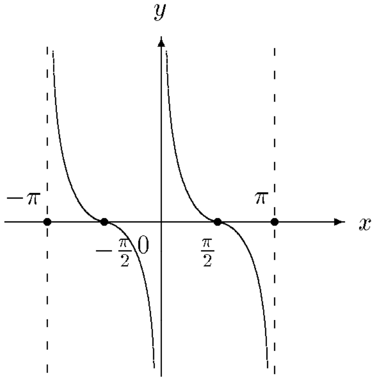


Рис.12

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* на множестве M, если для любых $x_1,\ x_2 \in M$ таких, что $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ $(f(x_2) < f(x_1))$.

Определение. Функция возрастающая или убывающая на данном множестве, называется *монотонной* на этом множестве.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *четной (нечетной)*, если она обладает следующими двумя свойствами:

1) область определения этой функции симметрична относительно точки O;

2) для любого значения $x \in D(y)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$.

График четной функции симметричен относительно оси OY. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Примеры. Установить четность или нечетность функции:

1) $y = \sqrt{9-x^2}$; 2) $y = \frac{x-x^3}{1+x^2}$; 3) $y = \sqrt{x-1}$.

Решение:

1) $y = \sqrt{9-x^2}$.

а) $D(y)\ :\ 9 - x^2 \geq 0 \iff x \in [-3; 3]$. Область определения функции симметрична относительно O.

б) $y(-x) = \sqrt{9-(-x^2)} = \sqrt{9-x^2} = y(x)$.

Функция четная.

2. $y = \frac{x-x^3}{1+x^2}$.

а) $D(y) = \mathbf{R}$ – симметрична относительно O.

б) $y(-x) = \frac{-x-(-x)^3}{1+(-x)^2} = \frac{-x+x^3}{1+x^2} = -\frac{x-x^3}{1+x^2} = -y(x)$.

Функция нечетная.

3) $y = \sqrt{x-1}$.

а) $D(y)\ :\ x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$ – не симметрична относительно начала координат, значит функция ни четная, ни нечетная.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что при любом x из области определения функции $y = f(x)$ числа $x \pm T$ также принадлежат области определения этой функции и выполняется равенство $f(x) = f(x+T) = f(x-T)$. При этом число T называется *периодом* функции $y = f(x)$.

Если T – период функции, то и nT, $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$ также является периодом функции.

Примеры.

1. Функция $y = \sin x$ имеет периодом число $T = 2\pi$, так как для любого числа $x \in \mathbf{R}$, $x \pm 2\pi$ входят в область определения этой функции и $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

2. Функция $y = 2$ имеет периодом любое действительное число, отличное от нуля.

Если функция $y = f(x)$ имеет наименьший положительный период T, то любой ее период имеет вид nT, где $n \in \mathbf{Z}$. Не всякая периодическая функция имеет наименьший положительный период. Например, функция $y = 2$ не имеет наименьшего положительного периода.

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ монотонна в своей области определения $D(f)$ и пусть ее область значений равна $E(f)$. Тогда функция, определенная на $E(f)$ так, что каждому значению $y \in E(f)$ ставится в соответствие единственное значение $x \in D(f)$, удовлетворяющее уравнению $y = f(x)$ (если это возможно), называется *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$.

Для нахождения функции, обратной данной $y = f(x)$ надо выразить x через y: $x = g(y)$, а затем записать полученную функцию в общепринятой форме $y = g(x)$. При этом функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ называют взаимно обратными.

Замечание. Не всякая функция имеет обратную. Например, функция $y = x^2$ не имеет обратной на $\mathbf{R}$, но имеет обратную, например, на $[0; +\infty)$, и обратной функцией в этом случае является $y = \sqrt{x}$.

Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ являются взаимно обратными, то $D(f)$ совпадает с $E(g)$, а $E(f)$ совпадает с $D(g)$. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Примером взаимно обратных функций являются функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

13. Достаточные условия возрастания, убывания, экстремума функции. Наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке.

Теорема 1 (достаточные условия монотонности функции). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и в каждой точке этого интервала выполнено неравенство $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на $(a; b)$.

Теорема 2. Если функция монотонна на интервале $(a; b)$ и непрерывна в каком-либо из его концов, то этот конец можно присоединить к интервалу $(a; b)$. Например, если она непрерывна в точках a и b, то она монотонна на отрезке $[a; b]$.

Замечание. Возрастание функции обозначают знаком ($\uparrow$), убывание – ($\downarrow$).

Определение. *Окрестностью* точки x_0 называется любой интервал ее содержащий.

Определение. Точка $x_0 \in D(y)$ называется *внутренней точкой* области определения, если существует окрестность этой точки, содержащаяся в области определения.

Определение. Внутренние точки области определения функции $y = f(x)$, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются *критическими.*

Пример. Найти критические точки функции $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Решение.

1. Найдем область определения функции

$$1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

2. Найдем производную функции.

$$y' = \left(\sqrt{1 - x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. Производная равна нулю при $x = 0$. Точка $x = 0$ яляется внутренней точкой области определения функции, следовательно $x = 0$ – критическая точка.

Производная не существует при $x = \pm 1$, но эти точки не являются внутренними точками области определения функции, значит не являются и критическими точками.

Ответ: 0.

Определение. Точка x_0 из области определения функции называется *точкой минимума (максимума)* функции $f(x)$, если для всех значений x из некоторой окрестности x_0 выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$ $(f(x) \leq f(x_0))$.

Определение. Точки максимума и минимума функции $y = f(x)$ называются *точками экстремума* данной функции, значение функции в этих точках соответственно *максимумом* и *минимумом* (или *экстремумом*) функции.

Пример. На рисунке 13 точки x_2 и x_4 – точки минимума, а точки x_1 и x_3 – точки максимума.

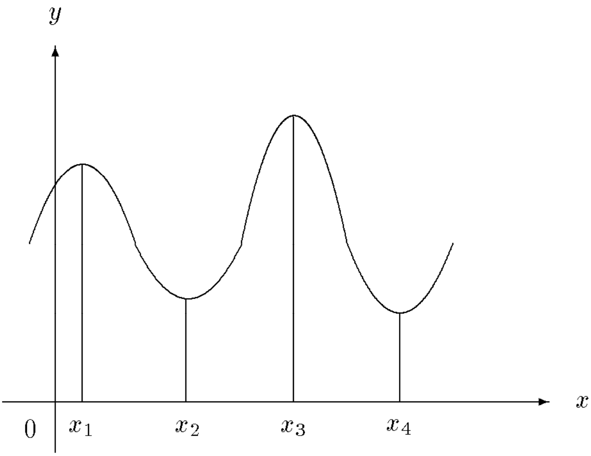


Рис.13

Теорема 3 (необходимое условие существования экстремума функции). Если точка x_0 является точкой экстремума функции $y = f(x)$, и в этой точке существует производная функции, то она равна нулю, т.е. $f'(x) = 0$.

Теорема 4 (достаточное условие существования экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную на $(a; x_0) \cup (x_0; b)$, и непрерывна в точке x_0. Тогда:

1) если $f'(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0; b)$, то x_0 – точка минимума функции $y = f(x)$;

2) если $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; b)$, то x_0 – точка максимума функции $y = f(x)$.

Алгоритм нахождения промежутков монотонности функции $y = f(x)$.

1. Найти $D(y)$.

2. Найти $y' = f'(x)$ и критические точки, т.е. те внутренние точки из $D(y)$, в которых $y' = 0$ или не существует.

3. На числовую прямую нанести $D(y)$ и критические точки. Определить знак производной на каждом из получившихся интервалов $D(y)$.

4. Исследовать непрерывность функции $y = f(x)$ на концах получившихся промежутков и записать промежутки монотонности функции $y = f(x)$ с учетом теоремы 2.

Алгоритм нахождения экстремума функции такой же, как и для нахождения промежутков монотонности.

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве M. Если существует такое число $x_0 \in M$, что для любого $x \in M$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$, то число $y_0 = f(x_0)$ называется *наибольшим* (*наименьшим*) значением функции $y = f(x)$ на M.

Правило отыскания наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке следующее:

чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке, имеющей на нем конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках, принадлежащих отрезку, и на концах отрезка, и выбрать наибольшее и наименьшее из полученных чисел.

14. Основные элементарные функции и их свойства.

Определения и основные свойства функций $y = ax + b$, $y = \frac{k}{x}$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg} x$ подробно рассмотрены во второй части обзора программы по математике: "Основные формулы и теоремы". Остановимся на некоторых других функциях.

1. Рассмотрим степенную функцию $y = x^n$, $n \in \mathbf{N}$.

Рассмотрим различные значения n.

а) $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}$. График этой функции изображен рисунке 1.

Основные свойства:

a) $D(y) = \mathbf{R}$;

b) $E(y) = [0; +\infty)$;

c) функция четная;

d) функция возрастает на промежутке $[0; +\infty)$; убывает на $(-\infty; 0]$;

e) $x = 0$ – точка минимума; $y_{\min} = 0$.

б) $n = 2k + 1$, $k \in \mathbf{N}$. График функции изображен на рисунке 2.

Основные свойства:

a) $D(y) = \mathbf{R}$;

b) $E(y) = \mathbf{R}$;

c) функция нечетная;

d) $y \uparrow$ на $\mathbf{R}$;

e) функция экстремумов не имеет.

2. *Определение.* Функция $y = a^x$ называется *показательной*, где $a > 0$, $a \neq 1$.

График этой функции изображен на рисунке 8.

Основные свойства:

a) $D(y) = \mathbf{R}$;

b) $E(y) = \mathbf{R}_+$;

c) при $a > 1$ $y \uparrow$ на $\mathbf{R}$; при $0 < a < 1$ $y \downarrow$ на $\mathbf{R}$.

3. *Определение.* *Логарифмической функцией* называется функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

График этой функции изображен на рисунке 9.

Основные свойства:

a) $D(y) = \mathbf{R}_+$;

b) $E(y) = \mathbf{R}$;

c) при $a > 1$ $y \uparrow$ на $D(y)$; при $0 < a < 1$ $y \downarrow$ на $D(y)$.

4. Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x}$.

График этой функции изображен на рисунке 9.

Основные свойства:

a) $D(y) = [0; +\infty)$;

b) $E(y) = [0; +\infty)$;

c) $y \uparrow$ на $D(y)$.

15. Уравнение.

Определение. *Уравнением с одной переменной* называется равенство двух выражений с переменной

$$f(x) = g(x). \tag{1}$$

Определение. Значения переменной x, при которых уравнение (1) обращается в верное числовое равенство, называются *корнями* или *решениями* уравнения.

Определение. Решить уравнение – значит найти множество его решений.

Замечание. Может оказаться, что уравнение не имеет корней, тогда говорят, что множество его решений пусто.

Определение. *Областью допустимых значений* (ОДЗ) уравнения называется множество $D(f) \cap D(g)$, т.е. множество всех тех значений переменной x, при которых левая и правая части уравнения определены.

Определение. Два уравнения называются *равносильными*, если их множества решений совпадают.

При решении уравнения его преобразуют к более простому виду. При этом, если в результате преобразования уравнение заменили ему равносильным, то такое преобразование называют равносильным преобразованием.

Если же в результате преобразования уравнение заменили не равносильным ему уравнением, то такое преобразование называют неравносильным.

К равносильным преобразованиям относятся:

1. Перенос слагаемых из одной части уравнения в другую с изменением знака;

2. Прибавление к обеим частям уравнения произвольного действительного числа или функции, определенной на ОДЗ уравнения;

3. Умножение обеих частей уравнения на произвольное действительное число, отличное от нуля, или на функцию, определенную на ОДЗ уравнения и не обращающуюся в нуль ни при каких значениях x из ОДЗ уравнения.

Замечание. При выполнении равносильных преобразований необходимо помнить, что исходное уравнение и преобразованное равносильны на ОДЗ исходного уравнения.

Пример. Решить уравнение

$$x^2 + \sqrt{x-1} = x + \sqrt{x-1}.$$

Решение.

$$x^2 + \sqrt{x-1} = x + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2 + \sqrt{x-1} - x - \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0, \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ или } x = 1, \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: 1

Неравносильные переходы могут привести к потере корня, или к появлению посторонних корней. При этом посторонние корни можно отсечь проверкой, а потеря корней невосполнима.

Отметим некоторые действия, в результате которых может произойти появление посторонних корней.

1. Прибавление к обеим частям уравнения выражения, содержащего переменную.

2. Приведение подобных членов уравнения.

3. Умножение обеих частей уравнения на выражение с переменной.

4. Возведение обеих частей уравнения в четную степень.

5. Потенцирование.

6. Замена: а) $\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)}$ на $\sqrt{f(x) \cdot g(x)}$;

б) $\frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}}$ на $\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$;

в) $\log_a f(x) + \log_a g(x)$ на $\log_a(f(x) \cdot g(x))$ при $a > 0$, $a \neq 1$;

г) $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ на $\log_a \frac{f(x)}{g(x)}$ при $a > 0$, $a \neq 1$;

д) $2n \log_a f(x)$ на $\log_a f^{2n}(x)$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $n \in \mathbf{N}$;

е) $a^{\log_a f(x)}$ на $f(x)$ при $a > 0$, $a \neq 1$.

Укажем некоторые преобразования, которые могут привести к потере корней.

1. Сокращение обеих частей уравнения на выражение с переменной;

2. Логарифмирование;

3. Применение некоторых тригонометрических формул.

4. Замена: а) $\sqrt{f(x) \cdot g(x)}$ на $\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)}$;

б) $\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$ на $\frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}}$;

в) $\sqrt{f(x)^2 \cdot g(x)}$ на $|f(x)| \cdot \sqrt{g(x)}$;

г) $\log_a(f(x) \cdot g(x))$ на $\log_a f(x) + \log_a g(x)$ при $a > 0$, $a \neq 1$;

д) $\log_a \frac{f(x)}{g(x)}$ на $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ при $a > 0$, $a \neq 1$;

е) $\log_a f^{2n}(x)$ на $2n \log_a f(x)$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $n \in \mathbf{N}$;

ж) $f(x)$ на $a^{\log_a f(x)}$ при $a > 0$, $a \neq 1$.

Определение. Говорят, что дана совокупность уравнений $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$, если требуется найти все значения переменной x, каждое из которых является решением хотя бы одного из этих уравнений и входит в ОДЗ каждого уравнения.

Совокупность уравнений обозначается следующим образом:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) = g_2(x). \end{array}\right. \tag{2}$$

Определение. Решением совокупности уравнений (2) называется число, принадлежащее ОДЗ каждого уравнения этой совокупности и являющееся решением хотя бы одного из уравнений этой совокупности.

Определение. Решить совокупность уравнений – значит найти множество всех ее решений.

Аналогично можно определить совокупность, содержащую любое число уравнений.

Определение. Говорят, что уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно совокупности уравнений (2), если множество решений этого уравнения совпадает с множеством решений совокупности (2).

При решении уравнений часто пользуются следующим утверждением.

Уравнение $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$ равносильно на ОДЗ уравнения совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0. \end{array} \right.$$

Пример. Решить уравнение

$$(x^2 - 4) \cdot \sqrt{1 - x} = 0.$$

Решение.

$$(x^2 - 4) \cdot \sqrt{1 - x} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 4 = 0, \\ 1 - x \geq 0, \end{array} \right. \\ 1 - x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x = \pm 2, \\ x \leq 1, \end{array} \right. \\ x = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 1. \end{array} \right.$$

Ответ: -2; 1.

16. Неравенства.

Определение. Два действительных числа a и b называют *равными*, если их разность равна нулю. При это пишут $a = b$.

Определение. Число a называют *большим* числа b, если разность $a - b$ положительна. При этом пишут $a > b$.

Определение. Число a называют *меньшим* числа b, если разность $a - b$ отрицательна. При этом пишут $a < b$.

Если два числа соединены знаком равенства, то принято говорить, что задано числовое равенство. Числовое равенство может быть верным и неверным. Так, равенство $2 = 5 - 3$ – верное, а $5 = 10 - 1$ – неверное.

Аналогично, если два числа соединены знаком $>$, $<$, $\geq$ или $\leq$, то говорят, что задано числовое неравенство, которое может быть верным или неверным. Например, неравенство $5 > 3$ – верное, а неравенство $-4 > -1$ – неверное.

Определение. Пусть даны две функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные на некотором множестве M. Если требуется найти все значения переменной x

из M, при которых верны числовые неравенства $f(x) > g(x)$ ($f(x) < g(x)$, $f(x) \geq g(x)$, $f(x) \leq g(x)$), то говорят, что необходимо решить неравенство $f(x) > g(x)$ ($f(x) < g(x)$, $f(x) \geq g(x)$, $f(x) \leq g(x)$).

Определение. Решением неравенства называется значение переменной x, при подстановке которого в неравенство, оно обращается в верное числовое неравенство.

Определение. Решить неравенство – значит найти множество его решений.

Замечание. Если неравенство не имеет решений, то множество его решений будет пустым множеством.

Определение. Областью допустимых значений неравенства (ОДЗ) называется множество всех тех значений переменной x, при которых $f(x)$ и $g(x)$ имеют смысл, т.е. ОДЗ есть множество $D(f) \cap D(g)$.

Определение. Два неравенства называются *равносильными*, если их множества решений совпадают.

Замена одного неравенства другим неравенством, ему равносильным, называется *равносильным переходом* от одного неравенства к другому. Укажем некоторые равносильные переходы.

1. Перенос слагаемого из одной части неравенства в другую с изменением его знака.

2. Прибавление к обеим частям неравенства произвольного действительного числа или функции, определенной на ОДЗ неравенства.

3. Умножение обеих частей неравенства на произвольное положительное число или функцию, принимающую лишь положительные значения на ОДЗ неравенства. При этом знак неравенства сохраняется.

4. Умножение обеих частей неравенства на произвольное отрицательное число или функцию, принимающую лишь отрицательные значения на ОДЗ неравенства. При этом знак неравенства меняется на противоположный.

Замечание. При выполнении равносильных преобразований необходимо помнить, что исходное неравенство и преобразованное равносильны на ОДЗ исходного неравенства.

В школе изучаются линейные, квадратичные, показательные, логарифмические, тригонометрические и иррациональные неравенства.

1. Линейное неравенство.

Определение. Неравенства $ax+b>0$, $ax+b<0$, $ax+b\geq 0$, $ax+b\leq 0$ называются *линейными неравенствами.*

Рассмотрим решение неравенства $ax+b>0$.

а) если $a>0$, то $x>-\frac{b}{a}$,

б) если $a<0$, то $x<-\frac{b}{a}$,

в) если $a=0$, то при $b>0$ $x\in\mathbf{R}$, а при $b\leq 0$ $x\in\emptyset$.

2. Квадратичное неравенство.

Определение. Неравенства $ax^2+bx+c\leq 0(\geq 0)$ называются квадратичными.

1) Если $D=b^2-4ac\geq 0$, то $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$ и неравенство перепишется

$$a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\leq 0(\geq 0).$$

Это неравенство можно решить методом интервалов. На числовую прямую наносятся точки $x=x_1$ и $x=x_2$, определяется знак левой части неравенства на каждом из получившихся интервалов и записывается ответ.

2) Если $D<0$, то неравенство лучше всего решить графически. Схематически строится график функции $y=ax^2+bx+c$. При этом учитывается только то, что точек пересечения с осью Ox график не имеет ($D<0$) и куда направлены ветви параболы (по знаку "a"). Затем по графику делается вывод о решении неравенства.

Примеры. Решить неравенства:

1) $2x^2-7x+3>0$; 2) $x^2-2x+1\leq 0$; 3) $6x^2+x+16>0$.

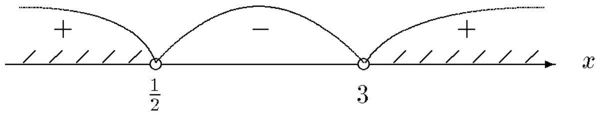
Решение:

1) $2x^2-7x+3>0$.

Решим уравнение $2x^2-7x+3=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ или $x=3$.

Разложим левую часть неравенства на множители и решим его методом интервалов.

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)>0$$



$$x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(3;+\infty).$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (3; +\infty)$.

2) $x^2 - 2x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Неравенство $(x-1)^2 \leq 0$ можно решить методом интервалов (рис.14), но проще получить решение этого неравенства, используя тот факт, что квадрат любого числа есть число неотрицательное, а значит $(x-1)^2 \leq 0$ тогда и только тогда, когда $(x-1)^2 = 0$, т.е. при $x = 1$.

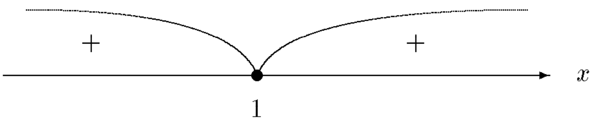


Рис.14

Ответ: 1

3) $6x^2 + x + 16 > 0$. Решим уравнение $6x^2 + x + 16 = 0$. Так как $D < 0$, то уравнение корней не имеет, поэтому решим неравенство графически.

Графиком функции $y = 6x^2 + x + 16$ является парабола, ветви которой направлены вверх $(a = 6 > 0)$ и с осью Ox не пересекается $(D < 0)$ (рис. 15).

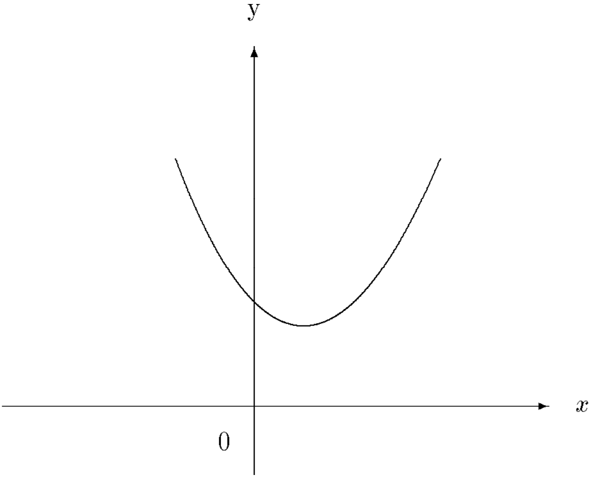


Рис.15

Из графика видно, что при любом $x \in \mathbf{R}$ значения $y > 0$, следовательно, неравенство $6x^2 + x + 16 > 0$ выполняется при всех $x \in \mathbf{R}$.

Ответ: $\mathbf{R}$.

17. Системы уравнений и неравенств.

Определение. Пусть даны два выражения с двумя переменными $f(x, y)$ и $g(x, y)$. Говорят, что дано уравнение с двумя переменными

$$f(x, y) = g(x, y), \tag{1}$$

если требуется найти все пары чисел $(x; y)$, для каждой из которых справедливо числовое равенство $f(x, y) = g(x, y)$.

Определение. Решением уравнения (1) называется всякая пара $(x; y)$, при подстановке которой в уравнение (1), оно обращается в верное числовое равенство.

Определение. Решить уравнение (1) – значит найти множество всех его решений.

Замечание. Множество решений уравнения (1) может оказаться пустым (если уравнение не имеет решений).

Определение. Областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения (1) с двумя переменными называется множество всех таких пар $(x; y)$, при которых имеют смысл обе части уравнения.

Определение. Два уравнения $f(x, y) = g(x, y)$ и $f_1(x, y) = g_1(x, y)$ называются равносильными, если множества их решений совпадают.

Утверждения о равносильных преобразованиях уравнений с двумя переменными те же, что и для уравнений с одной переменной.

Определение. Пусть даны два уравнения

$$f(x, y) = g(x, y) \quad \text{и} \quad f_1(x, y) = g_1(x, y). \tag{2}$$

Говорят, что дана *система* двух уравнений с двумя переменными, если требуется найти все пары $(x; y)$, каждая из которых является решением каждого из уравнений (2).

Записывается система следующим образом:

$$\begin{cases} f(x, y) = g(x, y), \\ f_1(x, y) = g_1(x, y). \end{cases} \tag{3}$$

Определение. Решением системы (3) называется пара $(x; y)$, являющаяся решением каждого уравнения системы (3).

Определение. Решить систему, значит найти множество всех ее решений.

Определение. Говорят, что дана совокупность уравнений

$$f_1(x, y) = g_1(x, y) \quad \text{и} \quad f_2(x, y) = g_2(x, y), \tag{4}$$

если требуется найти все пары $(x; y)$, каждая из которых является решением хотя бы одного уравнения (4) и входит в ОДЗ каждого из этих уравнений.

Обозначается совокупность уравнений следующим образом:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x, y) = g_1(x, y), \\ f_2(x, y) = g_2(x, y). \end{array}\right. \tag{5}$$

Определение. Решением совокупности (5) называется любая пара $(x; y)$, входящая в ОДЗ каждого уравнения этой совокупности и являющаяся решением хотя бы одного из этих уравнений.

Определение. Решить совокупность уравнений (5) – значит найти множество всех ее решений.

Определение. Уравнение (1) равносильно совокупности (5) если их множества решений совпадают.

Например, уравнение $(2x - y)(x + 3y) = 0$ равносильно следующей совокупности

$$\left[\begin{array}{l} 2x - y = 0, \\ x + 3y = 0. \end{array}\right.$$

Определение. Говорят, что дана совокупность систем уравнений с двумя переменными, если требуется найти пары $(x; y)$, являющиеся решениями хотя бы одной системы, и входящие в ОДЗ остальных. Каждая такая пара чисел $(x; y)$ называется решением совокупности систем уравнений. Решить совокупность систем уравнений – значит найти множество всех ее решений.

Две системы называются равносильными, если их множества решений совпадают.

Укажем равносильные преобразования систем уравнений.

1. Если в системе заменить какое-либо из уравнений на ему равносильное, а остальные оставить без изменения, то полученная система равносильна исходной.

2. Пусть система имеет вид: $\begin{cases} f(x, y) = g(x, y), \\ f_1(x, y) = g_1(x, y). \end{cases}$ Если в системе одно из этих уравнений заменить их суммой, а второе оставить без изменения, то полученная система равносильна исходной.

3. Если система содержит уравнение $f(x,y) \cdot g(x,y) = 0$, то она равносильна совокупности двух систем, в одной из которых уравнение $f(x,y) \cdot g(x,y) = 0$ заменено уравнением $f(x,y) = 0$, а в другой – на $g(x,y) = 0$, остальные уравнения оставлены без изменения. При этом решения первой системы должны принадлежать ОДЗ уравнения $g(x,y) = 0$, а второй – ОДЗ уравнения $f(x,y) = 0$.

Например, система
$$\begin{cases} (2x-y)(x+y) = 0, \\ x^2 - xy + y^2 = 2 \end{cases}$$
равносильна совокупности двух систем
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - y = 0, \\ x^2 - xy + y^2 = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 - xy + y^2 = 2. \end{cases} \end{array} \right.$$

I. Системы линейных уравнений.

1. Системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными называется система
$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2. \end{cases} \qquad (1)$$

а) Если все числа a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 равны нулю, то любая пара $(x; y)$ является решением этой системы.

б) Если a_1, b_1, a_2, b_2 равны нулю, а хотя бы одно из чисел c_1 или c_2 не равно нулю, то система не имеет решений.

в) Пусть хотя бы одно из чисел a_1, b_1, a_2, b_2 отлично от нуля, например, $a_1 \neq 0$. Тогда имеем
$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{c_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1} y, \\ a_2 \left(\frac{c_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1} y \right) + b_2 y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{c_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1} y, \\ (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, y = a_1 c_2 - a_2 c_1. \end{cases}$$

Если $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, то система имеет единственное решение:
$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \qquad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Если $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то, так как $a_1 \neq 0$, $b_2 = \frac{a_2}{a_1}b_1$. Обозначим $\frac{a_2}{a_1} = k$, тогда $b_2 = b_1k$ и $a_2 = a_1k$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_1kx + b_1ky = c_2. \end{cases}$$

Если $c_2 = kc_1$, то система равносильна одному уравнению $a_1x + b_1y = c_1$, которое имеет бесконечное множество решений: $x = \frac{c_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1}y$, $y \in \mathbf{R}$.

Если $c_2 \neq kc_1$, то вычитая из второго уравнения первое, умноженное на k, получим $0 = c_2 - kc_1$, но $c_2 - kc_1 \neq 0$, значит, уравнение, а следовательно и вся система, решений не имеют.

Все сказанное о системе двух линейных уравнений с двумя переменными можно обобщить так.

Система (1) имеет единственное решение, если $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{b_2}{b_1}$; имеет бесконечное множество решений, если $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$; не имеет решений, если $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} \neq \frac{c_2}{c_1}$.

II. Основные способы решения систем уравнений.

1. Метод подстановки.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2xy = 5, \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (7-2y)^2 + 2y^2 - 2(7-2y)y = 5, \\ x = 7 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5y^2 - 21y + 22 = 0, \\ x = 7 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 2, \\ y = 2,2, \end{array} \right. \\ x = 7 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3, \\ y = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2,6, \\ y = 2,2. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $(3; 2)$, $(2,6; 2,2)$.

2. Метод введения новой переменной.

Пример. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} xy + x - y = 3, \\ x^2y - xy^2 = 2. \end{cases}$$

Решение. $\begin{cases} xy + x - y = 3, \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + x - y = 3, \\ xy(x-y) = 2. \end{cases}$

Введем новые переменные: $xy = u$; $x - y = v$, тогда

$$\begin{cases} u + v = 3, \\ u \cdot v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 1, \\ v = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} u = 2, \\ v = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Исходная система равносильна совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\cdot y=1,\\ x-y=2,\end{cases}\\ \begin{cases}x\cdot y=2,\\ x-y=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-2x-1=0,\\ y=x-2,\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-x-2=0,\\ y=x-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1+\sqrt{2},\\ y=-1+\sqrt{2},\end{cases}\\ \begin{cases}x=1-\sqrt{2},\\ y=-1-\sqrt{2},\end{cases}\\ \begin{cases}x=2,\\ y=1,\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1,\\ y=-2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(2;1)$, $(-1;-2)$, $\left(1+\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right)$, $\left(1-\sqrt{2};-1-\sqrt{2}\right)$.

3. Метод сложения.

Пример. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases}x^2+xy=2,\\ y^2+xy=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+xy+y^2+xy=4,\\ x^2+xy=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+2xy+y^2=4,\\ x(x+y)=2\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x+y)^2=4,\\ x(x+y)=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+y=2,\\ x+y=-2,\end{array}\right.\\ x(x+y)=2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=2,\\ x\cdot 2=2,\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=-2,\\ x\cdot(-2)=2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1,\\ y=1,\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1,\\ y=-1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(1;1)$, $(-1;-1)$.

4. Методы умножения и деления.

Если обе части уравнения $f_1(x,y)=g_1(x,y)$ ни при каких значениях $(x;y)$ одновременно не обращаются в нуль, то системы

$$\begin{cases}f(x,y)=g(x,y),\\ f_1(x,y)=g_1(x,y),\end{cases} \qquad \begin{cases}f(x,y)=g(x,y),\\ f(x,y)\cdot f_1(x,y)=g(x,y)\cdot g_1(x,y),\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(x,y)=g(x,y),\\ \frac{f(x,y)}{f_1(x,y)}=\frac{g(x,y)}{g_1(x,y)}\end{cases}$$ – равносильны.

Пример. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases}(x-y)xy=30,\\ (x+y)xy=120\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)xy=30,\\ \frac{(x-y)xy}{(x+y)xy}=\frac{30}{120}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)xy=30,\\ 3x=5y\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left(x-\frac{3}{5}x\right)\cdot x\cdot\frac{3}{5}x=30,\\ y=\frac{3}{5}x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5,\\ y=3.\end{cases}$$

Ответ: $(5;3)$.

5. Использование однородности одного из уравнений.

Определение. *Однородным* уравнением второй степени с двумя переменными называется уравнение $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 3, \\ y^2 - 3xy = 2. \end{cases}$$

Решение.

Прибавим к первому уравнению, умноженному на 2, второе уравнение, умноженное на -3.

$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 0, \\ y^2 - 3xy = 2. \end{cases}$$

В этой системе первое уравнение однородное. Рассмотрим его:

$$2x^2 + xy - y^2 = 0.$$

Так как пара $(0; 0)$ не является решением исходной системы, то разделим обе части уравнения на y^2:

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 1 = 0,$$

Пусть $\frac{x}{y} = t$.

$$2t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \vee t = \frac{1}{2}.$$

Исходная система равносильна совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{x}{y} = -1, \\ y^2 - 3xy = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{2}, \\ y^2 - 3xy = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -x, \\ x^2 = \frac{1}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2x, \\ x^2 = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

18. Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Определение. *Арифметической прогрессией* называется такая последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$, в которой каждый последующий член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же, постоянным для данной последовательности, числом.

Это постоянное число называется *разностью* арифметической прогрессии и обозначается d.

Из определения следует $a_k = a_{k-1} + d, \quad k \geq 2, \quad k \in \mathbf{N}$.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ –	формула n-го члена арифметической прогрессии
$a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$, $k \geq 2$, $k \in \mathbf{N}$ –	свойство членов арифметической прогрессии: каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго равен среднему арифметическому соседних членов.
$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots$ $= a_k + a_{n-k+1}$ –	суммы членов арифметической прогрессии, равноотстоящих от концов конечной арифметической прогрессии, равны.
$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$, $S_n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2} \cdot n$ –	формула суммы "n" первых членов арифметической прогрессии.

Определение. Геометрической прогрессией называется такая числовая последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, в которой первый член отличен от нуля, а каждый последующий равен предыдущему, умноженному на некоторое постоянное для данной последовательности число, отличное от нуля.

Это число называется *знаменателем геометрической прогрессии* и обозначается q.

Из определения следует, что $b_k = b_{k-1} \cdot q, \quad k \geq 2 \quad k \in \mathbf{N}$.

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ –	формула n-го члена;
${b_n}^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $n \geq 2$ –	каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен среднему пропорциональному соседних членов;
$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \ldots$ $= b_k \cdot b_{n-k+1}$ –	в конечной геометрической прогрессии, состоящей из n членов, произведения членов, равноотстоящих от концов прогрессии, равны;
$S_n = \frac{b_1 - b_n \cdot q}{1-q} =$ $= \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, если $q \neq 1$; $S_n = b_1 \cdot n$, если $q = 1$	формула суммы "n" первых членов геометрической прогрессии.

Определение. Геометрическая прогрессия называется *бесконечно убывающей*, если ее знаменатель по абсолютной величине меньше единицы, т.е. $|q| < 1$.

Определение. *Суммой* бесконечно убывающей геометрической прогрессии называется число, к которому приближается сумма n первых ее членов при неограниченном увеличении n.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

19. 20. Тригонометрические формулы.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}.$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

21. Производная.

Определение. Рассмотрим произвольную внутреннюю точку x_0 области определения функции $y = f(x)$. Разность $\Delta x = x - x_0$, где x – также внутренняя точка области определения, называется *приращением аргумента в точке* x_0. Разность $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется *приращением функции в точке* x_0 соответствующим приращению Δx.

Определение. *Производной функции* $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента в этой точке при стремлении Δx к нулю, если этот предел существует, т.е.

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Основные свойства производных.

Если в точке x существуют производные функций $y = v(x)$ и $y = u(x)$, то в этой точке существуют:

1) производная суммы, причем

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x);$$

2) производная произведения, причем

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x))';$$

3) производная частного, причем

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x))}{v^2(x)}, \quad \text{при} \quad v(x) \neq 0;$$

4) производная функции $c \cdot u(x)$, причем

$$(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x), \quad c = \text{const}.$$

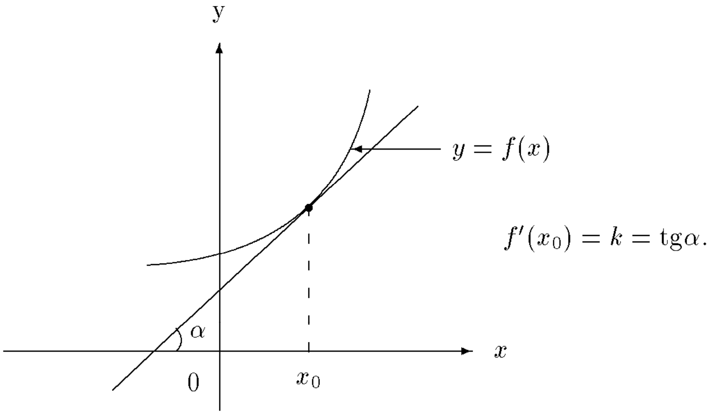


Рис.16

Геометрический смысл производной состоит в следующем: производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (рис.16).

22. Производные некоторых функций.

$(c)' = 0;$

$(x)' = 1;$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$

$(e^x)' = e^x;$

$(\ln x)' = \frac{1}{x};$

$(\sin x)' = \cos x;$

$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$

$(ax^n)' = nax^{n-1}, (n \in N).$

$(x^n) = n \cdot x^{n-1}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a;$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$

$(\cos x)' = -\sin x;$

$(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$

Геометрия.

а) планиметрия

1. **Основные понятия**.

Основными понятиями геометрии на плоскости, называемой *планиметрией*, служат точка и прямая.

Прямая линия характеризуется свойствами:

1. Она бесконечна.

2. Через две точки можно провести прямую линию, и притом только одну.

Две прямые на плоскости либо не пересекаются, либо пересекаются в одной точке.

Определение. Две прямые на плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Определение. *Полупрямой* или *лучом* называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной точки, которая называется началом луча.

Различные полупрямые одной и той же прямой с общей начальной точкой называются *дополнительными.*

Определение. *Отрезком* называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между двумя данными ее точками, называемыми концами отрезка.

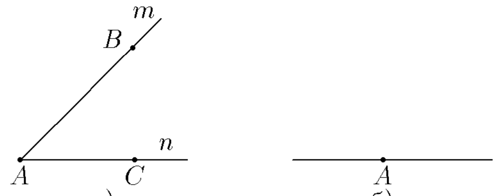
Определение. Линия, состоящая из нескольких отрезков, таких, что начало второго совпадает с концом первого, начало третьего – с концом второго и т.д., причем никакие соседние отрезки не лежат на одной прямой, называется *ломаной.* Каждый из отрезков, составляющих ломаную, называется ее *звеном.* Начало первого отрезка и конец последнего называются *концами ломаной.*

Ломаная называется *замкнутой*, если ее концы совпадают.

Точки и линии образуют фигуры. В планиметрии рассматриваются фигуры: угол, многоугольник, окружность.

Определение. Углом называется фигура, образованная двумя лучами, выходящими из одной точки. Каждый луч называется *стороной* угла, их общая точка – *вершиной* угла.

На рис. 1а) изображен угол с вершиной A и сторонами m и n. На сторонах угла отмечены точки B и C. Этот угол обозначается $\angle BAC = \angle A = \angle(mn)$.



а) б)

Рис 1.

Угол, стороны которого являются дополнительными друг к другу полупрямыми, называется *развернутым* (рис. 1б)).

Определение. Луч, выходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла, называется *биссектрисой* угла.

Углы измеряются в градусах и радианах.

Определение. Градусом называется угол, равный $\frac{1}{180}$ части развернутого угла.

Положительное число, показывающее сколько раз градус и его части укладываются в данном угле, называется *градусной мерой угла.*

Величина развернутого угла равна 180^0.

Определение. Угол называется *прямым*, если он равен 90^0.

Угол, меньший прямого, называется *острым*, а больший прямого (но меньший развернутого) – *тупым.* Два совпадающих луча с общим началом образуют угол, равный 0^0.

Два угла, стороны одного из которых являются дополнительными полупрямыми сторон другого угла, называются *вертикальными.*

Свойство вертикальных углов: вертикальные углы равны. На рис.2 $\angle\,(ab_1) = \angle\,(ba_1)$, $\angle\,(ab) = \angle\,(a_1b_1)$.

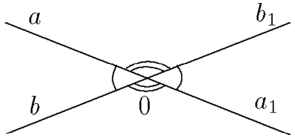


Рис.2

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются дополнительными друг к другу полупрямыми, называются *смежными.*

Свойство смежных углов: сумма смежных углов равна 180^0. На рис.3 $\angle(a_1b)$ и $\angle(ba)$ – смежные. $\angle(a_1b)+\angle(ba)=180^0$.

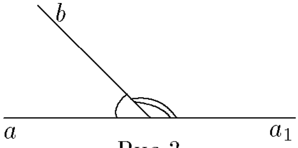


Рис.3

При пересечении двух прямых образуются четыре неразвернутых угла. Если один из них прямой, то и остальные также прямые.

Определение. Две прямые, образующие между собой прямые углы, называются *взаимно перпендикулярными* или просто *перпендикулярными.*

Если прямая a перпендикулярна прямой b, то записывают $a \perp b$.

Докажем, что биссектрисы двух смежных углов взаимно перпендикулярны.

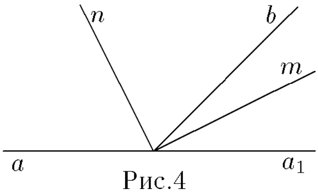


Рис.4

Доказательство: На рис.4 углы $\angle(ba_1)$ и $\angle(ab)$ – смежные, m – биссектриса $\angle(ba_1)$, n – биссектриса $\angle(ab)$. Докажем, что $m \perp n$.

$\angle(ab)+\angle(ba_1)=180^0$, $\angle(ab)=2\angle(nb)$, $\angle(ba_1)=2\angle(bm)$; $2\angle(nb)+2\angle(bm)=180^0 \Rightarrow \angle(nb)+\angle(bm)=90^0 \Rightarrow \angle(mn)=\angle(nb)+\angle(bm)=90^0 \Rightarrow n \perp m$.

Определение. Окружностью называется линия, состоящая из всех точек плоскости, равноудаленных от одной, называемой *центром* окружности. Отрезок, соединяющий центр окружности с любой точкой окружности, называется ее *радиусом.*

Кругом называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, находящихся на расстоянии, не большем данного, от данной точки, называемой центром круга. *Границей* круга называется окружность с тем же центром и радиусом.

$$\begin{aligned} C = 2\pi R \quad &- \quad \text{длина окружности.} \\ S = \pi R^2 \quad &- \quad \text{площадь круга.} \end{aligned}$$

2. Преобразование фигур.

Геометрические фигуры можно подвергать преобразованиям.

Определение. Если каждую точку данной фигуры на плоскости или в пространстве сместить каким-нибудь образом, то получится новая фигура, о которой говорят, что она получена *преобразованием* из данной.

Рассмотрим примеры преобразования фигур.

1. Симметрия относительно точки (центральная симметрия).

Определение. Пусть O – данная точка, называемая центром симметрии. A – произвольная точка. Точка A', отличная от точки А, называется *симметричной* точке A относительно точки O, если выполняются два условия:

1. $0 \in$ прямой AA'
2. $AO = OA'$ (рис.5 а)).

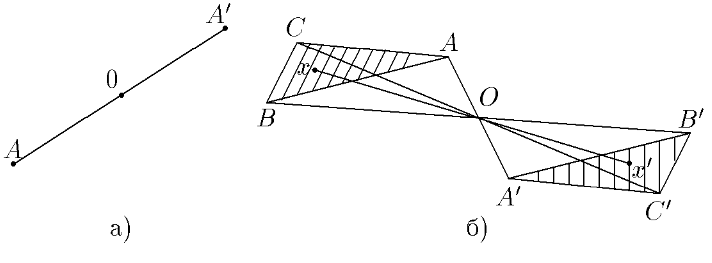


Рис. 5

Определение. Преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждая точка x фигуры F переходит в точку x', симметричную точке x относительно точки O, называется преобразованием симметрии относительно точки O. При этом точка x' принадлежит фигуре F', а фигуры F и F' называются симметричными относительно точки O (рис.5 б)).

2. Симметрия относительно прямой (осевая симметрия).

Определение. Пусть l – фиксированная прямая, точка A – произвольная точка. Точка A' называется *симметричной* точке A относительно прямой l, если выполняются два условия:

1. прямая $AA' \perp l$;
2. $AO = OA'$, где O – точка пересечения прямой AA' с прямой l (рис.6.)

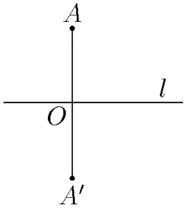


Рис.6

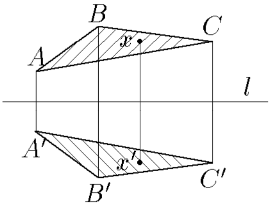


Рис.7

Определение. Преобразование фигуры F в F', при котором каждая точка x фигуры F переходит в симметричную ей точку x' относительно заданной прямой l, называется преобразованием симметрии относительно прямой l.

При этом точка $x' \in F'$. Фигуры F и F' называются симметричными относительно прямой l (Рис.7).

3. Преобразование подобия.

Определение. Преобразование фигуры F в фигуру F', при котором расстояние между точками изменяется в одно и тоже число раз, называется *преобразованием подобия.*

Это означает, что если точки A и B фигуры F переходят в точки A' и B' фигуры F', то $A'B' = kAB$, где $k > 0$ называется коэффициентом подобия (рис.8).

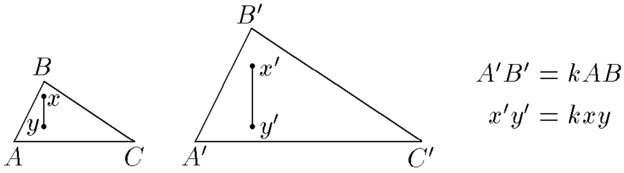


Рис.8

Свойства преобразования подобия:

a) преобразование подобия переводит прямые в прямые, полупрямые в полупрямые, отрезки в отрезки, плоскости в плоскости;

б) преобразование подобия сохраняет углы между прямыми.

4. Гомотетия.

Пусть O – фиксированная точка, A – произвольная точка. Точка A' называется гомотетичной точке A относительно точки O (центра гомотетии), если выполняются два условия:

1. $A' \in OA$;
2. $OA' = kOA$ (рис.9)

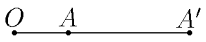


Рис.9

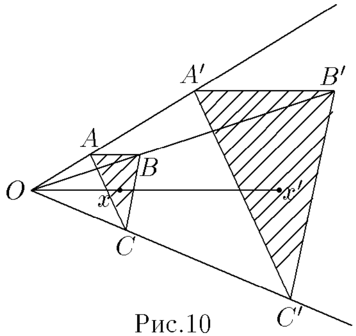


Рис.10

Определение. Преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждая точка фигуры F' гомотетична некоторой точке фигуры F с центром гомотетии O и коэффициентом k, называется *гомотетией* относительно центра O. Фигуры F и F' называются гомотетичными.

ΔABC гомотетичен $\Delta A'B'C'$ (рис.10)

Любая гомотетия является преобразованием подобия. Но не всякое преобразование подобия является гомотетией. На рис.11 фигура F подвергнута гомотетии с коэффициентом $k = 2$, а затем симметрии относительно точки O_1. Фигура F'' подобна фигуре F с коэффициентом подобия $k = 2$, но не гомотетична ей.

5. Поворот.

Определение. Поворотом точки A на плоскости на угол φ около точки O называется такое преобразование, при котором выполняются два условия:

1. $\angle AOA' = \varphi$;
2. $OA' = OA$ (рис.12).

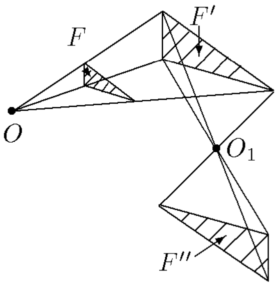


Рис.11

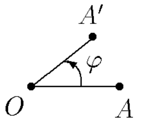


Рис.12

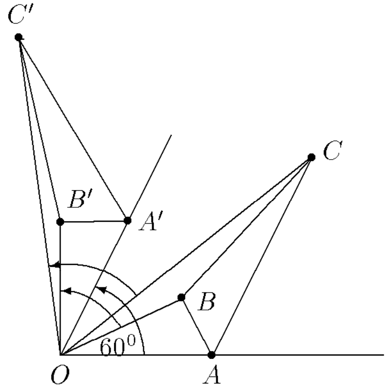


Рис.13

Определение. Преобразование, при котором каждая точка фигуры F поворачивается на угол φ, называется *поворотом.*

На рис.13 $\Delta A'B'C'$ получен из ΔABC поворотом на 60^0.

6. Движение.

Определение. Преобразование фигуры F в фигуру F' называется *движением*, если оно сохраняет расстояние между точками, то есть любые две точки A и B фигуры F движением переводятся в точки A' и B' фигуры F' таким образом, что $A'B' = AB$.

Преобразования симметрии относительно точки и прямой, поворот являются движениями. Преобразование подобия является движением, если коэффициент подобия $k = 1$.

Свойства движения:

1. При движении прямые переходят в прямые, полупрямые – в полупрямые, отрезки – в отрезки.

2. При движении сохраняются углы между полупрямыми.

3. Векторы. Операции над векторами.

Величины, характеризующиеся не только своими числовыми значениями, но и направлениями в пространстве, называются *векторными величинами.*

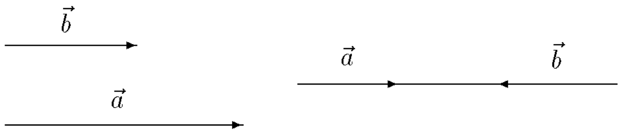
Определение. Отрезок, для которого указано, какой из концов считается началом, а какой концом, называется направленным отрезком или *вектором.*

Вектор, начало которого совпадает с его концом, называется *нулевым.*

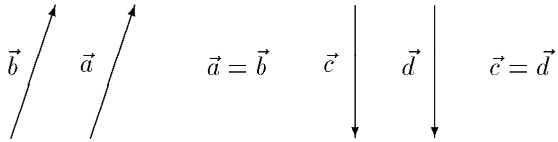
Длиной или модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Обозначается $|\overrightarrow{AB}|$. (В переводе с латинского "вектор" означает "несущий").

Длина нулевого вектора равна нулю.

Ненулевые векторы называются *коллинеарными*, если они лежат на параллельных прямых, или на одной прямой; нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору. Коллинеарные векторы обозначаются $\vec{a}||\vec{b}$.



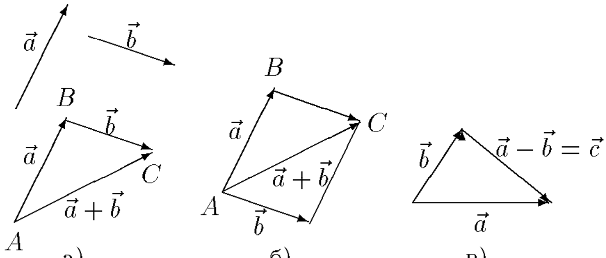
Два коллинеарных вектора, имеющих одинаковое направление и одинаковые длины, называются *равными.*



Если точка А – начало вектора $\vec{a}$, то говорят, что $\vec{a}$ отложен от точки А. Справедливо следующее утверждение.

От любой точки можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и притом только один.

Определение. Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отметим произвольную точку A и отложим от нее вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, а от точки B вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется *суммой* векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, т.е. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$ (рис.14 а)).



а) б) в)

Рис.14

Это правило сложения векторов называется правилом треугольника. Для сложения векторов справедливо так называемое правило параллелограмма: суммой двух векторов, выходящих из одной точки, называется вектор,являющийся диагональю параллелограмма, построенного на данных векторах, как на сторонах, выходящий из общей точки слагаемых векторов (рис.14 б)).

Определение. Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$, т.е. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$, если $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ (рис.14 в)).

Определение. Вектор $\vec{a}_1$ называется *противоположным* вектору $\vec{a}$, если они коллинеарны, имеют одинаковые длины и противоположно направлены. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$ обозначают "$-\vec{a}$". Очевидно, что $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Разность векторов можно записать так $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Определение. Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число $k \neq 0$ называется вектор $\vec{b}=k\vec{a}$, длина которого $|\vec{b}|=|k|\cdot|\vec{a}|$, причем вектор $k\vec{a}$ одинаково направлен с вектором $\vec{a}$, если $k>0$, и противоположно направлен, если $k<0$. Произведением нулевого вектора на любое действительное число и произведение любого вектора на число 0 считается нулевой вектор.

Сложение векторов и умножение вектора на число подчиняются законам:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

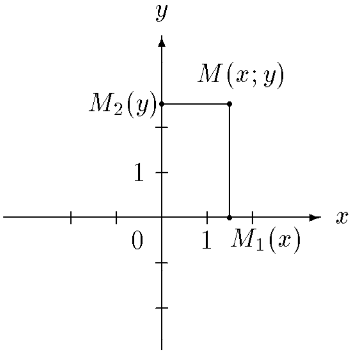
2. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$;

3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$;

4. $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;

5. $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат, т.е. через некоторую точку O плоскости проведены две взаимно перпендикулярные координатные прямые с общим началом отсчета (рис 15 а)). Прямые называются осями координат. Одна из прямых называется осью абсцисс и обозначается Ox, другая – осью ординат и обозначается Oy. Их общее начало называется началом координат. Опустим из произвольной точки M плоскости перпендикуляры на оси координат и обозначим их основания через M_1 и M_2. Точка M_1 на координатной оси Ox имеет координату x, точка M_2 на координатной оси Oy имеет координату y. Числа x и y называют *координатами* точки M и пишут $M(x;y)$.



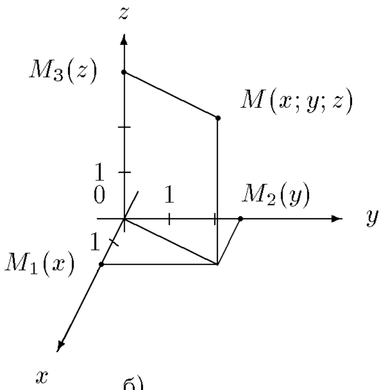


Рис.15

Рассмотрим на плоскости вектор $\vec{a}$, имеющий начало в точке A, а конец в точке B.

Определение. Координатами вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на плоскости, где точки A и B имеют координаты $A\,(x_1;y_1)$, $B\,(x_2;y_2)$, называются числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$. Обозначают $\overrightarrow{AB}\,(a_1, a_2) = \overrightarrow{AB}\,(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Координаты нулевого вектора равны нулю.

Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ равна:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Если через некоторую точку O пространства проведены три взаимно перпендикулярные координатные прямые с общим началом отсчета, то говорят, что в пространстве задана прямоугольная декартова система координат (рис. 15 б)). Прямые называют осями координат и обозначают: Ox – ось абсцисс, Oy – ось ординат, Oz – ось аппликат. Их общее начало называется началом координат. Плоскости, проходящие через каждые две координатные оси, называются координатными плоскостями. Этих плоскостей три: Oxy, Oxz, Oyz.

Опустим из произвольной точки M пространства перпендикуляры на оси координат. Обозначим через M_1, M_2, M_3 основания этих перпендикуляров на осях Ox, Oy, Oz. Координаты точек M_1, M_2, M_3 на осях координат называются *координатами* точки M в пространстве. Обозначается $M(x;y;z)$.

Рассмотрим произвольный вектор $\vec{a}$, имеющий начало в точке A, конец – в точке B.

Определение. В пространстве *координатами* вектора $\overrightarrow{AB}$ с концами $A\,(x_1;y_1;z_1)$ и $B\,(x_2;y_2;z_1)$, называются числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$. Обозначают $\overrightarrow{AB}\,(a_1,a_2,a_3) = \overrightarrow{AB}\,(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$.

В этом случае:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}.$$

Действия над векторами в координатной форме

1. $\vec{a}\,(a_1,a_2,a_3) = \vec{b}\,(b_1,b_2,b_3) \Leftrightarrow a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad ,a_3 = b_3;$
2. $\vec{a}\,(a_1,a_2,a_3) + \vec{b}\,(b_1,b_2,b_3) = \vec{c}(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3);$
3. $\vec{a}\,(a_1,a_2,a_3) - \vec{b}\,(b_1,b_2,b_3) = \vec{c}(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3);$
4. $k\cdot\vec{a}\,(a_1,a_2,a_3) = \vec{b}\,(ka_1, ka_2, ka_3).$
5. Если ненулевые векторы $\vec{a}\,(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}\,(b_1,b_2,b_3)$ коллинеарны, то их координаты пропорциональны, т.е.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

(Верно и обратное утверждение).

Если в прямоугольной системе координат ввести единичные векторы (длины которых равны 1) положительных координатных полуосей: $\vec{i}$ – оси Ox, $\vec{j}$ – оси Oy, $\vec{k}$ – оси Oz, то вектор $\vec{a}\,(a_1,a_2,a_3)$ можно записать:

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}.$$

Эта запись называется разложением вектора $\vec{a}$ по координатным ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Определение. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два данных вектора. Отложим от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. *Углом* между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший из углов, на который нужно повернуть $\overrightarrow{OA}$ до совмещения с вектором $\overrightarrow{OB}$ (рис.16).

Обозначают $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \angle AOB$. Если один или оба вектора нулевые, то угол между ними считается равным 0^0.

Рис.16

Определение. Два вектора называются *перпендикулярными*, если угол между ними равен 90^0. Обозначается $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Определение. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) \qquad (*)$$

Если известны координаты векторов $\vec{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}\,(b_1, b_2, b_3)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Как следует из $(*)$, скалярное произведение двух перпендикулярных векторов равно нулю, т.е. если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.Верно и обратное утверждение: если скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю, то эти векторы перпендикулярны, т.е. если $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Скалярное произведение вектора $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^2$. Если $\vec{a}\,(a_1, a_2, a_3)$, то $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$, т.е. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Таким образом, скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

Если $\vec{a}\,(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}\,(b_1, b_2, b_3)$, то из определения скалярного произведения $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ следует, что

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Свойства скалярного произведения векторов:

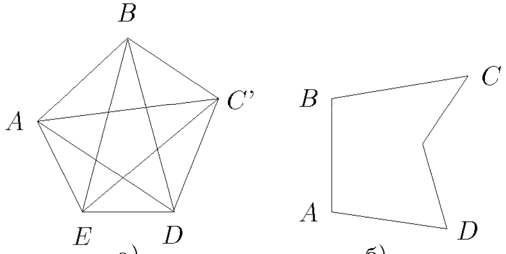
1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

2. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$;

3. $(k\vec{a})\,\vec{b} = k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$.

4. Многоугольники.

Определение. *Многоугольником* называется замкнутая ломаная, звенья которой не имеют пересечений (рис.17 а,б).



а) б)

Рис.17.

Многоугольник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от прямой, содержащей любую его сторону. На рис. 16 а) изображен выпуклый многоугольник, на рис. 16 б) – невыпуклый многоугольник. Многоугольник, имеющий n сторон, а значит и n углов, называется n-угольником.

Многоугольник называется правильным, если равны между собой все его стороны и все его углы.

Многоугольник называется вписанным в окружность, если все его вершины лежат на окружности.

Многоугольник называется описанным около окружности, если все его стороны касаются окружности.

Любой правильный многоугольник является вписанным в окружность. При этом радиус окружности, описанной около правильного многоугольника со стороной a вычисляется по формуле:

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180^0}{n}};$$

если $n = 3$, то $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$; если $n = 4$, то $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$; если $n = 6$, то $R = a$.

В любой правильный многоугольник можно вписать окружность. При этом радиус этой окружности вычисляется по формуле

$$r = \frac{a}{2\mathrm{tg}\frac{180}{n}},$$

a – сторона многоугольника. Если $n = 3$, то $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$; если $n = 4$, то $r = \frac{a}{2}$; если $n = 6$, то $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

5. Треугольник.

Определение. Многоугольник, у которого число сторон равно трем, называется *треугольником.*

Стороны и углы треугольника называются его основными элементами. Кроме этих основных элементов треугольник имеет три биссектрисы, три высоты и три медианы.

Определение. *Биссектрисой* треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника от его вершины до точки пересечения с противолежащей стороной. Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанной в треугольник окружности.

Определение. *Медианой* треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.

Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке, в которой каждая медиана делится в отношении $2:1$, считая от вершины.

Определение. *Высотой* треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противоположную сторону.

Все три высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке, называемой ортоцентром.

Замечание. Если треугольник остроугольный, то точка пересечения высот лежит внутри треугольника (рис.18 а)); если треугольник тупоугольный, то пересекаются продолжения высот и точка пересечения лежит вне треугольника (рис.18 б)); если треугольник прямоугольный, то высотами, проведенными из вершин острых углов, являются катеты, и точка пересечения высот совпадает с вершиной прямого угла треугольника.

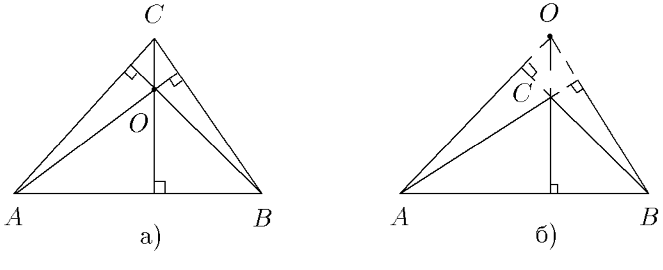


Рис.18

Угол, смежный с внутренним углом треугольника, называется *внешним углом* треугольника (рис.19).

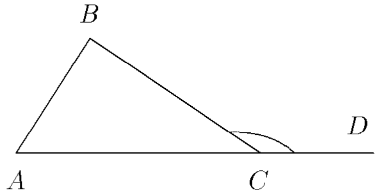


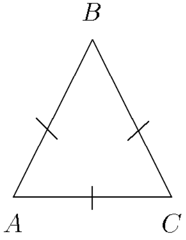
Рис.19

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с данным: $\angle BCD = \angle CBA + \angle BAC$ (рис.18).

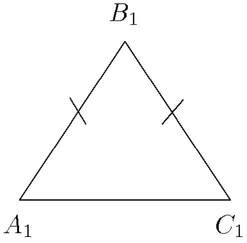
В зависимости от величин углов треугольники подразделяются на *остроугольные* (все углы острые), *тупоугольные* (один угол тупой), *прямоугольные* (один угол прямой).

В зависимости от сравнительной длины сторон треугольники подразделяются на *равносторонние* (все три стороны равны), *равнобедренные* (две стороны равны) и *разносторонние* (все стороны имеют различные длины).

В равнобедренном треугольнике равные стороны называют боковыми сторонами, а не равную им третью сторону – основанием.



ΔABC – равносторонний



$\Delta A_1B_1C_1$ – равнобедренный

A_1C_1 – основание

С геометрическими фигурами тесно связаны такие понятия, как свойства и признаки геометрических фигур.

Сформулируем для равнобедренного треугольника некоторые его свойства и признаки.

Свойства равнобедренного треугольника:

1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

2. В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой; биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника является медианой и высотой; высота, опущенная на основание, является биссектрисой и медианой.

3. В равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам равны; высоты, опущенные на боковые стороны равны; биссектрисы углов при основании равны.

Признаки равнобедренного треугольника:

1. Если в треугольнике углы при основании равны, то треугольник – равнобедренный.

2. Если в треугольнике биссектриса является высотой (медианой), то треугольник – равнобедренный.

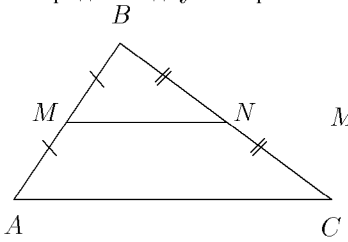
3. Если в треугольнике медиана является высотой (биссектрисой), то треугольник – равнобедренный.

4. Если в треугольнике высота является медианой (биссектрисой), то треугольник – равнобедренный.

5. Если в треугольнике две медианы (высоты, биссектрисы) равны, то треугольник – равнобедренный.

Свойства и признаки являются утверждениями, которые требуют доказательства.

Определение. Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух сторон.



MN – средняя линия ΔABC.

Свойство средней линии треугольника:
Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна ее половине.

Определение. Треугольники называются *равными*, если у них соответствующие стороны и соответствующие углы равны.

Из этого определения следует, что если $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$. Однако для проверки равенства треугольников нет необходимости сравнивать все шесть элементов. Существует минимум условий, при которых треугольники оказываются равными. Эти условия называются признаками равенства треугольников. Сформулируем три основных таких признака.

1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Для прямоугольных треугольников справедливы следующие признаки равенства.

Прямоугольные треугольники равны:

1. Если катеты одного треугольника соответственно равны катетам другого треугольника.

2. Если катет и острый угол одного треугольника соответственно равны катету и острому углу другого треугольника.

3. Если гипотенуза и острый угол одного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого треугольника.

4. Если катет и гипотенуза одного треугольника соответственно равны катету и гипотенузе другого треугольника.

Между сторонами и углами треугольника существуют соотношения. Вспомним некоторые из них.

В треугольнике:

1. Сумма любых двух сторон больше, а разность любых двух сторон меньше третьей стороны, т.е., например $|b - c| < a < b + c$.

2. Внешний угол больше каждого внутреннего не смежного с ним.

3. Против большей стороны лежит больший угол, а против большего угла лежит большая сторона.

4. Против равных углов лежат равные стороны и наоборот.

Из этих свойств следует,что:

5. В треугольнике не может быть больше одного тупого угла, причем в тупоугольном треугольнике наибольшая сторона лежит против тупого угла.

6. В треугольнике может быть только один прямой угол, причем в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого из катетов.

Кроме этих соотношений в треугольнике между углами и сторонами существуют и другие соотношения.

1. Теорема синусов. В любом треугольнике стороны пропорциональны синусам противолежащих углов, т.е.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R,$$

где a, b, c, α, β, γ – стороны и противолежащие им углы треугольника, а R – радиус описанной около треугольника окружности.

Следствие 1 (формула тангенсов). В любом треугольнике разность двух сторон треугольника относится к их сумме, как тангенс полуразности противолежащих углов к тангенсу полусуммы этих углов, т.е.

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}};\qquad \frac{a-c}{a+c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}};\qquad \frac{b-c}{b+c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}$$

Следствие 2 (свойство биссектрисы угла треугольника). Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам (рис.20).

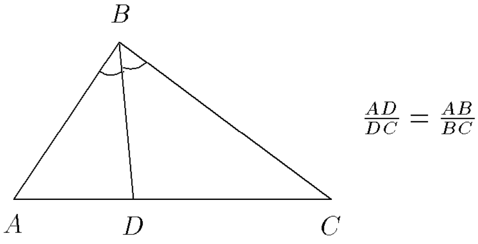


Рис.20

2. Теорема косинусов. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения их на косинус угла между ними, т.е., например:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Следствие. Угол треугольника будет острым, тупым или прямым в зависимости от того, будет ли квадрат противолежащей стороны треугольника соответственно меньше, больше, или равен сумме квадратов двух других сторон.

Как следует из теоремы косинусов, если $\gamma = 90^0$, то $c^2 = a^2 + b^2$.

В треугольнике существует еще одно интересное соотношение, связывающее стороны, тангенсы углов и радиус вписанной в треугольник окружности.

Тангенс половинного угла треугольника равен частному от деления радиуса вписанной в треугольник окружности на разность между полупериметром и противолежащей этому углу стороной.

Если p – полупериметр, r – радиус вписанной окружности, то

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a}; \qquad \mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{p-b}; \qquad \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{p-c}.$$

Теперь рассмотрим соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике.

I. Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов его катетов (теорема Пифагора), т.е. $c^2 = a^2 + b^2$ (рис.21)

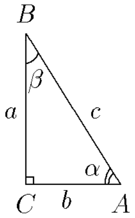


Рис.21

2. Катет равен гипотенузе, умноженной на синус противолежащего или на косинус прилежащего этому катету угла, т.е. $a = c\sin\alpha$, $a = c\cos\beta$, $b = c\sin\beta$, $b = c\cos\alpha$.

3. Катет равен другому катету, умноженному на тангенс противолежащего или котангенс прилежащего определяемому катету угла, т.е.: $a = b\cdot \mathrm{tg}\alpha$, $a = b\cdot \mathrm{ctg}\beta$, $b = a\cdot \mathrm{tg}\beta$, $b = a\cdot \mathrm{ctg}\alpha$.

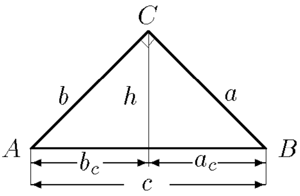


Рис.22

4. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная из вершины прямого угла, является средним пропорциональным (средним геометрическим) проекций катетов на гипотенузу. Если b_c – проекция катета b на гипотенузу c, а a_c – проекция катета a на гипотенузу c, то (рис.22): $\frac{b_c}{h} = \frac{h}{a_c}$ или $h^2 = a_c\cdot b_c$ или $h = \sqrt{a_c\cdot b_c}$.

5. Каждый катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу, т.е.

$$\frac{b_c}{b} = \frac{b}{c} \quad \text{или} \quad b = \sqrt{c\cdot b_c}, \qquad \frac{a_c}{a} = \frac{a}{c} \quad \text{или} \quad a = \sqrt{c\cdot a_c},$$

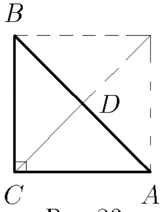


Рис.23

6. В прямоугольном треугольнике, медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, а основание медианы (D) является центром описанной около треугольника окружности (рис.23).

6. Четырехугольники.

В планиметрии изучаются следующие четырехугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат и трапеция.

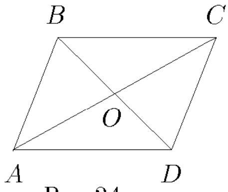


Рис.24

1. *Параллелограмм* – это четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны, т.е. $AB \| DC$, $AD \| BC$ (Рис.24).

Свойства параллелограмма:

У параллелограмма:
1. Противоположные стороны равны;
2. Противоположные углы равны;
3. Сумма углов, прилежащих к одной стороне равна 180^0;
4. Диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
5. $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$

Признаки параллелограмма:

1. Если у четырехугольника диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.
2. Если у четырехугольника две стороны параллельны и равны, то этот четырехугольник – параллелограмм.
3. Если у плоского четырехугольника противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм.

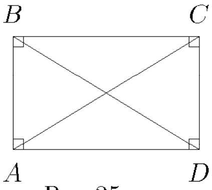


Рис.25

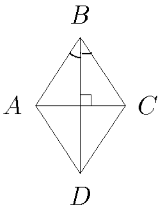
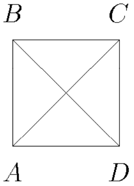
2. *Прямоугольником* называется параллелограмм, у которого все углы прямые (рис.25).

Свойства прямоугольника:

1. Все свойства параллелограмма.
2. Диагонали прямоугольника равны.

Признаки прямоугольника:

Если в параллелограмме диагонали равны, то он – прямоугольник.

 Рис.26 **Свойства ромба:** 1. Все свойства параллелограмма. 2. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны 3. Диагонали ромба являются биссектрисами углов ромба.	3. *Ромбом* называется параллелограмм, у которого все стороны равны (рис.26). **Признаки ромба:** 1. Если в параллелограмме диагонали пересекаются под прямым углом, то он – ромб. 2. Если в параллелограмме одна из диагоналей является биссектрисой углов, то он – ромб.
 Рис.27 **Свойства квадрата:** Все свойства параллелограмма, прямоугольника, ромба.	4. *Квадрат* – это прямоугольник у которого все стороны равны (рис.27). **Признак квадрата:** Если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны и равны, то он является квадратом.

5. *Трапецией* называется четырехугольник, у которого только две стороны параллельны (рис.28).

Параллельные стороны называются основаниями трапеции, а непараллельные боковыми сторонами.

Если одна из боковых сторон перпендикулярна основаниям, то трапеция называется прямоугольной (рис.29).

В трапеции сумма углов, прилежащих к одной стороне равна 180^0.

Если в трапеции боковые стороны равны, то трапеция называется равнобокой. В равнобокой трапеции углы при основании равны (рис.30).

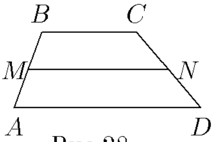


Рис.28

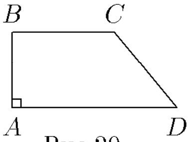


Рис.29

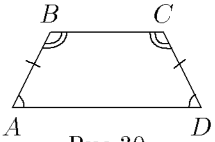


Рис.30

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется средней линией трапеции. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме. На рис. 28 MN – средняя линия, значит

$$MN \| BC, \qquad MN \| AD, \qquad MN = \frac{BC + AD}{2}.$$

Около трапеции можно описать окружность только тогда, когда она равнобокая.

7. Окружность.

Определение. Хордой называется отрезок, соединяющий любые две точки окружности. Хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром.* Очевидно, что диаметр равен двум радиусам.

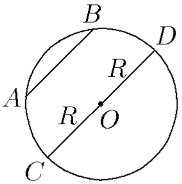


Рис.31

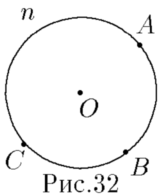


Рис.32

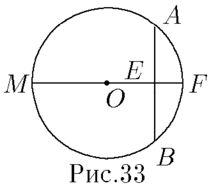


Рис.33

Часть окружности называется дугой. Дуга окружности обозначается двумя буквами, если она меньше полуокружности и тремя, если она больше полуокружности. На рис.32 отмечены дуги $\smile AB$ и $\smile ACB$ (или $\smile AnB$).

О хорде AB, соединяющей концы дуги, говорят, что она стягивает дугу AB.

Хорды, дуги и диаметр обладают следующими свойствами:

1. Диаметр, перпендикулярный к хорде, делит хорду и стягиваемую ею дугу пополам ($AE = BE$, $\smile AF = \smile FB$ на рис.33).

2. Диаметр, проходящий через середину хорды, перпендикулярен к хорде и делит стягиваемую ею дугу пополам.

3. Диаметр, проходящий через середину дуги, перпендикулярен к хорде, стягивающей эту дугу и делит ее пополам.

4. В одном и том же круге равные дуги стягиваются равными хордами, равные хорды стягивают равные дуги, большая дуга стягивается большей хордой, и обратно.

5. Перпендикуляр, опущенный из любой точки окружности на диаметр, является средней пропорциональной величиной между отрезками, на которые основание перпендикуляра делит диаметр (рис.34)

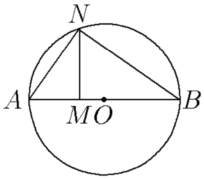


Рис.34

Т.к. ΔANB – прямоугольный, то $\frac{AM}{NM} = \frac{NM}{MB}$. Из данного равенства следует

$$NM^2 = AM \cdot MB$$

$$NM = \sqrt{AM \cdot MB}.$$

6. Если через точку M, взятую внутри круга, проведены произвольная хорда и диаметр, то произведение отрезков хорды, на которые она разбивается точкой M, равно произведению отрезков диаметра.

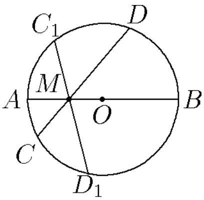


Рис.35

На рис.35 AB – диаметр, CD – хорда, M – точка пересечения хорды и диаметра. $CM \cdot MD = AM \cdot MB$.

Следствие. Каждая хорда, проходящая через точку M, лежащую внутри круга, делится в этой точке на отрезки, произведение которых постоянно для данного круга и данной точки M, т.е.

$$CM \cdot MD = C_1M \cdot MD_1.$$

Рассмотрим взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей.

Прямая и окружность не могут иметь более двух общих точек.

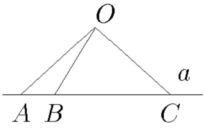


Рис.36

Покажем это.

Пусть O – центр окружности, a – данная прямая (рис.36). Предположим, что прямая и окружность имеют более двух общих точек. По определению окружности $OA = OB = OC$. Пусть B лежит между точками A и C.

Тогда углы OBA и OBC – смежные и либо один из них острый, а другой тупой, либо оба прямые. Но ни того, ни другого быть не может, так как треугольники AOB и BOC равнобедренные. Тем самым доказали, что прямая и окружность не могут иметь более двух общих точек, Поэтому возможны лишь следующие случаи расположения прямой относительно окружности:

1. Прямая не имеет не одной общей точки с окружностью. На рис.37 прямая с не имеет общих точек с окружностью.

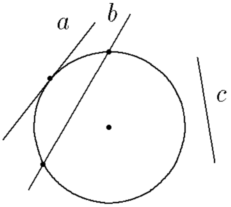


Рис.37

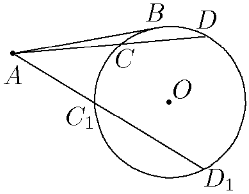


Рис.38

2. Прямая имеет лишь одну общую точку с окружностью. При этом прямая называется касательной к окружности, а их общая точка называется точкой касания. На рис.37 прямая a – касательная.

3. Прямая имеет с окружностью две общие точки. В этом случае прямая называется секущей. На рис.37 прямая b – секущая.

Известны следующие свойства касательных и секущих:

1. Если из одной точки A, лежащей вне круга (рис.38) проведены к окружности касательная AB и секущая AD, то квадрат отрезка касательной от точки А до точки касания B равен произведению отрезка секущей AD на ее внешнюю часть AC, т.е. $AB^2 = AD \cdot AC$.

2. Если из точки A, взятой вне окружности проведены к ней две секущие, то произведение отрезка секущей на ее внешнюю часть есть величина постоянная для данной окружности и данной точки A, т.е. $AD \cdot AC = AD_1 \cdot AC_1$.

3. Если из точки A, взятой вне окружности, проведены к ней две касательные, то отрезки касательных равны, т.е. $AM = AN$ (рис.39). Доказательство следует из равенства двух прямоугольных треугольников AMO и ANO.

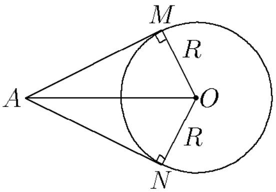


Рис.39

8. Центральные и вписанные углы.

Если повернуть радиус OA на полный круг (360^0), то его конец, точка A, опишет полную окружность. Поэтому полной окружности приписывают 360^0 дуговых градусов.

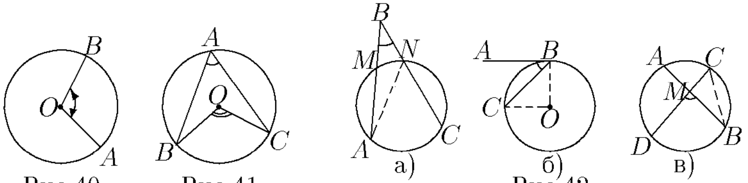


Рис.40 Рис.41 Рис.42

Определение. Центральным углом называется угол, заключенный между радиусами.

На рисунке 40 $\angle AOB$ – центральный угол.

Центральный угол AOB и дуга AB, на которую он опирается, измеряются одним и тем же числом градусов, т.е. $\angle AOB = \smile AB$.

Определение. Угол, вершина которого находится на окружности, а стороны являются хордами, называется вписанным в эту окружность.

Теорема. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается, т.е.

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \smile BC \qquad \text{(рис.41).}$$

Следствия. 1. Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.

2. Вписанный угол, опирающийся на диаметр, – прямой.

Рассмотрим еще некоторые углы относительно окружности.

1. На рис.42 а) изображен угол ABC между двумя секущими.

Каждая из его сторон пересекает окружность в двух точках. Можно показать, что

$$\angle ABC = \frac{\smile AC - \smile MN}{2}.$$

Действительно: $\angle ANC = \frac{1}{2}\smile AC$, $\angle BAN = \angle MAN = \frac{1}{2}\smile MN$ – как вписанные углы; $\angle ANC = \angle BAN + \angle ABN$ – как внешний угол ΔABN.

Значит,

$$\frac{1}{2}\smile AC = \frac{1}{2}\smile MN + \angle ABN \Rightarrow \angle ABN = \angle ABC = \frac{1}{2}(\smile AC - \smile MN).$$

2. На рис.42 б) изображен угол ABC между касательной AB к окружности и хордой BC.

Угол, заключенный между касательной и хордой, имеющими общую точку, равен половине дуги, заключенной между сторонами угла. Докажем это.

1) $\angle ABO = 90^0$ – по свойству радиуса, проведенного в точку касания (рис.42(б)).

2) $\angle ABC = \angle ABO - \angle CBO = 90^0 - \angle CBO$.

Но так как ΔOBC – равнобедренный, то

$$\angle CBO = \angle BCO = \frac{1}{2}(180^0 - \angle BOC) = 90^0 - \frac{1}{2}\angle BOC = 90^0 - \frac{1}{2}\smile BC.$$

3) $\angle ABC = 90^0 - \left(90^0 - \frac{1}{2}\smile BC\right) = \frac{1}{2}\smile BC$, что и требовалось доказать.

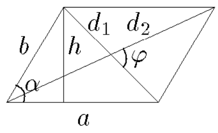
3. Угол DMB между хордами, изображенный на рис.42 в), равен полусумме дуг, заключенных между концами этих хорд, т.е.

$$\angle DMB = \frac{\smile AC + \smile DB}{2}.$$

9. Формулы площадей.

1. Площадь прямоугольника:	$S = a \cdot b$; a, b – стороны прямоугольника;
2. Площадь квадрата:	$S = a^2$; a – сторона квадрата;

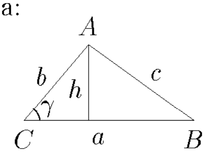
3. Площадь параллелограмма:

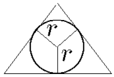


$S = a \cdot h$

$S = a \cdot b \cdot \sin\alpha$;
$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin\varphi$;
где a, b – стороны параллелограмма, α – угол между ними, h – высота параллелограмма, d_1, d_2 –диагонали, φ – угол между ними

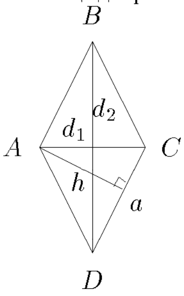
4. Площадь треугольника:





$S = \frac{1}{2} a \cdot h$;
$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$;
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p – полупериметр;
$S = p \cdot r$, где r – радиус вписанной окружности;
$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$, где R – радиус описанной окружности;

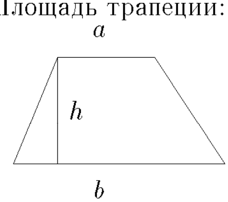
5. Площадь ромба:



$S = a \cdot h$, где a – сторона ромба, h – высота ромба;

$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$, где d_1, d_2 – диагонали ромба;

6. Площадь трапеции:



$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, где a, b – основания трапеции, h – высота;

7. Площадь произвольного четырехугольника:

$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$, где d_1, d_2 – диагонали четырехугольника, а φ – угол между ними.

10. Длина окружности и площадь круга.

Определение'. Длина окружности – это предел, к которому стремится периметр правильного вписанного в окружность многоугольника при неограниченном увеличении числа его сторон.

Если R – радиус окружности, C – длина окружности, то $C = 2\pi R$.

Длина l дуги окружности с градусной мерой α вычисляется по формуле:

$$l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha \qquad (1).$$

Определение. Величина дуги окружности, длина которой равна радиусу этой окружности, называется *радианом* (1 рад).

Определим, сколько градусов содержит дуга в 1 рад. Так как длина дуги равна R, то воспользуемся формулой (1), где $l = R$

$$R = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha.$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{180}{\pi} \approx 57^0 17' 44'', 8, \quad \text{т.е.}$$

$$1\text{рад} \approx 57^0 17' 44'', 8.$$

Длина дуги в 1 радиан по определению равна радиусу R. Поэтому длина дуги в m радиан равна mR. Таким образом, длина дуги выраженной в радианной мере, равна произведению числа ее радианов на радиус окружности то есть $l = mR$q.

Определение. Кругом называется часть плоскости, ограниченной окружностью. Круг радиуса R с центром O содержит точку O и все точки плоскости, находящиеся от точки O на расстоянии, не большем R.

Площадь круга равна половине произведения длины ограничивающей его окружности на радиус:

$$S = \frac{1}{2} C \cdot R = \frac{1}{2} 2\pi R \cdot R = \pi R^2 \quad \text{т.е.} \quad S = \pi R^2.$$

Площадь круга диаметра d выражается формулой

$$S = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Определение. Круговым сектором или просто *сектором* называется часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга (рис.43).

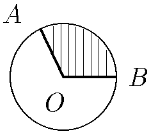


Рис.43

Дуга, ограничивающая сектор, называется дугой сектора. Если дуга сектора содержит α градусов, то площадь сектора $S = \frac{\pi R^2}{360^0} \cdot \alpha^0$.

Площадь сектора можно вычислить также через длину дуги сектора, а именно, площадь сектора равна половине произведения длины его дуги l на радиус R круга, т.е.

$$S = \frac{1}{2} R \cdot l.$$

Если m – радианная мера дуги сектора, то площадь сектора равна половине произведения квадрата радиуса на радианную меру дуги сектора, т.е.

$$S = \frac{1}{2} R^2 \cdot m.$$

11. Подобие.

Определение. Две фигуры F и F_1 называются подобными, если они переводятся одна в другую преобразованием подобия.

Из свойств преобразования подобия следует, что у подобных фигур соответствующие углы равны, а соответствующие отрезки пропорциональны. Так, у подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$.

Для треугольников известны три признака подобия. Два треугольника подобны:

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника.
2. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого треугольника.

Из этих признаков можно получить некоторые следствия:

1. Все равносторонние треугольники подобны между собой.
2. Все прямоугольные равнобедренные треугольники подобны между собой.
3. Равнобедренные треугольники подобны, если они имеют по равному углу.
4. Прямоугольные треугольники подобны, если они имеют по равному острому углу.
5. Прямая, проведенная параллельно одной из сторон треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.
6. В подобных треугольниках высоты, медианы, биссектрисы, проведенные из вершин соответственно равных углов, пропорциональны соответственным сторонам.
7. Радиусы вписанных и описанных окружностей подобных треугольников пропорциональны соответственным сторонам.

Аналогично, если два многоугольника $A_1A_2\dots A_n$ и $A'_1A'_2\dots A'_n$ подобны, то $\angle A_1 = \angle A_1{}'$ $\angle A_2 = \angle A_2{}'$ ..., $\angle A_n = \angle A_n{}'$, $\frac{A_1A_2}{A'_1A'_2} = \frac{A_2A_3}{A'_2A'_3} = \dots = \frac{A_1A_n}{A'_1A'_n}$.

Для многоугольников справедливы утверждения:

1. Два подобных многоугольника диагоналями, проведенными из вершин соответственно равных углов, разбивается на одинаковое число соответственно подобных треугольников.

Пусть многоугольники $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ подобны (рис.44) и из вершин A и A_1 проведены диагонали. Тогда $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, $\Delta ACD \sim \Delta A_1C_1D_1$, $\Delta ADE \sim \Delta A_1D_1E_1$, $\Delta AEF \sim \Delta A_1E_1F_1$.

2 Периметры подобных многоугольников, в том числе и треугольников относятся как соответственные стороны.

$$\frac{P(F)}{P(F_1)} = k.$$

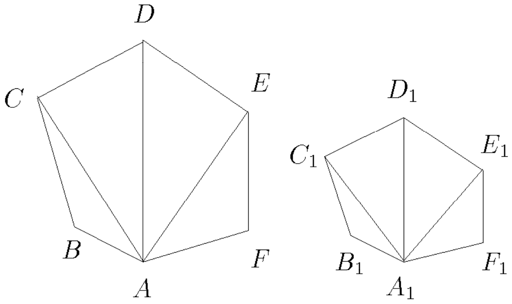


Рис.44

3 Площади подобных фигур относятся как квадраты их соответствующих линейных размеров.

$$\frac{S(F)}{S(F_1)} = k^2,$$

где k – коэффициент подобия фигур F и F_1.

б) Стереометрия.

12. **Плоскость**.

Основными фигурами пространства являются точка, прямая и плоскость.

Плоскость в пространстве определяется однозначно:

1. Тремя точками, не лежащими на одной прямой.
2. Прямой и не принадлежащей ей точкой.
3. Двумя параллельными прямыми.

Две различные плоскости в пространстве могут:

1. Не иметь общих точек. В этом случае они называются параллельными.
2. Иметь общую точку. В этом случае они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

Определение. Две плоскости называются параллельными если они не имеют ни одной общей точки.

Признак параллельности двух плоскостей.

Две плоскости параллельны, если одна из них параллельна двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости. На рис.45, если $\alpha || a$, $\alpha || b$, $a, b \subset \beta$ и a и b пересекаются, то $\alpha || \beta$.

Свойства параллельности плоскостей.

1. Если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то получившиеся линии пересечения параллельны. На рис.46 а) $\alpha || \beta$, $\gamma \cap \alpha = a$, $\gamma \cap \beta = b$, значит $a || b$.

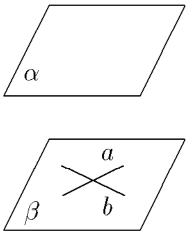
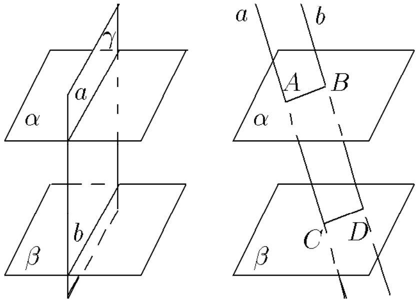


Рис.45



а) б)

Рис.46

2 Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны. На рис.46 б) $a || b$, $\alpha || \beta$, $a \cap \alpha = A$, $a \cap \beta = C$, $b \cap \alpha = B$, $b \cap \beta = D$, значит $AC = BD$.

13. **Параллельность прямой и плоскости.**

Прямая линия может занимать относительно плоскости различные положения:

1. Прямая лежит в плоскости.

2. Прямая и плоскость имеют одну общую точку, или прямая пересекает плоскость.

3. Прямая и плоскость не имеют общих точек, или прямая параллельна плоскости.

Признак параллельности прямой и плоскости.

Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна и самой этой плоскости.

При решении задач используются следующие факты.

1. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

На рисунке 47 а) прямая b лежит на плоскости α и параллельна плоскости β, плоскости α и β пересекаются по прямой a. Тогда, как утверждается, прямые a и b параллельны.

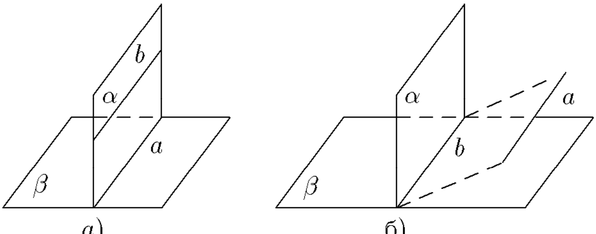


Рис.47

2. Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна их линии пересечения.

На рис.47 б) прямая a параллельна плоскостям α и β, плоскости α и β пересекаются по прямой b. Тогда прямая a параллельна прямой b.

3. Параллельные прямые, ни одна из которых не лежит в данной плоскости, или обе пересекают плоскость, или обе не пересекают ее.

14. **Перпендикуляр к плоскости. Угол прямой с плоскостью.**

Определение. Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум прямым в этой плоскости, проходящим через точку пересечения прямой с плоскостью, то она перпендикулярна плоскости.

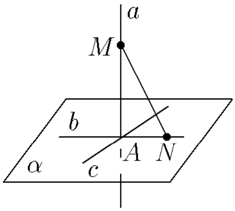


Рис.48

На рисунке 48 прямая a пересекает плоскость α в точке A и перпендикулярна двум прямым b и c, лежащим в плоскости α и проходящим через точку А. Тогда, как утверждается в теореме, она перпендикулярна и всей плоскости α, т.е. перпендикулярна любой прямой этой плоскости. Обозначают $a \perp \alpha$.

Определение. Отрезок прямой, перпендикулярной плоскости, от некоторой ее точки М до точки пересечения этой прямой с плоскостью, называется *перпендикуляром*, опущенным из точки М на данную плоскость. Точка пересечения этой прямой с плоскостью называется *основанием* перпендикуляра.

На рис.48 М А – перпендикуляр, опущенный из точки М на плоскость α. Точка А – основание перпендикуляра М А. Обозначают $MA \perp \alpha$.

Определение. Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром.

Конец наклонной, лежащий в плоскости, называется *основанием* наклонной. На рис.48 MN– наклонная, N– основание наклонной.

Наклонной также называют любую прямую, пересекающую плоскость и не перпендикулярную ей. Тот факт, что прямая MN пересекает плоскость α в точке N (рис.48), обозначают следующим образом $MN \cap \alpha = N$.

Определение. Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки к плоскости, называется *проекцией наклонной* на эту плоскость.

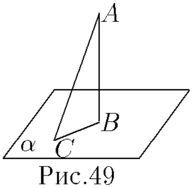


Рис.49

На рис.49 из точки A проведены к плоскости α перпендикуляр AB и наклонная AC. Отрезок BC – проекция наклонной AC на плоскость α. Если наклонную рассматривать как прямую, содержащую отрезок АС, то ее проекцией будет прямая, лежащая в плоскости α и содержащая отрезок ВС.

В пространстве имеют место те же теоремы о перпендикуляре и наклонных, что и на плоскости.

1. Перпендикуляр короче всякой наклонной, проведенной из той же точки. Всякая наклонная больше своей проекции.

2. Если из одной и той же точки, взятой вне плоскости, проведены к этой плоскости перпендикуляр и наклонные, то:

   а) две наклонные, имеющие равные проекции, равны;

   б) из двух наклонных та больше, проекция которой больше;

   в) равные наклонные имею равные проекции;

   г) из двух проекций та больше, которая соответствует большей наклонной.

В стереометрии имеет место еще одна теорема, не имеющая аналогии в планиметрии.

Теорема о трех перпендикулярах.

Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна и самой наклонной, и обратно, если прямая, лежащая в плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

В задачах часто встречается случай, когда прямая, лежащая в плоскости, проходит через основание наклонной.

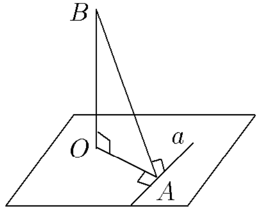


Рис.50

На рис.50, если $a \perp AB$, то $a \perp OA$ и обратно: если $a \perp OA$, то $a \perp AB$.

Укажем еще две теоремы о перпендикуляре к плоскости:

1. Два перпендикуляра к одной плоскости параллельны между собой.

2. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна плоскости.

Определение. Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного на эту плоскость.

Определение. Расстоянием между плоскостью α и прямой a, параллельной данной плоскости, называется длина перпендикуляра опущенного из любой точки прямой a на плоскость α (рис.51).

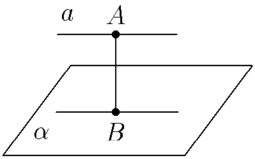


Рис.51

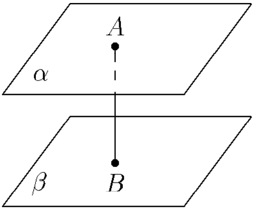


Рис.52

Определение. Расстоянием между параллельными плоскостями (α и β) называется длина перпендикуляра, опущенного из любой точки одной из плоскостей на другую плоскость (рис.52).

Определение. Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость.

На рисунке 49 угол между прямой AC и плоскость α будет угол ACB.

Прямые в пространстве.

Прямые в пространстве могут лежать в одной плоскости, а могут не лежать в одной плоскости

Определение. Если прямые лежат в одной плоскости и имеют только одну общую точку, то они называются *пересекающимися.*

Определение. Если прямые лежат в одной плоскости и не имеют общих точек, то они называются *параллельными.*

Определение. Если прямые не лежат в одной плоскости и не имеют общих точек, то они называются *скрещивающимися.*

Определение. *Углом* между скрещивающимися прямыми называется угол между любыми пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным.

Определение. *Расстоянием* между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра, т.е. отрезка, перпендикулярного каждой из скрещивающихся прямых, концы которого лежат на данных прямых.

Расстояние между скрещивающимися прямыми определяют одним из следующих способов:

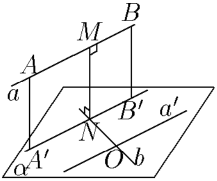


Рис.53

Пусть a и b – скрещивающиеся прямые (рис.53). Проведем через точку O прямой b прямую $a'||a$. Через прямые a' и b – проведем плоскость α, эта плоскость параллельна прямой a по признаку параллельности прямой и плоскости.

Длина перпендикуляра опущенного из любой точки прямой a на плоскость $\alpha\,(AA', BB', \ldots)$ и есть расстояние между скрещивающимися прямыми.

Как видно из рисунка 53, MN – общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых a и b.

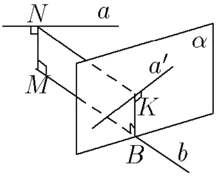


Рис.54

II. Пусть a и b скрещивающиеся прямые (рис.54). Проведем плоскость α, перпендикулярную прямой b. Спроектируем прямые a и b перпендикулярно на плоскость α. Прямая b спроектируется в точку B, а прямая a спроектируется в прямую a'. При этом общий перпендикуляр MN скрещивающихся прямых a и b спроектируется в перпендикуляр BK, опущенный из точки B на прямую a'.

BK равно расстоянию между прямыми a и b.

15. **Двугранные углы.**

Определение. Часть плоскости, лежащая по одну сторону от какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, называется *полуплоскостью.*

Определение. Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой. Полуплоскости называются гранями, а ограничивающая их прямая – ребром двугранного угла.

Рассмотрим две пересекающиеся плоскости α и β (рис.55).

Пусть a – линия пересечения этих плоскостей. Проведем плоскость γ перпендикулярно линии пересечения этих плоскостей, т.е. прямой a. Эта плоскость пересечет плоскости α и β по прямым b и c соответственно, причем $a \perp b$ и $a \perp c$ (по определению перпендикуляра к плоскости).

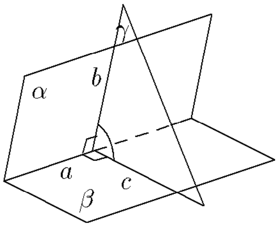


Рис.55

Угол между прямыми b и с в плоскости γ называется *линейным углом двугранного угла* между плоскостями α и β.

Дают еще такое определение линейного угла двугранного угла.

Линейным углом двугранного угла называется угол между прямыми, лежащими в гранях двугранного угла, перпендикулярными ребру этого двугранного угла и проходящими через одну и ту же точку ребра.

Можно доказать, что два линейных угла данного двугранного угла равны между собой.

Для линейных и двугранных углов справедливы утверждения:

1. Если линейные углы равны, то и двугранные углы равны.
2. Если двугранные углы равны, то и их линейные углы равны.
3. Если линейные и двугранные углы измеряются в соответственных единицах, то двугранный угол численно равен своему линейному углу.

Определение. Плоскости, образующие прямой двугранный угол, называются *перпендикулярными.*

Признак перпендикулярности плоскостей.

Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

На рис.56 плоскость β содержит прямую $h \perp \alpha$, тогда $\beta \perp \alpha$.

При решении задач пользуются такой теоремой.

Если плоскости перпендикулярны и в одной из них проведен перпендикуляр к линии пересечения этих плоскостей, то он служит перпендикуляром к другой плоскости.

Следствия:

1) Если две плоскости взаимно перпендикулярны и перпендикуляр к одной из них имеет общую точку с другой плоскостью, то он целиком лежит в этой плоскости.

2) Если две плоскости перпендикулярны третьей, то их линия пересечения перпендикулярна третьей плоскости (рис.57).

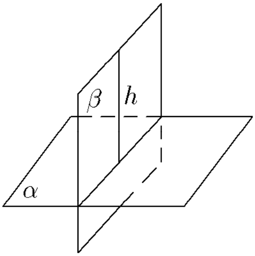


Рис.56

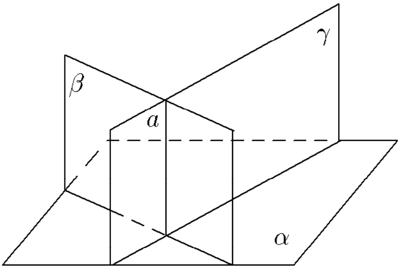


Рис.57

16. **Многогранники.**

Определение. Многогранником называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников

Выпуклым многогранником называется многогранник, расположенный по одну сторону плоскости каждого плоского многоугольника, из которых состоит поверхность многогранника.

Гранями многогранника называются многоугольники, ограничивающие многогранник.

Ребрами многогранника называются стороны его граней.

Вершинами многогранника называются вершины его граней.

Диагональю многогранника называется отрезок, соединяющий две вершины многогранника, не лежащие на одной грани.

Многогранник называется *правильным*, если все его грани – равные между собой правильные многоугольники и все многогранные углы равны.

В каждой вершине правильного многогранника сходится не менее трех граней, плоские углы которых равны между собой и в сумме составляют меньше 360^0. Если гранями правильного многогранника являются правильные треугольники, то в каждой вершине многоугольников может сходиться либо три треугольника $\left(60^0 \cdot 3 < 360^0\right)$, либо четыре треугольника $\left(60^0 \cdot 4 < 360^0\right)$, либо пять треугольников $\left(60^0 \cdot 5 < 360^0\right)$. Шесть правильных треугольников не образуют многогранного угла, так как $60^0 \cdot 6 = 360^0$.

Итак, существуют только три типа правильных многогранников, гранями которых являются правильные треугольники:

1. Правильный четырехгранник (правильный тетраэдр). Тетраэдр имеет 4 грани, 4 вершины и 6 ребер (рис.58).

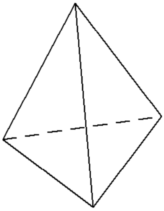


Рис.58

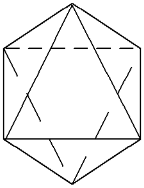


Рис.59

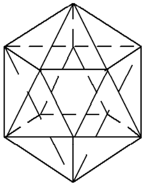


Рис.60

2. Правильный восьмигранник (правильный октаэдр). Октаэдр имеет 8 граней, 6 вершин и 12 ребер (рис.59).

3. Правильный двадцатигранник (правильный икосаэдр). Икосаэдр имеет 20 граней, 12 вершин и 30 ребер (рис.60).

Правильных многогранников, грани которых – правильные четырехугольники, может быть всего один, так как $90^0 \cdot 3 = 270 < 360^0$; а $90^0 \cdot 4 = 360^0$. Этот многогранник называется кубом или гексаэдром. У него 6 граней, 8 вершин и 12 ребер (рис.61).

Из правильных пятиугольников можно составить тоже только один многогранник, так как $\frac{180^0 \cdot (5-2)}{5} \cdot 3 = 108^0 \cdot 3 < 360^0$, а $108^0 \cdot 4 > 360^0$. Этот многогранник называется додекаэдром. Он имеет 12 граней, 20 вершин и 30 ребер (рис.62).

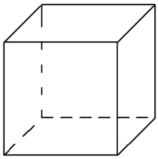


Рис.61

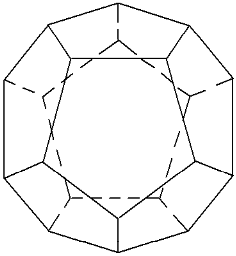


Рис.62

Из правильных шестиугольников составить правильный многогранник нельзя, т.к. $120^0 \cdot 3 = 360^0$.

Итак, существует всего пять видов правильных многогранников: тетраэдр, октаэдр, икосаэдр, гексаэдр, додекаэдр.

Определение. Призмой называется многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответственные точки этих многоугольников. Многоугольники называются *основаниями* призмы, а отрезки, соединяющие соответствующие вершины –*боковыми ребрами* призмы.

Основания призмы лежат в параллельных плоскостях, а боковые ребра параллельны и равны.

Высотой призмы называется расстояние между плоскостями ее оснований.

Диагональным сечением призмы называется сечение плоскостью, которая проходит через два боковых ребра, не принадлежащие одной грани. На рис.63 AA_1C_1C – диагональное сечение призмы.

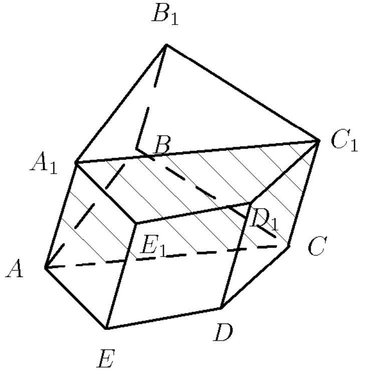


Рис.63

Призма называется *прямой*, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям. В противном случае призма называется *наклонной*. Прямая призма называется *правильной*, если ее основания являются правильными многоугольниками.

Основаниями любой призмы являются равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, боковыми гранями являются параллелограммы.

У прямой призмы боковые грани – прямоугольники. У правильной призмы все боковые грани – равные прямоугольники.

Определение. Параллелепипедом называется призма, основаниями которой служат параллелограммы.

Виды параллелепипедов:

1) Параллелепипед называется *прямым*, если его боковые ребра перпендикулярны основаниям, в противном случае он называется *наклонным*. Боковые грани прямого параллелепипеда – прямоугольники.

2) Прямой параллелепипед называется *прямоугольным*, если его основания прямоугольники.

Длины трех ребер прямоугольного параллелепипеда, сходящихся в одной вершине, называются его *измерениями*.

Все грани прямоугольного параллелепипеда – прямоугольники.

Кубом называется прямоугольный параллелепипед, все три измерения которого равны между собой.

Для параллелепипедов справедливы следующие утверждения:

1. В параллелепипеде противоположные грани равны и параллельны.
2. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.
3. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений, т.е., например, $B_1D^2 = BB_1^2 + BA^2 + BC^2$ (рис.64).
4. В прямоугольном параллелепипеде все четыре диагонали равны между собой.

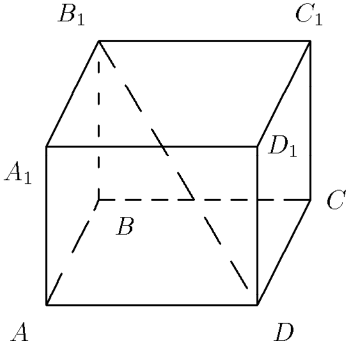


Рис.64

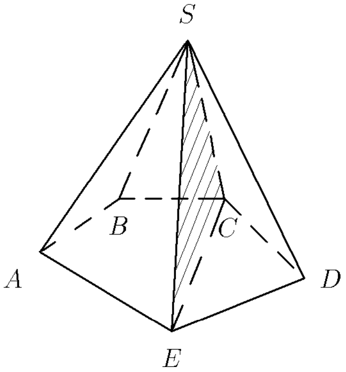


Рис.65

Определение. Пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника – *основания* пирамиды, точки, не лежащей в плоскости основания, называемой *вершиной* пирамиды и всех отрезков, соединяющих вершину с точками основания (рис.65).

Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются *боковыми* ребрами пирамиды.

Каждая грань пирамиды – треугольник.

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

Диагональным сечением пирамиды называется сечение ее плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и диагональ основания. На рис.65 ESC – диагональное сечение.

Пирамида называется *правильной*, если в ее основании лежит правильный многоугольник и высота проходит через центр окружности, описанной около основания. Боковые ребра правильной пирамиды равны между собой, а ее боковые грани – равнобедренные и равные между собой треугольники.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из вершины пирамиды, называется ее *апофемой.*

Основные теоремы о пирамиде:

1. Если пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основанию, то: а) ее боковые ребра и высота разделятся на пропорциональные отрезки (части); б) в сечении получится многоугольник, подобный основанию; в) площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины пирамиды.

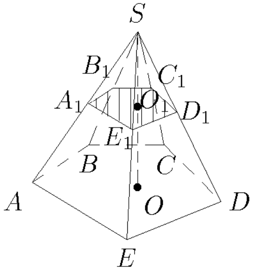


Рис.66

На рис.66 $SABCDE$ – пирамида.
$A_1B_1C_1D_1E_1$ – сечение, параллельное основанию.
Как утверждает теорема:
а) $\frac{SA_1}{SA}=\frac{SB_1}{SB}=\frac{SC_1}{SC}=\frac{SD_1}{SD}=\frac{SE_1}{SE}=\frac{SO_1}{SO}$;

б) $A_1B_1C_1D_1E_1 \sim ABCDE$;

в) $\frac{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}}{S_{ABCDE}}=\frac{SO_1^2}{SO^2}$.

Определение. Усеченной пирамидой называется пирамида, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию. Основания усеченной пирамиды – подобные многоугольники.

Правильной усеченной пирамидой называется такая усеченная пирамида, у которой верхнее и нижнее основания – правильные многоугольники, а прямая, содержащая центры оснований, перпендикулярна плоскостям оснований.

Боковые грани правильной усеченной пирамиды равнобедренные трапеции; их высоты равны, и называются апофемой усеченной пирамиды.

При решении задач на пирамиду часто приходится иметь дело с углами между ребром и плоскостью основания и углом между боковой гранью и плоскостью основания. При этом оказываются полезными такие факты:

1. Если все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания равные углы, то высота пирамиды проходит через центр описанной около основания окружности (рис.67).

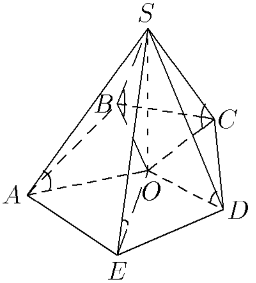


Рис.67

Докажем это. Известно, что $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \angle SDO = \angle SEO$, где SO – высота пирамиды. Треугольники SOA, $SOB, \ldots, SOE$ прямоугольные, т.к. $SO \perp$ пл.$ABCDE$, а значит $SO \perp OA, \ldots, SO \perp OE$.

Кроме того, у этих треугольников общий катет SO и равные острые углы, следовательно они равны, а значит, $AO = BO = CO = DO = EO$, а это означает, что O– центр описанной около $ABCDE$ окружности.

2. Если боковые грани пирамиды наклонены к основанию под одним и тем же углом, то высота пирамиды проходит через центр вписанной в основание окружности.

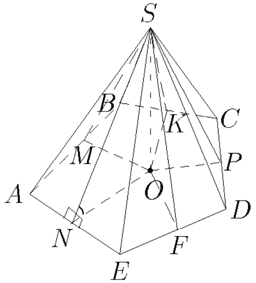


Рис.68

На рис.68 изображена пирамида $SABCDE$. SO – высота пирамиды. Проведем высоты $SK, SM, \ldots, SN$ в каждой боковой грани и соединим каждую из точек $K, M, \ldots, N$ с основанием высоты O. По теореме о трех перпендикулярах $OM \perp AB$, $OK \perp BC, \ldots, ON \perp AE \Rightarrow \angle SMO, \ldots, \angle SNO$ – линейные углы двугранных углов при сторонах основания, а по условию они равны.

Следовательно, прямоугольные треугольники SOM, $SOK, \ldots, SON$ равны по катету и острому углу, а значит $OM = OK = \ldots = ON$ и O является центром вписанной в $ABCDE$ окружности.

3. Если боковые ребра пирамиды равны, то основанием высоты пирамиды является центр описанной около основания окружности.

На рис.67 $SA = SB = \ldots = SE$, значит $AO = BO = \ldots = EO$, т.е. O –

центр описанной около $ABCDE$ окружности.

4. Если вершина пирамиды равноудалена от сторон основания пирамиды, то основанием высоты служит центр вписанной в основание окружности.

На рис.68 $SM = SK = \ldots = SN$, значит $OM = OK = \ldots = ON$, т.е. O – центр вписанной в $ABCDE$ окружности.

17. Фигуры вращения.

Определение. Цилиндром называется тело, состоящее из двух кругов, совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответственные точки этих кругов.

Круги называются *основаниями* цилиндра, а отрезки, соединяющие соответствующие точки этих кругов, – образующими цилиндра. Основания цилиндра параллельны и равны, образующие цилиндра параллельны и равны.

Цилиндр называется *прямым*, если его образующие перпендикулярны плоскости основания.

Прямой цилиндр можно рассматривать как тело, полученное вращением прямоугольника вокруг его стороны, как оси (рис.69).

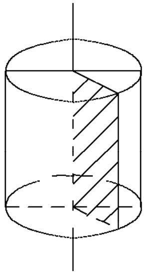


Рис.69

В курсе геометрии рассматривается только прямой цилиндр и его называют просто цилиндром.

Радиусом цилиндра называют радиус его основания.

Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями оснований.

Прямая, проходящая через центры оснований цилиндра, называется осью цилиндра. Она параллельна образующим.

1. В сечении боковой поверхности цилиндра плоскостями, параллельными его основаниям, получаются равные между собой окружности.

2. В сечении оснований и боковой поверхности цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, получается прямоугольник, сторонами которого служат диаметры и образующие цилиндра. Его еще называют осевым сечением (рис.70).

3. В сечении оснований и боковой поверхности плоскостью, параллельной его оси, получается прямоугольник, сторонами которого служат образующие цилиндра и хорды оснований (рис.71).

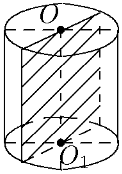


Рис.70

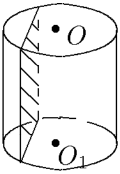


Рис.71

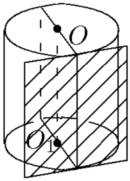


Рис.72

Плоскость, проходящая через образующую цилиндра и перпендикулярная осевому сечению, проведенному через эту образующую, называется *касательной плоскостью* цилиндра (рис.72).

Определение. Конусом называется тело, которое состоит из круга – *основания* конуса, точки, не лежащей на плоскости этого круга, – *вершины* конуса и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания. Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками основания, называются *образующими* конуса.

Конус называется *прямым*, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания.

В школьном курсе геометрии рассматривается только прямой конус и его называют просто конусом.

Прямой круговой конус можно рассмотреть как тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг его катета, как оси (рис.73).

Высотой конуса называется перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на основание. Высота прямого конуса является его осью.

1. В сечении боковой поверхности прямого кругового конуса плоскостью, параллельной основанию, получается окружность.

2. В сечении конуса плоскостью, проходящей через его ось (осевое сечение), получается равнобедренный треугольник, сторонами которого служат образующие конуса и диаметр основания конуса (рис.74).

3. Если секущая плоскость проходит через вершину конуса, но не проходит через его ось, то сечением является равнобедренный треугольник, боковые стороны которого – образующие конуса, а основание – хорда окружности основания (рис.75).

Если пересечь конус плоскостью, параллельной его основанию, то его высота и образующие разделятся этой плоскостью на две пропорциональные части, а площади сечения и основания будут пропорциональны квадратам их расстояний от вершины.

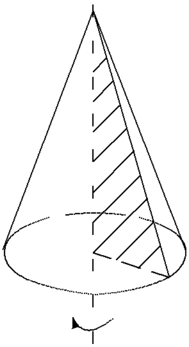


Рис.73

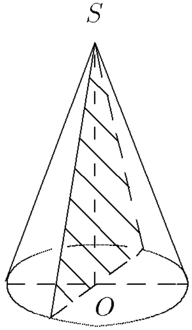


Рис.74

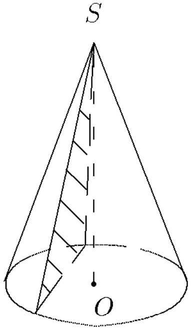


Рис.75

Определение. Усеченным конусом называется часть конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию. *Основаниями* усеченного конуса называются основание полного конуса, из которого получен усеченный конус, и сечение.

Образующей усеченного конуса называется часть образующей полного конуса, заключенная между основаниями. *Высотой* усеченного конуса называется перпендикуляр к обоим основаниям.

Развертка конуса. Если поверхность конуса разрезать по образующей и окружности основания и развернуть ее так, чтобы боковая поверхность и основание лежали в одной плоскости, то на плоскости получим фигуру, которая называется разверткой конуса.

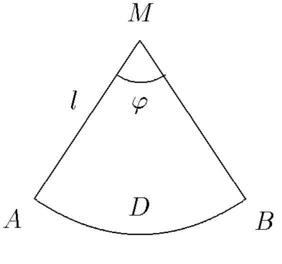


Рис.76

Развертка конуса состоит из сектора $MADB$, радиус которого равен образующей конуса, а длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса, т.е. $\smile ADB = 2\pi R$; где R – радиус основания конуса.

$S_{\text{сек}} = \frac{1}{2} l^2 \varphi$, где $\varphi = \frac{\pi n^0}{180^0}$ – радианное измерение дуги сектора.

Сфера и шар.

Определение. Шаровой поверхностью или *сферой* называется множество точек пространства, равноудаленных от одной точки, называемой *центром* сферы.

Сферу можно рассмотреть как поверхность, образованную вращением окружности вокруг ее диаметра.

Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через центр сферы, называется *диаметром* сферы. Отрезок, соединяющий центр сферы с любой ее точкой, называется *радиусом* сферы.

Шаром называется тело, ограниченное шаровой поверхностью. Центр, радиус и диаметр сферы называются также центром, радиусом и диаметром шара. Шар может быть получен вращением полукруга вокруг диаметра. Очевидно, что шар состоит из всех точек пространства, расположенных от центра шара на расстоянии, не превышающем радиуса (включая и центр шара).

Если центр сферы имеет координаты $(x_0; y_0; z_0)$ и радиус сферы равен R, то уравнение сферы имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Если сферу пересечь плоскостью, то в сечении получится окружность, причем отрезок, соединяющий центр сферы с центром получившейся окружности (если плоскость не проходит через центр сферы), перпендикулярен секущей плоскости.

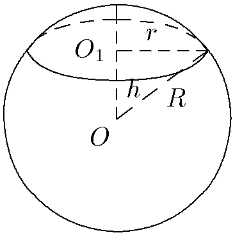


Рис.77.

Если $OO_1 = h$, радиус сферы R и радиус получившейся в сечении окружности r, то $r = \sqrt{R^2 - h^2}$ (рис.77). Отсюда следует, что в сечениях сферы плоскостями, равноотстоящими от центра сферы, получаются окружности равных радиусов.

Определение. Касательной плоскостью к сфере называется плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку.

Теорема. Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен касательной плоскости.

Верна и обратная теорема. Если радиус сферы перпендикулярен плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

В задачах очень часто встречаются комбинации сферы (или шара) и других тел.

Определение. Многогранник называется *описанным* около сферы, если сфера касается всех его граней.

Определение. Многогранник называется *вписанным* в шар, если все его вершины лежат на поверхности шара.

Определение. Цилиндр называется описанным около сферы, если его основания и все образующие являются касательными к сфере (рис.78).

Определение. Цилиндр называется вписанным в шар, если его основания являются кругами шара (рис.79).

Определение. Цилиндр называется вписанным в шар, если его основания являются кругами шара (рис.79).

Определение. Конус называется вписанным в шар, если его вершина лежит на поверхности шара, а основание является кругом шара (рис.80).

Определение. Усеченный конус называется вписанным в шар, если его основания являются параллельными кругами шара (рис.81).

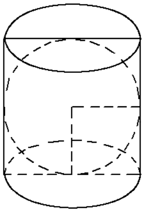


Рис.78.

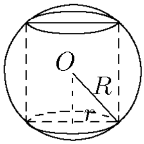


Рис.79.

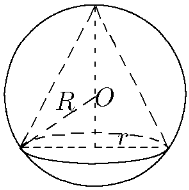


Рис.80.

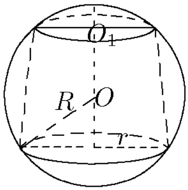


Рис.81.

Дадим определения частей сферы и шара.

Определение. Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него какой нибудь плоскостью.

На рис.82 секущая плоскость α, проходящая через точку B диаметра шара AC, разделяет шар на два шаровых сегмента. Круг, получившийся в сечении, называется основанием каждого сегмента, а длины отрезков AB и CB диаметра AC, перпендикулярного секущей плоскости α, называются высотами сегментов.

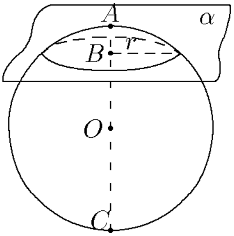


Рис.82.

Определение. Шаровым слоем называется часть шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями (рис.83).

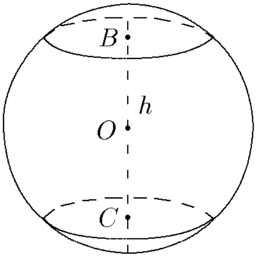


Рис.83.

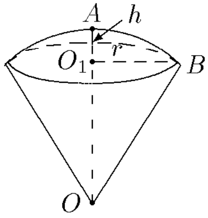


Рис.84.

Круги, получившиеся в сечении шара этими плоскостями, называются основаниями шарового слоя, а расстояние между плоскостями $h = BC$ – высотой шарового слоя.

Определение. Шаровым сектором называется тело, полученное вращением кругового сектора с углом, меньшим 90^0, вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих круговой сектор радиусов (рис.84). Шаровой сектор состоит из шарового сегмента и конуса.

Замечание. Шаровым сектором часто называют тело, полученное вращением кругового сектора вокруг диаметра круга. При этом, если диаметр круга, вокруг которого происходит вращение, содержит радиус кругового сектора, шаровой сектор называют простым (рис.85), а если диаметр круга, вокруг которого вращается круговой сектор, не содержит радиуса сектора, то шаровой сектор называют полым.

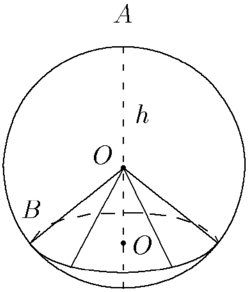


Рис.85.

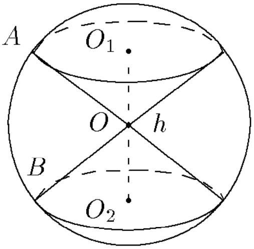


Рис.86.

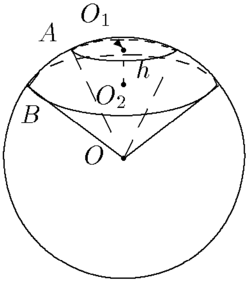
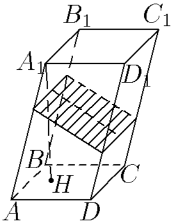
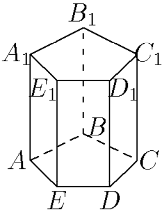
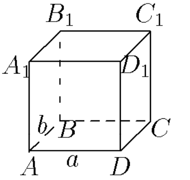
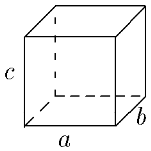
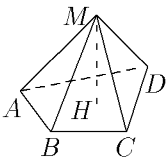


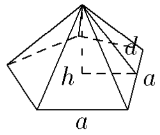
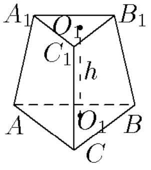
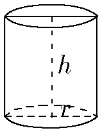
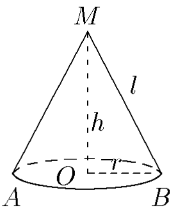
Рис.87.

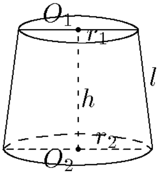
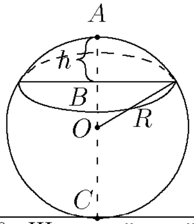
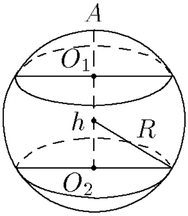
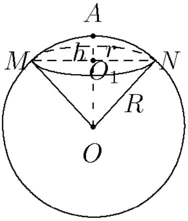
В каждом случае, показанных на рисунках 85, 86, 87 шаровой сектор получен вращением кругового сектора AOB вокруг диаметра. Высота шарового сектора на рис.85 есть отрезок AO_1, на рисунках 86 и 87 – отрезок O_1O_2.

18-24. Формулы площадей поверхностей и объемов многогранников и тел вращения.

Тело	Площадь боковой поверхности	Площадь полной поверхности	Объем
1. Наклонная призма 	Площадь боковой поверхности равна сумме площадей боковых граней $S_б = \sum S_{бок.гран.}$ $S_б = P_{пер.сеч.} \cdot AA_1$, где $P_{пер.сеч}$ – периметр сечения, перпендикулярного боковому ребру	$S_п = S_б + 2S_{осн}$	$V = S_{пер.с} \cdot AA_1$ $V = S_{осн} \cdot h$ где h – высота призмы (A_1H)

2. Прямая призма  	$S_б = P_{осн} \cdot h$ где h – высота призмы, равная боковому ребру, т.е. $S_б = P_{осн} \cdot AA_1$	$S_п = S_б + 2S_{осн}$	$V = S_{осн} \cdot AA_1$
3. Прямой параллелепипед.  	В основании – параллелограмм со сторонами a и b. $S_б = 2(a+b) \cdot AA_1$	$S_п = S_б + 2S_{осн}$	$V = S_{осн} \cdot AA_1$
4. Прямоугольный параллелепипед.  	В основании – прямоугольник со сторонами a и b, боковое ребро равно c $S_б = 2(a+b) \cdot c$	$S_п = 2(a+b)c + 2ab = 2(ab+ac+bc)$	$V = abc$
5. Правильный параллелепипед.	В основании – квадрат со стороной a, боковое ребро равно c $S_б = 4ac$	$S_б = 4ac + 2a^2 = 2a(a+2c)$	$V = a^2c$
6. Куб (ребро a)	$S_б = 4a^2$	$S_п = 6a^2$	$V = a^3$
7. Пирамида  	Площадь боковой поверхности равна сумме площадей боковых граней, являющихся треугольниками $S_б = \sum S_{б\ .гр.}$	$S_п = S_б + S_{осн}$	$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$, где h – высота пирамиды

8. Правильная пирамида.  	В основании правильный n-угольник со стороной a. Высота каждой боковой грани d – апофема пирамиды $S_б = \frac{1}{2} nad$	$S_п = S_б + S_{осн}$	$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$, высота h про- ектируется в центр основания
9. Усеченная пирамида  	$S_б$ равна сумме площадей боковых граней, являющихся трапециями. Для *правильной* усеченной пирамиды $S_б = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)\, d$, где P_1, P_2 – периметры верхних и нижних оснований, d – высота боковой грани, называе- мая апофемой усеченной пирамиды.	$S_п = S_б + S_{в.осн} + S_{н.осн}$	$V = \frac{1}{3} h \left(S_1 + \right.$ $\left. + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right)$ где h – высота усеченной пирамиды, S_1 и S_2 – площади верхнего и нижнего оснований
10. Цилиндр.  	$S_б = 2\pi rh$, где r – радиус основания цилиндра, h – высота цилиндра, равная образующей цилиндра.	$Sп = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$	$V = \pi r^2 h$
11. Конус.  	$S_б = \pi rl$, где r – радиус основания конуса, l – образующая конуса.	$Sп = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ h – высота конуса.

12. Усеченный конус. 	$S_б = \pi\left(r_1 + r_2\right) l$, где r_1 и r_2 – радиусы верхнего и нижнего оснований конуса	$Sп = S_б + S_{в.осн} + S_{н.осн} = \pi\left(r_1 + r_2\right) l + \pi\left(r_1^2 + r_2^2\right)$	$V = \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \cdot r_2\right)$
13. Сфера. 14. Шар		$S = 4\pi R^2$, R – радиус сферы	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$, R – радиус шара.
15. Шаровой сегмент. 		$S = 2\pi Rh$, где R – радиус шара, h – высота шарового сегмента, отрезок AB.	$V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$ где R – радиус шара, h – высота шарового сегмента, отрезок AB.
16. Шаровой слой. 		$S = 2\pi Rh$, где R – радиус шара, h – высота шарового слоя, отрезок O_1O_2.	$V = V_{шар.сег.O_2A} - V_{шар.сег.O_1A}$
17. Шаровой сектор 		$S = S_{шар.сег.O_1A} + S_{б.конусаOMN}$	$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$, где R – радиус шара, h – высота шарового сектора, отрезок AO_1.

Глава II. Основные теоремы и формулы.

1. Алгебра и начала анализа. Свойства функции $y = kx + b$ и ее график.

Определение. Функция вида $y = kx+b$, где $k, b \in \mathbf{R}$ называется *линейной.*

Если $b = 0$, $k \neq 0$, то функция примет вид $y = kx$.

Функция $y = kx$ называется *прямой пропорциональностью*, число "k" – *коэффициентом пропорциональности.*

Если $k = 0$, то функцию $y = b$ называют *постоянной.*

Свойства функции $y = kx + b$.

1. Областью определения функции является множество всех действительных чисел, т.е. $D(y) = \mathbf{R}$.

2. Исследуем эту функцию на четность.

   Область определения функции симметрична относительно начала координат.

   а) $k \neq 0$, $b \neq 0$. $y(-x) = k(-x) + b = -kx + b = -(kx - b)$. Очевидно, что при всех $x \neq 0$ $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$. Следовательно, если $k \neq 0$ и $b \neq 0$ функция $y = kx + b$ не является ни четной, ни нечетной.

   б) $b = 0$, $k \neq 0$. Функция принимает вид $y = kx$. При любом $x \in \mathbf{R}$ $y(-x) = k \cdot (-x) = -kx = -y(x)$. Следовательно, функция $y = kx$ – нечетная и ее график симметричен относительно начала координат.

   в) $b \neq 0$, $k = 0$. Функция имеет вид $y = b$. Для любого $x \in \mathbf{R}$ $y(-x) = b = y(x)$, т.е. функция $y = b$ – четная, а значит ее график симметричен относительно оси Oy.

   г) $k = 0$, $b = 0$. Функция имеет вид $y = 0$. В этом случае функция является одновременно и четной, и нечетной, и график этой функции симметричен относительно оси Oy и относительно начала координат.

3. Исследуем функцию на периодичность.

   а) $k \neq 0$. Предположим, что функция периодическая с периодом Т, тогда для любого $x \in \mathbf{R}$: $y(x + T) = y(x)$. Т.к. $y(x + T) = k(x + T) + b = kx + kT + b$, то $kx + kT + b = kx + b \Leftrightarrow kT = 0$, но т.к. $k \neq 0$, то $T = 0$, значит предположение неверно и функция $y = kx + b$ при $k \neq 0$ непериодическая.

б) $k = 0$. Функция имеет вид $y = b$. Эта функция периодическая с периодом $T \in \mathbf{R}$, $T \neq 0$, т.к. для любого $x \in \mathbf{R}$ и любого $T \in \mathbf{R}$, $T \neq 0$ выполняется равенство $y(x + T) = y(x) = b$.

4. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.

   1) с $Oy: \begin{cases} x = 0 \\ y = b \end{cases}$, т.е. $(0; b)$ – точка пересечения с осью Oy.

   2) с $Ox: y = 0 \Rightarrow kx + b = 0$ (1).

      а) если $k \neq 0$, то $x = -\frac{b}{k}$.

      б) если $k = 0$, $b \neq 0$, то уравнение (1) решений не имеет и, значит, график функции $y = b$ ($b \neq 0$) с осью Ox не пересекается.

      в) если $k = 0$ и $b = 0$, то уравнение (1) имеет бесконечное множество решений и график функции $y = 0$ совпадает с осью Ox.

5. Найдем интервалы знакопостоянства, т.е. интервалы, на которых функция сохраняет знак. Пусть $k \neq 0$.

   1) $y > 0$, $kx + b > 0 \Leftrightarrow kx > -b$.

      а) Если $k > 0$, то $x > -\frac{b}{k}$,

      б) Если $k < 0$, то $x < -\frac{b}{k}$,

   2) $y < 0$, $kx + b < 0 \Leftrightarrow kx < -b$.

      а) Если $k > 0$, то $x < -\frac{b}{k}$,

      б) Если $k < 0$, то $x > -\frac{b}{k}$.

   Итак, при $k > 0$ $y > 0$ при всех $x \in \left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$, $y < 0$ при всех $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$; при $k < 0$ $y > 0$ при всех $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$; $y < 0$ при всех $x \in \left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$, при $k = 0$ и $b > 0$, $y = b > 0$ при $x \in \mathbf{R}$, при $k = 0$ и $b < 0$, $y < 0$ при $x \in \mathbf{R}$.

6. Найдем промежутки монотонности функции и экстремум функции.

   1) Пусть $k > 0$. Возьмем $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ такие, что $x_2 > x_1$. Тогда $y_2 - y_1 = (kx_2 + b) - (kx_1 + b) = k(x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow y_2 > y_1$, значит функция y возрастает ($\uparrow$) на $\mathbf{R}$.

   2) Пусть $k < 0$, тогда при $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ таких, что $x_2 > x_1$, имеем $y_2 - y_1 = k\,(x_2 - x_1) < 0 \Rightarrow y_2 < y_1$ и функция y убывает ($\downarrow$) на $\mathbf{R}$.

   3) Пусть $k = 0$, тогда $y = b$ – постоянная функция.

Т.к. функция $y = kx + b$ при любом "k" либо всюду убывает, либо всюду возрастает, либо постоянная, то она не имеет экстремумов.

Замечание. Исследовать функцию на монотонность можно с помощью производной.

Функция $y = kx + b$ дифференцируема на $\mathbf{R}$ и ее производная $y' = (kx + b)' = k$.

Если $k > 0$, то $y' > 0$, значит y возрастает на $\mathbf{R}$.

Если $k < 0$, то $y' < 0$, значит y убывает на $\mathbf{R}$.

Если $k = 0$, то $y' = 0$ и $y = \mathrm{const}$.

Производная функции ни при каких значениях x не обращается в 0, поэтому функция не имеет критических точек, а, значит, и точек экстремума.

7. Изобразим график функции $y = kx + b$.

а) $k \neq 0$, $b \neq 0$ б) $k \neq 0$, $b = 0$, $y = kx$

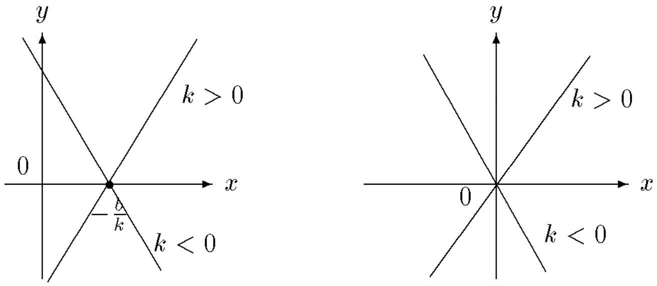


Рис.1

в) $k = 0$, $b \neq 0$, $y = b$ г) $k = 0$, $b = 0$, $y = 0$ (Ox)

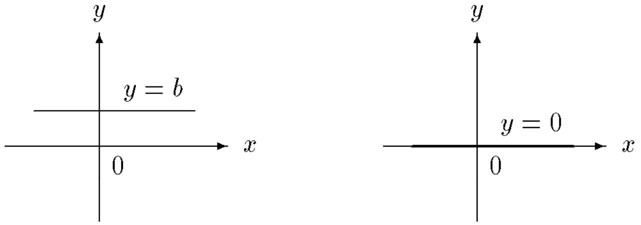


Рис.2

8. Область значений.

а) При $k \neq 0$ $y \in \mathbf{R}$, т.е. $E(y) = \mathbf{R}$.

б) При $k = 0$ $y = b$, т.е. $E(y) = \{b\}$.

2. Свойства функции $y = \frac{k}{x}$ и ее график.

Определение. Функция вида $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$ называется *обратной пропорциональностью* (см. ч. I, п. 14).

Свойства функции.

1. $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ (т.к. деление на 0 невозможно).

2. Исследуем на четность. Область определения симметрична относительно начала координат и $y(-x) = \frac{k}{(-x)} = -\frac{k}{x} = -y(x)$ при всех $x \in D(y)$.

   Значит, функция $y = \frac{k}{x}$ нечетная и ее график симметричен относительно начала координат.

3. Исследуем на периодичность.

   Предположим, что функция периодическая с периодом T, тогда $y(x + T) = y(x)$ для любого $x \in D(y)$, т.е. $\frac{k}{x+T} = \frac{k}{x} \Leftrightarrow T + x = x \Leftrightarrow T = 0$, что противоречит определению периода. Значит, функция $y = \frac{k}{x}$ – непериодическая.

4. График функции $y = \frac{k}{x}$ с осями координат не пересекается.

5. Найдем интервалы знакопостоянства функции.

   1) Пусть $k > 0$.
      а) $y > 0 \Rightarrow \frac{k}{x} > 0 \Rightarrow x > 0$;
      б) $y < 0 \Rightarrow \frac{k}{x} < 0 \Rightarrow x < 0$.
   2) Пусть $k < 0$.
      а) $y > 0 \Rightarrow \frac{k}{x} > 0 \Rightarrow x < 0$;
      б) $y < 0 \Rightarrow \frac{k}{x} < 0 \Rightarrow x > 0$.

   Итак: если $k > 0$, то $y > 0$ при $x \in (0; +\infty)$, $y < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$; если $k < 0$, то $y > 0$ при $x \in (-\infty; 0)$, $y < 0$ при $x \in (0; +\infty)$.

6. Найдем промежутки монотонности и экстремумы функции.

   1) Пусть $k > 0$. Возьмем $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$ такие, что $x_2 > x_1$, тогда $y_2 - y_1 = \frac{k}{x_2} - \frac{k}{x_1} = \frac{k(x_1 - x_2)}{x_1 \cdot x_2} < 0$, т.е. $y_2 < y_1$, и значит, $y \downarrow$ на $(0; +\infty)$
      Если $x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$ и $x_2 > x_1$, то $y_2 - y_1 < 0$ и $y_2 < y_1$, значит, $y \downarrow$ на $(-\infty; 0)$.

2) Пусть $k < 0$. Если $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$ и $x_2 > x_1$, тогда $y_2 - y_1 > 0$, т.е. $y_2 > y_1$, и значит, $y \uparrow$ на $(0; +\infty)$

Если $x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$ и $x_2 > x_1$, то $y_2 - y_1 > 0$, т.е. $y_2 > y_1$, значит, $y \uparrow$ на $(-\infty; 0)$.

Так как функция монотонна на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, то она экстремумов не имеет.

Замечание. Исследовать функцию на экстремум и монотонность можно с помощью производной.

Функция $y = \frac{k}{x}$ дифференцируема на $D(y)$ и ее производная $y' = \left(\frac{k}{x}\right)' = -\frac{k}{x^2}$.

Так как $x^2 > 0$ на $D(y)$, то знак производной зависит от знака k. При $k > 0$ $y' < 0$ и, значит, y убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$.

При $k < 0$ $y' > 0$ и, значит, y возрастает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$.

Точек экстремума функция не имеет.

7. При неограниченном увеличении (уменьшении) x значения функции стремятся к нулю.

8. Используя свойства функции, изобразим график функции, который называется гиперболой.

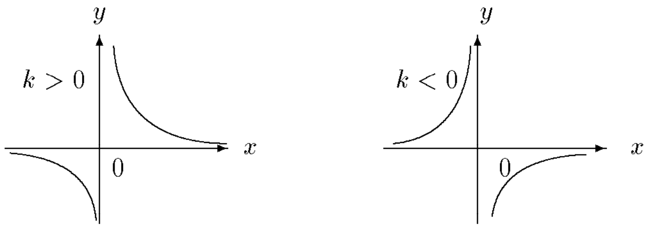


Рис.3

1. Областью значений функции является множество всех действительных чисел, кроме 0, т.е. $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

3. Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ и ее график.

Определение. Функция, задаваемая формулой $y = ax^2 + bx + c$, где $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, называется *квадратичной функцией.*

Свойства.

1. Областью определения функции являются все действительные числа, т.е. $D(y) = \mathbf{R}$.

2. Исследуем на периодичность. Предположим, что функция периодическая с периодом T. Тогда для любого $x \in \mathbf{R}$: $y(x+T) = y(x)$, т.е. $a(x+T)^2 + b(x+T) + c = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow 2axT + aT^2 + bT = 0 \Leftrightarrow T(2ax + aT + b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} T = 0, \\ T = \frac{-b-2ax}{a}. \end{array} \right.$

   Период не может равняться нулю и не может зависеть от переменной x, следовательно, квадратичная функция не периодическая.

3. Исследуем на четность.

   Область определения функции симметрична относительно начала координат.

   1) Пусть $b = 0$. Тогда $y = ax^2 + c$. При любом $x \in D(y)$ $y(-x) = a(-x)^2 + c = ax^2 + c = y(x)$, значит функция $y = ax^2 + c$ – четная и ее график симметричен относительно оси Oy.
   2) Пусть $b \neq 0$. Очевидно, что при всех $x \neq 0$ $y(-x) = a(-x)^2 + b(-x) + c = ax^2 - bx + c$. $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$. При $b \neq 0$ квадратичная функция ни четная, ни нечетная.

4. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.

   1) с Oy : $\begin{cases} x = 0, \\ y = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = c. \end{cases}$

      Следовательно, $(0; c)$ – точка пересечения графика функции с Oy.
   2) с Ox : $\begin{cases} y = 0, \\ ax^2 + bx + c = 0 \end{cases}$.

   а) Если $D = b^2 - 4ac > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ и график функции пересекает ось Ox в двух точках $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$. Пусть для определенности $x_2 > x_1$.

   б) Если $D = 0$, то $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ и график функции имеет с осью Ox одну общую точку $\left(-\frac{b}{2a}; 0\right)$.

   в) Если $D < 0$, то уравнение действительных корней не имеет и график функции с осью Ox не пересекается.

5. Найдем промежутки знакопостоянства функции.

   Преобразуем функцию:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right) \qquad (1)$$

1) Если $a > 0$ и $D < 0$, то $y > 0$ при $x \in \mathbf{R}$.
2) Если $a < 0$ и $D < 0$, то $y < 0$ при $x \in \mathbf{R}$.
3) Если $a > 0$ и $D = 0$, то $y > 0$ при любом x кроме $x = -\frac{b}{2a}$.
4) Если $a < 0$ и $D = 0$, то $y < 0$ при $x \neq -\frac{b}{2a}$.
5) Если $a > 0$ и $D > 0$, то $y = a(x-x_1)(x-x_2)$ и $y > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$, и $y < 0$ при $x \in (x_1; x_2)$.
6) Если $a < 0$ и $D > 0$, то $y > 0$ при $x \in (x_1; x_2)$ и $y < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

6. Найдем промежутки монотонности и экстремум функции.

В пункте 5 было получено выражение (1) для функции

$$y = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) \quad \text{или}$$

$$y = a \cdot \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Обозначим $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = -\frac{b^2-4ac}{4a}$, тогда

$$y = a(x-x_0)^2 + y_0. \qquad (2)$$

1) Пусть $a > 0$. Возьмем x_1 и x_2 такие, что $x_2 > x_1 \geq x_0$. Рассмотрим $y_2 - y_1 = a(x_2-x_0)^2 + y_0 - a(x_1-x_0)^2 - y_0 = a(x_2-x_1)((x_2-x_0)+(x_1-x_0))$. Т.к. $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$ и т.к. $x_2 > x_1 \geq x_0$, то $(x_2-x_0)+(x_1-x_0) > 0$, значит $y_2 - y_1 > 0 \Rightarrow y_2 > y_1 \Rightarrow y \uparrow$ на $[x_0; +\infty)$.

   Возьмем x_1 и x_2 такие, что $x_1 < x_2 \leq x_0$. Тогда $(x_2-x_0) + (x_1-x_0) < 0 \Rightarrow y_2 - y_1 < 0 \Rightarrow y_2 < y_1 \Rightarrow y \downarrow$ на $(-\infty; x_0]$.

   Так как функция возрастает на промежутке $[x_0; +\infty)$, то при любом $x \in [x_0; +\infty)$ выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$. Из того, что функция убывает на $(-\infty; x_0]$, следует, что при любом $x \in (-\infty; x_0]$ $f(x) \geq f(x_0)$. По определению минимума, точка $x_0 = -\frac{b}{2a}$ является точкой минимума. При этом $y_{\min} = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

2) Аналогично рассматривается случай, когда $a < 0$. При этом $y \uparrow$ на $(-\infty; x_0]$ и $y \downarrow$ на $[x_0; +\infty)$. Точка $x_0 = -\frac{b}{2a}$ является точкой максимума. При этом $y_{\max} = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Замечание. Исследовать функцию на возрастание, убывание и экстремум можно с помощью производной.

Функция $y = ax^2 + bx + c$ дифференцируема на $\mathbf{R}$ и ее производная $y' = \left(ax^2 + bx + c\right)' = 2ax + b = 2a\left(x + \frac{b}{2a}\right)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 2ax + b = 0 = lrax = -\frac{b}{2a}$— критическая точка.

7. График квадратичной функции называется параболой. Точка с координатами (x_0, y_0) называется вершиной параболы. В зависимости от знаков a и D график имеет один из следующих видов.

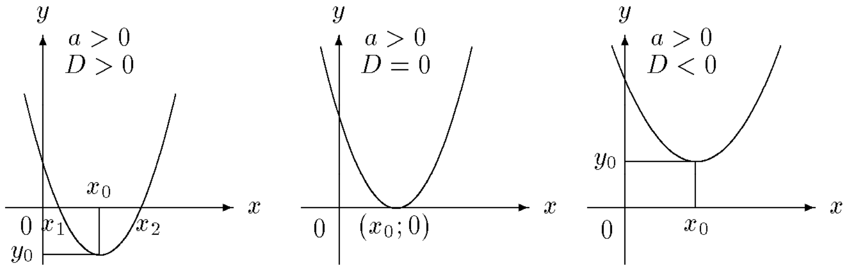


Рис.4

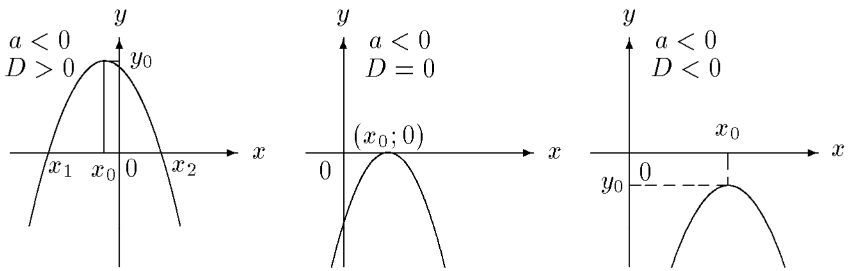


Рис.5

8. Область значений функции можно определить по ее графику.

1) При $a > 0$ $E(y) = \left[-\frac{b^2-4ac}{4a}; +\infty\right)$.

2) При $a < 0$ $E(y) = \left(-\infty; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right]$.

График функции $y = ax^2 + bx + c = a\left(x - x_0\right)^2 + y_0$ можно получить из графика функции $y = x^2$ с помощью следующих преобразований:

1) Параллельный перенос графика функции $y = x^2$ на расстояние x_0 вправо, если $x_0 > 0$ и на $|x_0|$ влево, если $x_0 < 0$. Получим график функции $y = \left(x - x_0\right)^2$.

2) Растяжение графика $y = \left(x - x_0\right)^2$ в a раз вдоль оси Oy, если $a > 1$ и сжатие в $\frac{1}{a}$ раз, если $0 < a < 1$. Получится график функции $y = a\left(x - x_0\right)^2$, где $a > 0$. Если $a < 0$, то сначала строят график $y = -a\left(x - x_0\right)^2$, а затем его зеркально отражают относительно оси абсцисс.

3) Параллельный перенос графика $y = a\left(x - x_0\right)^2$ вдоль оси Oy вверх на y_0, если $y_0 > 0$, и вниз на $|y_0|$, если $y_0 < 0$.

4. Формула корней квадратного уравнения.

Определение. Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, называется *квадратным.*

Так как $a \neq 0$, разделим обе части уравнения на a.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Выделим полный квадрат.

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0.$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0.$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Выражение $b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* квадратного уравнения и обозначается

$$D = b^2 - 4ac.$$

Уравнение принимает вид:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{D}{4a^2}. \qquad (1)$$

Рассмотрим три случая:
1) $D>0$, тогда

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{D}}{2a} \Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},$$

т.е. уравнение имеет два действительных различных корня.
2) $D=0$, тогда

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a},$$

т.е уравнение имеет один действительный корень кратности два.

2) $D<0$, тогда равенство (1) не выполняется ни при каких значениях $x\in\mathbf{R}$, т.е. уравнение действительных корней не имеет.

Если в квадратном уравнении $b=0$ или $c=0$, то уравнение называется неполным.

1) При $b=0$, $c\neq 0$ имеем $ax^2+c=0 \Leftrightarrow x^2=-\frac{c}{a}$. Это уравнение имеет решение, если a и c разных знаков, тогда $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Если же a и c одного знака, то уравнение корней не имеет.

2) При $b\neq 0$ $c=0$ имеем уравнение $ax^2+bx=0 \Leftrightarrow x=0$ или $x=-\frac{b}{a}$.

3) При $b=c=0$ $ax^2=0 \Leftrightarrow x=0$.

5. Разложение квадратного трехчлена на множители.

Определение. Выражение ax^2+bx+c, где $a,b,c\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$, называется *квадратным трехчленом.*

Преобразуем это выражение, выделив полный квадрат.

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right) \qquad (1)$$

1) Если $D > 0$, то $D = \left(\sqrt{D}\right)^2$ и (1) можно преобразовать, воспользовавшись формулой разности квадратов.

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2\right) =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right) =$$

$$= a\left(x - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}\right) =$$

$$= a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right),$$

где x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

2) Если $D = 0$, то (1) перепишется

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

3) Если $D < 0$, то квадратный трехчлен на множители не разлагается, т.к. в противном случае квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имело бы корни, что невозможно.

6. Свойства числовых неравенств.

Определение. Число "a" называют большим (меньшим) числа "b" если $a - b$ положительное (отрицательное) число.

В дальнейшем будут использоваться следующие аксиомы положительных действительных чисел: сумма и произведение положительных действительных чисел положительны.

Свойства числовых неравенств:

1. Если $a > b$, то $b < a$.

Доказательство. Рассмотрим разность $b - a = -(a - b) < 0$, т.к. из того, что $a > b$ следует, что $a - b > 0$, а число, противоположное положительному числу, отрицательное. Так как $b - a < 0$, то $b < a$, ч.т.д.

2. Если $a > b$, $b > c$, то $a > c$.

Доказательство. Рассмотрим разность $a - c = a - b + b - c = (a - b) + (b - c) > 0$, т.к. из того, что $a > b \Rightarrow a - b > 0$ и из $b > c \Rightarrow b - c > 0$, а сумма двух положительных чисел есть число положительное. Так как $a - c > 0$, то $a > c$, ч.т.д.

3. Если $a > b$ и $c \in \mathbf{R}$, то $a + c > b + c$.

К обеим частям неравенства можно прибавить любое число, знак неравенства при этом сохраняется.

Доказательство. Рассмотрим разность $(a + c) - (b + c) = a - b > 0$, т.к. $a > b$. Из того, что $(a + c) - (b + c) > 0$ следует, что $a + c > b + c$, ч.т.д.

4. Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$.

При умножении обеих частей неравенства на положительное число знак неравенства сохраняется.

Доказательство. Рассмотрим разность $ac - bc = c(a - b) > 0$, т.к. $c > 0$ и из того, что $a > b$ следует $a - b > 0$, а произведение двух положительных чисел положительно. Из того, что $ac - bc > 0$ следует $ac > bc$, ч.т.д.

5. Если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$.

При умножении обеих частей неравенства на отрицательное число следует изменить знак неравенства.

Доказательство. $ac - bc = c(a - b) < 0$, т.к. $c < 0$, $a - b > 0$. Из того, что $ac - bc < 0$ следует $ac < bc$, ч.т.д.

6. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

Неравенства одного знака можно почленно складывать.

Доказательство. Рассмотрим разность $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d) > 0$, т.к. из условия следует, что $a - b > 0$ и $c - d > 0$, а сумма двух положительных чисел есть число положительное. Из того, что $(a + c) - (b + d) > 0$ следует, что $a + c > b + d$, ч.т.д.

7. Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$.

Неравенства разных знаков можно почленно вычитать, поставив знак того неравенства, из которого вычитают.

Доказательство. $(a - c) - (b - d) = (a - b) + (d - c) > 0$, т.к. из условия следует, что $a - b > 0$ и $d - c > 0$. Так как $(a - c) - (b - d) > 0$, то $a - c > b - d$, ч.т.д.

8. Если $a > b$ и $c > d$ и числа $a, b, c, d > 0$ то $ac > bd$.

Неравенства одного знака с положительными членами можно почленно умножать.

Доказательство. $ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d) > 0$, т.к. $c > 0$, $a - b > 0$, $b > 0$, $c - d > 0$. Так как $ac - bd > 0$, то $ac > bd$, ч.т.д.

9. Если $a > b$ и $a > 0$, $b > 0$ то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Числа, обратные к положительным числам, связаны неравенством противоположного знака.

Доказательство. Рассмотрим разность $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} < 0$, т.к. $a > 0$, $b > 0$, $b - a < 0$. Так как $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} < 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, ч.т.д.

10. Если $a > b$ и $a > 0$, $b > 0$ то для любого натурального числа n $a^n > b^n$.

Доказательство. Умножим неравенство $a > b$ само на себя. Тогда, по свойству 8, имеем $a^2 > b^2$. Применим еще раз свойство 8 к неравенствам $a^2 > b^2$ и $a > b$, получим $a^3 > b^3$. Продолжая аналогичным образом, получим, что для любого натурального числа n $a^n > b^n$, ч.т.д.

7. Логарифм произведения, степени, частного.

Определение. Логарифмом положительного числа a по основанию b, где $b > 0$, $b \neq 1$, называется показатель степени, в которую нужно возвести число b, чтобы получить число a.

Из определения следует, что для $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$

$$\log_b a = n \Leftrightarrow b^n = a \tag{1}$$

Из (1) имеем основное логарифмическое тождество

$$b^{\log_b a} = a. \tag{2}$$

Свойства.

1. Логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов сомножителей. Т.е., если $x > 0$, $y > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$, то верно равенство

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y. \tag{3}$$

Доказательство. Обозначим $\log_b x = m$, $\log_b y = n$. Тогда, по определению логарифма, из (1) имеем $x = b^m$ и $y = b^n$.

Перемножим эти равенства

$$x \cdot y = b^m \cdot b^n \Leftrightarrow x \cdot y = b^{m+n}.$$

По определению логарифма имеем:

$$\log_b(xy) = m + n = \log_b x + \log_b y, \tag{3}$$

ч.т.д.

Замечание. Если оба сомножителя x и y отрицательные, то логарифм произведения существует и формула (3) перепишется так:

$$\log_b(xy) = \log_b\left((-x) \cdot (-y)\right) = \log_b(-x) + \log_b(-y), \tag{4}$$

где $-x > 0$, $-y > 0$, или, объединяя (3) и (4), если x и y одного знака, имеем

$$\log_b(xy) = \log_b |x| + \log_b |y|.$$

2. Логарифм степени x^n, где $x > 0$, и $n \in \mathbf{R}$, равен произведению показателя степени на логарифм основания, т.е. если $x > 0$, $n \in \mathbf{R}$, $b > 0$, $b \neq 1$, то верно равенство

$$\log_b x^n = n \log_b x. \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим $\log_b x = m$, тогда по определению логарифма $b^m = x$. Возведем обе части этого равенства в степень "n".

$$(b^m)^n = x^n \Leftrightarrow b^{m\cdot n} = x^n \Leftrightarrow \log_b x^n = mn = n \cdot \log_b x.$$

Замечание. Если n – четное число, а $x < 0$, то логарифм выражения x^n существует и формула (5) запишется так:

$$\log_b x^n = n \log_b |x|.$$

3. Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов числителя и знаменателя, т.е. если $x > 0$, $y > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$, то справедлива формула

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y. \tag{6}$$

Доказательство. Обозначим $\log_b x = m$, $\log_b y = n$. По определению логарифма имеем $b^m = x$ и $b^n = y$. Разделим первое равенство на второе

$$\frac{b^m}{b^n} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow b^{m-n} = \frac{x}{y}.$$

По определению логарифма $\log_b \frac{x}{y} = m - n = \log_b x - \log_b y$.

Замечание. Если $x < 0$, $y < 0$ и $b > 0$, $b \neq 1$, то логарифм частного существует и справедлива формула:

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b(-x) - \log_b(-y). \tag{7}$$

Объединяя формулы (6) и (7) в том случае, когда x и y одного знака и $b > 0$, $b \neq 1$ имеем

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b |x| - \log_b |y|.$$

8. Определение и свойства функции $y = \sin x$ и ее график.

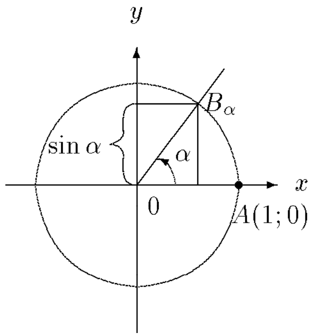


Рис.6

Рассмотрим окружность с центром в начале координат и радиусом равным 1 (так называемая тригонометрическая окружность) (рис.6). Рассмотрим на этой окружности точку $A(1;0)$. Каждой точке B окружности соответствует бесконечное множество дуг, имеющих начало в точке A и конец в точке B. Одной из них является кратчайшая дуга, соединяющая эти две точки, а остальные отличаются от кратчайшей дуги на число, кратное длине окружности единичного радиуса, т.е. на $2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$. При этом говорят, что точка A совершила поворот на дугу AB. Если поворот совершился против часовой стрелки, то величина дуги берется со знаком плюс, если по часовой стрелке – то со знаком минус.

Таким образом, если α_0 – величина кратчайшей дуги, соединяющей точки А и B, то величины всех дуг, начинающихся в А, и оканчивающихся в В,имеют вид $\alpha = \alpha_0 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Итак, каждому действительному числу α соответствует точка B_α окружности такая, что величина дуги AB_α равна α, а каждая точка B окружности соответствует бесконечному множеству чисел вида $\alpha + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, где α – величина одной из дуг, соединяющих точки A и B.

Определение. Синусом числа α называется ордината точки B_α, полученной поворотом точки $A(1;0)$ на дугу α; обозначается $\sin\alpha$.

Дугу измеряют как в градусах, так и в радианах.

Так как каждому действительному числу α поставлено в соответствие число $\sin\alpha$, то на множестве $\mathbf{R}$ определена функция $y = \sin\alpha$.

Так как принято аргумент обозначать буквой x, то в дальнейшем будем рассматривать функцию $y = \sin x$, понимая под x величину дуги AB_α, а не абсциссы точек плоскости Oxy.

Свойства функции $y = \sin x$.

1. Областью определения функции является множество всех действительных чисел, т.к. любому действительному числу соответствует точка окружности, а, значит, и значение синуса этого числа, т.е. $D(\sin) = \mathbf{R}$.

2. Исследуем функцию на периодичность.

Покажем, что число $T = 2\pi$ является периодом функции $y = \sin x$.

1) Для любого $\alpha \in D(y)$, $\alpha \pm 2\pi \in D(y)$.

2) Точки B_α и $B_{\alpha+2\pi}$ совпадают, а это означает, что их ординаты одинаковые, т.е. $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha$ для любого $\alpha \in \mathbf{R}$.

Из этого равенства следует, что $T = 2\pi$ является периодом функции $y = \sin x$. Покажем, что положительного периода, меньшего 2π не существует.

Предположим, что существует число $T \in (0, 2\pi)$ такое, что для любого $x \in \mathbf{R}$ выполняется равенство

$$\sin(x + T) = \sin x, \tag{1}$$

но тогда оно выполняется и при $x = \frac{\pi}{2}$. Подставим $x = \frac{\pi}{2}$ в (1).

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = \sin\frac{\pi}{2} \quad \text{или} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = 1,$$

но, как видно из тригонометрической окружности, синус принимает значение равное 1 лишь при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, т.е.

$$\frac{\pi}{2} + T = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \Leftrightarrow T = 2\pi n, \qquad n \in \mathbf{Z}.$$

Отсюда следует, что положительного периода меньшего 2π не существует.

Так как $T = 2\pi$ – наименьший положительный период функции $y = \sin x$, то любой период функции имеет вид $T = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$.

3 Исследуем функцию на четность, нечетность.

Область определения функции симметрична относительно начала координат.

Рассмотрим на тригонометрической окружности точки B_α и $B_{-\alpha}$, соответствующие дугам α и $-\alpha$. Пусть $0 \le \alpha < 2\pi$, тогда $-2\pi < -\alpha \le 0$ (см. рис.7). Так как окружность симметрична относительно любого своего диаметра, то точки B_α и $B_{-\alpha}$ симметричны относительно оси Ox, и, значит, их ординаты противоположны, следовательно противоположны синусы дуг α и $-\alpha$, т.е. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

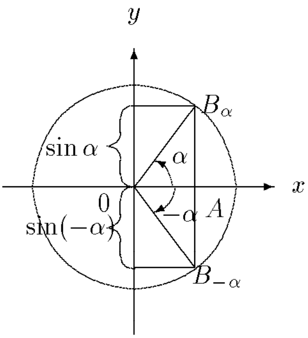


Рис.7

Если α – произвольное действительное число, то представим его в виде $\alpha = 2\pi n + \alpha_0$, где $n \in \mathbf{Z}$, $\alpha_0 \in [0; 2\pi)$, тогда $-\alpha = -2\pi n - \alpha_0$, $n \in \mathbf{Z}$ и $-\alpha_0 \in (-2\pi; 0]$. В этом случае точки B_α и $B_{-\alpha}$ совпадают с точками B_{α_0} и $B_{-\alpha_0}$, где $\alpha_0 \in [0; 2\pi)$ и, как следует из предыдущего, $\sin(-\alpha_0) = -\sin\alpha_0$, т.е. $\sin(-\alpha + 2\pi n) = -\sin(\alpha - 2\pi n)$, но в силу периодичности имеем $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

Итак, доказано, что для любого $x \in \mathbf{R}$ справедливо равенство $\sin(-x) = -\sin x$, т.е. функция $y = \sin x$ – нечетная.

4. Найдем точки пересечения графика функции $y = \sin x$ с осями координат

   а) с Oy : $\begin{cases} x = 0, \\ y = \sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

   Следовательно, $(0; 0)$ – точка пересечения гарфика функции с осью Oy.

   б) с Ox : $\begin{cases} y = 0, \\ \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x = \pi n, n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

   Итак, график функции пересекается с осью Ox в точка $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. Найдем интервалы знакопостоянства функции.

   а) $y > 0$ т.е. $\sin x > 0 \Leftrightarrow x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

   б) $y < 0$ т.е. $\sin x < 0 \Leftrightarrow x \in (\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Замечание. Интервалы знакопостоянства были получены из определения синуса и из того, что точки тригонометрической окружности с положительными ординатами находятся в I и II четвертях, а точки с отрицательными ординатами – в III и IV четвертях.

6. Найдем промежутки монотонности и экстремумы функции.

Рассмотрим промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ длиной 2π.

Возьмем два различных значения x_1 и x_2 такие, что $-\frac{\pi}{2} \le x_1 < x_2 \le \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим разность

$$y_2 - y_1 = \sin x_2 - \sin x_1 = 2\sin\frac{x_2 - x_1}{2}\cos\frac{x_2 + x_1}{2}.$$

Так как $-\frac{\pi}{2} \le x_1 < \frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} < x_2 \le \frac{\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1+x_2}{2} < \pi$, значит, $\cos\frac{x_1+x_2}{2} > 0$.

Из этих же условий, а так же из того, что $x_2 > x_1$ следует, что $0 < \frac{x_2-x_1}{2} \le \frac{\pi}{2}$, поэтому $\sin\frac{x_2-x_1}{2} > 0$.

Значит $y_2 - y_1 > 0$, отсюда $y_2 > y_1$, а, значит, $y \uparrow$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Аналогично, если

$\frac{\pi}{2} \le x_1 < x_2 \le \frac{3\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} < \frac{x_1+x_2}{2} < \frac{3\pi}{2}$ и поэтому $\cos\frac{x_1+x_2}{2} < 0$.

Из этих же условий, а так же из того, что $x_2 > x_1$ следует, что $0 < \frac{x_2-x_1}{2} \le \frac{\pi}{2}$, поэтому $\sin\frac{x_2-x_1}{2} > 0$.

Тогда $y_2 - y_1 < 0$, следовательно $y_2 < y_1$, а, значит, $y \downarrow$ на $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

В силу периодичности, функция $y = \sin x$ возрастает на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$ и убывает на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$.

Точка $x = \frac{\pi}{2}$ является точкой максимума, так как при $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция возрастает, т.е. при любом $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ $\sin x < \sin\frac{\pi}{2}$, а при $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ функция убывает, т.е. при любом $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ $\sin x < \sin\frac{\pi}{2}$. В силу периодичности функции $y = \sin x$ точки $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ являются точками максимума.

Проводя аналогичные рассуждения, делаем вывод, что точки $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, являются точками минимума.

Замечание. Исследовать функцию $y = \sin x$ на возрастание, убывание и экстремум можно с помощью производной.

Функция $y = \sin x$ дифференцируема на $\mathbf{R}$ и ее производная $y' = (\sin x)' = \cos x$.

$y' > 0$, т.е. $\cos x > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

$y' < 0$, т.е. $\cos x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Из этого и из того, что функция $y = \sin x$ непрерывна на $\mathbf{R}$ имеем:

$y \uparrow$ на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$;

$y \downarrow$ на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$.

$y' = 0$, т.е. $\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Следовательно, $x = \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ – критические точки.

При переходе через точки $x = \frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, производная меняет знак "+" на " − ", значит $x = \frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ – точки максимума, при этом $y_{max} = \sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) = 1$.

Аналогичные рассуждения позволяют сделать вывод, что $x = -\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ – точки минимума, $y_{min} = -1$.

7. График функции $y = \sin x$, называемый синусоидой, изображен на рис.8.

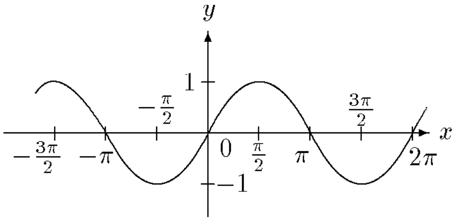


Рис.8

8. Область значений функции $y = \sin x$ есть отрезок $[-1; 1]$, так как ординаты точек тригонометрической окружности принимают значения из этого промежутка. С другой стороны любому значению $b \in [-1; 1]$ можно указать хотя бы одно значение угла $\alpha \in \mathbf{R}$ такое, что $\sin\alpha = b$. Итак $E(\sin) = [-1; 1]$.

8′. Определение и свойства функции $y = \cos x$ и ее график.

Рассмотрим тригонометрическую окружность и точку B_α этой окружности, соответствующую некоторому действительному числу α. (Все, что касается этого соответствия смотри в предыдущем вопросе.)

Определение. Косинусом числа α называется абсцисса точки B_α (рис. 9) и обозначается $\cos\alpha$.

Функцией $y = \cos x$ назовем соответствие, при котором любому действительному числу x ставится в соответствие косинус этого числа по введенному определению.

При этом через x мы обозначили число α.

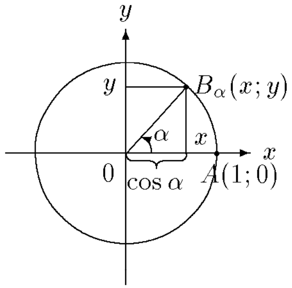


Рис.9

Свойства функции $y = \cos x$.

1. Область определения.

   $D(y) = \mathbf{R}$, так как любому действительному числу α соответствует точка B_α на тригонометрической окружности такая, что величина дуги AB_α равна α.

2. Периодичность.

   Покажем, что $T = 2\pi$ является периодом функции $y = \cos x$.

   1) Для любого $x \in D(y)$, $x \pm 2\pi \in D(y)$.

   2) Рассмотрим две точки окружности B_α и $B_{\alpha+2\pi}$. Они совпадают, а значит $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$. Так как это равенство верно для любого $\alpha \in D(y)$, то число $T = 2\pi$ является периодом функции $y = \cos x$. Покажем, что положительного периода, меньшего 2π, не существует. Докажем это методом от противного.

   Предположим, что существует период $0 < T < 2\pi$, т.е. для любого $x \in D(y)$ выполняется равенство:

   $$\cos(x + T) = \cos x.$$

   Тогда это равенство будет верным и при $x = 0$, т.е. $\cos(0 + T) = \cos 0$, но $\cos 0 = 1$, значит $\cos T = 1$. Последнее равенство возможно только, если $T = 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$, а это означает, что положительного числа T, меньшего 2π не существует, следовательно, наше предположение неверно и функция $y = \cos x$ имеет наименьший положительный период 2π.

Замечание. Так как $T = 2\pi$ – наименьший положительный период функции $y = \cos x$, то любой ее период имеет вид $T = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$.

3 Четность или нечетность.

Область определения функции симметрична относительно начала координат.

Рассмотрим на тригонометрической окружности точки B_α и $B_{-\alpha}$, соответствующие дугам α и $-\alpha$. Пусть $0 \le \alpha < 2\pi$, тогда $-2\pi < -\alpha \le 0$ (см. рис.7). Так как окружность симметрична относительно любого своего диаметра, то точки B_α и $B_{-\alpha}$ симметричны относительно оси Ox, и, значит, их абсциссы равны, следовательно равны косинусы дуг α и $-\alpha$, т.е. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

Если α – произвольное действительное число, то представим его в виде $\alpha = 2\pi n + \alpha_0$, где $n \in \mathbf{Z}$, $\alpha_0 \in [0; 2\pi)$, тогда $-\alpha = -2\pi n - \alpha_0$, $n \in \mathbf{Z}$ и $\alpha_0 \in (-2\pi; 0]$. В этом случае точки B_α и $B_{-\alpha}$ совпадают с точками B_{α_0} и $B_{-\alpha_0}$, где $\alpha_0 \in [0; 2\pi)$ и, как следует из предыдущего, $\cos(-\alpha_0) = \cos\alpha_0$, т.е. $\cos(-\alpha + 2\pi n) = \cos(\alpha - 2\pi n)$, но в силу периодичности имеем $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

Итак, доказано, что для любого $x \in \mathbf{R}$ справедливо равенство $\cos(-x) = \cos x$, т.е. функция $y = \cos x$ – четная, а, значит, график этой функции симметричен относительно оси Oy.

4. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.

   а) с $Oy: \begin{cases} x = 0, \\ y = \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$

   Следовательно, $(0; 1)$ – точка пересечения гарфика функции с осью Oy.

   б) с $Ox: \begin{cases} y = 0, \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

   Итак, график функции пересекается с осью Ox в точка $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. Найдем интервалы знакопостоянства функции.

   $y > 0$, т.е. $\cos x > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

   $y < 0$, т.е. $\cos x < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

6. Найдем промежутки возрастания, убывания и экстремумы функции.

   Из тригонометрической окружности и из определения косинуса видно, что абсциссы точек уменьшаются при увеличении угла α от 0 до π и увеличиваются при увеличении угла α от π до 2π.

Найдем интервалы монотонности функции, используя определения возрастания и убывания функции.

Рассмотрим два различных значения аргумента x_1 и x_2 такие, что $0 \leq x_1 < x_2 \leq \pi$.

Оценим разность

$$y_2 - y_1 = \cos x_2 - \cos x_1 = -2 \sin \frac{x_2 + x_1}{2} \cdot \sin \frac{x_2 - x_1}{2}.$$

Так как

$0 \leq x_1 < \pi$, $0 < x_2 \leq \pi$, то

$0 < \frac{x_1+x_2}{2} < \pi$, значит, $\sin \frac{x_1+x_2}{2} > 0$.

Из тех же условий и из того, что $x_2 > x_1$ следует, что $0 < \frac{x_2-x_1}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, значит, $\sin \frac{x_2-x_1}{2} > 0$.

Следовательно, $y_2 - y_1 < 0$ и, значит, $y_2 < y_1$, а это означает, что функция $y = \cos x$ убывает на промежутке $[0; \pi]$.

Аналогично доказывается, что $y = \cos x$ возрастает на $[\pi; 2\pi]$.

С учетом периодичности функции, можно сделать вывод, что функция монотонно возрастает на каждом из промежутков $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbf{Z}$ и монотонно убывает на каждом из промежутков $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbf{Z}$.

Точка $x = 0$ является точкой максимума, так как при $x \in [-\pi; 0]$ функция возрастает, т.е. при любом $x \in [-\pi; 0)$ $\cos x < \cos 0$, а при $x \in [0; \pi]$ функция убывает, т.е. при любом $x \in (0; \pi]$ $\cos x < \cos 0$. В силу периодичности функции $y = \cos x$ точки $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ являются точками максимума.

Проводя аналогичные рассуждения, делаем вывод, что точки $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, являются точками минимума.

Замечание. Найти промежутки возрастания и убывания, а также точки экстремума функции, можно с помощью производной.

Функция $y = \cos x$ дифференцируема на $\mathbf{R}$ и ее производная $y' = (\cos x)' = -\sin x$.

$y' > 0 \Rightarrow -\sin x > 0 \Rightarrow \sin x < o \Leftrightarrow x \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

$y' < 0 \Rightarrow -\sin x < 0 \Rightarrow \sin x > o \Leftrightarrow x \in (2\pi n, \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Из этого и из того, что функция $y = \cos x$ непериодична на $\mathbf{R}$ следует, что функция возрастает на каждом из промежутков $[\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbf{Z}$; функция убывает на каждом из промежутков $x \in [2\pi n, \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbf{Z}$.

$y' = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ – критические точки.

При переходе через точки $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, производная функции меняет свой знак с "+" на "−", значит, $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ – точки максимума, $y_{\max} = 1$. Аналогично $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ – точки минимума, $y_{\min} = -1$.

7. График функции.

   График функции $y = \cos x$ называется косинусоидой (рис.10).

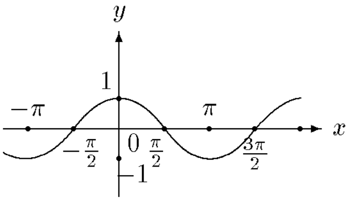


Рис.10

8. Область значений.

   Так как абсциссы точек тригонометрической окружности принимают значения только из отрезка $[-1; 1]$, то область значений функции $y = \cos x : E(y) = [-1; 1]$.

9. Определение и свойства функции $y = \mathrm{tg} x$ и ее график.

Определение. Пусть дано произвольное действительное число α такое, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. *Тангенсом* числа α называется число, равное отношению синуса этого числа α к косинусу α и обозначается $\mathrm{tg}\alpha$, т.е.

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Так как каждому действительному числу $x = \alpha$, отличному от $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, соответствует единственное число $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, то тем самым определена функция $y = \mathrm{tg} x$, где $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Свойства функции $y = \mathrm{tg} x$.

1. Область определения.

   Область определения функции следует из определения тангенса α, т.е. является объединением интервалов $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

   Записывают

$$D(\mathrm{tg}) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \quad n \in \mathbf{Z}.$$

2. Периодичность.

Покажем, что число $T = \pi$ является периодом функции $y = \mathrm{tg} x$

Для любого $x \in D(y)$, $x \pm \pi \in D(y)$ и $\mathrm{tg}(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \mathrm{tg} x$. Следовательно, $T = \pi$ – период функции $y = \mathrm{tg} x$.

Покажем, что положительного периода, меньшего π не существует.

Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что существует число $T \in (0; \pi)$ такое, что для любого $x \in D(y)$ выполняется равенство $\mathrm{tg}(x + T) = \mathrm{tg} x$, но тогда это равенство выполняется и при $x = 0$, т.е. $\mathrm{tg}(0 + T) = \mathrm{tg} 0$ или $\mathrm{tg} T = 0$, т.е. $\frac{\sin T}{\cos T} = 0$, значит $T = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Отсюда следует, что положительного периода, меньшего π не существует.

Так как $T = \pi$ – наименьший положительный период функции $y = \mathrm{tg} x$, то любой ее период имеет вид $T = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$.

3. Четность, нечетность.

$D(y)$ симметрична относительно начала координат. Для любого $x \in D(y)$:

$$\mathrm{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\mathrm{tg} x,$$

значит, функция $y = \mathrm{tg} x$ – нечетная, а следовательно ее график симметричен относительно начала координат.

4. Точки пересечения с осями координат.

С Oy : $\begin{cases} x = 0, \\ y = \mathrm{tg} x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

Следовательно $O(0; 0)$ – точка пересечения графика функции с осью Oy.

С Ox : $\begin{cases} y = 0, \\ \mathrm{tg} x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ \sin x = 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, \ n \in \mathbf{Z}, \\ y = 0. \end{cases}$

Значит, график функции пересекает ось Ox в точках $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. Интервалы знакопостоянства.

$$\mathrm{tg} x > 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos x > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos x < 0, \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \quad n \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathrm{tg}x < 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos x < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos x > 0, \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n\right), \quad n \in \mathbf{Z}.$$

6. Интервалы возрастанияи, убывания и экстремум функции.

   Рассмотрим два различных значения аргумента x_1 и x_2 такие, что $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$. Оценим разность

   $$y_2 - y_1 = \mathrm{tg}x_2 - \mathrm{tg}x_1 = \frac{\sin x_2 \cdot \cos x_1 - \cos x_2 \cdot \sin x_1}{\cos x_1 \cdot \cos x_2} = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_1 \cdot \cos x_2}.$$

   Так как $-\frac{\pi}{2} < x_1 < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < x_2 < \frac{\pi}{2}$ и $x_2 > x_1$, то $0 < x_2 - x_1 < \pi$ и, значит $\sin(x_2 - x_1) > 0$.
   Так как $\cos x_1 > 0$ и $\cos x_2 > 0$, то $y_2 - y_1 > 0$, следовательно $y_2 > y_1$, поэтому $y = \mathrm{tg}x$ возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а в силу периодичности y возрастаее каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

   Так как функция $y = \mathrm{tg}x$ непрерывна и монотонно возрастает на каждом из интервалов области определения, то она не имеет экстремумов.

Замечание.

Применим производную к исследованию функции $y = \mathrm{tg}x$ на возврастание, убывание и экстремум.

$$y' = (\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

При любом $x \in D(y)$, $\cos^2 x > 0$ и, значит, $y' > 0$. Следовательно, функция $y = \mathrm{tg}x$ возрастает на каждом из промежутков области определения. Производная функции существует на $D(y)$ и не обращается в нуль на $D(y)$. Значит, точек экстремума функция не имеет.

7. График функции называется тангенсоидой (рис.11).

8. Область значений. $E(\mathrm{tg}) = (-\infty; +\infty)$.

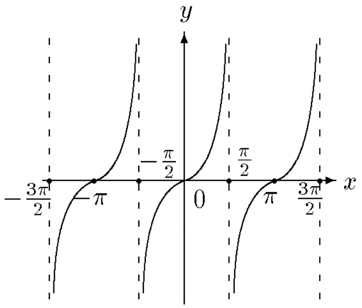


Рис. 11

Определение и свойства функции $y = ctgx$ и её график

Определение. Пусть дано произвольное действительное число α такое, что $\alpha \neq \kappa\pi,\ \kappa \in \mathbf{Z}$. Котангенсом числа α называется число, равное отношению косинуса этого числа к синусу α и обозначается $ctg\alpha$, т.е. $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \neq \kappa\pi,\ \kappa \in \mathbf{Z}$.

Так как каждому действительному числу $x = \alpha$, отличному от $\kappa\pi,\ \kappa \in \mathbf{Z}$, соответствует действительное число $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то тем самым определена функция $y = ctgx$, где $x \neq \kappa\pi,\ \kappa \in \mathbf{Z}$.

Свойства функции $y = ctgx$.

1. Область определения.

Область определения функции следует из определения котангенса α, т.е. является объединением интервалов $(\kappa\pi;\ \pi + \kappa\pi),\ \kappa \in \mathbf{Z}$.

Записывают

$D(ctg) = (\kappa\pi;\ \pi + \kappa\pi),\ \kappa \in \mathbf{Z}.\quad \big(D(ctg) = (\kappa\pi;\ \pi(\kappa+1)),\ \kappa \in \mathbf{Z}\big).$

2. Периодичность.

Покажем, что число $T = \pi$ является периодом функции $y = ctgx$.

Для любого

$$x \in D(y),\quad x \pm \pi \in D(y) \text{ и } ctg(x+\pi) = \frac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} = \frac{-\cos x}{-\sin x} = ctgx.$$

Следовательно, $T = \pi$ - период функции $y = ctgx$.

Покажем, что положительного периода, меньшего π не существует. Доказательство проведем методом от противного.

Предположим, что существует число $T \in (0;\pi)$ такое, что для любого $x \in D(y)$ выполняется равенство $ctg(x+T) = ctgx$, но тогда оно верно и при $x = \dfrac{\pi}{2}$, т.е. $ctg\left(\dfrac{\pi}{2}+T\right) = ctg\dfrac{\pi}{2}$ или $ctg\left(\dfrac{\pi}{2}+T\right) = 0$,

т.е. $$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+T\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+T\right)} = 0 \Leftrightarrow \cos T\cdot\cos\frac{\pi}{2} - \sin T\cdot\sin\frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin T = 0 \Leftrightarrow T = \pi\kappa,\ \kappa \in \mathbf{Z}.$$

Отсюда следует, что положительного периода, меньшего π не существует.

Так как $T = \pi$ – наименьший положительный период функции $y = ctgx$, то любой её период имеет вид $T = \pi\kappa,\ \kappa \in \mathbf{Z},\ \kappa \neq 0$.

3. Четность, нечетность.

$D(ctg) = \mathbf{R} \setminus \{\kappa\pi\}, \ \ \kappa \in \mathbf{Z}$ – симметрична относительно начала координат. Для любого $x \in D(y)$: $ctg(-x) = \dfrac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = -\dfrac{\cos x}{\sin x} = -ctgx,$ значит, функция $y = ctgx$ - нечетная, а, следовательно, её график симметричен относительно начала координат.

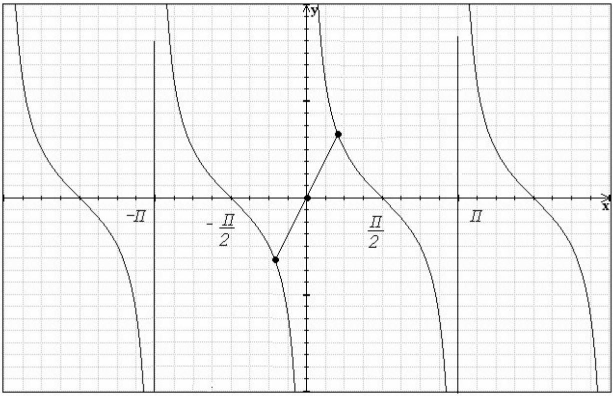


Рис. 11[a]

4. Точки пересечения с осями координат.

С осью Oy не пересекается, т.к. $x = 0 \notin D(y)$.

С осью Ox:

$$\begin{cases} y = 0, \\ ctgx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \cos x = 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \kappa\pi \\ x \neq \kappa\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \kappa\pi, \ \kappa \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Значит, график функции пересекает ось Ox в точках $x = \dfrac{\pi}{2} + \kappa\pi, \ \kappa \in \mathbf{Z}$.

5. Интервалы знакопостоянства.

$$ctgx > 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} > 0 \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x < 0, \\ \sin x < 0. \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \quad x \in \left(\pi\kappa, \ \frac{\pi}{2} + \pi\kappa \right), \ \ \kappa \in \mathbf{Z}.$$

$$ctgx < 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} < 0 \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x < 0. \end{cases} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi\kappa; \pi(\kappa + 1) \right), \ \kappa \in \boldsymbol{Z}.$$

6. Интервалы возрастания, убывания и экстремумы функции.

Рассмотрим два различных значения аргумента x_1 и x_2 такие, что $0 < x_1 < x_2 < \pi.$

Оценим разность

$$y_2 - y_1 = ctgx_2 - ctgx_1 = \frac{\cos x_2}{\sin x_2} - \frac{\cos x_1}{\sin x_1} = \frac{\cos x_2 \sin x_1 - \sin x_2 \cos x_1}{\sin x_1 \cdot \sin x_2} =$$

$$= -\frac{\sin(x_2 - x_1)}{\sin x_1 \cdot \sin x_2}.$$

Так как $0 < x_1 < \pi,$ $0 < x_2 < \pi$ и $x_2 > x_1$, то $0 < x_2 - x_1 < \pi$ и, значит $\sin(x_2 - x_1) > 0.$

Так как $\sin x_1 > 0$ и $\sin x_2 > 0$, то $y_2 - y_1 < 0$, следовательно, $y_2 < y_1$, поэтому $y = ctgx$ убывает на промежутке $(0;\pi)$, а в силу периодичности, y убывает на каждом из промежутков $(\kappa\pi; \pi(\kappa+1))$, $\kappa \in \boldsymbol{Z}$.

Так как функция $y = ctgx$ непрерывна и монотонно убывает на каждом из интервалов области определения, то она не имеет экстремумов.

Замечание.

Применим производную к исследованию функции $y = ctgx$ на возрастание, убывание и экстремум.

$$y' = (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

При любом $x \in D(y)$, $\sin^2 x > 0$ и, значит, $y' < 0$. Следовательно, функция $y = ctgx$ убывает на каждом из промежутков области определения. Производная функции существует на $D(y)$ и не обращается в нуль на $D(y)$. Значит, точек экстремума функция не имеет.

7. График функции называется котангенсоидой (рис. 11[а]).

8. Множество значений $E(ctg) = (-\infty;+\infty)$.

10. Решение уравнений $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg} x = a$.

I. Решение уравнений $\sin x = a$.

Решим уравнение графически. Для этого построим графики функций $y = \sin x$ и $y = a$. Абсциссы точек пересечения этих графков и есть корни данного уравнения.

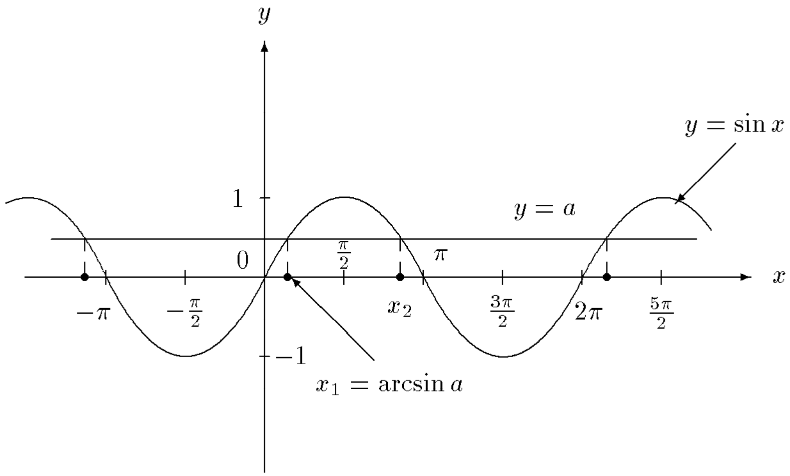


Рис.12

1) Если $|a| > 1$, то графики функций $y = \sin x$ и $y = a$ не пересекаются и, значит, уравнение $\sin x = a$ решений не имеет.

2) Пусть $|a| \leq 1$. Дадим определение арксинуса числа a.

Определение. Арксинусом числа a ($|a| \leq 1$) называется число α, принадлежащее промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a, т.е.

$$\begin{array}{c} \arcsin a = \alpha \Leftrightarrow \\ |a| \leq 1 \end{array} \begin{cases} \sin \alpha = a, \\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}.$$

Так как функция $y = \sin x$ монотонно возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то графики функций $y = \sin x$ и $y = a$ ($|a| \leq 1$) пересекаются на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ в одной точке с абсциссой $x_1 = \arcsin a$.

На промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ монотонно убывает, поэтому графики функций $y = \sin x$ и $y = a$ пересекаются также в единственной точке $x_2 = \pi - \arcsin a$.

Так как $y = \sin x$ периодическая с периодом $T = 2\pi$, то корни уравнения $x_1 = \arcsin a + 2\pi n$, $x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Покажем, что решения x_1 и x_2 можно объединить одной записью

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Действительно, при четных k, т.е. при $k = 2n$, имеем

$$x = \arcsin a + 2\pi n = x_1, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

При нечетных k, т.е. при $k = 2n + 1$, имеем

$$x = (-1) \arcsin a + \pi(2n + 1) = \pi - \arcsin a + 2\pi n = x_2, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Частные случаи:

а) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$

б) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$

в) $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$

II. Решение уравнения $\cos x = a$.

Решим уравнение графически. Построим графики функций $y = \cos x$ и $y = a$. Решениями уравнения $\cos x = a$ являются абсциссы точек пересечения графиков функций.

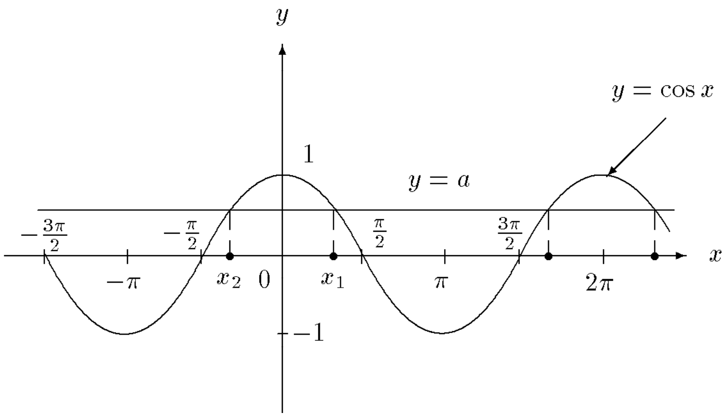


Рис.13

1) Если $|a| > 1$, то графики функций $y = \cos x$ и $y = a$ не пересекаются и, значит, уравнение $\cos x = a$ решений не имеет.

2) Если $|a| \leq 1$, то графики пересекаются и абсциссы точек пересечения являются корнями уравнения.

Дадим определение арккосинуса числа a.

Определение. Арккосинусом числа a ($|a| \leq 1$) называется число α из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a, т.е.

$$\underset{|a| \leq 1}{\arccos a = \alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = a, \\ \alpha \in [0; \pi] \end{cases}.$$

Так как $y = \cos x$ монотонно убывает на $[0; \pi]$, то графики функций $y = \cos x$ и $y = a$ ($|a| \leq 1$) пересекаются на этом промежутке в единственной точке с абсциссой $x_1 = \arccos a$. Так как график функции $y = \cos x$ симметричен относительно оси Oy, то на промежутке $[-\pi; 0]$ графики $y = \cos x$ и $y = a$ также пересекаются в одной точке $x_2 = -\arccos a$.

Так как функция $y = \cos x$ периодическая с периодом $T = 2\pi$, то решения уравнения $\cos x = a : x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Частные случаи:

а) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$.

б) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$.

в) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$.

III. Решение уравнения $\mathrm{tg} x = a$.

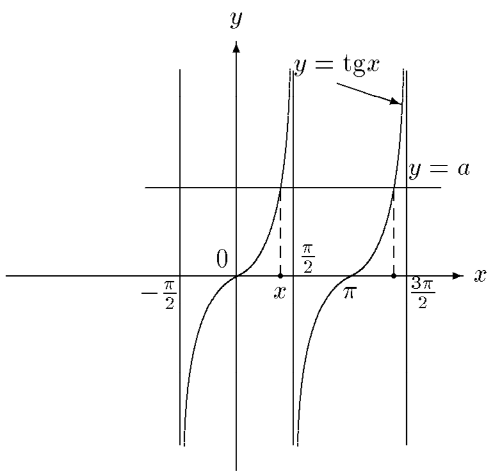


Рис.14

Решим уравнение $\text{tg}x = a$ графически. Решениями уравнения являются абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \text{tg}x$ и $y = a$

Графики функций $y = \text{tg}x$ и $y = a$ пересекаются при любом a. (рис.14).

Определение. Арктангенсом числа a называется число α из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a, т.е. $\text{arctg}a = \alpha \Leftrightarrow \text{tg}\alpha = a$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Так как функция $y = \text{tg}x$ непрерывна, монотонно возрастает на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $E(\text{tg}) = \mathbf{R}$, то графики функций $y = \text{tg}x$ и $y = a$ пересекаются на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ в одной точке $x = \text{arctg}a$.

В силу периодичности функции $y = \text{tg}x$ с периодом π, решения уравнения $\text{tg}x = a$ имеют вид:

$$x = \text{arctg}a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

11. Формулы приведения.

Формулами приведения называются формулы, связывающие значения тригонометрических функций углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ со значениями тригонометрических функций угла α.

Докажем формулы:

$$\begin{aligned} &\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha, \\ &\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

Для этого рассмотрим тригонометрическую окружность и луч OB_α, составляющий с осью Ox угол α.

1) Пусть $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

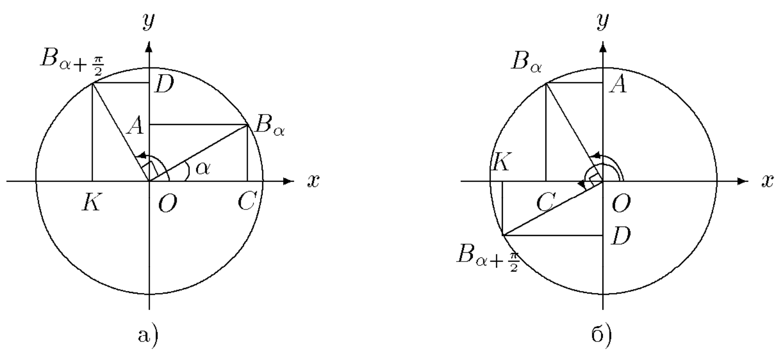


Рис.15

Опустим из точки B_α перпендикуляры $B_\alpha C$ и $B_\alpha A$ на оси координат (рис.15 а)). Координаты точки $B_\alpha(\cos\alpha; \sin\alpha)$ равны

$$\cos\alpha = OC, \qquad \sin\alpha = OA.$$

Повернем прямоугольник $OCB_\alpha A$ на 90^0 против часовой стрелки. Он перейдет в прямоугольник $ODB_{\alpha+\frac{\pi}{2}}K$. При этом точка B_α перешла в точку $B_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$. Координаты точки $B_{\alpha+\frac{\pi}{2}}\left(\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right); \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right)$ соответствено равны

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = OD, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -OK.$$

Так как $OD = OC$, $OK = OA$, то имеем

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha.$$

2) Пусть $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ (рис.15 б).

В этом случае, выполнив аналогичные действия, имеем

$$\cos\alpha = -OC \qquad \sin\alpha = OA,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -OD, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -OK$$

и так как, по-прежнему, $OD = OC$, $OK = OA$, то получим $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$ и $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$.

3). Для $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ рассуждения аналогичны приведенным выше в пунктах 1) и 2).

Если α – любое действительное число, то его можно представить в виде $\alpha = 2\pi n + \alpha_0$, $n \in \mathbf{Z}$, $\alpha_0 \in [0; 2\pi]$. В этом случае имеем $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2\pi n + \alpha_0 + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha_0+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha_0 = \cos(\alpha - 2\pi n) = \cos\alpha$.

Аналогично, $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$.

Воспользуемся формулами (1) для доказательства формул:

$$\begin{aligned} \sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos\alpha, \\ \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \sin\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

Выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \sin\left(\tfrac{\pi}{2}+(-\alpha)\right) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \\ \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos\left(\tfrac{\pi}{2}+(-\alpha)\right) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha. \end{aligned}$$

Докажем формулы:

$$\begin{aligned} \sin(\pi+\alpha) &= -\sin\alpha, \qquad & \cos(\pi+\alpha) &= -\cos\alpha, \\ \sin(\pi-\alpha) &= \sin\alpha, \qquad & \cos(\pi-\alpha) &= -\cos\alpha \end{aligned} \tag{3}$$

Доказательство:

$\sin(\pi+\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha.$

$\cos(\pi+\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha.$

$\sin(\pi-\alpha) = \sin(\pi+(-\alpha)) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha.$

$\cos(\pi-\alpha) = \cos(\pi+(-\alpha)) = -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha.$

Аналогично доказываются формулы:

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha,$ $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\cos\alpha,$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\alpha,$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\sin\alpha,$

$\sin(2\pi-\alpha) = -\sin\alpha,$ $\cos(2\pi-\alpha) = \cos\alpha.$

Формулы для тангенса выводятся на основании определения тангенса.

Например,

$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \mathrm{ctg}\alpha;$

$\mathrm{tg}(\pi+\alpha) = \frac{\sin(\pi+\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha$ и т.д.

Для запоминания формул приведения существует правило:

Если угол имеет вид $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ или $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, то название функции меняется на противоположное, если же угол имеет вид $\pi\pm\alpha$ или $2\pi\pm\alpha$, то название функции сохраняется. Знак преобразованной части определяется знаком преобразуемой части в зависимости от того, в какую четверть попал угол $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$ и $2\pi\pm\alpha$, при этом считается, что α – острый угол.

12. Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\alpha \in \mathbf{R}$.
2. $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha = 1$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbf{Z}$.
3. $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.
4. $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$.
5. $1+\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
6. $1+\mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Докажем эти формулы.

1. Рассмотрим тригонометрическую окружность.

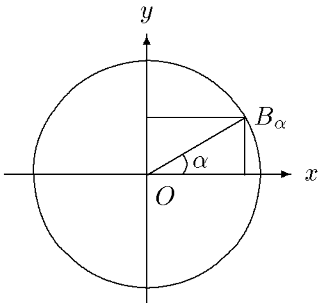


Рис.16

Так как центр окружности $O(0;0)$ и радиус $R=1$, то ее уравнение имеет вид $x^2+y^2=1$ (рис.16).
Возьмем произвольное число α и рассмотрим соответствующую ему точку B_α, лежащую на окружности. Ее координаты $(\cos\alpha;\sin\alpha)$ удовлетворяют уравнению окружности, значит

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

2. Из определения тангенса и котангенса угла α следует, что $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$ и $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\alpha\neq\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Перемножив эти равенства, получим формулу:
$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=1$, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}n$, $n\in\mathbf{Z}$.

3. Из основного тригонометрического тождества находим

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}\quad \text{и}\quad \sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

Подставив эти формулы в формулы для определения тангенса, получим

$$\begin{array}{lll}\mathrm{tg}\alpha=\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}; & \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, & n\in\mathbf{Z}\\ \mathrm{tg}\alpha=\pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}; & \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, & n\in\mathbf{Z}\end{array}$$

4. Разделив основное тригонометрическое тождество почленно на $\sin^2\alpha$ и $\cos^2\alpha$, получим

$$\begin{array}{ll}1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}, & \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbf{Z},\\ 1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}, & \alpha\neq\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.\end{array}$$

13. Тригонометрические функции двойного аргумента.

1. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$; $\alpha\in\mathbf{R}$.

Докажем это, воспользовавшись формулой $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, положив в ней $\beta=\alpha$;

$$\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; $\alpha \in \mathbf{R}$.
Доказательство:
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.
Пусть $\beta = \alpha$. Тогда

$$\cos 2\alpha = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

3. $\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$; $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.
Доказательство:

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

4. $\mathrm{ctg}2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.
Доказательство:

$$\mathrm{ctg}2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}}{\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}} = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\alpha}.$$

14. Производная суммы двух функций.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на некотором интервале $(a; b)$.

Рассмотрим два значения аргумента x_0 и x, принадлежащие интервалу $(a; b)$.

Разность $\Delta x = x - x_0$ называется приращением аргумента в точке x_0. Разность $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению Δx.

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента в этой точке при $\Delta x \to 0$, если такой предел существует, т.е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Теорема. Если в точке x существуют производные функций $u(x)$ и $v(x)$, то в этой точке существует и производная суммы этих функций, равная сумме их производных, т.е.

$$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x).$$

Доказательство.

Дадим значению x приращение Δx, получим новое значение аргумента $x + \Delta x$. Тогда функция $y = u(x) + v(x)$ также получит приращение $\Delta y = (u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)) - (u(x) + v(x)) = (u(x+\Delta x) - u(x)) + (v(x+\Delta x) - v(x)) = \Delta u + \Delta v$.

Найдем предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x}$ при условии $\Delta x \to 0$. По свойству предела о том, что предел суммы равен сумме пределов, имеем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Так как функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x, то существуют пределы отношений $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ и $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, причем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x)$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x)$. Так как существует предел $\frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, то существует предел $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, а, значит, по определению существует производная функции y при $\Delta x \to 0$, т.е.

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) + v'(x),$$

или $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$, ч.т.д.

2. Геометрия.

1. Свойства равнобедренного треугольника.

Теорема. В равнобедренном треугольнике:

1) углы при основании равны;
2) медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой;
3) высота, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой;
4) биссектриса угла при вершине является медианой и высотой.

1. Дано:
ΔABC,
$AB = BC$

Доказать: $\angle A = \angle C$

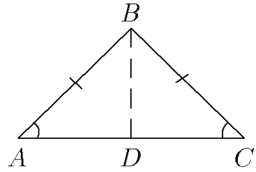


Рис.1.

Доказательство:

Проведем биссектрису BD в ΔABC (рис.1). Рассмотрим образовавшиеся треугольники ABD и CBD. У них: $AB = BC$ по условию; BD – общая; $\angle ABD = \angle CBD$ – так как BD – биссектриса $\angle ABC$.

Значит $\Delta ABD = \Delta CBD$ по двум сторонам и углу между ними. Из равенства треугольников следует, что $\angle BAD = \angle BCD$, что и требовалось доказать.

2. Дано:
ΔABC, $AB = BC$,
BM – медиана

Доказать: BM – высота, биссектриса

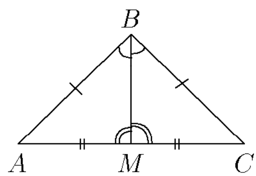


Рис.2.

Доказательство:

Рассмотрим треугольники ABM и CBM. У них: $AB = CB$ по условию; $AM = MC$, так как BM – медиана, $\angle A = \angle C$ – по свойству 1 равнобедренного треугольника.

Значит, $\Delta ABM = \Delta CBM$, следовательно $\angle ABM = \angle CBM$, а это означает, что BM – биссектриса.

Из равенства треугольников ABM и CBM следует также равенство углов AMB и CMB, но они смежные и их сумма равна 180^0 и, следовательно, $\angle AMB = \angle CMB = 90^0$, т.е. $BM \perp AC$. Итак, доказано, что ВМ – высота и биссектриса.

Так как в треугольнике из данной вершины можно провести только одну медиану, одну высоту и одну биссектрису, то из доказанного следует, что высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является медианой и биссектрисой, и биссектриса при вершине равнобедренного треугольника является высотой и медианой. Теорема доказана полностью.

2. Свойства точек равноудаленных от концов отрезка.

Теорема. Точки, равноудаленные от концов отрезка, лежат на серединном перпендикуляре к этому отрезку.

3. Дано:
AB – отрезок.
Точки, равноудаленные от точек A и B

Доказать: Точки, равноудаленные от A и B, лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AB.

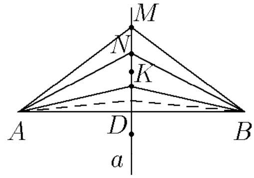


Рис.3.

Доказательство.

Пусть точки M и N равноудалены от точек A и B, т.е. $MA = MB$ и $NA = NB$ и пусть прямая MN пересекает отрезок AB в точке D.

Рассмотрим треугольники AMN и BMN. У них $\left.\begin{array}{c} AM = BM \\ AN = BN \end{array}\right\}$ по условию, MN – общая.

$\Delta AMN = \Delta BMN$ – по трем сторонам. Из этого следует, что $\angle AMN = \angle BMN$.

В равнобедренном треугольнике AMB $(AM = BM)$, как следует из доказанного, MD – биссектриса, а по свойству равнобедренного треугольника следует, что MD – высота и медиана, т.е. $MD \perp AB$ и $AD = BD$, а это означает, что прямая MN является серединным перпендикуляром к отрезку AB. Аналогично можно доказать, что и для любой другой точки K, равноудаленной от концов отрезка AB, прямая MK – серединный перпендикуляр к AB, т.е. проходит через точку D перпендикулярно к AB. Но через точку прямой к ней можно восстановить только один перпендикуляр, значит, точки M, N, K лежат на одной прямой, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно к нему, т.е. все точки, равноудаленные от концов отрезка, лежат на серединном перпендикуляре к нему.

Замечание. Можно показать, что любая точка лежащая на серединном перпендикуляре к отрезку AB, равноудалена от ее концов. Действительно, если прямая a – серединный перпендикуляр к AB, то $a \perp AB$ и a проходит через середину отрезка AB точку D. Если $M \in a$, то в ΔAMB MD – высота и медиана, а, значит, ΔAMB – равнобедренный, т.е. $MA = MB$.

3. Признаки параллельности прямых.

Определение. Прямые на плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Теорема. Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой.

Дано:
$a,\ b,\ c$ – прямые
$a||c$ и $b||c$

Доказать: $a||b$

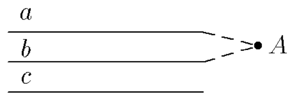


Рис.4.

Доказательство.

Будем доказывать методом от противного. Предположим, что прямые a и b (рис.4) не параллельны. Это значит, что они пересекаются в некоторой точке A. Через точку A проходят две прямые a и b, параллельные прямой c, что противоречит аксиоме параллельности прямых, значит предположение, что прямые a и b не параллельны, неверно, и $a||b$.

Теорема.

1) Если при пересечении двух прямых третьей, накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны;

2) Если при пересечении двух прямых третьей, сумма внутренних односторонних углов равна 180^0, то прямые параллельны.

1) Дано:
a, b, c – прямые
c – секущая
$\angle 1 = \angle 2$ – накрест лежащие

Доказать: $a||b$

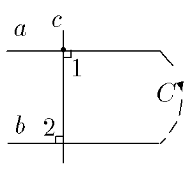


Рис.5.

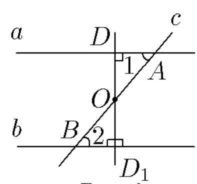


Рис.6.

Доказательство.

а) Пусть $\angle 1 = \angle 2 = 90^0$ (рис.5). Если предположить, что прямые a и b пересекаются в некоторой точке C, то получится, что из точки C на прямую c опущено два перпендикуляра, что невозможно. Следовательно, прямые a и b не пересекаются, а значит $a||b$.

Из доказанного можно сделать вывод: две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны.

б) Пусть теперь $\angle 1 = \angle 2 \neq 90^0$ (рис.6). Обозначим точки пересечения прямой c с прямыми a и b через A и B соответственно. Из точки O – середины отрезка AB – опустим на прямую a перпендикуляр OD и продолжим его до пересечения с прямой b в точке D_1.

Рассмотрим образовавшиеся треугольники ODA и OD_1B. У них:

$AO = OB$ – по построению, $\angle 1 = \angle 2$ – по условию, $\angle DOA = \angle D_1OB$ – вертикальные, значит $\Delta ODA = \Delta OD_1B$ по стороне и двум прилежащим к ней углам. Из равенства треугольников следует, что $\angle OD_1B = \angle ODA = 90^0$, т.е. $DD_1 \perp a$ и $DD_1 \perp b$, а по доказанному в пункте а) следует, что $a||b$.

2) Дано:
a, b, c – прямые
с – секущая
$\angle 1 + \angle 2 = 180^0$

Доказать: $a||b$

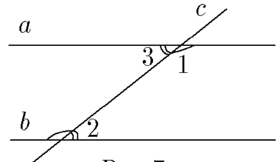


Рис.7.

Доказательство.

Углы 1 и 3 (рис.7) смежные, значит $\angle 1 + \angle 3 = 180^0$, по условию $\angle 1 + \angle 2 = 180^0$, значит $\angle 2 = \angle 3$, а так как углы 2 и 3 являются накрест лежащими при прямых a и b и секущей с, то по доказанному прямые a и b параллельны.

4. Сумма углов треугольника. Сумма внутренних и внешних углов выпуклого многоугольника.

Теорема 1. Сумма углов треугольника равна 180^0 (сумма внешних углов треугольника равна 360^0).

Дано:
ΔABC

Доказать: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

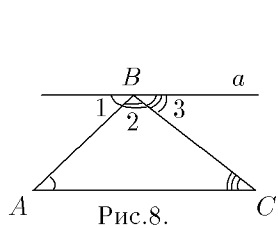


Рис.8.

Доказательство.

Проведем через одну из вершин треугольника, например B, прямую, параллельную противоположной стороне AC (рис.8). При вершине B образовались углы $\angle 1, \angle 2, \angle 3$, которые вместе составляют развернутый угол, т.е.

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^0. \quad (1)$$

Углы $\angle 1$ и $\angle$A являются внутренними накрест лежащими при параллельных прямых a и AC и секущей AB, значит $\angle 1 = \angle A$. Аналогично $\angle 3 = \angle$C. Заменяя в равенстве (1) $\angle 1$ и $\angle 3$ равными им углами соответственно $\angle A$ и $\angle C$, получим

$\angle A + \angle 2 + \angle C = 180^0$, но$\angle 2 = \angle B$, значит
$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника равна $180^0(n-2)$, где n – число сторон (углов) многоугольника.

Дано:
$A_1\ A_2\ \ldots\ A_n-$
выпуклый n – угольник

Доказать: сумма его углов
равна $180^0(n-2)$

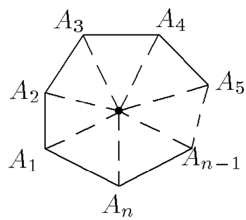


Рис.9.

Доказательство.

Внутри $n-$угольника $A_1\ A_2\ \ldots\ A_{n-1}\ A_n$ (рис.9.) выберем произвольную точку O и соединим ее с вершинами $n-$угольника. Образовалось n треугольников. Сумма углов выпуклого $n-$угольника будет равна разности суммы всех углов всех треугольников и суммы углов треугольников при вершине O. А так как сумма углов треугольников при вершине O равна 360^0 (2 развернутых угла), то сумма углов выпуклого $n-$угольника будет равна

$$180^0 n - 360^0 = 180^0(n-2).$$

В частности при $n = 3$, получим: $180^0(3-2) = 180^0$.

Теорема 3. Сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине равна 360^0.

Дано:
$A_1\ A_2\ \dots\ A_n-$
выпуклый n – угольник

Доказать: сумма внешних углов
$\angle 1 + \angle 2 + \dots \angle n = 360^0$.

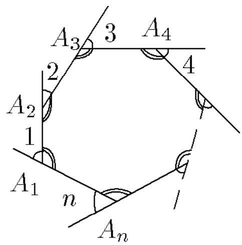


Рис.10.

Доказательство.

Так как внешний угол выпуклого многоугольника смежный с внутренним углом, то их сумма равна 180^0. Из рисунка 10 видно, что $\angle 1 + \angle 2 + \dots \angle n = 180^0 - \angle A_1 + 180^0 - \angle A_2 + \dots + 180^0 - \angle A_n = 180^0 \cdot n - (\angle A_1 + \dots + \angle A_n) = 180^0 \cdot n - 180^0(n-2) = 360^0$, что и требовалось доказать.

5. Признаки параллелограмма.

Определение. Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны, т.е. лежат на параллельных прямых.

Теорема. Если диагонали четырехугольника, пересекаясь, делятся пополам, то этот четырехугольник является параллелограммом.

Дано:
$ABCD$ – четырехугольник,
$AC \cap BD = O$,
$AO = OC$, $BO = OD$

Доказать: $ABCD$ – параллелограмм

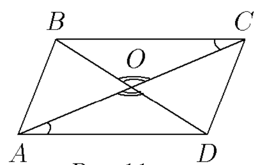


Рис.11.

Доказательство.

$\Delta AOD = \Delta COB$ (рис.11.), так как $\angle AOD = \angle COB$ – как вертикальные, $AO = OC$, $OD = BO$ – из условия. Из равенства треугольников следует, что $\angle DAO = \angle BCO$. Из равенства этих накрест лежащих углов, образованных прямыми BC и AD и секущей AC, вытекает, что $BC || AD$.

Аналогично, из равенства треугольников AOB и COD вытекает равенство углов BAO и DCO, а, значит, и параллельность прямых AB и CD.

Итак, $ABCD$ – параллелограмм.

Теорема. Если у четырехугольника две стороны параллельны и равны, то этот четырехугольник – параллелограмм.

Дано:
$ABCD$ – четырехугольник,
$AB = CD$, $AB||CD$

Доказать: $ABCD$ – параллелограмм

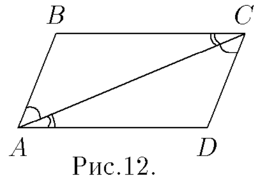


Рис.12.

Доказательство.

Проведем диагональ AC (рис.12). Рассмотрим получившиеся треугольники ABC и CDA. У них AC – общая, $AB = DC$ – по условию, $\angle BAC = \angle DCA$ – как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AB и DC и секущей AC. Значит $\Delta ABC = \Delta CDA$ по 2-м сторонам и углу между ними, а следовательно $\angle ACB = \angle CAD$, но эти углы являются внутренними накрест лежащими при прямых BC и AD и секущей AC, значит $BC||AD$ (по признаку параллельности прямых), а значит четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм по определению, что и требовалось доказать.

Теорема. Если у плоского четырехугольника противоположные стороны попарно равны, то четырехугольник – параллелограмм.

Дано:
$ABCD$ – четырехугольник,
$AB = CD$, $AD = BC$

Доказать: $ABCD$ – параллелограмм.

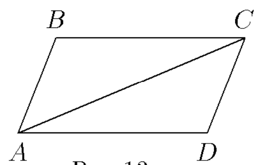


Рис.13.

Доказательство.

Проведем диагональ AC (рис.13). $\Delta ABC = \Delta CDA$ (по трем сторонам), значит $\angle BAC = \angle DCA$, следовательно $AB||DC$, а тогда по предыдущему признаку $ABCD$ – параллелограмм.

6. Окружность, описанная около треугольника.

Определение. Окружность называется описанной около треугольника, если все вершины треугольника лежат на окружности.

О треугольнике в этом случае говорят, что он вписан в окружность.

Докажем следующее предварительное утверждение:

прямые, соответственно перпендикулярные двум пересекающимся прямым, пересекаются.

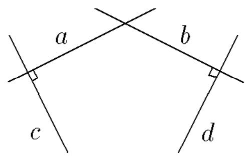


Рис.13

Доказательство.

Пусть прямые a и b пересекаются, прямая $a \perp c$ и $b \perp d$ (рис.13). Предположим, что прямые c и d не пересекаются, т.е. $c||d$. Тогда, т.к. $\left.\begin{array}{c} a \perp c \\ c||d \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp d$, т.к. $\left.\begin{array}{c} b \perp d \\ a \perp d \end{array}\right\} \Rightarrow$ $b||a$, что противоречит условию, значит прямые c и d пересекаются.

Теорема. Около любого треугольника можно описать окружность и притом только одну. Центр этой окружности есть точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

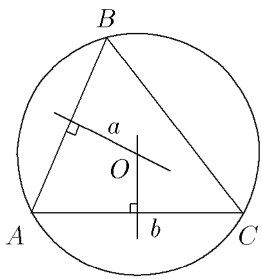


Рис.14

Доказательство.

Пусть дан ΔABC (рис.14). Проведем серединные перпендикуляры a и b соответственно к сторонам AB и AC ΔABC. По доказанному утверждению a и b пересекаются. Обозначим точки пересечения прямых a и b через O. Так как точка $O \in a$, то она равноудалена от точек A и B (по свойству серединного перпендикуляра), т.е. $AO = BO$; так как $O \in b$, то $AO = OC$, значит, точка O равноудалена от вершины ΔABC, а это означает, что O – центр окружности, описанной около треугольника ΔABC.

Итак, доказано, что около ΔABC можно описать окружность. Так как точка O равноудалена от точек B и C, то она лежит на серединном перпендикуляре к BC, т.е. центр O описанной около треугольника окружности есть точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам этого треугольника.

Осталось доказать, что около треугольника можно описать только одну окружность.

Действительно, допустим, что около треугольника можно описать две окружности. Тогда центр каждой из них равноудален от его вершин и совпадает с точкой O пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, а радиус каждой из них равен расстоянию от точки O до вершин треугольника. Значит эти окружности совпадают.

Теорема доказана полностью.

7. Окружность, вписанная в треугольник.

Определение. Окружность называется вписанной в треугольник, если она касается всех сторон треугольника. При этом треугольник называется описанным около окружности.

Теорема. В любой треугольник можно вписать окружность и притом только одну. Центр этой окружности есть точка пересечения биссектрис данного треугольника.

Доказательство.

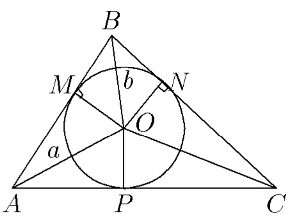


Рис.15

Пусть дан треугольник ABC. Проведем биссектрисы a и b его углов A и B. Обозначим их точку пересечения через O.

Так как $O \in a$, то она равноудалена от сторон AB и AC угла A; так как $O \in b$, то она равноудалена от сторон BA и BC угла B треугольника ABC.

Таким образом точка O равноудалена от всех сторон треугольника ABC, а это означает, что точка O есть центр вписанной в треугольник окружности. Так как точка O равноудалена от сторон CA и CB ΔABC, то она лежит на биссектрисе угла C ΔABC.

Итак, доказано, что в любой треугольник можно вписать окружность и ее центр есть точка пересечения биссектрис этого треугольника. Осталось доказать, что в треугольник можно вписать только одну окружность.

Действительно, допустим, что в треугольник можно вписать две окружности. Тогда, центр каждой из них совпадает с точкой O пересечения биссектрис углов треугольника, так как центр окружности равноудален от сторон треугольника. Радиус каждой из этих окружностей равен расстоянию от точки O до сторон треугольника, а, значит, радиусы этих окружностей совпадают. Следовательно, эти окружности совпадают.

Теорема доказана полностью.

8. Касательная к окружности и ее свойства.

I вариант

Определение. Касательной к окружности называется прямая, имеющая с окружностью одну общую точку.

Эта общая точка называется точкой касания.

Теорема. (Свойство касательной). Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу окружности, проведенному в точку касания.

Дано:
(O, r) – окружность,
a – касательная к окружности
M – точка касания
Доказать: $OM \perp a$

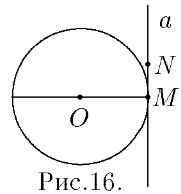


Рис.16.

Доказательство.

Так как точка М –единственная общая точка касательной и окружности, то любая другая точка прямой a, например, точка N, будет находиться вне окружности, но тогда $ON > r$, т.е. $ON > OM$. Следовательно, OM – кратчайшее расстояние от точки O до прямой, а поэтому $OM \perp a$.

II вариант

Определение. Касательной к окружности в некоторой точке M называется прямая, проходящая через точку M и перпендикулярная радиусу окружности, проведенному в точку M.

Свойство. Касательная к окружности имеет одну общую точку с окружностью.

Дано:
(O, r) – окружность,
a – касательная к окружности
в точке M, (т.е. $OM \perp a$)
Доказать: M – единственная общая точка окружности и касательной a.

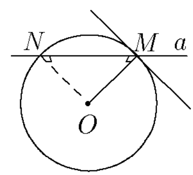


Рис.17.

Доказательство.

Будем доказывать методом от противного. Предположим, что прямая имеет с окружностью еще одну общую точку N (рис.17). Тогда в прямоугольном треугольнике OMN (прямоугольный он по определению касательной) катет OM равен гипотенузе ON (как радиусы), что невозможно.

Значит, предположение о том, что касательная имеет с окружностью более одной общей точки, неверно, следовательно, касательная к окружности имеет с окружностью одну общую точку, что и требовалось доказать.

Отметим еще некоторые свойства касательных, проведенных к окружности.

1. Если из точки A, лежащей вне окружности, проведены две касательные к окружности, имеющие с окружностью точки касания M и N соответственно, то $AM = AN$, т.е. отрезки касательных от точки A до точек касания равны (рис.18).

2. Если из точки A вне окружности проведены касательная, касающаяся окружности в точке M и секущая, пересекающая окружность в точках C и B (рис.19), то справедливо равенство

$$AM^2 = AC \cdot AB$$

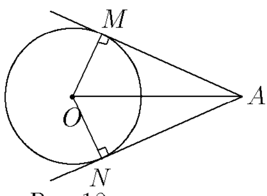


Рис.18.

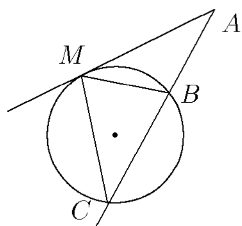


Рис.19.

9. Измерение угла, вписанного в окружность

Определение. Угол называется вписанным в окружность, если его вершина лежит на окружности, а стороны угла пересекают окружность (рис.20).

В этом случае говорят, что угол опирается на дугу, заключенную между сторонами угла.

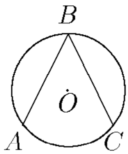


Рис.20.

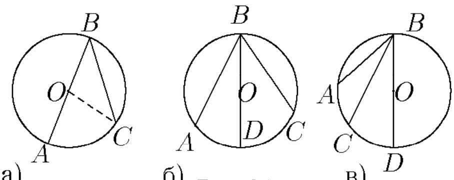


Рис.21.

Теорема. Вписанный в окружность угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Дано:
$\angle ABC$ вписан в окружность

Доказать: $\angle ABC = \frac{1}{2}\smile AC$.

Доказательство.

Возможны три случая

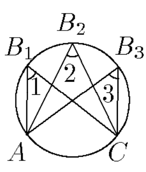
1. Центр окружности O лежит на одной из сторон угла ABC, например, на стороне AB (рис.21 а)). Проведем радиус OC и рассмотрим треугольник OBC. Он равнобедренный, так как $OB = OC$. Поэтому в нем $\angle B = \angle C$. Для треугольника BOC угол AOC – внешний, поэтому $\angle AOC = \angle B + \angle C = 2\angle B$, а значит $\angle B = \frac{1}{2}\angle AOC$, но центральный угол AOC измеряется дугой, на которую он опирается, поэтому $\angle B = \frac{1}{2}\smile AC$, т.е. теорема для этого случая доказана.
2. Центр O лежит внутри угла ABC (рис.21 б)). Проведем диаметр BD. Тогда $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$. По доказанному $\angle ABD = \frac{1}{2}\smile AD$, $\angle DBC = \frac{1}{2}\smile DC$, тогда $\angle ABC = \frac{1}{2}\smile AD + \frac{1}{2}\smile DC = \frac{1}{2}(\smile AD + \smile DC) = \frac{1}{2}\smile AC$, т.е теорема доказана и для этого случая.
3. Центр окружности лежит вне угла ABC(рис.21 в)). Проведем диаметр BD, тогда $\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD = \frac{1}{2}\smile AD - \frac{1}{2}\smile CD = \frac{1}{2}(\smile AD - \smile CD) = \frac{1}{2}\smile AC$.

Таким образом теорема доказана полностью.

Следствие.

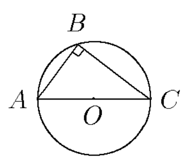
1) Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны (рис.22).

2) Вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой (рис.23).



$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 \ldots =$
$= \frac{1}{2}\smile AC$

Рис.22.



$\smile AC = 180^0$
$\angle ABC = 90^0$

Рис.23.

10. Признаки подобия треугольников.

Напомним определение подобных фигур.

Определение 1. Преобразование фигуры F в фигуру F_1, при котором расстояние между точками изменяется в одно и то же число раз, называется *преобразованием подобия.*

Определение2. Две фигуры называются *подобными*, если они переводятся одна в другую преобразованием подобия.

Из свойств преобразования подобия фигур следует, что у подобных треугольников соответственные стороны пропорциональны, а соответственные углы равны. Чтобы установить подобие двух треугольников, достаточно наличия части этих свойств.

Теорема (первый признак подобия). Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то эти треугольники подобны.

Дано:
ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$,

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$$

Доказать:
$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

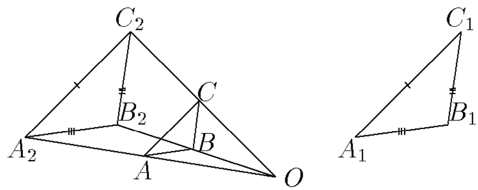


Рис.24.

Доказательство.

Подвергнем треугольник ABC гомотетии с центром в точке O с коэффициентом $k = \frac{A_1B_1}{AB}$. Получим $\Delta A_2B_2C_2$ (рис.24). Из того, что гомотетия есть подобие, следует, что $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta ABC$ с коэффициентом k, а это означает, что $\frac{A_2B_2}{AB} = \frac{B_2C_2}{BC} = \frac{A_2C_2}{AC} = k \Rightarrow A_2B_2 = kAB$, $B_2C_2 = kBC$, $A_2C_2 = kAC$. Из того, что $\frac{A_1B_1}{AB} = k$ и из условия следует $A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$, $A_1C_1 = kAC$, т.е. $B_2C_2 = B_1C_1$, $A_2B_2 = A_1B_1$, $A_2C_2 = A_1C_1$. Поэтому $\Delta A_2B_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$, а значит существует движение, переводящее $\Delta A_2B_2C_2$ в $\Delta A_1B_1C_1$. Следовательно ΔABC переводится в треугольник $A_1B_1C_1$ последовательным выполнением преобразования подобия и движения, а это есть преобразование подобия, т.е. теорема доказана.

Теорема (второй признак подобия). Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Дано:
ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$,
$\angle A = \angle A_1 \quad \angle B = \angle B_1$
Доказать:
$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

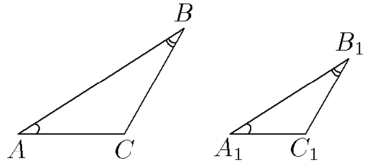


Рис.25.

Доказательство.

Из условия и из того, что сумма углов треугольника равна 180^0 следует, что $\angle C = \angle C_1$. По теореме синусов из треугольника ABC (рис.25) имеем

$$\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{AC}{\sin\angle B} \qquad \text{или} \qquad \frac{\sin\angle B}{\sin\angle C} = \frac{AC}{AB}.$$

Аналогично, из $\Delta A_1B_1C_1$

$$\frac{\sin\angle B_1}{\sin\angle C_1} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}.$$

Так как $\angle B = \angle B_1$, то $\sin B = \sin B_1$ и так как $\angle C = \angle C_1$, то $\sin C = \sin C_1$, значит

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1} \qquad \text{или} \qquad \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Аналогично получаем $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$, т.е. в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ стороны пропорциональны, а значит по первому признаку подобия $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, что и требовалось доказать.

Теорема (третий признак подобия). Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Дано:
ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$,
$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}, \quad \angle A = \angle A_1$
Доказать:
$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

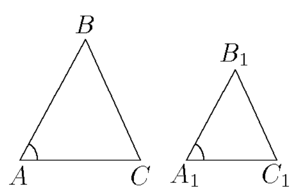


Рис.26.

Доказательство.

По условию $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$, т.е. $AB = kA_1B_1$, $AC = kA_1C_1$. Применим к треугольникам ABC и $A_1B_1C_1$ теорему косинусов (рис.26.) ${B_1C_1}^2 = {A_1B_1}^2 + {A_1C_1}^2 - 2A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cos\angle A_1$; $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos\angle A = k^2{A_1B_1}^2 + k^2{A_1C_1}^2 - 2k^2A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cos\angle A_1 =$
$k^2\left({A_1B_1}^2 + {A_1C_1}^2 - 2A_1B_1 \times \times A_1C_1 \cos\angle A_1\right)$; $\angle A = \angle A_1 \Rightarrow \cos\angle A = \cos\angle A_1 \Rightarrow BC = kB_1C_1$, а значит в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ стороны пропорциональны, следовательно, по первому признаку подобия $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, что и требовалось доказать.

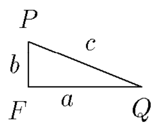
11. Теорема Пифагора.

Теорема. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов его катетов.

Приведем доказательство,отличное от доказательства, данного в учебнике Погорелова.

Дано:
a, b – катеты прямоугольного треугольника,
c – гипотенуза прямоугольного
треугольника FPQ

Доказать: $c^2 = a^2 + b^2$



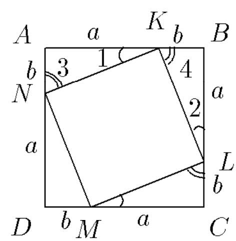


Рис.27.

Доказательство.

Построим квадрат $ABCD$ со стороной $a+b$ и на сторонах квадрата возьмем точки K, L, M, N так, чтобы $AK = BL = CM = DN = a$, тогда $KB = LC = MD = NA = b$. Соединим точки K, L, M, N как показано на рисунке 27. Образовались прямоугольные треугольники, равные треугольнику FPQ по двум катетам, т.е.

$$\Delta NAK = \Delta LBK = \Delta MCL = \Delta NDM = \Delta FPQ.$$

Отсюда следует, что $NK = KL = LM = MN = PQ = c$ и, например, $\angle 1 = \angle 2$. Так как $\angle 2 + \angle 4 = 90^0$ и $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle 1 + \angle 4 = 90^0$, а, значит, $\angle NKL = 90^0$.

В четырехугольнике $NKLM$ все стороны равны, значит он ромб и, так как один из углов прямой, то и остальные прямые. Следовательно, $NKLM$ –

квадрат.

$$S_{ABCD} = S_{KLMN} + 4S_{\Delta AKN} \qquad \text{или}$$

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\frac{1}{2}a \cdot b,$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab, \qquad a^2 + b^2 = c^2,$$

что и требовалось доказать.

12. Формулы площадей параллелограмма, треугольника, трапеции.

Теорема. Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, проведенную к этой стороне.

Дано:
$ABCD$ – параллелограмм,
$BK \perp AD$

Доказать:
$S_{ABCD} = AD \cdot BK$

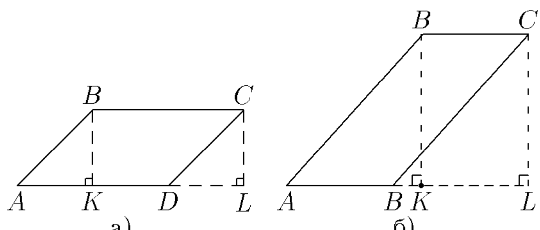


Рис.28.

Доказательство.

Опустим из вершины C перпендикуляр на AD (рис.28). Возможны два случая: 1) основание перпендикуляра, точка K, лежит на стороне AD параллелограмма (рис.28 а)); 2) точка K лежит на продолжении стороны AD (рис.28 б)).

$BK = CL$ – как расстояния между параллельными прямыми. Прямоугольные треугольники ABK и DCL равны по гипотенузе ($AB = CD$ – как противоположные стороны параллелограмма) и катету (BK=CL), значит $S_{ABK} = S_{DCL}$.

1) В случае, когда точка K лежит на стороне AD, имеем

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABK} + S_{KBCD},$$

$$S_{KBCL} = S_{KBCD} + S_{\Delta DCL}.$$

2) В случае, когда точка K лежит на продолжении стороны AD, имеем

$$S_{ABCD} = S_{ABCL} - S_{\Delta DCL},$$

$$S_{KBCL} = S_{ABCL} - S_{\Delta ABK}.$$

И так как $S_{\Delta ABK} = S_{\Delta DCL}$, то $S_{ABCD} = S_{KBCL}$. Площадь прямоугольника $KBCL$ равна произведению сторон KB и BC, и так как $BC = AD$, то $S_{ABCD} = AD \cdot BK$, что и требовалось доказать.

Теорема. Площадь треугольника равна половине произведения стороны на высоту, проведенную к этой стороне.

Дано:
ΔABC,
AC – основание,
BD – высота

Доказать: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$.

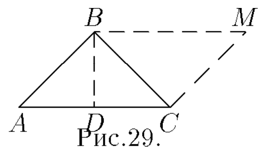


Рис.29.

Доказательство.

Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABMC$ (рис.29). В треугольниках ABC и MCB: $\left.\begin{array}{c} AB = MC \\ AC = BM \end{array}\right\}$ как стороны параллелограмма, BC – общая, значит $\Delta ABC = \Delta MCB$, а следовательно $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta MCB} = \frac{1}{2}S_{ABMC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$, что и требовалось доказать.

Теорема. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

Дано:
$ABCD$ – трапеция,
AD, BC – основания,
BK – высота

Доказать:
$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot BK$.

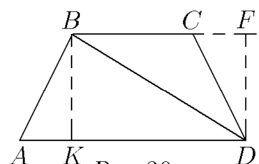


Рис.30.

Доказательство.

Проведем в трапеции диагональ BD и $DF \perp BC$ (рис.30) $(DF = BK)$.

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{\Delta BDC} = \frac{1}{2}AD \cdot BK + \frac{1}{2}BC \cdot DF = \frac{1}{2}BK(AD + BC),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Выведем и другие формулы для вычисления площадей геометрических фигур.

1. Площадь параллелограмма равна произведению его сторон на синус угла между ними.

2. Площадь треугольника равна половине произведения двух сторон треугольника на синус угла между ними.

Доказательство

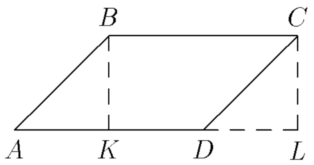


Рис.31.

Как известно, площадь параллелограмма равна

$$S_{ABCD} = AD \cdot BK,$$

где BK – высота параллелограмма.

Из прямоугольного треугольника ABK (рис.31) $BK = AB \sin \angle A$, тогда

$$S_{ABCD} = AD \cdot AB \sin \angle A,$$

что и требовалось доказать.

Если рассмотреть $S_{ABCD} = AD \cdot CL$, то из прямоугольного треугольника DCL, $CL = CD \cdot \sin \angle CDL = CD \cdot \sin \left(180^0 - \angle ADC\right) = CD \cdot \sin \angle ADC$, значит $S_{ABCD} = AD \cdot CD \sin \angle D$.

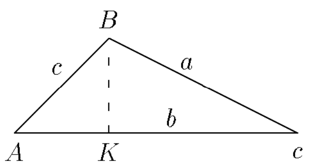


Рис.32.

Аналогично получается формула для вычисления площади треугольника: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle A$ (рис.32); т.к. $BK = AB \cdot \sin \angle A$.

3. Площадь треугольника можно найти по формуле Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c – стороны треугольника, p – полупериметр.

Доказательство.

Пусть в треугольнике ABC $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha \tag{1}$$

По теореме косинусов

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha$$

Отсюда

$$\cos \alpha = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc};$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}\right)^2 = \left(1 - \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}\right) \times$$

$$\times\left(1+\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}\right)=\frac{a^2-(c-b)^2}{2bc}\cdot\frac{(c+b)^2-a^2}{2bc}=$$
$$=\frac{(a-c+b)(a+c-b)(c+b-a)(c+b+a)}{4b^2c^2}$$
Но $a+b+c=2p$, $a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c)$; $a+c-b=a+b+c-2b=2p-2b=2(p-b)$; $c+b-a=2(p-a)$, тогда

$$\sin^2\alpha=\frac{2^3(p-a)(p-b)(p-c)2p}{4b^2c^2}=\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2};$$
$$\sin\alpha=\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

что и требовалось доказать.

13. Формула расстояния между двумя точками плоскости. Уравнение окружности.

Теорема. Расстояние между двумя точками плоскости $A\,(x_1; y_1)$ и $B\,(x_2; y_2)$ вычисляется по формуле

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

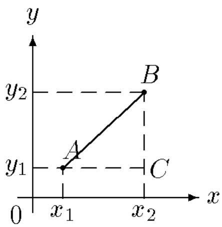


Рис.33.

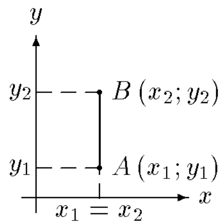


Рис.34.

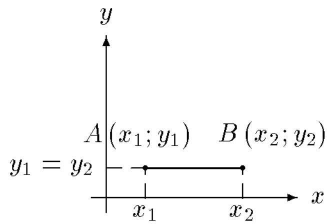


Рис.35.

Доказательство.

1. Пусть $AB \not\parallel Oy$, $AB \not\parallel Ox$. Через точки A и B проведем прямые, параллельные осям координат (рис.33). По теореме Пифагора

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Но $AC = |x_2 - x_1|$, $BC = |y_2 - y_1|$, следовательно

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1}$$

2. Пусть $AB||Oy$ (рис.34), тогда $AB = |y_2 - y_1|$. С другой стороны, если $AB||Oy$, то $x_1 = x_2$ и по формуле (1)

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|,$$

т.е. формула (1) применима и в случае, когда $AB||Oy$.

3. Аналогично доказывается, что формула (1) применима и в случае, когда $AB||Ox$ (рис.35).

С одной стороны $AB = |x_2 - x_1|$. С другой стороны, т.к. $AB||Ox$, то $y_1 = y_2$, значит по формуле (1) имеем

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0^2} = |x_2 - x_1|.$$

4. Если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, то точки A и B совпадают и $AB = 0$. Тот же результат дает и формула (1).

Итак, для любых двух точек плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ расстояние определяется по формуле (1), что и требовалось доказать.

Используя формулу (1), выведем уравнение окружности.

Определение. Окружностью называется множество всех точек плоскости, равноотстоящих от данной точки плоскости.

Данная точка полоскости называется центром окружности, а расстояние от центра окружности до точек окружности называется радиусом окружности.

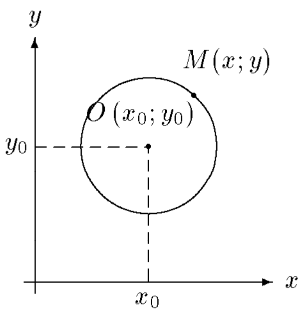


Рис.36.

Пусть на плоскости имеем декартову прямоугольную систему координат, и пусть центр окружности имеет координаты $O(x_0; y_0)$ и радиус окружности равен R.

Возьмем на окружности произвольную точку $M(x; y)$ (рис.36). По определению окружности $OM = R$. По формуле (1) $OM = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, значит $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$ или

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \qquad (2)$$

Итак, мы показали, что если точка принадлежит окружности, то ее координаты удовлетворяют уравнению (2). С другой стороны, если координаты некоторой точки удовлетворяют уравнению (2), то она находится на расстоянии R от точки $O(x_0; y_0)$, а, значит, по определению лежит на окружности. Тем самым доказано, что уравнение (2) есть уравнение окружности. В частном случае, если центр окружности находится в начале системы координат, то ее уравнение имеет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

14. Признак параллельности прямой и плоскости.

Определение. Прямая называется параллельной плоскости, если она не имеет с ней общих точек.

Теорема (признак параллельности прямой и плоскости). Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-либо прямой этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

Дано: a, b – прямые,
α –плоскость
$a \not\subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a||b$

Доказать: $a||\alpha$.

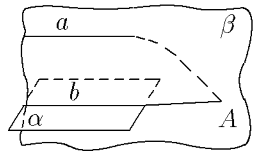


Рис.37.

Доказательство.

Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что прямая a не параллельна плоскости α, т.е. имеет с ней общую точку A (рис.37). Проведем через прямые a и b плоскость β. Такая плоскость существует и единственна. Плоскости α и β пересекаются по прямой b. Точка A принадлежит прямой a, а значит плоскости β, и так как точка A принадлежит как плоскости α, так и плоскости β, то она принадлежит их линии пересечения, т.е. прямой b. Значит точка A является точкой пересечения прямых a и b, что невозможно, так как по условию $a||b$. Следовательно, предположение, что a не параллельна α неверно и $a||\alpha$, ч.т.д.

15. Признак параллельности плоскостей.

Определение. Две плоскости называются *параллельными* если они не имеют общих точек.

Теорема (признак параллельности плоскостей). Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Дано:
α, β –плоскости,
$a, b \subset \alpha$, $a \cap b = O$,
$a_1, b_1 \subset \beta$, $a_1 \cap b_1 = O_1$,
$a||a_1$, $b||b_1$

Доказать: $\alpha||\beta$.

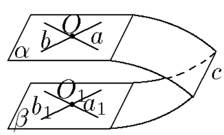


Рис.38.

Доказательство.

Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что плоскости α и β не параллельны, т.е. пересекаются по прямой, например, c

(рис.38).

Так как прямые a и b пересекаются, то хотя бы одна из них пересекается с прямой c (если бы ни одна из прямых a и b не пересекалась с прямой c, то они были бы параллельны между собой, что противоречит условию). Пусть прямая a пересекается с прямой c, а значит и с плоскостью β. Но прямая $a \not\subset \beta$ параллельна прямой $a_1 \subset \beta$, значит, по признаку параллельности прямой и плоскости прямая $a||\beta$, значит прямая a не может пересекаться с плоскостью β, а следовательно, предположение, что $\alpha \not\parallel \beta$ неверно и $\alpha||\beta$, ч.т.д.

16. Теорема о перпендикулярности прямой и плоскости.

Определение. Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна всем прямым, лежащим в этой плоскости.

Теорема (признак перпендикулярности прямой и плоскости). Если прямая, не лежащая в плоскости, перпендикулярна двум прямым, лежащим в плоскости и проходящим через точку пересечения прямой с плоскостью, то она перпендикулярна и самой плоскости.

Дано:
$a \cap \alpha = A$, $b, c \subset \alpha$, $A \in c$,
$A \in b$
$a \perp b$, $a \perp c$

Доказать: $a \perp \alpha$.

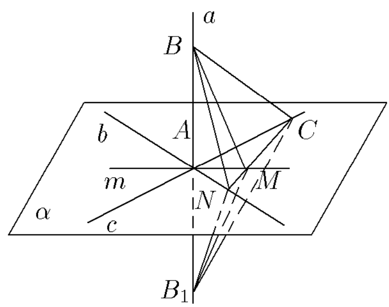


Рис.39

Доказательство.

Проведем в плоскости α через точку A пересечения прямой a с плоскостью α произвольную прямую m (рис.39) и покажем, что прямая a перпендикулярна прямой m. Проведем в плоскости α прямую, пересекающую прямые b, m и c соответственно в точках N, M и C. На прямой a от точки A отложим два равных отрезка AB и AB_1 и соединим точки B и B_1 с точками N, M и C.

1) ΔBCB_1 – равнобедренный, так как в нем AC – медиана (по построению) и высота (по условию). Значит, $BC = B_1C$.

2) Аналогично, ΔBNB_1 – равнобедренный. Значит $BN = B_1N$.

3) $\Delta BNC = \Delta B_1NC$ – по трем сторонам ($BC = B_1C$, $BN = B_1N$ – по доказанному, NC – общая сторона). Из равенства следует, что $\angle BCN = \angle B_1CN$.

4) $\Delta BCM = \Delta B_1CM$ – по двум сторонам и углу между ними ($BC = B_1C$, $\angle BCM = \angle B_1CM$ – по доказанному, MC – общая сторона). Из равенства треугольников следует равенство сторон $BM = B_1M$.

5) ΔBMB_1 – равнобедренный, так как $BM = B_1M$. В нем AM – медиана (по построению). Значит AM – высота, т.е. $AM \perp BB_1$, или $m \perp a$.

Так как прямая m была выбрана произвольно, то прямая a перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости α, а, значит, по определению она перпендикулярна и самой плоскости α, и тем самым теорема доказана.

17. Перпендикулярность двух плоскостей.

Определение. Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними 90^0 (рис.40).

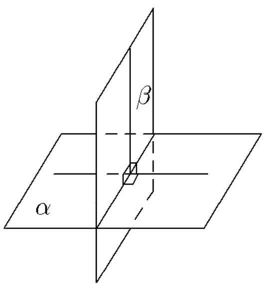


Рис.40.

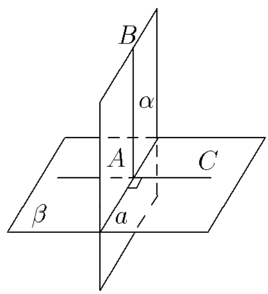


Рис.41.

Теорема (признак перпендикулярности двух плоскостей). Если одна из двух пересекающихся плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Дано:
α, β – плоскости,
$\alpha \cap \beta = a$.
$AB \subset \alpha$, $AB \perp \beta$

Доказать: $\alpha \perp \beta$.

Доказательство.

Так как прямая AB перпендикулярна плоскости β, то она перпендикулярна любой прямой этой плоскости, значит $AB \perp a$, где a – линия пересечения плоскостей α и β.

Проведем через точку пересечения A прямой AB с плоскостью β прямую AC в плоскости β, перпендикулярную прямой a (рис.41). Тогда $\angle CAB$ есть линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями α и β. Так как $BA \perp \beta$, то $BA \perp AC$, а значит $\angle CAB = 90^0$. А так как линейный угол двугранного угла равен 90^0, то и двугранной угол равен 90^0, значит $\alpha \perp \beta$, ч.т.д.

18. Теоремы о параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Напомним, что две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Две плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90^0. (Углом между пересекающимися плоскостями называется угол между прямыми, проведенными в этих плоскостях перпендикулярно линии их пересечения).

Параллельные и перпендикулярные плоскости обладают рядом важных свойств, применяемых на практике. (Например, в параллельных плоскостях размещают перекрытия многоэтажных зданий, стекла двойных окон).

Рассмотрим некоторые из них.

Теорема 1. Параллельные плоскости пересекаются секущей плоскостью по параллельным прямым.

Дано:
α, β, γ – плоскости,
$\alpha || \beta$
$\alpha \cap \gamma = a$, $\beta \cap \gamma = b$

Доказать: $a||b$.

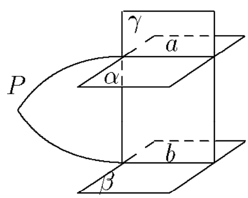


Рис.42.

Доказательство.

Предположим, что прямые a и b не параллельны. Тогда они пересекаются, так как находятся в одной плоскости γ. Обозначим точку пересечения прямых a и b через P (рис.42). Т.к. $a \subset \alpha$, то $P \in \alpha$, т.к. $b \subset \beta$, то $P \in \beta$. Получили, что плоскости α и β имеют общую точку, что противоречит условию, значит предположение, что $a \not\parallel b$ неверно, и $a||b$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

Дано:
α, β – плоскости,
$\alpha || \beta$
a, b – прямые
$a || b$
$a \cap \alpha = A$, $a \cap \beta = A_1$
$b \cap \alpha = B$, $b \cap \beta = B_1$

Доказать: $AA_1 = BB_1$.

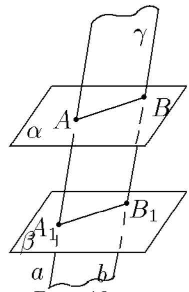


Рис.43.

Доказательство.

Проведем плоскость γ через параллельные прямые a и b (рис.43). По доказанной теореме 1 линии пересечения этой плоскости с плоскостями α и β параллельны, т.е. $AB || A_1B_1$. Четырехугольник ABB_1A_1 – параллелограмм. По свойству параллелограмма $AB = A_1B_1$, ч.т.д.

Теорема 3. Прямая, проведенная в одной из двух перпендикулярных плоскостей перпендикулярно их линии пересечения, перпендикулярна другой плоскости.

Дано:
α, β – плоскости,
$\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = a$,
$b \subset \alpha$, $b \perp a$

Доказать: $b \perp \beta$.

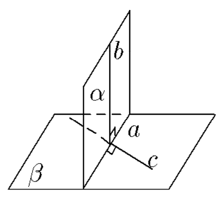


Рис.44.

Доказательство.

Проведем в плоскости β через точку пересечения прямой b с прямой a, прямую c перпендикулярно прямой a (рис.44).Тогда угол между прямыми b и c есть линейный угол двугранного угла между плоскостями α и β. А так как $\alpha \perp \beta$, то двугранный угол – прямой, а значит и линейный угол, образованный прямыми b и c, тоже прямой, т.е. $b \perp$ c. А т.к. $b \perp$ c и $b \perp a$

и $a, c \subset \beta$, то $b \perp \beta$, ч.т.д.

19. Теорема о трех перпендикулярах.

Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок прямой, перпендикулярной плоскости и проходящей через данную точку, от данной точки до точки пересечения прямой с плоскостью. Точка пересечения прямой, перпендикулярной плоскости, с этой плоскостью называется *основанием* перпендикуляра.

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости не являющийся перпендикуляром.

Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки к плоскости, называется проекцией наклонной на эту плоскость.

Теорема. Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной, проведенной к этой плоскости, то она перпендикулярна и ее проекции. И обратно, если прямая на плоскости перпендикулярна проекции наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и самой наклонной.

I. Дано:

$a \subset \alpha$
$AB \perp \alpha$, AC – наклонная
BC – проекция AC на α
$a \perp AC$

Доказать: $a \perp BC$.

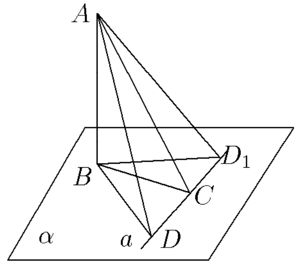


Рис.45

Доказательство.

1) Отложим на прямой a от точки C два равных отрезка CD и CD_1 (рис.45). Соединим точки D и D_1 с точками A и B.

2) ΔDAD_1 – равнобедренный, так как AC – высота ($AC \perp DD_1$) и медиана ($CD = CD_1$). Значит $AD = AD_1$.

AD и AD_1 – наклонные к плоскости α, и т.к. они равны, то и их проекции тоже равны, т.е. $BD = BD_1$.

3) ΔDBD_1 – равнобедренный, $(BD = BD_1)$ и в нем BC – медиана $(DC = D_1C)$. Тогда, по свойству равнобедренного треугольника, BC – высота, т.е. $BC \perp DD_1$, ч.т.д.

II. Дано:
$a \perp BC$
Доказать: $a \perp AC$.

Доказательство.
Так как в ΔDBD_1 BC – медиана и высота, то ΔDBD_1 – равнобедренный, следовательно $BD = BD_1$. Но тогда и наклонные будут равны, т.е. $AD = AD_1$.

Значит ΔADD_1 – равнобедренный и в нем медиана AC будет являться и высотой, т.е. $AC \perp a$, ч.т.д.

Глава III. Все для подготовки к экзамену

1. Основные формулы и тождества.

I. Формулы сокращенного умножения:

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$;
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;
$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$.
$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b^1 + \ldots + b^{n-1}\right\}$.
$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b^1 + \ldots + b^{n-1}\right\}$, n – нечетные.

Формулы, связанные с прогрессиями:

$a_n = a_1 + d(n-1)$, $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$; a_n – арифметическая прогрессия.
$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $S_n = \frac{b_1 - b_n \cdot q}{1-q}$; b_n – геометрическая прогрессия.
$S = \frac{b_1}{1-q}$, если $|q| < 1$ – сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

II. Тригонометрические формулы.

1. Решение простейших уравнений:

а) $\sin x = a$, $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $\quad (|a| \le 1)$;
$\sin x = 0$, $x = \pi n$;
$\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$;
$\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$;
$\arcsin(-a) = -\arcsin a$, $0 < a \le 1$.

б) $\cos x = a$, $x = \pm\arccos a + 2\pi n$, $\qquad (|a| \le 1)$;

$\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$;

$\cos x = 1$, $x = 2\pi n$;

$\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n$;

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$, $0 < a \le 1$;

в) $\mathrm{tg} x = a$, $x = \mathrm{arctg} a + \pi n \qquad (a \in \mathbf{R})$

$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg} a, \quad a > 0.$

(В каждой формуле $n \in \mathbf{Z}$).

2. Формулы приведения:

$\sin(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \cos\alpha$, $\qquad \cos(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp\sin\alpha$,

$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp\mathrm{ctg}\alpha$, $\qquad \mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp\mathrm{tg}\alpha$,

$\sin(\pi \pm \alpha) = \mp\sin\alpha$, $\qquad \cos(\pi \pm \alpha) = -\cos\alpha$,

$\mathrm{tg}(\pi \pm \alpha) = \pm\mathrm{tg}\alpha$, $\qquad \mathrm{ctg}(\pi \pm \alpha) = \pm\mathrm{ctg}\alpha$,

$\sin(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha) = -\cos\alpha$, $\qquad \cos(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha) = \pm\sin\alpha$,

$\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha) = \mp\mathrm{ctg}\alpha$, $\qquad \mathrm{ctg}(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha) = \mp\mathrm{tg}\alpha$,

$\sin(2\pi \pm \alpha) = \pm\sin\alpha$, $\qquad \cos(2\pi \pm \alpha) = \cos\alpha$,

$\mathrm{tg}(2\pi \pm \alpha) = \pm\mathrm{tg}\alpha$, $\qquad \mathrm{ctg}(2\pi \pm \alpha) = \pm\mathrm{ctg}\alpha$.

3. Формулы, связывающие тригонометрические функции одного аргумента: $(n \in \mathbf{Z})$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\alpha \ne \frac{\pi}{2} + \pi n$; $\qquad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\alpha \ne \pi n$;

$\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$, $\alpha \ne \frac{\pi}{2} n$;

$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $\alpha \ne \frac{\pi}{2} + \pi n$;

$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, $\alpha \ne \pi n$.

$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$, $\qquad \sin^2\alpha = \frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$, $\alpha \ne \frac{\pi}{2} + \pi n$.

4. Формулы сложения:

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$;

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$;

$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}$, $\alpha \ne \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\beta \ne \frac{\pi}{2} + \pi k$, $\alpha \pm \beta \ne \frac{\pi}{2} + \pi m$, $k, m, n \in \mathbf{Z}$.

5. Формулы функций кратных аргументов:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$;

$\mathrm{tg} 2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$, $\alpha \ne \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\alpha \ne \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$;

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; $\qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

6. Формулы преобразования суммы в произведение:

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;
$\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$, $\beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$, k, $n \in \mathbf{Z}$;
$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; $\quad 1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$;
$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cdot\cos(\alpha - \frac{\pi}{4})$; $\quad \sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\cdot\sin(\alpha - \frac{\pi}{4})$.
$a\cos\alpha + b\sin\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha-\varphi)$, где $\cos\varphi = \frac{a}{a^2+b^2}$, $\sin\varphi = \frac{b}{a^2+b^2}$.

7. Формулы функций половинного аргумента:
$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$; $\quad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$;
$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$, $\alpha \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;
$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, $\alpha \neq \pi + 2\pi n$, $\quad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

8. Формулы понижения степени:
$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$; $\quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$;
$\sin^3\alpha = \frac{3}{4}\sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 3\alpha$; $\quad \cos^3\alpha = \frac{3}{4}\cos\alpha + \frac{1}{4}\cos 3\alpha$;
$\sin^4\alpha = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 4\alpha$; $\quad \cos^4\alpha = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 4\alpha$;

9. Формулы преобразования произведения в сумму:
$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$;
$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$;
$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$.

10. Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента (универсальная подстановка):
$\sin\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $\quad \cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $\alpha \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\alpha \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

III. Формулы для логарифмической функции (в каждой формуле, если не указано специально, $a > 0$, $a \neq 1$)

$a^{\log_a b} = b$, $b > 0$ – основное логарифмическое тождество;
$\log_a 1 = 0$; $\quad \log_a a = 1$;
$\log_a(bc) = \log_a|b| + \log_a|c|$, если $bc > 0$;
$\log_a\frac{b}{c} = \log_a|b| - \log_a|c|$, если $\frac{b}{c} > 0$;
$\log_a b^c = c\cdot\log_a b$, $b > 0$, $c \in \mathbf{R}$;
$\log_a b^{2n} = 2n\log_a|b|$, $b \neq 0$;
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$;
$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, $b > 0$, $b \neq 1$;
$\log_a b = \log_{a^p} b^p = p\cdot\log_{a^p} b$, $b > 0$, $p \in \mathbf{R}$, $p \neq 0$;
$\log_{a^p} b = \frac{1}{p}\log_a b$, $b > 0$, $p \neq 0$;

$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$;
$\log_c b \cdot \log_d a = \log_d b \cdot \log_c a$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, $c \neq 1$, $d \neq 1$;

IV. Основные формулы планиметрии:

1. Произвольный треугольник:
$S = \frac{1}{2}ah$; $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$; $r = \frac{S}{p}$;
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $R = \frac{abc}{4S}$;
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ (теорема косинусов);
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$ (теорема синусов).
2. Прямоугольный треугольник:
$S = \frac{1}{2}ab$; $S = \frac{1}{2}ch_c$; $r = \frac{a+b-c}{2}$; $R = \frac{c}{2}$;
$a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Пифагора);
$a^2 = a_c \cdot c$, $b^2 = b_c \cdot c$, $h_c^2 = a_c \cdot b_c$;
$a = c\sin\alpha = c\cos\beta = b\mathrm{tg}\alpha = b\mathrm{ctg}\beta$.
3. Равносторонний треугольник:
$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
4. Произвольный выпуклый четырехугольник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$.
5. Параллелограмм: $S = ah_a = ab\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$.
$2(a^2 + b^2) = {d_1}^2 + {d_2}^2$.
6. Ромб: $S = ah_a = a^2\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 d_2$.
7. Прямоугольник: $S = ab = \frac{1}{2}d^2\sin\varphi$.
8. Квадрат: $S = a^2 = \frac{d^2}{2}$.
9. Трапеция: $l = \frac{a+b}{2}$; $S = \frac{a+b}{2}h$.
10. Описанный многоугольник:

$$S = pr, \qquad p = \frac{a+b+c+\cdots}{2}.$$

11. Правильный многоугольник:

$$a_3 = R\sqrt{3}; \quad a_4 = R\sqrt{2}; \quad a_6 = R; \quad S = \frac{na_n r}{2}.$$

12. Окружность, круг: $C = 2\pi r$; $S = \pi r^2$.

13. Сектор (l – длина дуги,ограничивающей сектор, n^0 – градусная мера центрального угла; α – радиальная мера центрального угла).

$$l = \frac{\pi r n^0}{180^0} = r\alpha. \qquad S = \frac{\pi r^2 n^0}{360^0} = \frac{1}{2}r^2\alpha.$$

14. Длина медианы теругольника выражается формулой:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}.$$

15. Длина стороны треугольника выражается через медианы формулой:

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2\left({m^2}_b + {m^2}_c\right) - {m^2}_a}.$$

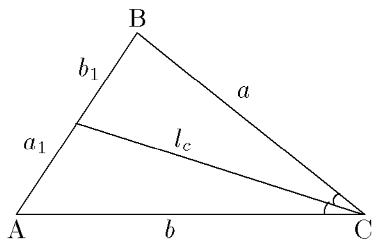
16. Длина биссектрисы треугольника выражается формулой:

$$l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1},$$

где a и b – длины сторон треугольника ABC, a_1 и b_1 – отрезки третьей стороны.

Справедливо равенство:

$$\frac{b}{a} = \frac{a_1}{b_1}.$$



17. Длина биссектрисы треугольника выражается через длины его сторон a, b и c по формуле:

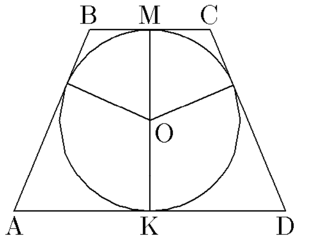
$$l_c = \frac{\sqrt{ab\left(a+b+c\right)\left(a+b-c\right)}}{a+b}.$$

18. Для всякого треугольника зависимость между его высотами h_a, h_b и h_c и радиусом r вписанной окружности выражается формулой:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

19. Площадь S равнобедренной трапеции, диагонали каторой взаимно перпендикулярны, равна квадрату ее высоты, т.е. $S = h^2$

20. Высота равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, явлеется средним геометрическим ее оснований: $h^2 = a \cdot b$



$MK^2 = AD \cdot BC$

V. Основные формулы стереометрии:

1. Объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями a, b, c:

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

2. Объем призмы:

$$V = H \cdot S,$$

где H – высота, S – площадь основания призмы;

$$V = l \cdot S_1,$$

где l – длина бокового ребра, S_1 – площадь перпендикулярного сечения призмы.

3. Объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} H \cdot S,$$

где H – высота, S – площадь основания пирамиды.

4. Объем усеченной пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} H \left(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2 \right),$$

где H – высота, S_1 и S_2 – площади оснований усеченной пирамиды.

5. Объем цилиндра:

$$V = \pi R^2 \cdot H,$$

где R – радиус основания, H – высота цилиндра.

6. Объем конуса:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H,$$

где R – радиус основания конуса, H – высота конуса.

7. Объем шара:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

где R – радиус шара.

8. Объем шарового сегмента:

$$V = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right),$$

где H – высота сегмента, R – радиус шара.

9. Объем шарового сектора:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

где H – высота сегментной части сектора, R – радиус шара.

10. Объем многограника:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{п}} \cdot r,$$

где r – радиус вписанного шара, $S_{\text{п}}$ – полная поверхность многогранника.

11. Объем усеченного конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi H \left(R^2 + Rr + r^2\right),$$

где R и r – радиусы оснований, H – высота конуса.

Формулы для площадей поверхности.

1. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды:

$$S = \frac{1}{2} P \cdot h,$$

гле P – периметр основания, h – апофема.

2. Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды:

$$S = \frac{1}{2}\left(P_1 + P_2\right) \cdot h,$$

где P_1 и P_2 – периметры оснований, h – апофема.

3. Площадь боовой поверхности цилиндра:

$$S = 2\pi RH,$$

где R – радиус основания, H – высота цилиндра.

4. Площадь боковой поверхности конуса:

$$S = \pi Rl,$$

где R – радиус основания, l – длина образующей.

5. Площадь полной поверхности конуса:

$$S = \pi R(R + l).$$

6. Площадь сферы

$$S = 4\pi R^2,$$

где R – радиус.

7. Площадь сферического сегмента:

$$S = 2\pi RH,$$

где R – радиус сферы, H – высота сегмента.

Векторы:

1. $\overline{AB}(b_1 - a_1; b_2 - a_2; b_3 - a_3)$, где $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$;
2. $|\bar{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$, где a_1, a_2, a_3 – координаты вектора $\bar{a}$.
3. $\lambda \cdot \bar{a}(a_1, a_2, a_3) = \overline{(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)}$.
4. $\bar{a}(a_1, a_2, a_3) + \bar{b}(b_1, b_2, b_3) = \bar{c}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.
5. $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi$, где $\varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$.
6. $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$, если $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b}(b_1, b_2, b_3)$.
7. $\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2} \cdot \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2}}$.
8. $\bar{a} \cdot \bar{a} = \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$, откуда $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}}$.

2. Задания для выработки навыков сознательного выполнения тестовых заданий по математике.

Уровень 0

1. Найти $5\sin(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\beta=-\frac{3}{5}$, $\alpha\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$, $\beta\in\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$.
2. Найти $10\cos\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.
3. Вычислить $\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}$ при $x=\frac{\pi}{4}$.
4. Вычислить $84\cos x-5$, если $x=\frac{4\pi}{3}$.
5. Вычислить без таблиц $\sin 50^0\cdot\cos 200^0-\cos 230^0\cdot\sin 20^0$.
6. Вычислить $\frac{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$, если $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.
7. Вычислить а) $\sqrt{5}\cdot\mathrm{ctg}2\alpha$, если $\sin(\alpha-90^0)=-\frac{2}{3}$ и $270^0<\alpha<360^0$; б) $\mathrm{tg}\alpha$, если $2\mathrm{tg}\alpha-\sin\alpha+5\cos\alpha=10$.
8. Найти $5(\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha\cdot\sin^2\alpha)$, если $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.
9. Вычислить без таблиц $2\sin 75^0\sin 15^0$.
10. Найти $\mathrm{tg}^3\alpha-\mathrm{ctg}^3\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{ctg}\alpha=3$.
11. Найти $\mathrm{tg}\alpha$, если $\mathrm{tg}(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{3}{4}$.
12. Найти $\frac{7(\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{tg}\alpha)}{\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha}$, если $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и $0<\alpha<90^0$.
13. Упростить $-\cos 10^0+\frac{\sin^2 10^0}{2\sin^2 5^0}$.
14. Упростить выражение $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\mathrm{tg}\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\cdot\mathrm{tg}\alpha$.
15. Вычислить наибольший корень уравнения $6\arcsin(x^2+6x+8,5)=\pi$.
16. Найти решение уравнения $\sin 2x=\sqrt{2}\cos x$, $o<x\le\frac{\pi}{3}$.
17. Найти решение уравнения $1-\cos x=2\sin\frac{x}{2}$, $\frac{5\pi}{6}<x\le\pi$.
18. Решить уравнение $\cos^2 x=5+5\sin x$, $\frac{4\pi}{3}\le x\le\frac{5\pi}{3}$.
19. Решить уравнение $\sin 3x\cdot\cos x=\sin 2x$, $\frac{\pi}{12}<x<\frac{\pi}{3}$.

20. Решить уравнение $(1+\cos 4x)\sin 2x = \cos^2 x$, $0 \le x < \frac{\pi}{6}$.

21. Решить уравнения: а) $2^x - 2^{x-2} = 3$; б) $3^{2x} - 3^x = 72$; в) $5^{x-4} = 6^{4-x}$; г) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$; д) $\lg\left(8\sqrt[10]{2^{x^2-14,5x}}\right) = 0$; е) $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 14$; ж) $3\log_8(x-2) = \log_2\sqrt{2x-1}$; з) выбрать промежуток, содержащий ровно два корня уравнения $\left(\log_{\sqrt{5}} x^6\right)^2 = 36$: $(-2;-1)$, $(-1,5;-0,5)$, $(-1;2)$, $(1;3)$; и) $x^{\log_{x^2}(x^2-1)} = 5$; к) $x + 1 + \log_{\frac{1}{3}}\left(-2 + 3^{-x}\right) = 0$;

22. Вычислить: а) $100^{\frac{1}{2}\lg 8 - 2\lg 2}$; б) $3^{2\log_3 9 - 1}$; в) $5 \cdot 10^{-1+\lg 8}$; г) $\log_3 5^{-2\log_5 3}$; д) $7 + \log_{\sqrt{2}}(2\sqrt{2})$; е) $3^{\frac{2}{\log_5 3}}$; ж) $49^{1-\frac{1}{4}\log_7 25}$; з) $\log_2\left(1 - \cos^2\frac{11\pi}{6}\right)$; и) $\log_{\sqrt[4]{3}}\sqrt[8]{243}$; к) $4^{2(1-\log_{16} 2)}$; л) $a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}}$.

23. Упростить: а) $\frac{1-a^{-0,5}}{1+a^{0,5}} - \frac{a^{0,5}+a^{-0,5}}{a-1}$; б) $\frac{\sqrt{x}+1}{1+\sqrt{x}+x} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$; в) $\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{3\sin x}$.

24. Найти число, 3,6% которого составляет значение выражения $\frac{3+4,2:0,1}{\left(1:0,3-2\frac{1}{3}\right)\cdot 0,3125}$.

25. Найти x, если $\frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^6 \cdot 2^{-6}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 8^{-\frac{2}{3}}} = x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^9$.

26. Построить графики функций: а) $y = \sin|x|$; б) $y = |\cos x|$; в) $y = \operatorname{tg}|x|$, если $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; г) $y = 2^{|x|}$; д) $y = \lg|x|$; е) $y = -\lg x + 1$; ж) $y = |x+3|(x-1)$; з) $y = \frac{x}{|x|}$; и) $y = \frac{\sin x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$; к) $y = 1 - \frac{1}{|x|}$; л) $y = \sqrt{2^{2\log_2|x-2|}}$.

27. Решить неравенства
а) $\frac{x^2+4}{x^2+7x+12} < 0$; б) $x + 1 > \sqrt{11-x}$; в) $\frac{(x-1)^2 x}{x+1} \le 0$.

28. Вычислить длину вектора $\vec{a} + 5\vec{b}$, если $\vec{a} = (1;1;-1)$ и $\vec{b} = (2;0;0)$.

29. При каком значении k длина вектора $\vec{a}(-2;2;4k)$ вдвое меньше длины вектора $\vec{b}(3;3k;0)$?

30. При каком значении m векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + m\vec{j} - 3\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ перпендикулярны?

31. Даны отрезки a и b. Постройте отрезок $\sqrt{a \cdot b}$.

32. Найти углы ромба, в котором диагональ равна стороне.

33. Одна из диагоналей ромба равна 8 см., а периметр равен 20 см. Найти длину второй диагонали.

34. Длины двух сторон треугольника равны 10 и 16 см. Угол между ними равен 60^0. Найти третью сторону треугольника.

35. Длины оснований равнобедренной трапеции равны 51 и 69 см., длина боковой стороны 41 см. Найти площадь трапеции.

36. Найти боковую сторону равнобедренного треугольника, площадь которого равна 40, а синус угла В равен 0,8, если АВ = ВС.

37. Основание равнобедренного треугольника составляет 40% от его периметра, равного 95. Найти длину боковой стороны.

38. В треугольнике с вершинами $A(-6;1)$, $B(4;-5)$ и $C(-1;-4)$ найти длину медианы, проведенной из вершины С.

39. Основание равнобедренного треугольника относится к боковой стороне, как 4 : 7, а их разность равна 9. Вычислить периметр треугольника.

40. Найти сторону основания правильной четырехугольной призмы, если ее боковая поверхность равна 8 см^2, а полная 40 см^2.

41. Радиус основания прямого кругового конуса равен 9, а объем равен 81π. Найти тангенс угла между высотой конуса и его образующей.

42. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 6см. и образует с боковой гранью угол α. Найти 25% объема пирамиды, если $\mathrm{tg}\alpha = \frac{2}{3}$.

43. Диагональ правильной четырехугольной призмы образует с боковой гранью угол в 30^0, а сторона основания равна $2\sqrt{2}$ м. Вычислить объем призмы.

44. Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды равно 4 см., а плоский угол при вершине равен 30^0. Найти площадь боковой поверхности.

45. Стороны параллелограмма равны 3 см. и 5 см., а острый угол между диагоналями равен 45^0. Найти площадь параллелограмма.

46. Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 17 и 39 см. Расстояние между центрами 44 см. Найти длину общей хорды.

47. Вычислить площадь трапеции по разности оснований, равной 14 см. и двум боковым сторонам 13 и 15 см., если можно в данную трапецию вписать окружность.

48. В трапеции длины оснований равны 5 и 15 см., а диагонали равны 12 и 16 см. Найти площадь трапеции.

49. Решить следующие уравнения, неравенства и системы уравнений и неравенств:

а) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 81 \\ \lg\sqrt{x \cdot y} = 1 + \lg 3 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 648 \\ 3^x \cdot 2^y = 432 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$, найти $3x - y$; д) $2 \cdot 2^x < 3^{x-1}$; е) $4^x - 5 \cdot 2^x - 1 > 0$;

ж) $|\log_3 x| < 2$; з) $\log_a \frac{4}{x-3} \geq 0$, если $0 < a < 1$.

и) $\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \sqrt{y+3} = 3 \\ 2xy - y + 6x - 3 = 4 \end{cases}$; к) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 15$;

л) $\begin{cases} x^{-1} + y^{-1} = 5 \\ x^{-2} + y^{-2} = 13 \end{cases}$; м) $x^2 + \sqrt{x^2 + 2x + 8} = 12 - 2x$;

н) $\log_x(2 - x - x^2) > 0$; о) $\frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4) - 1} \geq 0$;

п) $\frac{1}{\sqrt{3x-5}} = (3x-5)^{\log_{0,04}(2+5x-x^2)}$; р) $\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1 \\ y = 5 + |x-1| \end{cases}$;

с) $3\sqrt{x+4} = 5 - 2|x+2|$; т) $\frac{3^x - 25}{x+1} \leq \frac{3^x - 25}{x-3}$; у) $\begin{cases} x^{-1} + y^{-1} = 5 \\ y^{-1} + z^{-1} = 3 \\ z^{-1} + x^{-1} = 8 \end{cases}$.

50. Решить следующие задачи:

1) Найти $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, если $f(x) = \sin 4x \cdot \cos 4x$.
2) Найти критические точки $y = x^2 - \ln(1 + 2x)$.
3) В каких точках производная функция $y = x^5$ совпадает со значением самой функции?
4) Найти функцию, обратную функции $y = x^2 - 4$, $x \in [0; +\infty)$.
5) Найти максимальное значение функции $y = 6\sin^2 x - 4\cos^2 x$ (без использования производной).
6) Найти наибольшее значение функции $y = 2\cos x - \sin^2 x$.
7) В полушар радиуса 4 вписан цилиндр так, что плоскость основания цилндра совпадает с плоскостью, ограничивающей полушар. Найти высоту цилиндра, зная, что его объем наибольший.

51. Произведение четвертого и двенадцатого членов геометрической прогрессии равно 32. Найти 8-й член этой прогрессии.

52. Покажите, что из равенства $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ следует, что $a = b = c$.

53. Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма квадратов медиан составляет 150% от квадрата гипотенузы.

54. Докажите, что сумма медиан треугольника меньше периметра этого треугольника.

55. Не решая уравнение $\log_{0,5} x = x + 5$, определите количество его корней.

56. Решите неравенство $\left|\sqrt{x^2-1} - 3\right| \geq -2^x$.

57. Решите уравнения: а) $\frac{\cos x}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2} = |\cos x|$; б) $\cos 6x \cdot \cos x = -1$;
в) $\sqrt{\left(\frac{8}{3} - x\right)(x+1)}\operatorname{tg}\pi x = 0$; г) $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} = -2$;
д) $\cos^4 x - 3\cos 3x = 3\cos x - \cos^3 x \cdot \cos 3x$, $x \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.
е) $\sqrt{2 - 3\cos 2x} = \sqrt{\sin x}$. ж) $|\sin(2x-1)| = \cos x$.
з) $\operatorname{tg}6x \cdot \cos 2x - \sin 2x - 2\sin 4x = 0$. и) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1$.

58. Основания равнобедренной трапеции равны 3 и 12. Середина большего основания соединена с концами меньшего основания прямыми, которые пересекают диагонали трапеции в двух точках. Найдите расстояние между этими точками.

59. 1) При каких значениях a уравнение $\frac{2a+5}{3} = \frac{5ax+1}{4}$ имеет отрицательный корень?

2) При каких k график функции $y = (k^2 + 6k + 8)x - 18$ параллелен оси OX?

3) При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $3x^2 + 30x + a = 0$ равна 40?

4) Найти все значения a, при которых один из корней уравнения $4x^2 - 15x + 4a^2 = 0$ равен квадрату другого корня.

5) Построить график функции $y = -x \cdot |x-2|$ и выяснить, сколько решений имеет уравнение $-x \cdot |x-2| = a$ в зависимости от a.

6) Найти числа a, b, c, если известно, что их сумма равна 2, а квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет единственный корень $x = 2$.

7) При каких a корни уравнения $(2-a)x^2-3ax+2a=0$ удовлетворяют условиям $x_1<\frac{1}{2}$, $x_2>\frac{1}{2}$?
8) При каких a прямая $y=(2a+6)x+1$ касается параболы $y=(a-3)x^2-2$?
9) При каких значениях параметра k уравнение $x^3-3x^2-9x+k=0$ имеет один действительный корень?
10) Найти число решений уравнения $|x-|2x-3||=a$ при различных a, построив график левой части уравнения.

60. Средняя линия трапеции, равная 10 см., делит площадь трапеции в отношении 3 : 5. Найти длины оснований трапеции.

61. Найти интервал на котором определена функция $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\cos x\right)$: $(1;2)$, $(2;3)$, $(4;5)$, $(5;6)$.

62. Доказать без помощи таблиц, что $\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_5\pi}>2$.

63. Рационально или иррационально число $\sqrt{2\sqrt{2}+3}-\sqrt{2}$?

64. Доказать, что сумма растояний от любой точки внутри правильного треугольника до всех его сторон есть величина постоянная.

65. Доказать: $\frac{1+\cos 40^0+\cos 80^0}{\sin 80^0+\sin 40^0}=\mathrm{ctg}40^0$

66. Основания трапеции равны a и b. Около нее описана и в нее вписана окружности. Вычилить высоту и боковые стороны трапеции.

67. Показать, что если $x+x^{-1}=a$, то $x^3+x^{-3}=a(a^2-3)$.

68. Сумма первых 20 членов арифметической прогрессии (a_n) в 5 раз меньше суммы первых 25 членов арифметической прогрессии (b_n). Известно, что $4a_{12}=b_{19}$. Найти отношение разностей этих прогрессий.

69. Показать, что $\mathrm{tg}40^0+\mathrm{tg}45^0+\mathrm{tg}50^0>3$.

70. Найти область определения функции $f(x)=\sqrt{\log_{3x+1}\frac{x-2}{x-4}}$.

71. Найти область значений функции $y=-\sqrt{-3x^2+12x-3}$.

72. Четырехугольник ABCD таков, что в него можно вписать и около него можно описать окружность, AB $-$ CD = BC $-$ AD. Доказать, что диагональ BD есть диаметр описанной окружности.

73. Сплав меди и цинка массой 12,5 кг содержит 40% меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученый новый сплав содержал меди и цинка поровну?

74. Сколько водителей было в штате гаража, если после двух последовательных сокращений числа водителей каждый раз на 20%, осталось 32 человека?

75. В прямоугольном треугольнике радиусы вписанной и описанной окружностей относятся как 2 : 5. Найти острые углы треугольника.

Ответы

1. $\frac{24}{5}$; 2. -8; 3. $\sqrt{2}$; 4. -47; 5. $-\frac{1}{2}$; 6. $\frac{2}{5}$; 7. а) $\frac{1}{4}$, б) 5; 8. $\frac{12}{5}$; 9. $\frac{1}{2}$; 10. 36; 11. 7; 12. -25; 13. 1; 14. $2\mathrm{ctg}\alpha$; 15. -2; 16. $\frac{\pi}{4}$; 17. π; 18. $\frac{3\pi}{2}$; 19. $\frac{\pi}{6}$; 20. $\frac{\pi}{8}$; 21. а) 2, б) 2, в) 4, г) 4, д) $\frac{5}{2}$, 12, е) 256, ж) 5, з) интервал $(-1;2)$, и) $\sqrt{26}$, к) -1; 22. а) $\frac{1}{2}$; б) 27; в) 4; г) -2; д) 10; е) 25; ж) $\frac{49}{5}$; з) -2; и) $\frac{5}{2}$; к) 8; л) $\lg a$; 23. а) $\frac{2}{1-a}$, б) $\sqrt{x}(x-1)$, в) $\frac{1}{3}$, если $x \in (2\pi n; \pi+2\pi n)$ и $-\frac{1}{3}$, если $x \in (\pi+2\pi n; 2\pi+2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$; 24. 4000; 25. 8; 27. а) $x \in (-4;-3)$, б) $x \in (2;11]$, в) $x \in (-1;0] \cup \{1\}$; 28. $\sqrt{123}$; 29. не существует; 30. $-\frac{1}{2}$; 32. 60^0, 120^0, 60^0, 120^0; 33. 6; 34. 14; 35. 2400; 36. 10; 37. 28,5; 38. 2; 39. 54; 40. 4; 41. 3; 42. 32; 43. 32; 44. 24. 45. 8; 46. 36; 47. 168; 48. 96; 49. а) $(1;2)$ и $(2;1)$, б) $(25;36)$, в) $(3;4)$, г) $(2;3)$ и $(3;2)$ $3x-y=3$ или 7, д) $x \in \left(\log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{6}; +\infty\right)$, е) $x \in \left(\log_2 \frac{5+\sqrt{29}}{2}; +\infty\right)$, ж) $x \in \left(\frac{1}{9}; 9\right)$, з) $x \in [7;+\infty)$, и) $(1;1)$ и $\left(\frac{5}{2};-2\right)$, к) $\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$, л) $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$, м) -4 и 2, н) $x \in \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1\right)$, о) $x \in (4+\sqrt{2};+\infty) \cup \{5\}$, п) 2 и $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$, р) $\left(\frac{3}{2};\frac{11}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2};\frac{11}{2}\right)$, с) $-\frac{15}{4}$, -3, $-\frac{7}{4}$, т) $x \in (-1;\log_3 25] \cup (3;+\infty)$; у) $\emptyset$; 50. 1) -2, 2) $\frac{1}{2}$, 3) 0 и 5, 4) $x = +\sqrt{y+4}$, 5) 6, 6) 2, 7) $\frac{4}{\sqrt{3}}$; 51. $\pm 4\sqrt{2}$; 52. Указание: умножьте обе части на 2 и выделите полные квадраты; 55. 1; 56. $x \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$; 57. а) $-\frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, б) $-\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}$, $n = 5m-2$, $m \in \mathbf{Z}$, в) -1, 0, 1, 2, $\frac{8}{3}$, г) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$, д) $\pm\frac{3\pi}{4}$, $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$, е) $(-1)^n \frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, ж) $x = \frac{1}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$, где $k \neq 3n-2$, $x = \frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi l}{3}$, $l \neq 3n+2$, $x = 1-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, k, n, $l \in \mathbf{Z}$, з) $\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi k}{2}$, n, $k \in \mathbf{Z}$, и) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; 58. 2; 59. 1) $a \in \left(-\frac{17}{8};0\right)$, 2) -2 и -4, 3) $a \in \emptyset$, 4) $\pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$, 5) 1 решение, если $a < -1$, $a > 0$, 2 решения, если $a = 0$ или $a = -1$, 3 решения, если $-1 < a < 0$, 6) $a = 2$, $b = -8$, $c = 8$, 7) $a < -2$ или $a > 2$, 8) 0 и -9, 9) $k < -5$, $k > 27$, 10) нет решений, если $a < 0$, 2 решения, если $a = 0$, $a > \frac{3}{2}$, 3 решения, если $a = \frac{3}{2}$, 4 решения, если $0 < a < \frac{3}{2}$; 60. 15 и 5; 61. интервал $(2;3)$; 63. рационально, 1; 66. $\sqrt{ab}$, $\frac{a+b}{2}$; 68. $d_1 : d_2 = 1$;

70. $D(f) = \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (4; +\infty)$; 71. $E(f) = [-3; 0]$; 73. 2,5 кг.; 74. 50 человек; 75. $\arccos \frac{7\sqrt{2}}{10} + 45^0$ и $45^0 - \arccos \frac{7\sqrt{2}}{10}$.

Уровень А

I.

1. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2x > 3 - \frac{13x-2}{11}, \\ \frac{x}{6} + \frac{2}{3} \cdot (x-7) < \frac{3x-20}{9}. \end{cases}$$

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y = 0,5x^2 - 3x + 2 \quad \text{и} \quad y = x - 4.$$

3. Найдите критические точки функции $y = \sin^2 x + \cos x$.

4. Решите неравенство $\log_7 x - \log_7(2x-5) \le \log_7 2 - \log_7(x-3)$.

5. Найдите высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

II.

1. Каждое из боковых ребер четырехугольной пирамиды образует с высотой угол α. Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом β между диагоналями. Найти объем и периметр основания пирамиды, если ее высота равна h.

2. Решите уравнение $\sin^2 2x + \sin^2 x = \frac{3}{2}$.

3. Решите уравнение $\frac{\lg(x-3)}{\lg(x^2-15)} = \frac{1}{2}$.

4. При каких значениях a квадратный трехчлен $ax^2 - 7x + 4a$ принимает отрицательные значения при любых действительных значениях x?

5. Определите промежутки возрастания и убывания функции

$$y = 4 + x^2 - x^3.$$

III.

1. Решить уравнение $\sin^2 x \cdot \sin 2x = \frac{1}{4}\sin 4x$.

2. Решить неравенство

$$\left(\frac{2}{9}\right)^{x^2+x} \ge (20,25)^{2x-7}.$$

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{y}{3}=3, \\ \frac{x}{2}+\frac{3}{y}=\frac{3}{2}. \end{cases}$$

4. Найти промежутки возрастания и убывания функции

$$y=x^5+x^4-x^3.$$

5. Основанием пирамиды служит прямоугольник площадью Q, две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие образуют с ней углы α и β. Найти объем пирамиды.

IV.

1. Найти корень уравнения $\sin x-1=\frac{1}{2}\sin 2x-\cos x$, лежащий в интервале $0^0<x<180^0$.

2. Найти промежутки возрастания и убывания функции

$$y=2x^3+6x^2-18x+120.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy+x^2+y^2=13, \\ x+y=4. \end{cases}$$

4. Найти область определения функции $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-3)^2-4}$.

5. В правильной треугольной пирамиде площадь основания в два раза больше площади сечения пирамиды плоскостью, проходящей через боковое ребро и высоту пирамиды. Найти угол наклона боковой грани к плоскости основания.

V.

1. Решить уравнение $4\cos^3 x=3\cos x$.

2. Найти область определения функции $y=\lg\frac{x+1}{x+2}+\frac{1}{2\sqrt{5-x}}$.

3. Решить уравнение $2^{x+2}-2^{2-x}-15=0$.

4. Найти длину сторон равнобедренного треугольника, если его высота, проведенная к основанию, равна h, а радиус вписанной окружности равен r.

VI.

1. Решить уравнение $(\sin x-\cos x)^2-1=(\sin x+\cos x)^2$.

2. Решить уравнение $\log_2(3-x)+\log_2(1-x)=3$.

3. Решить неравенство

$$\frac{2x+\frac{1}{5}}{x+1} < 1.$$

4. Найти площадь равнобедренной трапеции, если радиус вписанной в нее окружности равен 5 м, а боковая сторона 18 м.

VII.

1. Решить уравнение $\log_2\left[84+2^{x(x-3)}\right] = \log_2 25 + 2$.

2. Решить уравнение $\sin^3 x \cdot \cos x - \cos^3 x \cdot \sin x = \frac{1}{4}$.

3. Расстояние между двумя пристанями на реке, равное 35 км, пароход в оба конца прошел за 7 ч. 20 мин. Определить скорость парохода по течению и против течения реки, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

4. Шар радиуса R вписан в конус. Из центра шара образующая конуса видна под углом α. Найти объем конуса.

5. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x - 1$ на отрезке $[-2;0]$.

VIII.

1. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+1)} > 1.$$

2. Решить уравнение

$$\sin^4\frac{x}{3} + \cos^4\frac{x}{3} = \frac{5}{8}.$$

3. Теплоход прошел 9 км по озеру и 20 км по течению реки за 1 час. Найти скорость (в км/ч) теплохода при движении по озеру, если скорость течения реки 3 км/ч.

4. Основанием пирамиды служит прямоугольник площадью Q, две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания, а две другие образуют с ней углы α и β. Найти объем пирамиды.

5. Найти касательные к графику функции $y = 2x^2+2$, проходящие через точку $(0;1)$.

IX.

1. Решить неравенство $\left|x^3-1\right| > 1-x$.

2. Решить уравнение $\cos x + 2\cos 2x = 1$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 8x^2 + 16$ на отрезке $[1; 3]$.

4. Магазин получил 64 чайника двух разных емкостей, причем меньший из них стоил на 1 рубль дешевле, чем больший. За большие чайники было выручено 100 рублей, а за меньшие 36 рублей. Сколько было тех и других чайников и по какой цене они продавались?

5. Угол при основаниии равнобедренного треугольника равен φ. Найдите отношение радиуса вписанной в данный треугольник окружности к радиусу описанной окружности.

X.

1. Моторная лодка спустилась по течению реки на 12 км и тотчас же вернулась обратно, затратив на весь путь 9 часов. Если бы скорость течения реки была в два раза больше действительной, то на весь путь туда и обратно потребовалось бы 14,4 часа. Найти скорость течения реки.

2. Найти (в градусах) решение уравнения $3 - 2\sin^2 x - 3\cos x = 0$, удовлетворяющее условиям: $10^0 < x < 100^0$.

3. Найти наименьшее натуральное число, удовлетворяющее наравенству

$$\log_2\left(9^{x-1} + 7\right) > 2 + \log_2\left(3^{x-1} + 1\right).$$

4. Площадь равнобочной трапеции, описанной около круга, равна 162. Определить длину боковой стороны трапеции, если острый угол при ее основании равен 30^0.

5. Осевым сечением кругового конуса является равносторонний треугольник. В конус вписан шар радиуса 3. Найти объем конуса.

XI.

1. Теплоход прошел расстояние между двумя пристанями по течению реки за 7 ч, против течения – за 9 ч. Определить собственную скорость теплохода и растояние между пристанями. $V_{\text{теч}} = 3$км/ч.

2. Найти (в радианах) наибольшее решение уравнения

$$3\sin^2 x + \sin 2x + \cos^2 x = 1,$$

удовлетворяющее условиям $0 < x < \pi$.

3. Найти наименьшее целое решение неравенства

$$\log_2 4 + \log_2\left(3^{x-1} + 1\right) \geq \log_2\left(9^{x-1} + 7\right).$$

4. Площадь параллелограмма равна 3, синус острого угла равен 3/5, квадрат меньшей диагонали равен 18. Найти периметр параллелограмма.

5. Основание пирамиды – правильный треугольник со стороной 15. Одно из боковых ребер перпендикулярно основанию, а два других наклонены к плоскости основания под углом 60^0. Найти площадь большей боковой грани пирамиды.

XII.

1. Решить уравнение $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x - \cos^2 x = -2$, если $0 < x < 4$.

2. Решить неравенства

а) $4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \le 0$; б) $\log_{\frac{1}{2}} |\cos x| \cdot \log_5(x^2 - 9) < 0$.

3. Построить график функции

$$y = \frac{x\sqrt{(x-1)^2}}{|x|}.$$

4. Каждое ребро правильной треугольной призмы равно a. Через сторону основания и середину оси проведена плоскость. Найти площадь этого сечения.

5. Двум рабочим была поручена работа. Второй приступил к ней на час позже первого. Через 3 часа после того, как первый начал работу, им осталось выполнить 9/20 всей работы. По окончании работы оказалось, что каждый выполнил половину всей работы. За сколько часов каждый, работая отдельно, может выполнить работу?

XIII.

1. Решить неравенство

$$\frac{2^{1-x}}{2^x - 1} \le 1.$$

2. Решить уравнения

$$\text{а)} \quad \log_2 182 - 2\log_2 \sqrt{5-x} = \log_2(11-x) + 1,$$

$$\text{б)} \quad \sqrt{7\sin x - \cos 2x} + 2\cos x = 0.$$

3. Построить график функции $y = 3^{\log_3 |x|} + x^2 - 2$.

4. В правильной треугольной пирамиде по стороне основания a и величине α двугранного угла, образованного двумя боковыми гранями, определить длину бокового ребра.

5. Бак емкостью 2400 м^3 наполняется топливом. При опорожнении этого же бака производительность насоса на 10 м^3/мин выше, чем производительность насоса при наполнении. В результате время опорожнения бака на 8

мин меньше времени заполнения. Определить производительность насоса при заполнении бака.

XIV

1. Решить уравнение

$$\sqrt{1-\sin^2 x}+\frac{1}{2\mathrm{tg} x}=0.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{1}{x+3}+\frac{5}{x^2-3x+9}\leq\frac{27}{x^3+27}.$$

3. Решить уравнение $\log_{|x|}(1-x)-\log_{|x|}(1+x)=1$.

4. Найти все значения параметра a на отрезке $[1;11]$, для которых больший корень уравнения $x^2-6x+2ax+a-13=0$ принимает наибольшее значение.

5. Дана правильная четырехугольная пирамида $S\mathrm{ABC}D$, все ребра которой равны a. Через точку M, делящую отрезок $\mathrm{A}D$ в отношении $2:1$, считая от точки A, проведена плоскость, параллельная плоскости $\mathrm{A}S\mathrm{B}$. Вычислить площадь полученного сечения.

XV

1. Решить уравнение $\frac{\cos x-\sin 2x}{\cos 3x}=1$.

2. Решить неравенство $x+5\sqrt{-x}+24>0$.

3. Решить уравнение $2^{2x+5}-3^{x+\frac{9}{2}}=3^{x+\frac{7}{2}}-4^{x+4}$.

4. Найти уравнение касательной к графику функции $y=\frac{1}{x^2}$, где $x>0$, отсекающей на осях координат треугольник площадью 2,25.

5. Около правильной четырехугольной пирамиды $S\mathrm{ABC}D$ с основанием $\mathrm{ABC}D$ описан шар. Центр шара делит высоту пирамиды в отношении $5:1$, считая от вершины S. Найти косинус плоского угла при вершине пирамиды.

XVI

1. Решить уравнения

а) $(1+\mathrm{tg}^2 2x)(\sin\frac{21}{4}x\cos\frac{7}{4}x+\sin\frac{5}{4}x\cos\frac{x}{4})=\frac{1}{\cos^2 2x}(\sin\frac{x}{4}\cos\frac{5}{4}x-\sin\frac{7}{4}x\cos\frac{21}{4}x)$.

б) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

2. Решить неравенство

$$\left(2^x+3\cdot 2^{-x}\right)^{2\log_2 x-\log_2(x+6)}>1.$$

3. Определить площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{13}$, а медиана третьей стороны равна 2 (не пользуясь готовой формулой для медианы.)

4. Из всех правильных треугольных призм, имеющих объем V, найдите призму с наименьшей суммой длин ее ребер. Чему равна длина стороны основания этой призмы?

XVII

1. Упростить выражение

$$\sqrt{x(x^{-1}+4x-4)^{-1}} - \frac{2x^2}{|2x-1|}, \quad x > 0$$

2. Решить уравнение

$$2^{\cos x} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-\operatorname{tg} x} \cdot 2^{\frac{1}{2\cos x}}$$

3. Сумма первых трех членов возрастающей геометрической прогрессии равна 13, а их произведение равно 27. Вычислить сумму первых пяти членов этой прогресии.

4. Решить неравенство $\log_{\sqrt{2x-1}}(2x-3) > 2\log_8 4 + \log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

5. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 8 и боковой стороной 6, проведена касательная, параллельная основанию. Найти длину отрезка касательной, заключенной между сторонами треугольника.

XVIII.

1. Решить уравнение $3^{\frac{x}{5}} + 3^{\frac{x-10}{10}} = 84$.

2. Решить неравенство $5 \cdot 2^{2x} < 3 \cdot 10^x + 2 \cdot 5^{2x}$.

3. Решить уравнение $\cos 6x + \operatorname{tg}^2 x + \cos 6x \cdot \operatorname{tg}^2 x = 1$.

4. В прямоугольном треугольнике ABC угол A – прямой, величина угла B равна 30^0, а радиус вписанной окружности равен 3. Найти расстояние от вершины C до точки касания вписанной окружности и катета AB.

5. Решить неравенство:

$$\left|\frac{x^2+4x-5}{x^2-x}\right| < 2.$$

XIX.

1. Решить уравнение $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$.

2. Решить неравенство

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 x-2}<\frac{2}{\log_2 x+6}.$$

3. Найти корни уравнения $4+2\cos^2 x=7\sin 2x$, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right]$.

4. Наименьший из углов прямоугольного треугольника равен α. Через середину меньшего катета и середину гипотенузы проведена окружность, касающаяся гипотенузы. Найти отношение площадей круга, ограниченного этой окружностью, и треугольника.

5. Решить неравенство

$$\left|\frac{x^2-2x-3}{9-x^2}\right|>1.$$

XX.

1. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{x^2+5x-6}{x^2-25}}-\log_5(49-x^2)+\frac{x^2+16x}{4-x}.$$

2. Решить задачу.

Заработная плата рабочего ежегодно повышалась на одно и то же число процентов. В конце первого года она составила 242 р., а 2-го года – 121% первоначальной. Каковы первоначальная зарплата и процент ежегодного ее повышения?

3. Решить уравнение $\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{6x^2+10}$.

4. Доказать тождества:

$$\text{а)}\quad \cos^2\alpha+\cos^2\beta-\sin^2(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta),$$

$$\text{б)}\quad \frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}.$$

5. Решить неравенство $\sqrt{x+5}\geq 2x+1$.

XXI.

1. Найти область определения функции

$$y=\sqrt[22]{\frac{x^2-81}{x^2-7x-8}}-\log_6(x^2-4)+\frac{x^3+12x^2}{x+3}.$$

2. Решить задачу.

В течение трех месяцев изменялась зарплата рабочего так, что в конце первого месяца увеличилась на 25%, в конце второго месяца – понизилась на 15% и в конце третьего месяца – повысилась на 25%. Какая была первоначальная зарплата, если в конце третьего месяца она составила 85 тыс.руб?

3. Решить уравнение

$$\lg(x-10)\cdot\lg(x+10)=\lg(x^2-100)-1.$$

4. Доказать тождества а) $3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=8\sin^4\alpha$, б) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin\gamma\cdot\sin(\alpha-\beta)$, если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

5. Решить неравенство $\log_{x-2}27\le 3$.

XXII

1. Решить уравнение

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x-1)-\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x-2)=-1$$

2. Решить неравенство

$$\left(\frac{35}{x}-x-2\right)\cdot\log_{\frac{1}{4}}(2-x)\ge 0$$

3. Решить уравнение $\sqrt{7\sin x-\cos 2x}=-2\cos x$

4. Два грузовых автомобиля должны были перевезти некоторый груз в течение 6 часов. Второй автомобиль задержался в гараже, и когда он прибыл на место погрузки, первый перевез уже 3/5 всего груза; остальную часть груза перевез второй автомобиль, и весь груз был перевезен таким образом за 12 часов. Сколько времени нужно было каждому автомобилю в отдельности для перевозки груза?

5. Высота конуса равна h, а угол между высотой и образующей равен α. В этот конус вписан другой конус так, что его вершина совпадает с центром основания первого конуса, а соответствующие образующие перпендикулярны. Найти объем вписанного конуса.

XXIII

1. Решить уравнение

$$(1+2\cos x)\cdot\sqrt{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=0$$

2. Решить неравенство

$$\log_7 x - \log_x \frac{1}{7} > 2$$

3. Решить неравенство $\sqrt{-x^2+8x-12} < 10-2x$.

4. В равнобедренную трапецию вписан круг. Одна из боковых сторон делится точкой касания на отрезки длиной m и n. Найти площадь трапеции.

5. Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того, как первый проработал 7 часов, а второй – 4 часа, оказалось, что они выполнили 5/9 всей работы.Проработав еще совместно 4 часа, они установили, что им остается выполнить 1/18 всей работы. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, мог бы выполнить всю работу?

XXIV.

1. Вычислить

$$\frac{81^{\frac{1}{\log_5 9}} + 3^{\frac{3}{\log_{\sqrt{6}} 3}}}{409} \cdot \left((\sqrt{7})^{\frac{2}{\log_{25} 7}} - 125^{\log_{25} 6} \right).$$

2. Решить неравенства а) $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}}$; б) $\sqrt{4-x^2} + \frac{|x|}{x} \geq 0$.

3. Решить уравнение

$$\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}.$$

4. Найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4.

5. Первый рыбак должен проплыть на лодке до места встречи 35 км., а второй – на $31\frac{3}{7}\%$ меньше. Чтобы прибыть на место встречи одновременно со вторым, первый выходит на полчаса раньше второго и делает в среднем на 2 км в час больше, чем второй. Найти скорость, с которой плыл каждый рыбак, и сколько времени каждый был в пути.

XXV.

1. Доказать тождество

$$3 - 4\cos(4\alpha - 3\pi) - \cos(5\pi + 8\alpha) = 8\cos^4 2\alpha.$$

2. Решить уравнение $\left(\sqrt[5]{3}\right)^x + \left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10} = 84$.

3. Решить неравенства

а) $\dfrac{|x+2| - 3x}{\sqrt{4-x^2}} \geq 0$; б) $\log_3(\log_2(2 - \log_4 x) - 1) < 1$.

4. В прямоугольном треугольнике ABC угол A прямой, величина угла B равна 30^0, а радиус описанной окружности равен $\sqrt{3}$. Найдите расстояние от вершины C до точки касания вписанной окружности и катета AB.

5. Из морского порта одновременно отходят два парохода по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Спустя 1/2 ч после отплытия пароходов кратчайшее расстояние между ними было 15 км, а спустя еще 15 мин оказалось, что один из пароходов был от пристани на 4,5 км дальше другого. Найдите скорость каждого парохода.

XXVI.

1. Решить неравенство

$$\frac{3^{x+1}-5}{9^x-1} > \frac{1}{2}$$

2. Найти все решения уравнения $\sin 2x + \cos 2x = \frac{1}{\sin 2x}$, принадлежащие промежутку $[0;\pi]$.

3. Основанием пирамиды служит равнобочная трапеция, у которой острый угол равен α, а площадь равна S. Все боковые грани образуют с плоскостью основания один и тот же угол, равный β. Найти объем пирамиды.

4. Решить уравнение $\log_{\frac{1}{3}}(11+x) = 2\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt{x+1}+2)$.

5. Построить график функции $y = 3^{\log_3|x^2-3|} + 1$.

XXVII

1. Найти все решения уравнения $\cos\pi(1-x) + \cos 2\pi(2-x) + \cos 3\pi(3-x) = 0$, принадлежащие отрезку $[0; \frac{\pi}{2}]$

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{3x+1}{x+1} \geq -1$$

3. Написать уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{1-6x}$, отсекающей на положительных направлениях осей координат равные отрезки.

4. Из города A в город B выходит первый пешеход, а через 2 часа навстречу ему из города B в город A выходит второй пешеход. К моменту встречи второй пешеход прошел 7/9 расстояния, пройденного к этому моменту первым пешеходом. Сколько часов требуется первому пешеходу на весь путь от A до B, если второй пешеход проходит путь от B до A за 7 часов?

5. В основании прямого параллелепипеда, объем которого равен 36, лежит параллелограмм с острым углом 30^0 и сторонами 4 и 6. Найти площадь сечения, проходящего через противолежащие бóльшие стороны оснований параллелепипеда.

XXVIII

1 . Вычислить $\cos 7\alpha + 2\sin 3\alpha \cdot \sin 4\alpha$, если $\cos \alpha/2 = \sqrt{0.45}$

2. Решить неравенство

$$\frac{(x^2-9)\cdot\sqrt{x+5}}{x} \geq 0$$

3. Решить систему

$$\begin{cases} 5(\log_y x + \log_x y) = 26 \\ xy = 64 \\ y < x \end{cases}$$

4. Высота конуса равна h. Через вершину конуса под углом 45^0 к плоскости основания проведена плоскость, отсекающая от окружности дугу в 90^0. Найти:

а) радиус основания конуса;

б) площадь сечения конуса этой плоскостью.

5. Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску сплава, чтобы полученный новый сплав содержал 40% меди?

XXIX

1. Решить уравнения

а) $2\lg x - \lg 4 = -\lg(5-x^2)$; б) $\sqrt{6\sin x} - 2\cos(\pi + x) = 0$

2. Найти все корни уравнения $1 + x + |x^2 - x - 3| = 0$, удовлетворяющие неравенству $x + \frac{\sqrt{14}}{3} > 0$.

3. Основанием четырехугольной пирамиды служит ромб, меньшая диагональ которого имеет длину d, а острый угол равен α. Каждая боковая грань наклонена к плоскости основания под углом β. Вычислить полную поверхность пирамиды.

4. Решить неравенство

$$8\cdot\frac{3^{x-2}}{3^x-2^x} > \frac{3^x+2^x}{3^x}$$

XXX

1. При испытании на экономичность двух двигателей одинаковой мощности было установлено, что один из них израсходовал 600 г бензина, а второй, работавший на на 2 часа меньше, 384 г. Если бы первый двигатель

расходовал в час столько бензина, сколько второй, а второй- столько, сколько первый, то за то же время работы расход бензина в обоих двигателях был бы одинаковым. Сколько бензина в час расходует каждый двигатель?

2. Найдите все корни уравнения $\sin x\cos\frac{\pi}{8}+\cos x\sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}$, расположенные в промежутке $[-\frac{3}{2}\pi;\pi]$

3. Решите неравенство

$$\log_x\frac{1}{4}+\log_4\frac{1}{x}\le -2$$

4. Упростить выражение

$$\frac{8ab^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{4}{3}}}{4a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(2\sqrt[3]{\frac{a}{b}}-1\right)^{-1}$$

5. Диагонали АС и ВD ромба АВСD равны соответственно 40 см и 30 см. Из вершины А проведен к плоскости ромба перпендикуляр АК, равный $6\sqrt{3}$ см. Найти:

1) расстояние от точки К до противоположной стороны ромба;

2) величину двугранного угла, составленного плоскостями АВСD и КDС.

XXXI.

1. Решить неравенство $3x^2+5^{\log_5 x}<16^{\log_4\sqrt{30}}$.

2. Решить уравнение $1-\cos 6x=\mathrm{tg}3x$

3. Решить систему

$$\begin{cases}\sqrt{x-4y}+\sqrt{x+4y}=6\\ \sqrt{x^2-16y^2}=8\end{cases}$$

4. Даны три последовательные вершины параллелограмма А$(-3;-2;0)$, В$(3;-3;1)$, С$(5;0;2)$. Найдите его четвертую вершину D и угол между векторами $\overline{\text{AC}}$ и $\overline{\text{B}D}$.

5. Равнобедренный тупоугольный треугольник, у которого боковая сторона равна b, а угол при основании α, вращается вокруг боковой стороны. Найдите площадь поверхности фигуры вращения.

XXXII.

1. Найти область определения функции $y=\sqrt{2\cdot 5^{2x}-5^x-1}$.

2. Решить уравнение $\log_{\sqrt{1-x}}(2x^2-3x-1)=4$

3. Решить уравнение $|\mathrm{tg}x|=\mathrm{tg}x-\frac{1}{\cos x}$

4. Два поезда отправились одновременно из А и В навстречу друг другу. Скорость первого поезда на 10 км/ч больше скорости второго. Поезда встретились в 28 км от середины расстояния АВ. Если бы первый поезд отправился из А на 45 минут позже второго, то они встретились бы на середине расстояния АВ. Найти расстояние АВ и скорости обоих поездов.

5. Основанием наклонной треугольной призмы АВС$A_1B_1C_1$ служит правильный треугольник со стороной a. Боковое ребро AA_1 равно b и составляет со сторонами АС и АВ равные углы по 60^0.

а) Доказать, что грань BCC_1B_1- прямоугольник.

б) Найдите площадь боковой поверхности призмы.

XXXIII

1. Решить систему

$$\begin{cases} \cos x\sqrt{\cos y}=0 \\ \cos 2x-2\cos^2 y+2=0. \end{cases}$$

2. Решить уравнение $x^2\cdot 3^{x-2}+3^{\sqrt{x}+2}=3^x+x^2\cdot 3^{\sqrt{x}}$.

3. Решить неравенство $|\log_4(x+2)-2\log_{16}(x-3)|>1$.

4. Два тела, двигаясь по окружности в одном и том же направлении, сходятся через каждые 56 минут. Если бы они двигались с теми же скоростями в противоположных направлениях, то встречались бы через каждые 8 минут. Известно, что при движении в противоположных направлениях расстояние по окружности между сближающимися телами уменьшилось с 40 до 26 метров за 24 сек. Какова скорость каждого тела?

5. Даны цилиндр с квадратным осевым сечением и конус, осевое сечение которого есть равносторонний треугольник. Найти отношение объемов цилиндра и конуса, если их полные поверхности равны между собой.

Ответы.

I. 1. $x\in\left(1;\frac{44}{9}\right)$; 2. $5\frac{1}{3}$; 3. $x=\pi n$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k,n\in\mathbf{Z}$; 4. $x\in(3,5]$; 5. $\frac{2}{3}R\sqrt{3}$; II. 1. $\frac{2}{3}h^3\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\sin\beta$, $4\sqrt{2}h\mathrm{tg}\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$; 2. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$, $n,k\in\mathbf{Z}$; 3. $\emptyset$; 4. $a<-\frac{3}{4}$; 5. $\nearrow$ в $\left[0;\frac{2}{3}\right]$, $\searrow$ в $(-\infty;0]$ и $\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$. III. 1. $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$, $n,k\in\mathbf{Z}$; 2. $x\in[-7;2]$; 3. $(1;3)$ и $(2;6)$; 4. $\nearrow$ в $\left(-\infty;-\frac{2+\sqrt{19}}{5}\right]$ и $\left[\frac{-2+\sqrt{19}}{5};+\infty\right)$, $\searrow$ в $\left[-\frac{2+\sqrt{19}}{5};\frac{-2+\sqrt{19}}{5}\right]$; 5. $\frac{1}{3}Q\sqrt{Q\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$. IV. 1. 90^0; 2. $\nearrow$ в $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$, $\searrow$ в $[-3;1]$; 3. $(1;3)$ и $(3;1)$; 4. $D(y)=\left[\frac{11}{4};3\right)\cup\left(3;\frac{13}{4}\right]$; 5. 60^0. V. 1. $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $n,k\in\mathbf{Z}$; 2. $D(y)=(-\infty;-2)\cup(-1;5)$; 3. 2; 4. $\frac{2rh}{\sqrt{h^2-2rh}}$, $\frac{h(h-r)}{\sqrt{h^2-2rh}}$. VI. 1. $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 2. -1; 3. $x\in$

$\left(-1;\frac{4}{5}\right)$; 4. 180. VII. 1. $\{1;-1;4\}$; 2. $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 3. 15 км/ч, 7 км/ч; 4. $-\frac{1}{3}\pi R^3\mathrm{tg}^3\alpha\cdot\mathrm{tg}2\alpha$; 5. $\left\{-\frac{7}{3};\frac{1}{3}\right\}$. VIII. 1. $x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$; 2. $\pm\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$; 3. 27 км/ч; 4. $\frac{1}{3}Q\sqrt{Q\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$; 5. $y=1\pm 2\sqrt{2}x$. IX. 1. $x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$; 2. $\pi+2k\pi$, $\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi n$, $n,k\in\mathbf{Z}$; 3. 34, $-5\frac{1}{3}$; 4. 40,24; 5. $4\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\varphi$. X. 1. 1 км/ч; 2. 60^0; 3. 3; 4. 18; 5. 81π. XI. 1. 24км/ч, 189км; 2. $\frac{3}{4}\pi$; 3. 1; 4. 12; 5. $\frac{225\sqrt{15}}{4}$. XII. 1. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$; 2. a) $x\in(-\infty,0)\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$; б) $x\in(-\sqrt{10},-\pi)\cup(-\pi,-3)\cup(3,\pi)\cup(\pi,\sqrt{10})$; 3. $y=\begin{cases}x-1, & x<0,\ x\geq 1\\ 1-x, & 0<x\leq 1\end{cases}$; 4. $\frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$; 5. 10,8. XIII. 1. $x\in(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$; 2. a) -2, б) $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3. $y=x^2+|x|-2$, $x\neq 0$; 4. $\frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)}}$; 5. 50. XIV. 1. 1. $-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2. $x\in(-\infty;-3)\cup(-3;1]$; 3. $\sqrt{2}-1$; 4. $a=1$; 5. $\frac{5a^2\sqrt{3}}{36}$. XV. 1. πn, $n\in\mathbf{Z}$; 2. $x\in(-64;0]$; 3. $-\frac{3}{2}$; 4. $y=-2x+3$; 5. $\cos\alpha=\frac{3}{5}$. XVI. 1. a) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $n,k\in\mathbf{Z}$; б) $x\in[5,10]$; 2. $x\in(3;+\infty)$; 3. $\sqrt{3}$; 4. $\sqrt[3]{\frac{4V}{\sqrt{3}}}$; XVII. 1. $-x$, если $x>\frac{1}{2}$, x, если $0<x<\frac{1}{2}$; 2. $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3. 121; 4. $x\in\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$; 5. $\frac{8}{5}$. XVIII. 1. 20; 2. $x\in(0;+\infty)$; 3. πk, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n,k\in\mathbf{Z}$; 4. $3\cdot\sqrt{5+2\sqrt{3}}$; 5. $x\in\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right)\cup(5;+\infty)$. XIX. 1. 10; 2. $x\in\left(\frac{1}{64};\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4};4\right)$; 3. $\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\pi$, arctg3, arctg3 $+\pi$; 4. $\frac{\pi\cos\alpha}{8\sin^3\alpha}$; 5. $x\in(-\infty;-3)\cup(-3;-2)$. XX. 1. $D(y)=(-7;-6]\cup(-5;1]\cup(5,7)$; 2. 220 руб., 10%; 3. 1, -1; 5. $x\in\left[-5;\frac{-3+\sqrt{73}}{8}\right]$. XXI. 1. $D(y)=(-\infty;-9]\cup(2;8)\cup[9;+\infty)$; 2. 64 тыс.руб.; 3. 20; 5. $x\in(2;3)\cup[5;+\infty)$. XXII. 1. -1; 2. $x\in[-7;0)\cup[1;2)$; 3. $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4. 12 и 12, 10 и 15; 5. $\frac{1}{12}\pi h^3\sin^2 2\alpha\cdot\sin^2\alpha$. XXIII. 1. $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $n,k\in\mathbf{Z}$; 2. $x\in(1;7)\cup(7;+\infty)$; 3. $x\in[2;4)$; 4. $2(m+n)\sqrt{mn}$; 5. 18 час, 24 час. XXIV. 1. 1; 2. a) $x\in[0;+\infty)$; б) $x\in[-\sqrt{3};0)\cup(0;2]$; 3. $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $n,k\in Z$; 4. $\frac{\sqrt{5}}{2}$; 5. $V_1=10$ км/ч, $V_2=8$ км/ч, $t_1=3,5$ ч., $t_2=3$ ч.; или $V_1=14$ км/ч, $V_2=12$ км/ч, $t_1=2,5$ ч., $t_2=2$ ч.; XXV. 2. 20; 3. a) $x\in(-2;1]$; б) $x\in\left(\frac{1}{4^{14}},1\right)$; 4. $\sqrt{6-\frac{3\sqrt{3}}{2}}$; 5. 18 км/ч и 24 км/ч. XXVI. 1. $x\in(-\infty;0)$; 2. $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{4}$; 3. $\frac{1}{6}S\cdot\mathrm{tg}\beta\sqrt{S\cdot\sin\alpha}$; 4. $\frac{5}{4}$; 5. $y=\left|x^2-3\right|+1$, $x\neq\pm\sqrt{3}$. XXVII. 1. $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{5}{4}$; 2. $x\in\left(-\frac{1}{3};1\right]$; 3. $y=-x+\frac{5}{3}$; 4. 9 час; 5. $6\sqrt{13}$. XXVIII. 1. $-\frac{1}{10}$; 2. $x\in[-3;0)\cup(3;+\infty)\cup\{-5\}$; 3. $x=32$, $y=2$; 4. $h\sqrt{2}$, $\sqrt{2}h^2$; 5. 1,5кг. XXIX. 1. a) 1, 2; б) $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2. $1-\sqrt{5}$; 3. $\frac{d^2\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}$; 4. $x\in\left(0;\log_{\frac{3}{2}}3\right)$. XXX. 1. 60 г/час, 48 г/час; 2. $-\frac{31}{24}\pi$, $\frac{\pi}{24}$, $\frac{17}{24}\pi$; 3. $x\in(1;+\infty)$; 4. $\sqrt[3]{b^2}$; 5. $6\sqrt{19}$, $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{4}$. XXXI. 1. $x\in(0;3)$; 2. $\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$, $k,n\in\mathbf{Z}$; 3. $\left(10;\frac{3}{2}\right)$, $\left(10,-\frac{3}{2}\right)$; 4. $(-1;1;1)$, 120^0; 5. $4\pi b^2\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$. XXXII. 1. $D(y)=[0;+\infty)$; 2. -1; 3. $\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$; 4. 840 км, 80 км/ч, 70 км/ч; 5. $ab(\sqrt{3}+1)$.

XXXIII. 1. $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k; \pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n,k\in\mathbf{Z}\right)$; 2. 3,4; 3. $x\in\left(3;\frac{14}{3}\right)$; 4. 20 м/мин, 15 м/мин; 5. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Уровень B

I.

1. Упростить выражение

$$\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3+y\sqrt{y}+2x^2:\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\frac{3\sqrt{xy}-3y}{x-y}.$$

2. Найти область определения функции

$$f(x)=\sqrt{\log_{x-2}(x^2-8x+15)}.$$

3. Решить уравнение

$$1,5\mathrm{ctg}x+4\sin x\cdot\cos x=\frac{3}{2}\mathrm{tg}(-x)-7.$$

4. Определить интервалы монотонности функции $f(x)=\frac{3-x^2}{x+2}$ и найти ее экстремумы.

5. Найти угол между медианами катетов равнобедренного прямоугольного треугольника.

II.

1. Доказать тождество

$$\log_{\frac{1}{3}}[\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha\cos 2\beta]=0.$$

2. Решить уравнение

$$25^{2x-x^2+1}+9^{2x-x^2+1}=34\cdot 15^{2x-x^2}.$$

3. Решить неравенство $\left|\frac{2x-1}{x-1}\right|>2.$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=4x-x^2$ и $y-x=0$

5. Длина ребра правильного тетраэдра равна с. Через середины двух ребер основания проведена плоскость, параллельная боковому ребру, выходящему из их общей вершины. Вычислить площадь сечения.

III.

1. Число 101 представьте в виде суммы двух натуральных чисел, сумма кубов которых максимальна.

2. Две вершины квадрата лежат на оси абсцисс, а две другие – на кривой $y = x - x^2$. Вычислите площадь квадрата.

3. Найдите все вещественные значения a, при которых все решения неравенства $8\log_a x + \log_x a \le 6$ удовлетворяют неравенству $\cos(\pi\frac{x^2}{a^2}) \ge \frac{1}{2}$.

4. Круг и квадрат имеют общий центр, и их площади равны. Сторона квадрата равна 1. Вычислите сумму длин частей окружности, расположенных внутри квадрата.

5. В кубе с ребром 1 расположен конус так, что его вершина совпадает с вершиной куба. Три грани куба касаются боковой поверхности конуса, а вписанный в куб шар касается основания конуса. Найдите объем конуса.

IV.

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x^2 - \sin y = 1 \\ x^2 + |y| = \frac{\pi}{3} \end{cases}.$$

2. Решить неравенство $\sqrt[3]{x^3 + |x| - 1} \ge 2x - 1$.

3. Решить уравнение

$$\log_2(5\cos 2x - 2) + \log_{\frac{1}{2}}(1 - 6\sin^2 x \cdot \cos^2 x) = 3.$$

4. Для каких значений a неравенство
$4^{x+1} + 9 \cdot 4^{-x} - 2(2^{x+1} + 3 \cdot 2^{-x}) \ge a$ выполняется при всех $x \ge 0$?

5. В цилиндре с высотой h и радиусом основания r расположен квадрат так, что две его вершины лежат на окружности одного основания, а две другие - на окружности другого основания. Вычислите площадь квадрата.

V.

1.Упростите выражение $(a^{-\frac{1}{2}} - 1)(a - 2a^{0,5} + 1)^{-\frac{1}{2}}$ и найдите его значение при $a = 0,16$.

2. Что больше

$$\log_{0,5} \frac{x-1}{x} \quad \text{или} \quad \log_{1995} 1?$$

Ответ обоснуйте.

3. Найдите значения k, при которых уравнение $3x^2 - 2kx - k + 6 = 0$ не имеет корней.

4. Постройте график функции $y = \sin\frac{\pi}{2} \cdot |\cos x|$

5. Решить неравенство

$$5^{-3x-8,5} > \frac{0,2^{x(x+5)}}{5^{0,5}}$$

6. Решить уравнение $\left|\frac{x-3}{x+1}\right| = 1$

7. У кассира набралось 9 рублей пятьюдесятью монетами по 20 и 15 копеек. Сколько у него было монет по 20 копеек и сколько – по 15? Решите задачу арифметическим способом.

8. Длины параллельных сторон трапеции равны 25 и 4, а длины непараллельных сторон – 20 и 13. Найдите высоту трапеции.

9. Один из катетов прямоугольного равнобедренного треугольника лежит в плоскости α, а другой образует с ней угол, равный 45^0. Найдите угол, который образует гипотенуза с плоскостью α.

10. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 8, а угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен 60^0. Через вершину основания параллельно противолежащей ей диагонали проведена секущая плоскость так, что высота пирамиды делится точкой пересечения с этой плоскостью в отношении 1:2 (считая от основания). Найдите площадь сечения.

VI.

1. Двое рабочих за смену изготовили вместе 72 детали. После того, как первый рабочий повысил производительность труда на 15%, а второй на 25%, они стали изготовлять за смену 86 деталей. Сколько деталей изготавливает каждый рабочий после повышения производительности труда?

2. В кубе, ребро которого равно a, центр верхней грани соединен с вершинами основания. Найти полную поверхность образовавшейся пирамиды.

3. Решить уравнение

$$\frac{\lg x}{\lg(3-4x)} = 2.$$

4. Решить уравнение $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$.

5. Даны функции $f(x) = 4 - 15x^2 - 2x^3$ и $\varphi(x) = 2x^3 + 18x + 1$. При каких значениях x будет выполнятся неравенство $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} > 0$?

VII.

1. Для оплаты пересылки четырех бандеролей понадобились 4 различные почтовые марки на общую сумму 2 р. 80 коп. Определить стоимость

марок, приобретенных отправителем, если эти стоимости составляют арифметическую прогрессию, а самая дорогая марка в 2,5 раза дороже самой дешевой.

2. Вычислить отношение площадей правильного треугольника и правильного шестиугольника, вписанных в одну и ту же окружность.

3. Найти область определения функции $f(x) = \sqrt{\lg(3x^2 - 2x)}$.

4. Решить уравнение $2\sin 2x + 3\mathrm{tg}x - 5 = 0$.

5. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к параболе $y = x^2 + 4x - 17$, проведенная в точке $M(2,5; -0,75)$? Записать уравнение этой касательной.

VIII.

1. В сосуде было 12 л. соляной кислоты. Часть соляной кислоты отлили и сосуд дополнили таким же количеством воды. Затем снова отлили такое же количество смеси и дополнили сосуд таким же количеством воды. Сколько литров отливали каждый раз, если в результате в сосуде оказался двадцатипятипроцентный раствор соляной кислоты?

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченой кривыми $y = x^2 + 1$, $y = -x^2 + 3$.

3. Доказать тождество

$$\cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{3}{2}.$$

4. Доказать, что точки $A(1; -1; 1)$, $B(1; 3; 1)$, $C(4; 3; 1)$, $D(4; -1; 1)$ являются вершинами прямоугольника. Вычислить длину его диагоналей, и координаты их точки пересечения.

5. Правильная четырехугольная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через сторону основания перпендикулярно противолежащей боковой грани. Сторона основания равна a, боковые грани образуют с плоскостью основания угол 60^0. Вычислить площадь сечения.

IX.

1. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y = -x^2 + \frac{7}{2}x + 1, \quad y = 2^{-x}, \quad x = 2 \quad (x \leq 2).$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin x + \cos x} = 1.$$

3. Решить неравенство $\log_{0,3}(x^2+4x-5) > \log_{0,3}(x-1)$.

4. Каждое ребро куба разделено на 3 отрезка равной длины. Доказать, что полученные 24 точки деления принадлежат одной сфере. Вычислить площадь поверхности этой сферы, если длина ребра куба равна a.

5. Известны координаты вершин треугольника ABC: $A(1;1;1;)$, $B(2;4;2)$, $C(8;3;3)$. Определить, является ли этот треугольник прямоугольным или тупоугольным.

X.

1. Средний годовой процент прироста добычи угля на одной из шахт из года в год остается постоянным. Если годовой процент прироста добычи был бы увеличен на $10,5\%$, то через 2 года было бы добыто угля в 1,21 раза больше, чем в обычных условиях. Определить средний годовой процент прироста добычи угля (в обычных условиях).

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\mathrm{tg} x+\mathrm{ctg} x}=\frac{\sqrt{6}}{\sin x+\cos x}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{5x-1} 2x > \log_{2x} \frac{4x^2}{5x-1}.$$

4. Найдите наибольшее растояние от точки с координатами $(2;0)$ до точек графика функции $f(x)=\sqrt{12+5x-2x^2}$.

5. Основание пирамиды SABCD – прямоугольник ABCD со сторонами $a\sqrt{3}$ и a. Ребро SC перпендикулярно к плоскости основания, а ребро SA образует с ней угол α. Вычислите площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной прямой SA и проходящей через BD.

XI.

1. В одном сплаве веса золота и серебра относятся как 1 : 2, а в другом – как 2 : 3. Сколько граммов каждого сплава нужно взять, чтобы после совместной переплавки получить 95 граммов нового сплава, содержащего 7 частей золота и 12 частей серебра?

2. Решите уравнение

$$1+\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 x}}=2\cos^2 x.$$

3. Решите неравенство

$$\log_x\left(\log_3\left(\frac{x+2}{x-2}\right)\right)<\log_{\frac{1}{x}}\left(\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)\right).$$

4. Найдите наименьшее растояние от точки с координатами $(-4;0)$ до точек графика функции $f(x)=|x|\sqrt{4-x}$.

5. Отрезок прямой, соединяющий центр основания правильной треугольной пирамиды с серединой бокового ребра, равен стороне основания. Найдите угол между смежными боковыми гранями пирамиды.

XII.

1. Вычислите угол между векторами $\bar{a}=3\bar{p}+2\bar{q}$ и $\bar{b}=\bar{p}+5\bar{q}$, где $\bar{p}$ и $\bar{q}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы.

2. Решите уравнение $\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x+\sin^2 5x=2$.

3. Решите неравенство $\log_4(x-1)+1\geq\log_2 x$.

4. Постройте график функции $y=-x^4+8x$.

5. Решите неравенство $\frac{x^2+4}{x+1}\geq 0$.

XIII.

1. Решить неравенство ${\log^2}_{0,5}x+6\geq 5\log_{0,5}x$.

2. В арифметической прогрессии четвертый член равен 4. При каком значении разности этой прогрессии сумма попарных произведений первых трех членов этой прогрессии будет наименьшей?

3. Из точки $(3/2;0)$ к параболе $y=2x^2-6x+9$ проведена касательная, образующая острый угол с положительным направлением оси OX. Определить площадь фигуры, заключенной между параболой, осью OY, осью OX и этой касательной.

4. В равнобедренную трапецию, длины оснований которой равны a и b $(a>b)$, можно вписать окружность. Найти расстояние между центрами вписанной и описанной около этой трапеции окружностей.

5. При каких значения a уравнения $\sin 2x(\sin 2x+1)=0$ и $|a+3|\sin^2 2x-\sin 2x\cdot\cos 4x-(a+4)\cdot\sin 2x=0$ – равносильны?

XIV.

1. Все члены арифметической прогрессии – натуральные числа. Сумма ее девяти последовательных членов, начиная с первого, больше 200, но меньше 220. Найти прогресию, если ее второй член равен 12.

2. В сферу вписана првильная треугольная призма, длина всех ребер которой равны a. Подобная ей призма нижним основанием лежит на верхнем основании данной призмы, а вершины ее верхнего основания принадлежат сфере. Найти длину ребра второй призмы.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$f(x)=4x^3-9x^2-12x$ в промежутке $[-1;1]$.

4. Решить уравнение $\log_3(5-x)+2\log_3\sqrt{3-x}=1$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями (сделайте рисунок) $y=(x-1)^2$, $y=x+1$.

XV.

1. Решите уравнение
$$\frac{\log_3(3^x-8)}{2-x}=1.$$
В ответе запишите корень уравнения, а если корней несколько – их сумму.

2. Решите уравнение $9\cdot 4^{x+0,5}=19\cdot 6^x+4\cdot 9^{x+0,5}$. В ответе запишите корень уравнения, а если корней несколько – их сумму.

3. Решите неравенство $|x-3|^{2x^2-7x}\geq 1$. В ответе запишите количество целых чисел, удовлетворяющих неравенству и принадлежащих отрезку $[-6;8]$.

4. Сумма первых трех членов убывающей геометрической прогрессии равна 14, а сумма их квадратов равна 84. Найдите первый член прогрессии.

5. Решите уравнение $f'(x)=0$, где $f(x)=4\sin 2x-3\cos 2x-10x$. В ответе запишите количество решений, принадлежащих отрезку $[0;2\pi]$.

6. Две точки двигаются по окружности длиной 1,2 м. с постоянными скоростями. Если они двигаются в разных направлениях, то встречаются каждые 15 с. При движении в одном направлении одна точка догоняет другую через каждые 60 с. Найдите скорость каждой точки, ответ дайте в м/мин. В ответе запишите произведение найденных скоростей.

7. В шар радиуса 3 вписан конус с наибольшей боковой поверхностью. Найдите высоту конуса.

8. Окружность с центром в точке О и радиусом $R = 6 + 4\sqrt{2}$ касается прямой в точке А. На окружности взята точка B так, что угол АОВ равен 45^0. Найдите радиус окружности, касающейся данной окружности в точке В и данной прямой.

9. Упростите выражение и вычислите без таблиц:

$$\sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{13}{15}\pi + \sin\frac{23}{15}\pi + \sin\frac{\pi}{6}.$$

10. В правильную треугольную пирамиду вписан прямой конус. Около нее описан прямой конус. Найдите разность объемов описанного и вписанного конусов, если высота пирамиды равна 4 и длина окружности основания описанного конуса равна $\sqrt{3}\pi$.

11. При каком наименьшем целом значении параметра a уравнение $(x^2-2x)^2-(a+2)\cdot(x^2-2x)+3a-3=0$ имеет 4 различных корня?

XVI.

1. Найдите $\log_3 a^2$, если $2\log_a\sqrt{3}=5$.
2. Упростите и вычислите при $x=\sqrt{2}$

$$\left(\frac{x-x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-1}-2x^{\frac{1}{3}}+1\right)\cdot\frac{1+x^{\frac{1}{3}}}{1-x^{\frac{2}{3}}}+x^2.$$

3. Решите уравнение $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=\frac{11}{6}$. В ответе запишите корень уравнения, а если корней несколько – их сумму.

4. Найдите целое значение m, при котором неравенство $x^2-mx>\frac{2}{m}$ выполняется при любом x. В ответе запишите найденное значение m, а если таких значений несколько – их сумму.

5. Решите уравнение $\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{15x+4}$. В ответе запишите корень уравнения, а если корней несколько – их сумму.

6. Груз весом 30 Н производит давление на опору. Если вес груза уменьшить на 10 Н, а площадь опоры увеличить на 2 см^2, то давление груза уменьшится вдвое. Найдите исходную площадь опоры (в см^2).

7. Решите неравенство $(0,5)^{x^2}\cdot 4^{x+1}>64^{-1}$. В ответе запишите количество целых чисел x, удовлетворяющих неравенству.

8. Найдите наибольшее значение функции $y=\frac{4-x^2}{4+x^2}$ на отрезке$[-1;3]$.

9. Упростите выражение при $\alpha=25^0$:

$$\frac{2\cos^2\alpha-1}{1-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}-\frac{4\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

10. Длина хорды окружности равна 10. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой – секущая, параллельная касательной. Определите радиус окружности, если внутренний отрезок секущей равен 12.

11. Решите уравнение $2\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1\right)=\cos x$. В ответе укажите количество корней уравнения на отрезке $[0;\pi]$.

12. Высота конуса равна диаметру его основания. Найдите квадрат отношения площади его основания к площади боковой поверхности.

XVII.

1. Решите уравнение $4^{x+1,5}+7\cdot 2^{x+1}=4$. В ответе запишите корень уравнения, а если корней несколько – их сумму.

2. Вычислить $\cos\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha=-3\frac{3}{7}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

3. Вычислите без таблиц $\log_{\sqrt[3]{6}}\log_7\sqrt[3]{\sqrt{7}}$.

4. Решите уравнение $\sqrt{17+x}-\sqrt{17-x}=2$. В ответе запишите корень уравнения, а если корней несколько – их сумму.

5. Рабочему для выполнения работы был дан определенный срок. Проработав два дня, он придумал приспособление, увеличивающее производительность труда в 1,5 раза. В результате работа была закончена на два дня раньше срока. На сколько дней было расчитано выполнение работы?

6. Решить неравенство

$$\frac{x}{x+2}\leq\frac{1}{1-x}.$$

В ответе запишите сумму целых чисел, удовлетворяющих неравенству.

7. Решите неравенство $\log_x(2x-3)<1$. В ответе запишите целое значение x, удовлетворяющее неравенству, а если таких значений несколько, то их сумму.

8. Точка движется по закону $S(t)=\frac{t}{\pi}\sin\pi t$. Найдите скорость точки в момент времени $t=1$.

9. К материальной точке приложены две силы, угол между которыми 60^0. Величина одной силы равна $4/\sqrt{19}$Н, а другой – $6/\sqrt{19}$Н. Найдите величину равнодействующей этих двух сил (в ньютонах).

10. Решите уравнение $\sqrt{3}(\cos x-\sin 3x)=\cos 3x-\sin x$. В ответе запишите корень уравнения (в градусах), принадлежащий отрезку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, в случае нескольких корней запишите их сумму.

11. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобочную трапецию, если периметр трапеции равен 2, а острый угол составляет 30^0.

12. Основанием пирамиды является прямоугольник с длинами сторон 3 и 4. Боковая грань, проведенная к меньшей стороне прямоугольника, образует с плоскостью основания угол 45^0. Найдите объем пирамиды.

XVIII.

1. Вычислите

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 100^0} + \frac{1}{\cos 260^0}.$$

2. Решите уравнение $\mathrm{tg} x \cdot \mathrm{tg} 2x = 1$.
3. Решите уравнение $\log_2(x-4) - \log_4 x = 0,5$.
4. Решить неравенство $2^{x+1} - 4^x < 1$.

5. Двое рабочих вместе выполняют некоторую работу за 20 дней. За сколько дней выполнит ту же работу первый рабочий, работая один, если производительность труда второго рабочего на 5% выше, чем первого?

6. Дан правильный 30-угольник $A_1A_2\ldots A_{30}$ с центром O. Найдите угол между прямыми OA_3 и A_1A_4.

7. В геометрической прогрессии $b_1, b_2, \ldots, b_{10}:\quad b_1 \cdot b_2 = 2^{2/9} - 1$, $b_9 \cdot b_{10} = 4 - 2^{16/9}$. Найдите сумму $b_1 \cdot b_2 + b_2 \cdot b_3 + \cdots + b_9 \cdot b_{10}$.

8. Решите неравенство

$$\frac{3}{|x|} \leq \frac{x}{3} + 2.$$

9. Три хорды шара, исходящие из одной точки на его поверхности, равны a, углы между хордами равны 60^0. Найдите радиус шара.

10. При каких a уравнение $2^x + 2^{3-2x} = a$ имеет хотя бы одно решение?

11. Докажите признак перпендикулярности двух плоскостей.

XIX.

1. Решить неравенство $\log_x \log_3(9^x - 6) \geq 1$.
2. Найти a, при котором сумма квадратов корней уравнения $x^2 - (a+3)x + a^2 + 5a + 6 = 0$ будет наибольшей.

3. Проведены две параллельные касательные к окружности. Отрезок третьей касательной, заключенный между ними, равен 10. Найти расстояние от центра окружности до точек пересечения касательных, если радиус окружности равен 4,8.

4. Известно, что для некоторой арифметической прогрессии:

$$5{a_6}^2 + {a_4}^2 - 4a_4a_6 - 2a_6 = 224.$$

Найдите a_1 и d (прогресия состоит из натуральных чисел).

5. Решите уравнение $(1+2\cos x)\sqrt{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=0$.

XX. 1. Для каждого допустимого значения параметра α решите неравенство $\log_{2\cos a}(x+4)\geq 2\log_{2\cos a}(x+2)$.

2. Решите уравнение $\cos^2\left((x-3)\sin x\right)=1+\left|log_2\left(x^2-5x+7\right)\right|$.

3. Найдите целые корни уравнения $(x+4)(2-x)(x+5)(10-x)+54x^2=0$.

4. Пусть (x,y) – решение системы

$$\begin{cases}\sin x-\cos y=\frac{1}{4}\\ \cos x-\sin y=-\frac{5}{4}\end{cases}.$$

Найти значение выражения $\sin(x+y)$.

5. Найдите все значения a, при которых уравнение $(a-3x)\lg x=0$ имеет ровно один корень.

6. Найдите все значения c, при которых график функции $y=cx^2+cx+1$ лежит выше оси OX.

7. Найти область значений функции $y=\arcsin\frac{2x^2-1}{x^2+2}$.

8. Найти все значения параметра a, при которых наибольшее отрицательное решение неравенства $\frac{ax-6}{x}\leq 11$ равно -2.

Ответы.

I. 1. 3; 2. $D(f)=[4-\sqrt{2};3)\cup[4+\sqrt{2};+\infty)$; 3. $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 4. $\searrow$ в $(-\infty;-3]$ и $[-1;+\infty)$, $\nearrow$ в $[-3;-2),(-2;-1]$, $y_{\min}(-3)=6, y_{\max}(-1)=2$; 5. $\arccos\frac{4}{5}$. II. 2. $x=0$, $x=2$; 3. $x\in\left(\frac{3}{4};1\right)\cup(1;+\infty)$; 4. $\frac{9}{2}$; 5. $\frac{c^2}{4}$. III. 1. 1 и 100; 2. $9-4\sqrt{5}$; 3. $a\geq 3$; 4. $\frac{2\pi-\arccos\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\sqrt{\pi}}$; 5. $\frac{\pi(3\sqrt{3}-5)}{24}$. IV. 1. $\left(\pm\sqrt{\frac{\pi}{6}+(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}+\pi n};\frac{\pi}{6}+(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}-\pi n,\ n\in\mathbf{N}\right)$ и $\left(\pm\sqrt{\frac{\pi}{6}+2\pi k};2\pi k-\frac{\pi}{6},\ k\in\mathbf{N}\right)$; 2. $x\in[-6-\sqrt{41};0]\cup[-6+\sqrt{41};+\infty)$; 3. $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{3}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$; 4. $a\leq 12-4\sqrt{6}$; 5. $\frac{1}{2}\left(4r^2+h^2\right)$. V. 1. $\frac{5}{2}$; 2. $\log_{0,5}\frac{x-1}{x}>0$, если $x>0$ и $\log_{0,5}\frac{x-1}{x}<0$, если $x<0$; 3. $k\in(-6;3)$; 5. $x\in(-\infty;-4)\cup(2;+\infty)$; 6. 1; 7. 30 и20; 8. 12; 9. 30^0; 10. $\frac{64}{3}\sqrt{3}$. VI. 1. 46 дет. и 40 дет.; 2. $a^2(1+\sqrt{5})$; 3. $\frac{9}{16}$; 4. $\pi+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$; 5. $x\in(-5;0)$. VII. 1. 40 коп., 60 коп., 80 коп., 1 руб; 2. $\frac{1}{2}$; 3. $D(f)=\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right]\cup[1;+\infty)$; 4. $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 5. arctg9, $y=9x-23,25$. VIII. 1. 6 л.; 2. $\frac{8}{3}$; 4. 5, $O\left(\frac{5}{2};1;1\right)$; 5. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$. IX. 1. $\frac{19}{3}+\frac{1}{4\ln 2}$; 2. $2\pi n,\ -\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ n,k\in\mathbf{Z}$; 3. $\emptyset$; 4. $\frac{19}{9}\pi a^2$; 5. $\angle B$ тупой. X. 1. 5%; 2. $\frac{\pi}{12}+2\pi n,\ \frac{5\pi}{12}+2\pi k,\ n,k\in\mathbf{Z}$; 3. $x\in\left(\frac{1}{5};\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};\frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$; 4. $\frac{\sqrt{65}}{2}$; 5. $\frac{a^2}{2}\cdot\sqrt{3+4\mathrm{tg}^2\alpha}$. XI. 1. 45 г., 50 г.; 2. $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 3. $\emptyset$; 4. $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{89}{3}}$; 5. $2\mathrm{arctg}\frac{2}{\sqrt{11}}$. XII. 1.$45^0$; 2. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ \frac{\pi}{14}+\frac{\pi k}{7},\ n,k\in\mathbf{Z}$; 3. $x=2$; 5. $x\in(-1;+\infty)$. XIII. 1. $x\in\left(0;\frac{1}{8}\right]\cup\left[\frac{1}{4};+\infty\right)$; 2. $\frac{24}{11}$; 3. $\frac{45}{4}$; 4. $\frac{(a+b)^2}{8\sqrt{ab}}$; 5. $a=-7$. XIV. 1. $a_1=8$, $d=4$; 2. $\frac{a}{4}$; 3. $y_{\min}(1)=-17$, $y_{\max}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{4}$; 4. 2; 5. $\frac{9}{2}$; XV. 1. $\emptyset$; 2. -1; 3. $x\in(-\infty;0]\cup[2;3)\cup\left(3;\frac{7}{2}\right)\cup[4;+\infty)$, 13; 4. 8; 5. $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{3}{4}+\pi n$, 2 решения; 6. 3 м/мин, 1,8 м/мин, 5, 4; 7. 4; 8. 2; 9. $\frac{1}{2}$; 10. $\frac{3}{4}\pi$; 11. $a\in(0;4)\cup(4;+\infty)$, $a=1$. XVI. 1. $\frac{2}{5}$; 2. 3; 3. 3; 4. $m\in(-2;0)$, $m=-1$; 5. 3; 6. 6. 6 см^2; 7. $x\in(-2;4)$, 5 целых решений; 8. 1 при $x=0$; 9. 0; 10. $\frac{25}{4}$; 11. $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$, 1 корень; 12. $\frac{1}{5}$; XVII. 1. -2; 2. $-\frac{7}{25}$; 3. -3; 4. 8; 5. 8 дней; 6. $x\in(-2,1)$, -1; 7. $x\in\left(\frac{3}{2};3\right)$, $x=2$; 8. -1; 9. 2Н; 10. $x=22,5^0+90^0\cdot n$, $x=15^0+180^0\cdot k$, $n,k\in\mathbf{Z}$, $x=22,5^0$, $x=15^0$; 11. $\frac{1}{8}$; 12. 8. XVIII. 1. -4; 2. $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$; 3. 8; 4. $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; 5. 41 день; 6. 84^0; 7. 3; 8. $x\in\{-3\}\cup[3(\sqrt{2}-1),+\infty)$; 9. $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$; 10. $a\geq 3\sqrt[3]{2}$. XIX. 1. $x\in(\log_9 7;1)\cup(1;+\infty)$; 2. $a=-2$; 3. 6 и 8; 4. $a_1=5$, $d=1$; 5. $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n,k\in\mathbf{Z}$. XX. 5. $a\leq 0$ или $a=3$, 7. $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$

3. Образцы решения основных типов задач и задания для самостоятельной подготовки.

Тема I. Действительные числа. Тождественные преобразования выражений.

1. Степень с целым показателем.

Используя понятие степени с целым показателем, вычислите значение следующих выражений:

а) $\left(-2\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (0.25)^2 \cdot \left[(-5)^{-5}\right]^2 \cdot \left[(0,1)^2\right]^{-2}$

б) $\left[\left(10^{-6}\right)^{-2} + 5^3 \cdot (25)^4 \cdot 2^3 \cdot \left(2^3\right)^2 - 5^{13} \cdot \left(4^2\right)^2\right] : \left[\left(5^{-5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot 10^5\right]$

в) $3^{-4} : \left(2^4 : 3^2 - 2^2 : 1\frac{1}{8}\right) + \left(2\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot (-0,295)^0$

2. Степень с рациональным показателем.

Повторите понятие арифметического корня n-й степени из числа a, тождество

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & \text{если } n \text{ – четное,} \\ a, & \text{если } n \text{ – нечетное, при } a \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

При $n = 2$ $\sqrt{a^2} = |a|$.

Решите следующие примеры.

а) Внести под знак корня множители: $1\frac{2}{3}\sqrt{2\frac{2}{5}}$; $(2-\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}$; $(\sqrt{19}-4)\cdot\sqrt{3}$; $(1-\sqrt[4]{13})\cdot\sqrt{7}$;

б) Записать в виде произведения двух чисел следующие числа:
$3\sqrt{12} - 3\sqrt{6} + \sqrt{30} - \sqrt{15}$; $\quad 5 + \sqrt{5} + \sqrt{15}$;

в) Вычислить значение выражений: $\sqrt[4]{0,0001} - \sqrt[5]{0,00032}$;
$\left(\sqrt{6} - 2\sqrt{15}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{20}$; $\quad \left\{\left[\left(3^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right) : \left(3^{-\frac{3}{4}} \cdot 2^{-\frac{5}{6}}\right)\right] : \left(\frac{1}{864}\right)^{\frac{1}{4}}\right\}^{\frac{2}{7}}$;

г) Записав делимое и делитель в виде степени, вычислить значение выражения $\sqrt{3\sqrt[3]{9\sqrt{27\sqrt{3}}}} : \left(\sqrt[16]{3^{15}} \cdot \sqrt[8]{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\left(\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3\sqrt{3}}} : \sqrt[4]{\sqrt{3\sqrt[3]{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$;

д) Сравните числа $a = \frac{9}{\sqrt{11}-\sqrt{2}}$ и $b = \frac{6}{3-\sqrt{3}}$; $x = \frac{11}{30}$ и $y = 0,91846$.

3. Упростить следующие выражения:

а) $\left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$;

б) $\left[\left(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}\right)^{-2} + \left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)^{-2}\right] : \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$;

в) $\left[\frac{a^3-8}{a^2-5a+6}-\frac{(a+1)^2+3}{a-3}+\frac{a^2+a}{\sqrt[4]{a}}\right]:\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{a^{-1}b^2}}$;

г) $\left(\frac{(\sqrt{a}+1)^2-\frac{a-\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}{(\sqrt{a}+1)^3-a\sqrt{a}+2}\right)^{-3}$;

д) $\sqrt{x(x^{-1}+4x-4)^{-1}}-\frac{2x^2}{|2x-1|}$, $x>0$.

4. Упростить и вычислить значение выражения:

$A=\left(2^{\frac{3}{2}}+27y^{\frac{3}{5}}\right):\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}+3y^{\frac{1}{5}}\right]$ при $y=32$;

$B=\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{(a^2-ab)^{\frac{2}{3}}}:\frac{a^{-\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$ при $a=1,2$; $b=\frac{3}{5}$;

$C=\left(4-4b^{0,5}+b\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1-4b^{-1}\right)^{-1}$ при $b=6,25$.

5. Доказать справедливость числового равенства:

а) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$; б) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}=\sqrt{5}-2$;

в) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; г) $\frac{4+2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}=\sqrt{3}+1$; д) $\frac{6}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{27}+3}=3-\sqrt[4]{27}$.

е) Разность $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|-\sqrt{40\sqrt{2}+57}}$ есть целое число. Найти это число.

Приведем решения некоторых из этих задач.

а) $\left(1-\sqrt[4]{13}\right)\sqrt{7}=-\left(\sqrt[4]{13}-1\right)\sqrt{7}=-\sqrt{7\left(\sqrt[4]{13}-1\right)^2}$, так как $1-\sqrt[4]{13}<0$.

б) Сравнить числа $a=\frac{9}{\sqrt{11}-\sqrt{2}}$ и $b=\frac{6}{3-\sqrt{3}}$.

Решение

$a=\frac{9\left(\sqrt{11}+\sqrt{2}\right)}{11-2}=\sqrt{11}+\sqrt{2}$, $b=\frac{6\left(3+\sqrt{3}\right)}{9-3}=3+\sqrt{3}$.

Обозначим неизвестный знак сравнения символом $\vee$ и используем свойства неравенств, не изменяющие этого знака: $\sqrt{11}+\sqrt{2}\vee 3+\sqrt{3}$, $\sqrt{11}-3\vee\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $\left(\sqrt{11}-3\right)^2\vee\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$, $20-6\sqrt{11}\vee 5-2\sqrt{6}$, $15\vee 2\left(3\sqrt{11}-\sqrt{6}\right)$, $225\vee 4\left(99+6-6\sqrt{66}\right)$, $225\vee 420-24\sqrt{66}$, $24\sqrt{66}\vee 195$, $8\sqrt{66}\vee 65$, $64\cdot 66\vee 65^2$, $64\cdot 66<65^2$, так как $(a-1)(a+1)<a^2$. Итак, $a<b$.

в) Упростить выражение $\sqrt{x(x^{-1}+4x-4)^{-1}}-\frac{2x^2}{|2x-1|}$, $x>0$.

Решение

$$\sqrt{x\left(\frac{1}{x}+4x-4\right)^{-1}}-\frac{2x^2}{|2x-1|}=\sqrt{x\left(\frac{1-4x+4x^2}{x}\right)^{-1}}-\frac{2x^2}{|2x-1|}=$$

$$=\sqrt{\frac{x^2}{(2x-1)^2}}-\frac{2x^2}{|2x-1|}=\frac{x}{|2x-1|}-\frac{2x^2}{|2x-1|}=$$

$$= \frac{-x(2x-1)}{|2x-1|} = \begin{cases} -x, & \text{если } x > \frac{1}{2}, \\ x, & \text{если } 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases},$$

так как $\sqrt{x^2} = x$ по условию, а

$$\sqrt{(2x-1)^2} = |2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & x \geq \frac{1}{2} \\ -(2x-1), & x < \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{и} \quad x \neq \frac{1}{2}.$$

г) Проверить справедливость равенства:

1) $\sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}} = \sqrt{5} - 2.$

Решение. Преобразуем левую часть:

$\sqrt{17 - 4\sqrt{4 + 2 \cdot 2\sqrt{5} + 5}} = \sqrt{17 - 4\sqrt{(2+\sqrt{5})^2}} = \sqrt{17 - 4(2+\sqrt{5})} =$
$= \sqrt{17 - 8 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{4 - 2 \cdot 2\sqrt{5} + 5} = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} =$
$= |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2.$

Можно было бы осуществить проверку возведением данного равенства в квадрат, так как обе части его положительны. Этот способ более громоздкий.

2) $$\frac{6}{\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{9} + \sqrt[4]{27} + 3} = 3 - \sqrt[4]{27}.$$

Преобразуем левую часть, применив в знаменателе формулу суммы $S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$ геометрической прогресии:

$$\frac{6}{\sqrt[4]{3}\left(1 + \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{3^2} + \sqrt[4]{3^3}\right)} = \frac{2 \cdot \sqrt[4]{3^4}}{\sqrt[4]{3} \cdot \dfrac{1-3}{1-\sqrt[4]{3}}} = \frac{2 \cdot \sqrt[4]{3^3} \cdot \left(\sqrt[4]{3} - 1\right)}{2} =$$

$= \sqrt[4]{3^3}\left(\sqrt[4]{3} - 1\right) = 3 - \sqrt[4]{27};$

Ответы

1. а) $-0,001$; б) 570; в) $\frac{551}{3600}$. 2. а) $\sqrt{\frac{20}{3}}$; $\sqrt{14 - 8\sqrt{3}}$; $\sqrt{105 - 24\sqrt{19}}$; б) $\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(3\sqrt{6} + \sqrt{15}\right)$; $\sqrt{5}\left(1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}\right)$; в) $-0,1$; $\sqrt{2}$; $3^{\frac{2}{7}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}$; г) 1; $3^{\frac{7}{16}}$; д) $x < y$; 3. а) $\frac{1-a}{\sqrt{a}}$; б) $2 \cdot \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$; в) $a + 1$; г) 27; 4. $A = 38 - 6\sqrt{2}$, $B = \frac{63}{25}$, $C = \frac{25}{18}$. 5. е) -10.

Тема II. Рациональные уравнения и системы уравнений.

§1. Свойства корней квадратного уравнения.

Решите следующие задачи.

1. При каком $m < 0$ уравнение $mx^2 - 4x + 1 = 0$ имеет два равных корня?
2. При каком положительном a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ равна 1,75?
3. При каком p разность корней уравнения $x^2 + 11x + p = 0$ равна -3?
4. Найти значение p, если один из корней уравнения $x^2 + px + 6 = 0$ равен -3.
5. Найти значения p и m, при которых уравнение $2x^2 + px + m = 0$ имеет двукратный корень, равный 6.
6. При каком n корни уравнения $x^2 - 8x + n = 0$ удовлетворяют условию $3x_1 + 5x_2 = 20$?
7. При каком значении q один корень уравнения $x^2 - 5x + q = 2$ в 4 раза больше другого?
8. В уравнении $3x^2 - 5x + k = 0$ найти то значение k, при котором его корни x_1 и x_2 удовлетворяют уравнению $6x_1 + x_2 = 0$.
9. Задано уравнение $x^2 + px + q = 0$, $(p > 0)$. Определить $(p + q)$ таким образом, чтобы корни уравнения равнялись p и q.
10. Задано уравнение $x^2 - 6x + p = 0$. Найти значение параметра p, при котором корни уравнения x_1 и x_2 удовлетворяют условию $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{5}{2}$.

К этой теме повторите теорему Виета и зависимость существования корней квадратного уравнения от его дискриминанта.

Рассмотрим примеры:

1) При каком m отношение корней уравнения $x^2 - 8x + m^3 = 1$ равно -9?

Решение. Приведем уравнение к виду $x^2 - 8x + (m^3 - 1) = 0$. Используя теорему Виета, можно записать $x_1 + x_2 = 8$ и $x_1 \cdot x_2 = m^3 - 1$, где x_1 и x_2 – корни уравнения. По условию $\frac{x_1}{x_2} = -9$ или $x_1 = -9x_2$. Итак,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8, \\ x_1 = -9x_2 \end{cases} \Rightarrow -9x_2 + x_2 = 8, \quad x_2 = -1,$$

тогда $x_1 = 9$. Но $x_1 \cdot x_2 = m^3 - 1 \Leftrightarrow 9(-1) = m^3 - 1$; $-9 = m^3 - 1$; $m^3 = -8 \Rightarrow m = -\sqrt[3]{8} = -2$.

Проверим, что $D > 0$ при $m = -2$: $D/4 = 16 - m^3 + 1 = 17 - m^3$. $D(-2) > 0 \Rightarrow m = -2$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $m = -2$.

2) Найти a, при котором сумма квадратов корней уравнения $x^2 - (a+3)x + a^2 + 5a + 6 = 0$ будет наибольшей.

Решение. Вычислим $D = (a+3)^2 - 4(a^2 + 5a + 6) = a^2 + 6a + 9 - 4a^2 - 20a - 24 = -3a^2 - 14a - 15$; Чтобы задача имела решение, должно быть: $D \geq 0 \Rightarrow 3a^2 + 14a + 15 \leq 0$, $a_1 = -3$, $a_2 = -\frac{5}{3} \Rightarrow a \in \left[-3; -\frac{5}{3}\right]$.

Обозначим это множество $D(a) = \left[-3; -\frac{5}{3}\right]$. Сумма квадратов корней ${x_1}^2 + {x_2}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a+3)^2 - 2(a^2 + 5a + 6) = -a^2 - 4a - 3$ – является функцией, определенной на этом множестве (использовали формулы Виета). Функция является квадратичной. Вершина ее графика имеет абсциссу $a_0 = \frac{4}{-2} = -2$, $a_0 \in \left[-3; -\frac{5}{3}\right]$. Ветви параболы направлены вниз $\Rightarrow$ наибольшее значение достигается при $a = -2$: $\left({x_1}^2 + {x_2}^2\right)_{\text{наиб.}} = -4 + 8 - 3 = -1$.

Ответ: $a = -2$.

§2. Равносильность уравнений.

11. Равносильны ли два следующих уравнения:

а) $(x-2)(3+4x) = 2x^2$ и $\left(x + \frac{\sqrt{73}-5}{4}\right)\left(x - \frac{\sqrt{73}+5}{4}\right) = 0$;

б) $x^2 + 6 = 5x$ и $\left(x^2 + 6\right)(x+4) = 5x(x+4)$;

в) $9x(2x-3) = 26$ и $(6x-13)(3x+2) = 0$;

г) $3 = 2x - x^2$ и $3 + (x^2 + 5) = 2x - x^2 + (x^2 + 5)$;

д) $\sqrt{x^2 + x - 5} = \sqrt{x-1}$ и $x^2 + x - 5 = x - 1$.

§3. Решение уравнений и систем уравнений.

Рассмотрим на примерах некоторые методы решения рациональных уравнений и систем уравнений.

1) Решить уравнение $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 15$.

Решение

$((x-1)(x-4))((x-2)(x-3)) = 15$, $\left(x^2 - 5x + 4\right)\left(x^2 - 5x + 6\right) = 15$,

Обозначим $x^2 - 5x = t$ (метод подстановки), тогда $(t+4)(t+6) = 15$, $t^2 + 10t + 9 = 0 \Rightarrow t_1 = -9$, $t_2 = -1$, так как $t_1 \cdot t_2 = 9$, $t_1 + t_2 = -10$.

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 5x = -9 \\ x^2 - 5x = -1 \end{array}\right., \quad \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 9 = 0 \\ x^2 - 5x + 1 = 0 \end{array}\right., \quad \left[\begin{array}{l} x \in \emptyset, \quad \text{так как} \quad D < 0 \\ x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2} \end{array}\right. .$$

Ответ: $\frac{5+\sqrt{21}}{2}$, $\frac{5-\sqrt{21}}{2}$.

2) Решить уравнение $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$.

Решение. $x^2(x-1) - 4(x-1) = 0$, $(x-1)(x^2-4) = 0$; $x_1 = 1$, $x_{2,3} = \pm 2$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$.

Не всегда удается легко разложить многочлен на множители:

3) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$.

Решение. По коэффициентам уравнения нетрудно догадаться, что $x_1 = -1$ является корнем уравнения. Следовательно, одним из множителей многочлена левой части является $(x+1)$. Второй множитель найдем методом деления "уголком":

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 4x^2 \quad + x + 6 & x+1 \\ \cline{2-2}
x^3 + \ \ x^2 \qquad\qquad\quad & x^2 - 5x + 6 \\ \cline{1-1}
-5x^2 + \ \ x + 6 & \\
-5x^2 - 5x \quad\ & \\ \cline{1-1}
6x + 6 & \\
6x + 6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Итак: $(x+1)(x^2-5x+6) = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, так как $2 \cdot 3 = 6$, $2 + 3 = 5$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

4) При каких b система уравнений $\begin{cases} bx + y = 1 \\ 4x - 2y = b \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений?

Геометрически это означает, что прямые, заданные уравнениями системы, совпадают.

Решение.

$$\begin{cases} bx + y = 1 \\ 4x - 2y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - bx \\ 4x - 2 + 2bx = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - bx \\ 2(b+2)x = b + 2 \end{cases},$$

при $b = -2 \quad x \in \mathbf{R}$, а $y = 1 + 2x \Rightarrow$ система имеет бесконечно много решений вида $(x; 1+2x)$, $x \in \mathbf{R}$.

Ответ: $b = -2$.

5) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{y}{3} = 3 \\ \frac{x}{2} + \frac{3}{y} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Эту систему можно решить различными способами, остановимся на методе подстановки.

Положим $\frac{2}{x} = u$, $\frac{y}{3} = v$, тогда система примет вид:

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 - v \\ \frac{1}{3-v} + \frac{1}{v} = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Решим второе уравнение, умножив его на $2v(3 - v)$: $2v + 2(3 - v) = 3v(3 - v)$, $v^2 - 3v + 2 = 0$, $v_1 = 1$, $v_2 = 2$, тогда $u_1 = 2$, $u_2 = 1$.
Вернемся к прежним неизвестным: $x_1 = 1$, $y_1 = 3$, $x_2 = 2$, $y_2 = 6$.
Ответ: $(1; 3)$, $(2; 6)$.

6) Решить систему:

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 = -2 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 9 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 9, а второе на 2 и сложим, получим $20x^2 + 4xy - 3y^2 = 0$. Это однородное уравнение второго порядка. Если $y = 0$, то $x = 0$, но пара $(0; 0)$ не удовлетворяет системе. Поэтому можно разделить полученное уравнение на x^2:

$$20 + 4\frac{y}{x} - 3\frac{y^2}{x^2} = 0$$

Положим $\frac{y}{x} = t$ и решим квадратное уравнение $3t^2 - 4t - 20 = 0$. $t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{3} = \frac{2 \pm 8}{3}$; $t_1 = -2$; $t_2 = \frac{10}{3}$.

$$\frac{y}{x} = -2 \qquad \text{или} \qquad \frac{y}{x} = \frac{10}{3}$$

$$\begin{cases} y = -2x \\ 2x^2 - y^2 = -2 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} y = \frac{10}{3}x \\ 2x^2 - y^2 = -2 \end{cases}$$

$$2x^2 - 4x^2 = -2 \qquad \text{или} \qquad 2x^2 - \frac{100}{9}x^2 = -2$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \qquad\qquad x^2 = \frac{9}{41} \Rightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{41}}$$

Если $x_1 = 1$, то $y_1 = 2$; $x_2 = -1$, $y_2 = 2$; $x_3 = \frac{3}{\sqrt{41}}$, $y_3 = \frac{10}{\sqrt{41}}$; $x_4 = -\frac{3}{\sqrt{41}}$, $y_4 = -\frac{10}{\sqrt{41}}$.

Ответ: $(1; -2)$, $(-1; 2)$; $\left(\frac{3}{\sqrt{41}}; \frac{10}{\sqrt{41}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{41}}; -\frac{10}{\sqrt{41}}\right)$.

Задания для самостоятельного решения.

12 Решить уравнение $2x^3 - x^2 - 13x - 6 = 0$.

13 Найти a, при котором система $\begin{cases} ax - 4y = a + 1 \\ 2x + (a + 6)y = a + 3 \end{cases}$. не имеет решений.

14 Решить систему $\begin{cases} \frac{6y-x}{3}=2 \\ \frac{x+10y}{2}=-1,5 \end{cases}$.

15 Решить систему $\begin{cases} x+y=5 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$ и найти xy.

16 Решить систему $\begin{cases} x^2-2xy+2y^2-3x+y=1 \\ x-y=2 \end{cases}$ и найти сумму положительных решений.

17 Найти произведение целых решений системы $\begin{cases} \frac{1}{3x+2y}+x=\frac{33}{16} \\ \frac{x}{3x+2y}=\frac{1}{8} \end{cases}$.

Ответы

1. $m\in\emptyset$; 2. $a=\frac{1}{2}$; 3. $p=28$; 4. $p=5$; 5. $p=-24$, $m=72$; 6. $n=-20$; 7. $q=6$; 8. $k=-2$; 9. $p+q=-1$; 10. $p=8$; 11. а), в), г) – равносильные, б) д) – неравносильные уравнения; 12. $x_1=-2$, $x_2=3$, $x_3=-\frac{1}{2}$; 13. $a=-4$; 14. $\left(-\frac{39}{8};\frac{3}{16}\right)$; 15. $(2,3)$, $(3,2)$, $xy=6$; 16. $(1;-1)$ и $(5;3)$, $x+y=8$; 17. $x=2$, $y=5$ –целое решение, $xy=10$.

Тема III. Прогрессии.

Рассмотрим решения некоторых задач, связанных с прогрессиями.

1. Числа $\sqrt{x-4}, \sqrt{x}, \sqrt{3x+4}$, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Найти x.

Решение: По определению арифметической прогрессии

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-4}=\sqrt{3x+4}-\sqrt{x}$$

(или по свойству арифметической прогрессии $\frac{\sqrt{x-4}+\sqrt{3x+4}}{2}=\sqrt{x}$). В этом уравнении $x\geq 4$. Приведем его к виду $2\sqrt{x}=\sqrt{x-4}+\sqrt{3x+4}$ и возведем в квадрат (это не вызовет появления лишних корней, т.к. обе части уравнения неотрицательны), получим:

$$4x=x-4+2\sqrt{(x-4)(3x+4)}+3x+4\Rightarrow 2\sqrt{(x-4)(3x+4)}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=4, \quad \text{а} \quad x_2=\frac{-4}{3} \quad \text{не удовлетворяет условию} \quad x\geq 4.$$

Ответ: $x=4$.

2. Сумма бесконечной геометрической прогрессии, составленной из членов данной бесконечной геометрической прогрессии с нечетными номерами, равна $\frac{64}{3}$, а сумма прогрессии, составленной из членов той же прогрессии с четными номерами, равна $\frac{32}{3}$. Найти прогрессию.

Решение: Пусть $b_1, b_1q, b_1q^2, \ldots, b_1q^{n-1}, \ldots$ - данная бесконечная геометрическая прогрессия, $|q| < 1$.

По условию

$$\begin{cases} b_1 + b_1q^2 + b_1q^4 \ldots = \frac{64}{3} \\ b_1q + b_1q^3 + b_1q^5 + \ldots = \frac{32}{3} \end{cases}$$

Решим эту систему. По формуле суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S = \frac{b_1}{1-q}$ имеем:

$$\begin{cases} \frac{b_1}{1-q^2} = \frac{64}{3} \\ \frac{b_1q}{1-q^2} = \frac{32}{3}, \end{cases}$$ так как знаменатели обеих прогрессий равны q^2.

Из второго уравнения $\Rightarrow \frac{b_1}{1-q^2} \cdot q = \frac{32}{3} \Rightarrow \frac{64}{3}q = \frac{32}{3} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$. Подставим q в первое уравнение:

$$\frac{b_1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{64}{3} \Rightarrow b_1 = 16.$$

Ответ: $b_1 = 16, \quad q = \frac{1}{2}$.

3. Известно, что для некоторой арифметической прогрессии: $5a_6^2 + a_4^2 - 4a_4a_6 - 2a_6 = 224$. Найти a_1 и d (прогрессия состоит из натуральных чисел).

Решение: Преобразуем левую часть заданного выражения, выделив из него два полных квадрата:

$$(4a_6^2 - 4a_4a_6 + a_4^2) + (a_6^2 - 2a_6 + 1) = 225,$$

$$(2a_6 - a_4)^2 + (a_6 - 1)^2 = 225$$

Так как a_4 и a_6 натуральные числа и число 225 единственным образом представимо в виде суммы двух квадратов:$225 = 144 + 81$, то последнее равенство равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} (2a_6 - a_4)^2 = 144 \\ (a_6 - 1)^2 = 81 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (2a_6 - a_4)^2 = 81 \\ (a_6 - 1)^2 = 144 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2a_6 - a_4 = 12 \\ 2a_6 - a_4 = -12 \end{array} \right. \\ a_6 - 1 = 9 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2a_6 - a_4 = 9 \\ 2a_6 - a_4 = -9 \end{array} \right. \\ a_6 - 1 = 12 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_6 = 10 \\ a_4 = 8 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a_6 = 10 \\ a_4 = 32 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a_6 = 13 \\ a_4 = 17 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a_6 = 13 \\ a_4 = 35 \end{cases}.$$

Решим каждую из полученных систем:

1) $d = \frac{10-8}{2} = 1, \quad a_1 = 8 - 3 = 5 \Rightarrow a_1 = 5, d = 1;$

2) $d = \frac{10-32}{2} = -11, \quad a_1 = 32 + 33 = 65 \Rightarrow a_1 = 65, d = -11;$

3) $d = \frac{13-17}{2} = -2, \quad a_1 = 19 + 9 = 28 \Rightarrow a_1 = 28, d = -2;$

4) $d = \frac{13-35}{2} = -11, \quad a_1 = 35 + 33 = 68 \Rightarrow a_1 = 68, d = -11;$

Ответ. Если заданную прогрессию считать бесконечной, то условию удовлетворяет только одна прогрессия: $a_1 = 5, d = 1$ Если же прогрессия конечна и содержит не более 6 членов, то условию удовлетворяют еще три прогрессии: $a_1 = 65, d = -11; \quad a_1 = 28, d = -2; \quad a_1 = 63, d = -11$

4. Сумма первых трех членов убывающей геометрической прогрессии равна 14, а сумма их квадратов равна 84. Найти первый член прогрессии.

Решение: По условию составим систему:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 14 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1(1 + q + q^2) = 14 \\ b_1^2(1 + q^2 + q^4) = 84 \end{cases}$$

Решить систему в таком виде сложно. Преобразуем суммы:

$$1 + q + q^2 = \frac{1 - q^3}{1 - q}, \quad 1 + q^2 + q^4 = \frac{1 - q^6}{1 - q^2}, \quad \text{тогда} \quad \begin{cases} b_1 \cdot \frac{1-q^3}{1-q} = 14 \\ b_1^2 \cdot \frac{1-q^6}{1-q^2} = 84 \end{cases}.$$

Возведем первое уравнение в квадрат и разделим его почленно на второе уравнение:

$\frac{(1-q^3)^2}{(1-q)^2} \cdot \frac{1-q^2}{1-q^6} = \frac{196}{84} \Rightarrow$ после сокращений получаем:

$\frac{1+q+q^2}{1-q+q^2} = \frac{7}{3} \Rightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Rightarrow q_1 = \frac{1}{2}, \quad q_2 = 2$ – не удовлетворяет условию. Итак, $q = \frac{1}{2}$, из первого уравнения $b_1 = \frac{14}{1+q+q^2} = 8$.

Ответ: $b_1 = 8$.

5. Все члены арифметической прогрессии - натуральные числа. Сумма ее девяти первых членов больше 200, но меньше 220. Найти прогрессию, если ее второй член равен 12.

Решение: По условию $\begin{cases} 200 < S_9 < 220 \\ a_2 = 12 \\ a_n \in \mathbf{N}, n = 1, 2, \ldots \end{cases}$

Решим эту смешанную систему. $a_2 = 12 \Rightarrow a_1 + d = 12;$

$S_9 = \frac{a_1+a_9}{2} \cdot 9 = \frac{2a_1+8d}{2} \cdot 9 = (a_1 + d + 3d) \cdot 9 = (12 + 3d) \cdot 9 = 27d + 108;$

По условию $200 < 27d + 108 < 220 \Rightarrow 92 < 27d < 112 \Rightarrow 3\frac{11}{27} < d < 4\frac{4}{27}$.

Единственное натуральное значение d, удовлетворяющее этим неравенствам, есть 4. Тогда $a_1 = 12 - 4 = 8$.

Ответ:$a_1 = 8, d = 4$

Задания для самостоятельного решения:

1. Найти разность арифметической прогрессии, если $a_1 + a_5 = -2$, $a_2 + a_6 = 2$
2. Найти второй член арифметической прогрессии, если $a_1 = x + \frac{1}{2}$, $a_2 = 2x, a_3 = 4x - \frac{5}{2}$.
3. Для арифметической прогрессии $a_1 = 3x - 3$, $a_2 = x^2 - 22$, $a_3 = 2x^2 - 11$. Определите число x.
4. Найдите число членов конечной геометрической прогрессии, у которой первый, второй и последний члены соответственно равны 3, 12 и 3072.
5. Числа $x-5, x+1, 5x-3$, записанные в указанном порядке, составляют геометрическую прогрессию. Найти целое значение x.
6. Определить число членов геометрической прогрессии, в которой $b_1 = 1, b_n = -512, S_n = -341$.
7. Найти сумму всех двузначных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1.
8. Если из четырех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, вычесть соответственно 2, 7, 9 и 5, то получаются числа, составляющие геометрическую прогрессию. Найти разность арифметической прогрессии.
9. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 9, а сумма квадратов ее членов равна 40,5. Найти второй член прогрессии.
10. Число членов арифметической прогрессии равно 10. Сумма членов, стоящих на четных местах, равна 15, а на нечетных — 12,5. Найти первый член прогрессии.
11. a_n - арифметическая прогрессия, $a_{11} + a_{20} = 7$. Найти S_{30}.
12. Между числом 3 и неизвестным числом вставлено еще одно число так, что все три числа образуют арифметическую прогрессию. Если средний член этой прогрессии уменьшить на 6, то получится геометрическая прогрессия. Найти неизвестное число.

Ответы:

1. 2; 2. 4; 3. -10; 4. 6; 5. 7; 6. 10; 7. 1210; 8. $d = 5$ или $d = 8$; 9. 2; 10. $\frac{1}{2}$; 11. 105; 12. 27.

Тема IV. Задачи на составление уравнений и систем уравнений.

I. Задачи на движение.

Для решения задач на движение применяются следующие допущения:

1. Движение на отдельных участках считается равномерным.
2. Повороты движущихся тел считаются мгновенными, т.е. происходят без затрат времени; скорость при этом также меняется мгновенно.
3. Если тело движется по течению реки, то его скорость v (относительно берега) слагается из скорости тела в стоячей воде v_0 (собственной скорости тела) и скорости течения реки $v_{\text{р}}$.
   Если тело движется против течения реки, то его скорость (относительно берега) $v = v_0 - v_{\text{р}}$. Если в условии задачи речь идет о движении плотов, то полагают, что плот движется со скоростью течения реки (v_p).
4. При движении тел навстречу друг другу время, через которое они встретятся, равно $\frac{S}{v_1+v_2}$.
   В частности, если два тела движутся по окружности радиуса R с постоянными скоростями v_1 и v_2 в разных направлениях, то время между их встречами вычисляется по формуле: $\frac{2\pi R}{v_1+v_2}$.
5. При движении тел в одну сторону ($v_1 > v_2$) время, чрез которое первое тело догонит второе, равно $\frac{S}{v_1-v_2}$.
   В частности, если два тела движутся по окружности радиуса R с постоянными скоростями v_1 и v_2 ($v_1 > v_2$) в одном направлении, то время между их встречами вычисляется по формуле: $\frac{2\pi R}{v_1-v_2}$.

Например:

Задача 1. Из города А в город В выезжает велосипедист, а через три часа после его выезда из города В выезжает навстречу ему мотоциклист, скорость которого в три раза больше скорости велосипедиста. Велосипедист и мотоциклист встречаются посередине между A и B. Если бы мотоциклист выехал не через три, а через два часа после велосипедиста, то встреча произошла бы на 15 км ближе к А. Найти расстояние между А и В.

Решение. Обозначим искомое расстояние между пунктами А и В через S км, скорости велосипедиста и мотоциклиста – через $v_в$ км/ч и $v_м$ км/ч соответственно. Запишем условия задачи и уравнения, соответствующие этим условиям, в виде следующей таблицы:

Условие задачи	Уравнение
Скорость мотоциклиста в три раза больше скорости велосипедиста	$v_м = 3v_в$
Велосипедист и мотоциклист встречаются посередине между A и B, причем мотоциклист выехал из В на 3 часа позже, чем велосипедист из города A	$\frac{S/2}{v_в} = \frac{S/2}{v_м} + 3$
Если бы мотоциклист выехал через 2 часа после велосипедиста, то встреча произошла бы на 15 км ближе к А	$\frac{S/2-15}{v_в} = \frac{S/2+15}{v_м} + 2$

Используя первое уравнение, второе и третье уравнения можно записать в виде

$$\begin{cases} \frac{S}{2v_в} = \frac{S}{6v_в} + 3 \\ \frac{S-30}{2v_в} = \frac{S+30}{6v_в} + 2 \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы получаем $v_в = S/9$. Подставляя во второе уравнение системы $v_в = S/9$, получаем уравнение для нахождения величины S:

$$\frac{3S-180}{S} = 2. \qquad 3S - 180 = 2S.$$

Ответ: Расстояние между городами A и B равно 180 км.

Задача 2. От пристани отправился по течению реки плот. Через 5 ч 20 мин вслед за плотом от той же пристани отправилась моторная лодка, которая догнала плот, пройдя 20 км. Какова скорость плота, если известно, что собственная скорость моторной лодки больше скорости плота на 9 км/ч?

Решение. Обозначим собственную скорость лодки (т.е. скорость в стоячей воде) через $v_л$ км/ч, а скорость течения реки – через $v_р$ км/ч. По условию задачи собственная скорость лодки больше скорости плота на 9 км/ч:

$$v_л - v_р = 9$$

Моторная лодка, двигаясь по течению реки, прошла 20 км за время $20/(v_л + v_р)$; плот прошел те же 20 км за время $20/v_р$. Так как время, за которое плот проплыл 20 км, на 5 ч 20 мин (т.е. на 16/3 ч) больше времени, за которое то же расстояние проплыла моторная лодка, то

$$\frac{20}{v_р} - \frac{20}{v_л + v_р} = \frac{16}{3}.$$

Таким образом, решение задачи сводится к решению системы

$$\begin{cases} v_л - v_р = 9 \\ \frac{20}{v_р} - \frac{20}{v_л+v_р} = \frac{16}{3} \end{cases}.$$

Из первого уравнения получаем $v_л = v_р + 9$. Подставляя во второе уравнение $v_л = v_р + 9$, получаем уравнение для нахождения $v_р$:

$$\frac{20}{v_р} - \frac{20}{2v_р + 9} = \frac{16}{3} \Rightarrow 8{v_р}^2 + 21v_р - 135 = 0.$$

Решая последнее уравнение, находим $v_р = 3$. (Второй корень уравнения $v_р = -45/8$ не подходит по смыслу задачи).

Ответ: Скорость течения реки (а также скорость плота) равна 3 км/ч.

Задача 3. Из пункта A в пункт B выехал автомобиль, и одновременно из пункта B в пункт A выехал велосипедист. После встречи они продолжали свой путь. Автомобиль, доехав до пункта B, повернул назад и догнал велосипедиста через 2 часа после момента первой встречи. Сколько времени после первой встречи ехал велосипедист до пункта A, если известно, что к моменту второй встречи он проехал 2/5 всего пути от B к A?

Решение. Введем следующие неизвестные: расстояние S между пунктами A и B, скорости велосипедиста и автомобилиста $v_в$ и v_a соответственно, t – время движения от начала до первой встречи. Выпишем условия задачи в таблицу:

Условие задачи	Уравнение
К моменту первой встречи автомобилист и велосипедист вместе проезжают все расстояние между пунктами А и В.	$(v_a + v_в)\,t = S$
Через 2 часа после момента первой встречи автомобиль, доехав до пункта В и повернув, догнал велосипедиста, т.е. путь, пройденный автомобилем, складывается из удвоенного расстояния, пройденного велосипедистом до первой встречи и расстояния, которое велосипедист успел проехать за 2 часа	$2v_a = 2tv_в + 2v_в$
К моменту второй встречи велосипедист проехал 2/5 всего расстояния между пунктами A и B	$v_в(t+2) = \frac{2}{5}S$

Неизвестное x, которое требуется найти по условию задачи, представляет собой время, необходимое велосипедисту, чтобы доехать до пункта А после первой встречи. Оно может быть выражено как следующая комбинация введенных неизвестных t, v_a, $v_в$:

$$x = \frac{v_a \cdot t}{v_в}.$$

Из системы уравнений

$$\begin{cases} (v_a + v_в)t = S \\ 2v_a = 2tv_в + 2v_в \\ v_в(t+2) = \frac{2}{5}S \end{cases}.$$

определим t и выразим отношение скоростей $v_a/v_в$ через t.

Из второго уравнения системы имеем:

$$\frac{v_a}{v_в} = t + 1 \qquad (+)$$

Исключая S из первого и третьего уравнений системы, и учитывая $(+)$, получаем для неизвестной t уравнение $(t+2)t = \frac{5}{2}(t+2)$, корни которого $t_1 = -2$ и $t_2 = 5/2$.

Так как по физическому смыслу задачи $t > 0$, то искомое неизвестное имеет вид

$$x = (t+1)t = \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{35}{4} = 8\frac{3}{4}.$$

Ответ. 8 ч 45 мин.

Задача 4. Два тела, движущичся в разные стороны по окружности длиной 1 м с постоянными скоростями, встречаются каждые 6 с. При движении в одну сторону первое тело догоняет второе каждые 48 с. Найдите линейные скорости этих тел.

Решение. Обозначим скорости первого и второго тел через v_1 м/с и v_2 м/с соответственно. Тогда в согласии с условием задачи получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{v_1+v_2} = 6 \\ \frac{1}{v_1-v_2} = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 = \frac{1}{6} \\ v_1 - v_2 = \frac{1}{48} \end{cases}.$$

Решая последнюю систему, получаем $v_1 = 3/32$, $v_2 = 7/96$.

Ответ: Скорость первого тела равна 3/32 м/с, скорость второго равна 7/96 м/с.

II. Задачи на работу и производительность труда.

Система уравнений, которую можно составить на основании условий, в задачах на работу обычно содержит следующие величины: время t, в течение которого производится работа, производительность N – работу, произведенную в единицу времени, и собственно работу A, произведенную за время t.

Уравнение, связывающее эти три величины, имеет вид $A = N \cdot t$.

К задачам на работу можно с очевидными изменениями отнести часто встречающиеся задачи на перекачивание жидкости насосами. В качестве произведенной работы в этом случае удобно рассматривать объем перекачанной воды.

Задача 1. В бассейн проведены две трубы – подающая и отводящая, причем через первую трубу бассейн наполняется на 2 часа дольше, чем через вторую опорожняется. При заполненном на одну треть бассейне были открыты обе трубы, и бассейн оказался пустым спустя 8 часов. За сколько часов одна первая труба может заполнить бассейн и за сколько часов одна вторая труба может опорожнить полный бассейн?

Решение. Пусть v м^3 – объем бассейна, производительность подающей трубы – x м^3/ч, отводящей – y м^3/ч. Время, необходимое подающей трубе для заполнения бассейна – v/x ч, время, необходимое отводящей трубе на опорожнение бассейна – v/y ч. По условию задачи

$$\frac{v}{x} - \frac{v}{y} = 2.$$

Так как производительность отводящей трубы больше производительноти наполняющей ($x < y$), то при обеих включенных трубах будет происходить опорожнение бассейна и одна треть бассейна опорожнится за время $\frac{v/3}{y-x}$, которое по условию задачи равно 8 ч.

Итак, условие задачи может быть записано в виде системы двух уравнений для трех неизвестных:

$$\begin{cases} \frac{v}{x} - \frac{v}{y} = 2 \\ \frac{v}{y-x} = 24 \end{cases}.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби, стоящей во втором уравнении системы, на v. Тогда относительно неизвестных $u = \frac{v}{x}$ и $\mathrm{v} = \frac{v}{y}$ получим следующую систему уравнений:
$\begin{cases} u - \mathrm{v} = 2 \\ \frac{u \cdot \mathrm{v}}{u - \mathrm{v}} = 24 \end{cases}$, которая эквивалентна системе $\begin{cases} u - \mathrm{v} = 2 \\ u \cdot \mathrm{v} = 48 \end{cases}$, т.е. $u = 8$, $\mathrm{v} = 6$.

Ответ: 8 ч. и 6 ч.

Задача 2. Для прокладки траншеи выделены два экскаватора разных типов. Время, необходимое первому экскаватору для самостоятельной прокладки траншеи, на 3 часа меньше времени, необходимого второму экскаватору. Сумма этих времен в $4\frac{4}{35}$ раза больше времени, необходимого для прокладки траншеи при совместной работе двух экскаваторов. Определить, сколько времени необходимо каждому экскаватору для самостоятельной прокладки траншеи.

Решение В качестве неизвестных введем следующие величины: A м^3 – объем вынутого грунта, N_1 м^3/ч и N_2 м^3/ч – производительности первого и второго экскаваторов. Время, необходимое первому экскаватору для самостоятельной прокладки траншеи – A/N_1, а второму – A/N_2. По условию задачи эти две величины связаны равенством

$$\frac{A}{N_1} + 3 = \frac{A}{N_2},$$

а их сумма $\frac{A}{N_1} + \frac{A}{N_2}$ в $4\frac{4}{35}$ раза больше времени, необходимого для прокладки траншеи при совместной работе двух экскаваторов, т.е.

$$4\frac{4}{35} \cdot \frac{A}{N_1 + N_2} = \frac{A}{N_1} + \frac{A}{N_2} \Rightarrow \frac{4\frac{4}{35}}{\frac{N_1}{A} + \frac{N_2}{A}} = \frac{A}{N_1} + \frac{A}{N_2}.$$

Введем неизвестные $x = \frac{A}{N_1}$ и $y = \frac{A}{N_2}$. Тогда исходная система может быть записана в виде

$$\begin{cases} x + 3 = y \\ 4\frac{4}{35}xy = (x+y)^2 \end{cases}.$$

Подставив y из первого уравнения во второе, получаем относительно x следующее уравнение:

$$4x^2 + 12x - 315 = 0$$

Положительный корень этого уравнения $x = 7,5$ представляет собой время самостоятельной прокладки траншеи первым экскаватором. Из второго уравнения системы получаем, что $y = 10,5$.

Ответ: 7,5 ч, 10,5 ч.

III. Задачи на процентный прирост и вычисление сложных процентов.

Решение задач на процентный прирост и вычисление "сложных процентов" основано на использовании следующих понятий и формул. Пусть некоторая переменная величина A, зависящая от времени t, в начальный момент $t = 0$ имеет значение A_0, а в некоторый момент времени t_1 имеет значение A_1. *Абсолютным приростом* величины A за время t_1 называется *разность* $A_1 - A_0$, *относительным приростом* величины A за время t_1 – величина $\frac{A_1 - A_0}{A_0}$ и процентным приростом величина A за время t_1 – величина $\frac{A_1 - A_0}{A_0} \cdot 100\%$.

Обозначая процентный прирост величины A через $p\%$, получаем следующую формулу, связывающую значения A_0, A_1 и процентный прирост p:

$$\frac{A_1 - A_0}{A_0} \cdot 100\% = p\%.$$

Запись последней формулы в виде

$$A_1 = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right) = A_0 + A_0\frac{p}{100}$$

позволяет по известному значению A_0 и заданному значению p вычислить значение A_1, т.е. значение A в момент времени t_1.

Пусть теперь известно, что и далее при $t > t_1$ величина A имеет процентный прирост $p\%$. Тогда в момент времени $t_2 = 2t_1$ значение величины $A_2 = A(t_2)$ будет равно

$$A_2 = A_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right) = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

В момент времени $t_3 = 3t_1$ значение величины $A_3 = A(t_3)$ есть

$$A_3 = A_2\left(1 + \frac{p}{100}\right) = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3,$$

в момент времени $t = nt_1$:

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n .$$

Если за время t_1 (на "первом этапе") величина A изменилась на $p_1\%$, на "втором этапе" (т.е. за время $t_2 - t_1 = t_1$) – на $p_2\%$, на "третьем этапе" (т.е. за время $t_3 - t_2 = t_1$) – на $p_3\%$ и т.д., то значение величины A в момент $t = nt_1$ вычисляется по формуле

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \cdots \left(1 + \frac{p_3}{100}\right) .$$

Задача 1. Предприятие работало три года. Выработка продукции за второй год работы предприятия возросла на $p\%$, а на следующий год она возросла на 10% больше, чем в предыдущий. Определить, на сколько процентов увеличилась выработка за второй год, если известно, что за два года она увеличилась в общей сложности на 48,59%.

Решение. Обозначим количество продукции, произведенной за первый, второй и третий годы работы предприятия, через A_1, A_2 и A_3 соответственно. По условию задачи за второй год процентный прирост составил $p\%$, а за третий год – $(p + 10)\%$. В соответствии с определением процентного прироста эти условия дают два уравнения:

$$\frac{A_2 - A_1}{A_1} \cdot 100\% = p\%, \qquad \frac{A_3 - A_2}{A_2} \cdot 100\% = (p + 10)\%.$$

По условию задачи также известно, что за два года производство выросло на 48,59%, т.е. в третий год предприятие производило на 48,59% продукции больше, чем в первый год. Это условие можно записать в виде уравнения

$$\frac{A_3 - A_1}{A_1} \cdot 100\% = 48,59\%.$$

Запишем полученные уравнения в виде следующей системы:

$$A_2 = A_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right), \; A_3 = A_2 \left(1 + \frac{p + 10}{100}\right), \; A_3 = A_1 \left(1 + \frac{48,59}{100}\right).$$

Умножая первое уравнение на второе, получаем

$$A_3 = A_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 + \frac{p + 10}{100}\right).$$

Из полученного уравнения и третьего уравнения системы получаем уравнение для отыскания неизвестной величины p:

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p+10}{100}\right)=1+\frac{48,59}{100}\Rightarrow p^2+210p-3859=0.$$

Корни последнего уравнения: $p_1=17$, $p_2=227$.

По смыслу задачи подходит первый корень $p_1=17$.

Ответ: 17%.

IV. Задачи на концентрацию и процентное содержание.

Решение задач на концентрацию и процентное содержание основано на использовании следующих понятий и формул.

Пусть даны три различных вещества A, B и C с массами M_A, M_B и M_C. Масса смеси, составленной из этих веществ, равна $M_A+M_B+M_C$.

Массовой концентрацией вещества A в смеси называется величина c_A, вычисляемая по формуле:

$$c_A=\frac{M_A}{M_A+M_B+M_C};\qquad M_A+M_B+M_C=M.$$

Соответственно массовые концентрации веществ B и C в этой смеси вычисляются по формулам

$$c_B=\frac{M_B}{M};\qquad c_C=\frac{M_C}{M}.$$

Массовые концентрации c_A, c_B и c_C связаны равенством

$$c_A+c_B+c_C=1.$$

Процентным содержанием вещества A, B, C в данной смеси называются величины $p_A\%$, $p_B\%$ и $p_C\%$ соответственно, вычисляемые по формулам

$$p_A\%=c_A\cdot 100\%,\qquad p_B\%=c_B\cdot 100\%,\qquad p_c\%=c_C\cdot 100\%.$$

По аналогичным формулам вычисляются концентрации веществ в смеси и для случая, когда число различных смешиваемых веществ (компонент) равно двум, четырем, пяти и т.д.

Объемные концентрации веществ в смеси определяются такими же формулами, как и массовые концентрации, только вместо масс компонент M_A, M_B и M_C в этих формулах будут стоять объемы компонент V_A, V_B и V_C.

В тех случаях, когда речь идет об объемных концентрациях, обычно предполагается, что при смешивании веществ объем смеси будет равен сумме объемов компонент. Это предположение не является физическим законом, а представляет собой соглашение, принимаемое при решении задач на объемную концентрацию.

Задача 1. В сосуд емкостью 6 л налито 4 л 70%-ного раствора серной кислоты. Во второй сосуд той же емкости налито 3 л 90%-ного раствора серной кислоты. Сколько литров раствора нужно перелить из второго сосуда в первый, чтобы в нем получился p%-ный раствор серной кислоты? Найти все значения p, при которых задача имеет решение.

Решение. Обозначим через x л объем 90%-ного раствора серной кислоты, который переливается из второго сосуда в первый. В этом объеме содержится $\frac{9x}{10}$ л чистой (100%-ной) серной кислоты. Первоначально в первом сосуде объем чистой серной кислоты был равен $\frac{7}{10} \cdot 4$ (л). После того, как в первый сосуд долили x л 90%-ного раствора серной кислоты, в нем будет содержаться $\frac{7}{10} \cdot 4 + \frac{9}{10}x$ л чистой серной кислоты. Используя определение объемного процентного содержания, в соответствии с условием задачи получаем уравнение

$$\frac{\frac{7}{10} \cdot 4 + \frac{9}{10}x}{x+4} \cdot 100\% = p\%.$$

Решая это уравнение, находим величину перелитого объема:

$$x = \frac{4(p-70)}{90-p}.$$

Остается выяснить, при каких значениях p задача имеет решение. Из условия задачи очевидно, что количество доливаемого раствора не может превысить 2 л, так как объем первого сосуда равен 6 л, т.е. $0 \le x \le 2$. Используя найденное значение для x, получим ограничения на p:

$$0 \le \frac{4(p-70)}{90-p} \le 2.$$

Решая данное неравенство (с учетом того, что $70 \le p < 90$), получим $70 \le p \le 76\frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{4(p-70)}{90-p}$ л; задача имеет решение при $70 \le p \le 76\frac{2}{3}$.

Задания для самостоятельного решения.

1. Скорый поезд был задержан у семафора на 16 мин и нагнал опоздание на перегоне в 80 км, идя со скоростью на 10 км/ч больше, чем полагалось по расписанию. Какова скорость поезда по расписанию?

2. За 4 баяна и 3 аккордеона заплатили 1470 рублей. После снижения цен на баян на 20%, а на аккордеон на 30%, за ту же покупку уплатили 1101 руб. Найти (в рублях) старую цену аккордеона.

3. Первый цех за 7 часов работы может изготовить 42% всей продукции. Второй цех за 6 часов работы может изготовить 60% всей продукции. За сколько часов будет выполнен весь заказ, если оба цеха будут работать одновременно?

4. Расстояние в 49 км первый автомобиль проходит на 30 мин медленнее второго. Найти (в км/ч) скорость первого автомобиля, если она относится к скорости второго, как $4 : 7$.

5. Сколько свободных дней может иметь каждый шофер в месяц (30 дней), если ежедневно 25% автомобилей из имеющихся 60 остаются в гараже для профилактического ремонта, а штат шоферов составляет 54 человека?

6. На путь вверх по реке 35 км и обратно судно затратило 7 часов 20 минут. Скорость течения реки 4 км/ч. С какой скоростью шло судно по течению реки (в км/ч)?

7. Сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел на 29 больше утроенного меньшего числа. Найти сумму этих чисел.

8. Скорость парохода относится к скорости течения реки, как $36 : 5$. Пароход двигался по течению реки 5 часов 10 минут. Сколько времени потребуется ему, чтобы вернуться обратно?

9. Разность между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел равна 18, разность этих чисел равна 48. Найти сумму этих чисел.

10. Два автомобиля выезжают одновременно навстречу друг другу из A в B и из B в A. После встречи первому приходится еще быть в пути 2 часа, а второму – 9/8 часа. Определить скорость первого автомобиля, если расстояние между A и B равно 210 км.

11. Два куска латуни имеют суммарную массу 30 кг. Первый кусок содержит 5 кг чистой меди, а второй – 4 кг чистой меди. Сколько процентов меди содержит первый кусок латуни, если второй содержит меди на 15% больше первого?

12. Перевыполняя план ремонта в среднем на 3 вагона в неделю, на заводе уже за две недели до срока отремонтировали 297 вагонов. Сколько вагонов в неделю ремонтировали на заводе, если по плану должно быть отремонтировано 330 вагонов?

13. Найти двузначное число, частное от деления которого на произведение его цифр равно $2\frac{2}{3}$, а кроме того, разность между искомым числом и числом, написанным теми же цифрами, но расположенными в обратном порядке, равна 18.

14. Мясо теряет при варке 35% своего веса. Сколько надо взять мяса, чтобы приготовить 260 порций по 100 г вареного мяса в каждой порции?

15. Двое рабочих вместе выполняют некоторую работу за 20 дней. За сколько дней выполнит ту же работу первый рабочий, работая один, если производительность труда второго рабочего на 5% выше, чем первого?

16. Трасса велогонок представляет собой контур прямоугольного треугольника с разностью катетов в 2 км. При этом его гипотенуза пролегает по проселочной дороге, а оба катета – по шоссе. Один из участников прошел отрезок по проселочной дороге со скоростью 30 км/ч, а оба отрезка по шоссе за то же время со скоростью 42 км/ч. Определить протяженность трассы.

17. Цена товара ежегодно снижалась на одно и то же число процентов. В конце первого года она составила 162 руб, а в конце второго года – 81% первоначальной цены товара. Каковы первоначальная цена товара и процент ежегодного снижения его цены?

18. Мешок картошки весит 100 кг при влажности 99%. Картофель подсох и влажность уменьшилась на 1%. Сколько весит теперь мешок картошки?

19. Автомобиль прошел весь путь от A до B, равный 300 км, сразу повернул назад и через 1 час 12 мин после выезда из B увеличил скорость на 16 км/ч. В результате на обратный путь он затратил на 48 мин меньше, чем на путь из A в B. Найти первоначальную скорость автомобиля.

20. В городе N было 100000 безработных. В течение 4-х лет их количество уменьшалось на p% ежегодно. В результате в городе N осталось 24010 безработных. Найдите p.

21. Насос марки A наполняет пустой бассейн за a часов, а насос марки B отсасывает воду из полного бассейна за b часов. За сколько часов наполнится пустой бассейн (это возможно), если будут одновременно включены 3 насоса марки A и 2 насоса марки B?

22. Из емкости, содержащей 828 л бензина, отлили $\frac{4}{7}$ объема, затем отлили $\frac{5}{9}$ оставшегося объема, а затем еще раз отлили $\frac{1}{8}$ остатка. Сколько литров бензина осталось в емкости?

23. После реконструкции поточной линии ее производительность за смену возросла на 20%, расход электроэнергии за смену сократился на 10%, а цена 1 квт/часа электроэнергии возросла за время реконструкции на 40%. На сколько процентов увеличились затраты на электроэнергию в расчете на единицу продукции?

Ответы.

1. 50 км/ч; 2. 250 руб; 3. 6 ч 15 мин; 4. 42 км/ч; 5. 5 дней; 6. 15 км/ч; 7. 4 и 5, сумма равна 9; 8. 6 ч 50 мин; 9. $a = 49$, $b = 1$, $a + b = 50$; 10. 60 км/ч; 11. 25%; 12. 30 вагонов по плану; 13. 62; 14. 40 кг; 15. 41 день; 16. 24 км; 17. 180 руб и 10%; 18. 50 кг; 19. 60 км/ч; 20. 30%; 21. $\frac{ab}{3b-2a}$; 22. 138 л; 23. 5%.

Тема V. Рациональные алгебраические неравенства.

Если $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами, то функция $y = P(x)$ называется *целой рациональной функцией*, а $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ – *дробно-рациональной.*

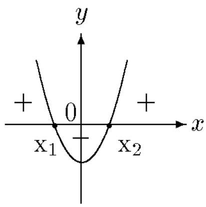
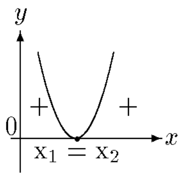
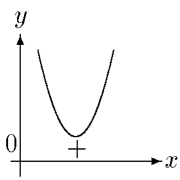
Решение неравенства, левая часть которого рациональная функция, а правая часть равна 0, основано на непрерывности такой функции всюду, кроме нулей знаменателя. Эти нули (изображаются всегда выколотыми точками) и нули числителя разбивают числовую ось на конечное число интервалов, в каждом из которых знак функции сохраняется. Числитель и знаменатель нужно разложить на множители и, если, например, множитель $x - x_0$ имеется в числителе или знаменателе, то при переходе через точку x_0 знак этого множителя, а, значит, и всей функции меняется. Если же x_0 – двойной нуль, т.е. множитель имеет вид $(x - x_0)^2$, или находится и в числителе, и в знаменателе дроби, то при переходе через такую точку знак сохраняется.

Нужно помнить, что если неравенство нестрогое, то нули числителя входят во множество решений, и изображаются на оси "жирными" точками.

Этот метод называется *"методов интервалов"* и применяется, как мы в дальнейшем увидим, и в случае нерациональных неравенств.

Для решения квадратных неравенств нет никакой необходимости применять метод интервалов. Это делает запись более громоздкой и ведет к потере времени и возможности ошибок.

Рекомендуем зрительно запомнить следующую таблицу. Будем считать $a > 0$, в противном случае можно, умножив на -1, изменить знак a (и знак неравенства!). Достаточно найти корни квадратного трехчлена, считая всегда $x_1 < x_2$, если они есть.

$D > 0$		$ax^2 + bx + c \geq 0,\ x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$ $ax^2 + bx + c > 0,\ x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ $ax^2 + bx + c \leq 0,\ x \in [x_1; x_2]$ $ax^2 + bx + c < 0,\ x \in (x_1; x_2)$
$D = 0$		$ax^2 + bx + c \geq 0,\ x \in \mathbf{R}$ $ax^2 + bx + c > 0,\ x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$ $ax^2 + bx + c \leq 0,\ x = x_1$ $ax^2 + bx + c < 0,\ x \in \emptyset$
$D < 0$		$\left[\begin{array}{l} ax^2 + bx + c \geq 0 \\ ax^2 + bx + c > 0 \end{array}\right. \Rightarrow x \in \mathbf{R}$ $\left[\begin{array}{l} ax^2 + bx + c \leq 0 \\ ax^2 + bx + c < 0 \end{array}\right. \Rightarrow x \in \emptyset$

Приведем примеры применения метода интервалов.

1) Решить неравенство

$$\frac{7}{3x - 2 - x^2} < \frac{3}{7x - 4 - 3x^2}.$$

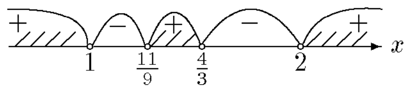
Решение:

$$\frac{7}{x^2 - 3x + 2} > \frac{3}{3x^2 - 7x + 4}; \quad \frac{7}{x^2 - 3x + 2} - \frac{3}{3x^2 - 7x + 4} > 0$$

$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, так как $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.
$3x^2 - 7x + 4 = (x-1)(3x-4)$, так как $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{4}{3}$.
Приводим дроби к общему знаменателю:

$$\frac{7(3x-4) - 3(x-2)}{(x-1)(x-2)(3x-4)} > 0; \quad \frac{2(9x-11)}{(x-1)(x-2)(3x-4)} > 0$$

Нуль числителя $x = \frac{4}{3}$, $x = \frac{11}{9}$ одновременно является и нулем знаменателя, $x = 1$ и $x = 2$ – нули знаменателя.



Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty) \cup \left(\frac{11}{9}; \frac{4}{3}\right)$.

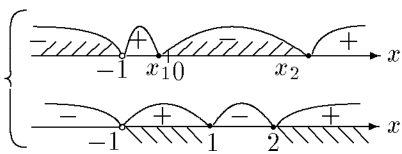
2. Решить систему неравенств:

$$2 \le \frac{3x^2 - 7x + 8}{x+1} \le 9.$$

Решение:

$$\begin{cases} \frac{3x^2-7x+8}{x+1} - 9 \le 0 \\ \frac{3x^2-7x+8}{x+1} - 2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x^2-7x+8-9x-9}{x+1} \le 0 \\ \frac{3x^2-7x+8-2x-2}{x+1} \ge 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{3x^2-16x-1}{x+1} \le 0 \\ \frac{3x^2-9x+6}{x+1} \ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3(x-x_1)(x-x_2)}{x+1} \le 0 \\ \frac{3(x-1)(x-2)}{x+1} \ge 0 \end{cases}; \quad x_{1,2} = \frac{8 \mp \sqrt{67}}{3}$$

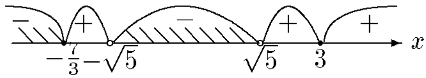


Находим пересечение заштрихованных множеств.
Ответ: $x \in \left[\frac{8-\sqrt{67}}{3}; 1\right] \cup \left[2; \frac{8+\sqrt{67}}{3}\right]$.

3. Решить неравенство

$$-\frac{(3x+7)(x-3)^2}{5-x^2} \le 0.$$

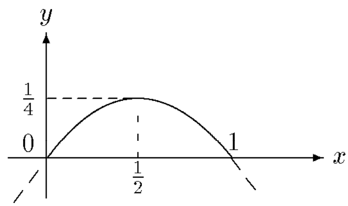
Решение: нули числителя $x = -\frac{7}{3}$ и $x = 3$ (двойной),
нули знаменателя $x = -\sqrt{5}$, $x = \sqrt{5}$, $\left(\frac{7}{3} > \sqrt{5}\right)$



Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{7}{3}\right] \cup \left(-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right) \cup \{3\}$.

4. Найти область определения и множество значений функции $y = \sqrt{x - x^2}$

Решение: Областью определения $D(y)$ функции является множество решений квадратного неравенства $x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x \leq 0$, и т.к. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, то $x \in [0; 1]$, $D(y) = [0; 1]$. На этом множестве квадратный трехчлен $x - x^2$ принимает наименьшее значение 0, а наибольшее — $\frac{1}{4}$ при $x = \frac{1}{2}$ (см. чертеж)



Поэтому $E(y) = \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Ответ: $D(y) = [0; 1]$, $E(y) = \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

5. Найти область определения функции $y = \sqrt{\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}}$ и указать целые значения x из $D(y)$.

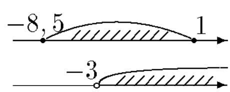
Решение: Так как квадратный корень принимает только неотрицательные значения, то область определения функции является множеством решений системы неравенств:

$$\begin{cases} 17 - 15x - 2x^2 \geq 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x^2 + 15x - 17 \leq 0 \\ x > -3 \end{cases}.$$

Найдем корни квадратного трехчлена

$$x_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 136}}{4} = \frac{-15 \pm 19}{4}; \quad x_1 = -\frac{17}{2}; \quad x_2 = 1.$$

$$\begin{cases} x \in \left[-\frac{17}{2}; 1\right] \\ x > -3 \end{cases}$$



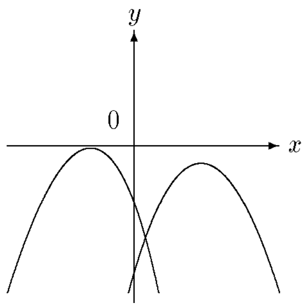
Ответ: $D(y) = (-3;1]$. Целые $x = -2,\ -1,\ 0,\ 1$.

6. Найти a, при которых неравенство $\frac{(a+2)x^2+(a+3)x+1-a}{x^2+x+2} \le 2$ выполняется при всех x.

Решение. Так как $x^2+x+2 > 0$ для $x \in \mathbf{R}$ $(D<0)$, то неравенство можно умножить на x^2+x+2 и привести к виду

$$(a+2)x^2+(a+3)x+1-a-2x^2-2x-4 \le 0, \qquad ax^2+(a+1)x-a-3 \le 0$$

Это неравенство будет выполнено для всех x, если график квадратного трехчлена будет располагаться не выше оси ox:



Это равносильно выполнению условий:

$$\begin{cases} a<0 \\ D \le 0 \end{cases}.$$

Вычислим D.

$$D = (a+1)^2 + 4a(a+3) =$$

$$= a^2+2a+1+4a^2+12a = 5a^2+14a+1.$$

Решим неравенство

$$5a^2+14a+1 \le 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-7\pm\sqrt{49-5}}{5} = \frac{-7\pm2\sqrt{11}}{5}; \qquad a \in \left[\frac{-7-2\sqrt{11}}{5}; \frac{-7+2\sqrt{11}}{5}\right].$$

Учтем, что $a<0$ и $a_1<0$, $a_2<0$

Ответ: $a \in \left[\frac{-7-2\sqrt{11}}{5}; \frac{-7+2\sqrt{11}}{5}\right]$.

Задания для самостоятельного решения.

1. Решить следующие неравенства и указать, если оно есть, наименьшее целое число из множества решений:

а) $\frac{x^2-x-12}{(x+1)^2(x+2)} \ge 0$; б) $\frac{x}{x+1} < 1$; в) $\frac{2x^2-4}{x^2+2x+3} < 2$; г) $\frac{12-4x}{4-x^2} < 1$; д) $\frac{5x+1}{x-1} \ge 2x+2$; е) $1+\frac{12}{x^2} < \frac{7}{x}$; ж) $\frac{x-1}{x^2-x-12} \le 0$; з) $\frac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2-x-30} \ge 0$.

2. Найти наибольшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству:

а) $\frac{2x-1}{x^2-5x+7} < 0$; б) $x^3+4x^2+5x+2 \le 0$; в) $\frac{x^2-3x+1}{x^2-1} \ge 1$; г) $\frac{2x+1}{3} - \frac{3x-1}{2} > 1$.

3. Указать количество положительных решений неравенства $\frac{1}{x^2+x} \le \frac{1}{2x^2+2x+3}$.

4. Найти наименьшее натуральное x, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{x}{x^2+3x+2} > \frac{x}{x^2+7x+12}.$$

5. Найти целое решение системы

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{2x+3}{3} + \frac{x}{6} < 2 - \frac{x+5}{2} \\ 1 - \frac{x+5}{8} + \frac{4-x}{2} < 3x - \frac{x+1}{4} \end{cases}.$$

6. Найти середины промежутков конечной длины, на которых выполнено неравенство:

а) $\frac{2}{x+8} < \frac{2x-1}{x^2-1}$; б) $\frac{3}{x+4} < \frac{3x-2}{x^2-9}$.

7. Найти область определения функции:

а) $y = \sqrt{x^2-4x}$ и $E(y)$; б) $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{7-x}$; в) $y = \sqrt{\frac{x+5}{4-x}}$; г) $y = \sqrt{-4x^2+4x-1}$; д) $y = \frac{1}{x-2} + \sqrt{9-x^2}$; е) $y = \sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2+6x+8}}$; ж) $y = \sqrt{x^2-x-2} + \frac{1}{\sqrt{x^2-5x-14}}$; з) $y = \sqrt[3]{\frac{x^3-1}{x^3+1}} + \sqrt{x^2-9x}$.

8. При всех a решить неравенство

$$2x + 3(ax-8) + \frac{x}{3} < 4\left(x + \frac{1}{2}\right) - 5.$$

9. Найти a, при которых неравенство $(a-1)x^2 - (a+1)x + (a+1) > 0$ выполняется при всех x.

Ответы.

1. а) $x \in [-3;-2) \cup [4;+\infty)$; -3; б) $x \in (-1;+\infty)$; 0; в) $x \in \left(-\frac{5}{2}, +\infty\right)$; -2; г) $x \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$; нет; д) $x \in \left(-\infty;-\frac{1}{2}\right] \cup (1;3]$; нет; е) $x \in (3;4)$; нет; ж) $x \in (-\infty;-3) \cup [1;4)$; нет; з) $x \in (-\infty;-5) \cup \{0\} \cup [1;2] \cup (6;+\infty)$; нет. 2. а) $x \in \left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$, 0; б) $x \in (-\infty;-2] \cup \{-1\}$, -1; в) $x \in (-\infty;-1) \cup \left[\frac{2}{3};1\right)$, -2 г) $x \in \left(-\infty;-\frac{1}{5}\right)$, -1; 3. $x \in (-1;0)$, нет; 4. $x = 1$; 5. $x \in \left(\frac{7}{9};2\right)$, 1; 6. а) $x \in (-\infty;-8) \cup \left(-1;\frac{2}{5}\right) \cup (1;+\infty)$, $x = -\frac{3}{10}$. б) $x \in (-\infty;-4) \cup \left(-3;-\frac{19}{10}\right) \cup (3;+\infty)$, $x = -\frac{49}{20}$. 7. а) $D(y) = (-\infty;0] \cup [4;+\infty)$, $E(y) = [0;+\infty)$; б) $D(y) = [2;7]$; в) $D(y) = [-5;4)$; г) $D(y) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$; д) $D(y) = [-3;2) \cup (2;3]$; е) $D(y) = (-\infty;-4) \cup (-2;2] \cup [3;+\infty)$; ж) $D(y) = (-\infty;-2) \cup (7;+\infty)$; з) $D(y) = (-\infty;-1) \cup (-1;0) \cup (9;+\infty)$. 8. при $a > \frac{5}{9}$ $x < \frac{63}{9a-5}$, при $a = \frac{5}{9}$ $x \in \mathbf{R}$, при $a < \frac{5}{9}$ $x > \frac{63}{9a-5}$. 9. $a > \frac{5}{3}$.

Тема VI. Уравнения и неравенства с одним неизвестным, содержащие знак модуля.

§1. Решение уравнений с модулем.

1. Уравнение вида $|f(x)| = a$ $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{array}\right.$, Если $a < 0$, то $x \in \emptyset$.

2. Уравнение $|f(x)| = g(x)$ имеет решение лишь при $g(x) \geq 0$ и также равносильно совокупности систем:

$$\left\{\begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Если функция $f(x)$ проще, чем $g(x)$, и решить неравенство $f(x) \geq 0$ легче, чем $g(x) \geq 0$, то удобнее заменить уравнение $|f(x)| = g(x)$ равносильной совокупностью систем:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x) < 0 \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Нужно решить обе системы и результаты объединить.

3. Если в уравнении несколько выражений находятся под знаком модуля, то удобно применить метод интервалов: найти нули этих выражений и разбить ОДЗ переменной в уравнении на промежутки, в каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак. На этих промежутках "снимается" знак каждого модуля, решается полученное уравнение, а затем найденные на каждом промежутке решения объединяются. Этот метод можно, конечно, применять и в случае одного модуля.

4. Уравнение $f(|x|) = g(x)$ равносильно совокупности систем:

$$\left\{\begin{array}{l} x \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left\{\begin{array}{l} x < 0 \\ f(-x) = g(x) \end{array}\right. .$$

5. Уравнение $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x)$ или $\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$.

Примеры:

1). $2x^2 - 5|x| + 3 = 0$

Решение. I способ. Решаем совокупность систем:

$$\left\{\begin{array}{l} x \geq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 = 0 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{l} x < 0 \\ 2x^2 + 5x + 3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} x \le 0 \\ x_1 = -1, x_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Ответ: -1, 1, $-\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$.

II способ. Обозначим $|x| = t$, $t \ge 0$. Решим уравнене $2t^2 - 5t + 3 = 0 \Rightarrow t_1 = 1$, $t_2 = \frac{3}{2}$. Уравнения $|x| = 1$ и $|x| = \frac{3}{2}$ имеют решениями числа ± 1, $\pm\frac{3}{2}$.

2). Найти все корни уравнения $|x^2 + x - 1| = 2x - 1$, удовлетворяющие условию $x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение. Так как $2x - 1$ проще, чем $x^2 + x - 1$, то решим совокупность систем

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 1 \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + x - 1 = 2x - 1 \\ x^2 + x - 1 = 1 - 2x \end{array} \right. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \ge \frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - x = 0 \\ x^2 + 3x - 2 = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Уравнение $x^2 - x = 0$, имеет корни $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Но лишь $x = 1$ удовлетворяет неравенству $x \ge \frac{1}{2}$, но зато не удовлетворяет поставленному условию $x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Уравнение $x^2 + 3x - 2 = 0$ имеет корнями числа $x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$ и $x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$; x_1 не подходит, т.к. $x_1 < \frac{1}{2}$. Проверим, что x_2 удовлетворяет обоим неравенствам, т.е.

$$\frac{1}{2} \le \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Умножим неравенство на 6 и оценим $\sqrt{17}$

$$3 \le -9 + 3\sqrt{17} < 2\sqrt{3}, \quad 12 \le 3\sqrt{17} < 9 + 2\sqrt{3}, \quad 4 \le \sqrt{17} < 3 + \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$4 \le \sqrt{17}$ выполняется очевидно.

Проверим справедливость неравенства $\sqrt{17} < 3 + \frac{2}{\sqrt{3}}$, $17 < 9 + \frac{12}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3}$, $17 < \frac{31}{3} + 4\sqrt{3}$, $\frac{20}{3} < 4\sqrt{3}$, $5 < 3\sqrt{3}$, $25 < 27$ – истинное неравенство.

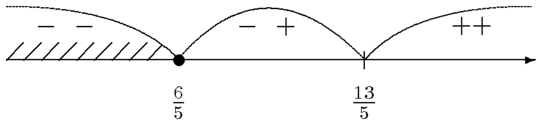
Ответ: $\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

3) $|5x - 13| - |6 - 5x| = 7$.

Так как $|a| = |-a|$, удобнее записать уравнение в виде

$$|5x - 13| - |5x - 6| = 7.$$

Нулями модулей являются числа $\frac{13}{5}$ и $\frac{6}{5}$, которые разбивают числовую ось на три промежутка:



в каждом из которых снимаем знаки модулей и решаем полученные уравнения:

1. В $\left(-\infty; \frac{6}{5}\right)$ имеем $x < \frac{6}{5}$, $x < \frac{13}{5} \Rightarrow 5x < 13$ и $5x < 6 \Rightarrow$ $-(5x-13)+(5x-6) = 7$, $7 = 7$. Значит, все точки промежутка $\left(-\infty; \frac{6}{5}\right)$ являются решениями уравнения.

2. В $\left[\frac{6}{5}; \frac{13}{5}\right]$ имеем $5x \leq 13$, но $5x \geq 6 \Rightarrow -(5x - 13) - (5x - 6) = 7$, $10x = 12$, $x = \frac{6}{5}$ – решение.

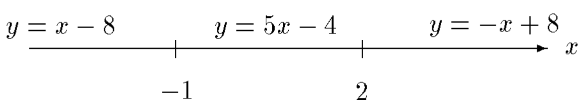
3. В $\left(\frac{13}{5}; +\infty\right)$ имеем $5x > 13$ и $5x > 6 \Rightarrow 5x - 13 - (5x - 6) = 7$, $-7 = 7 \Rightarrow x \in \emptyset$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{6}{5}\right]$.

4. Решить уравнение $2|x+1| - 3|x-2| = a$ при всех значениях параметра a.

Решение этого уравнения методом интервалов будет очень громоздким, т.к. нужно будет рассмотреть все случаи расположения точки a относительно нулей модулей. Решим уравнение графически.

Построим график функции $y = 2|x+1| - 3|x-2|$ методом интервалов:



На $(-\infty; -1)$ $y = -2(x+1) + 3(x-2) = -2x - 2 + 3x - 6 = x - 8$,

на $[-1; 2]$ $y = 2(x+1) + 3(x-2) = 5x - 4$,

на $(2; +\infty)$ $y = 2(x+1) - 3(x-2) = -x + 8$;

итак,

$$y = \begin{cases} x - 8, & x < -1 \\ 5x - 4, & -1 \leq x \leq 2 \\ -x + 8, & x > 2 \end{cases},$$

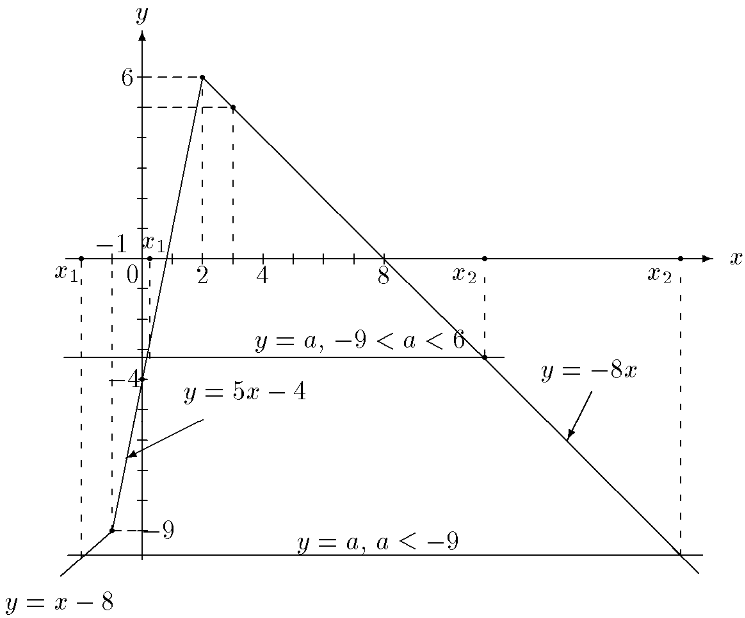
построим график функции (см.рис.).

Рассмотрим несколько случаев:

1. $a \leq -9$, уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x-8=a \\ -x+8=a \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} x_1=a+8 \\ x_2=8-a \end{array}$$

2. $-9 < a \leq 6$



Прямая $y = a$ попрежнему пересекается с прямой $y = -x + 8$ при $x_2 = 8 - a$, а с прямой $y = 5x - 4$ при $5x - 4 = a \Rightarrow x_1 = \frac{a+4}{5}$. Если $a = 6$, то корень один: $x = 2$.

3. $a > 6$, $x \in \emptyset$.

$$\text{Ответ}: \begin{array}{llll} \text{при} & a \leq -9, & x_1 = a+8, & x_2 = 8-a; \\ \text{при} & -9 < a < 6, & x_1 = \frac{a+4}{5}, & x_2 = 8-a; \\ \text{при} & a = 6 & x = 2 & \\ \text{при} & a > 6 & x \in \emptyset. & \end{array}$$

5. Найти решения системы

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 4|y| = 8 \\ x + 3y = 6 \end{array}\right.$$

Подставим $x = 6 - 3y$ в первое уравнение системы и решим его:

$$18 - 9y + 4|y| = 8, \qquad 4|y| = 9y - 10 \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y \geq 0\\ 4y = 9y-10\end{cases}\\ \begin{cases}y<0\\ -4y = 9y-10\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y \geq 0\\ y = 2\end{cases}\\ \begin{cases}y<0\\ y = \frac{10}{13}\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow y = 2, \quad x = 6-6 = 0.$$

Ответ: $(0;2)$.

§2. Решение неравенств с модулями.

1. Неравенство $|f(x)| < a$ при $a > 0$ равносильно системе

$$-a < f(x) < a, \qquad \text{т.е.} \qquad \begin{cases} f(x) < a\\ f(x) > -a\end{cases}.$$

При $a \leq 0$ оно не имеет решений.

Например, $|x-3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x-3 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5$, $x \in [1;5]$.

2. Неравенство $|f(x)| > a$ при $a \leq 0$ имеет решениями все допустимые значения неизвестной x. При $a > 0$ оно равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x) > a\\ f(x) < -a\end{array}\right.$. Например, решениями неравенства $|x| > 5$ являются $x > 5$ или $x < -5$, т.е. $x \in (-\infty;-5) \cup (5;+\infty)$.

3. Неравенство $|f(x)| \leq g(x)$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} g(x) \geq 0\\ -g(x) \leq f(x) \leq g(x)\end{cases}$, или, если это легче, совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x) \geq 0\\ f(x) \leq g(x)\end{cases}\\ \begin{cases}f(x) < 0\\ -f(x) \leq g(x)\end{cases}\end{array}\right.$$

4. Неравенство $|f(x)| > g(x)$ выполняется для всех допустимых x, для которых $g(x) < 0$ Если $g(x) \geq 0$, то оно распадается на два неравенства: $f(x) < -g(x)$ или $f(x) > g(x)$.

Итак,

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) < 0, \quad x \in \text{ОДЗ}\\ \begin{cases} g(x) \geq 0\\ \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x)\\ f(x) < -g(x)\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

5. Неравенство $f(|x|) < g(x)$ решается отдельно для $x \geq 0$ и для $x < 0$.

6. Неравенство, содержащее несколько выражений под знаком модуля, решается так же, как и уравнение, методом интервалов.

Примеры.

1) Решить неравенство $|x| < -x^2 + x + 6$.

Решение. Заменим неравенство совокупностью систем

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < -x^2 + x + 6 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 0 \\ -x < -x^2 + x + 6 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 6 < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 2x - 6 < 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x^2} < \sqrt{6} \end{cases}; \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x \in \left(1 - \sqrt{7}; 1 + \sqrt{7}\right) \end{cases}.$$

$$x \in \left[0; \sqrt{6}\right) \quad \text{или} \quad x \in \left(1 - \sqrt{7}; 0\right)$$

Объединив решения, получим сплошной промежуток.
Ответ: $x \in \left(1 - \sqrt{7}; \sqrt{6}\right]$

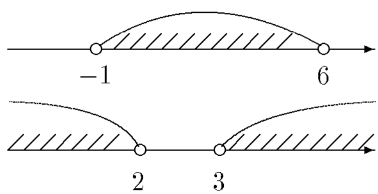
2) $\left|x^2 - 5x\right| < 6$

Решение. $\left|x^2 - 5x\right| < 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x < 6 \\ x^2 - 5x > -6 \end{cases}$, т.к. $6 > 0$

Решим систему

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0 \\ x^2 - 5x + 6 > 0 \end{cases}, \quad \begin{matrix} x_1 = -1, & x_2 = 6 \\ x_1 = 2, & x_2 = 3 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (-1, 6) \\ x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty) \end{cases}$$



Найдем пересечение решений.
Ответ: $x \in (-1; 2) \cup (3; 6)$

3) $\left|x^2 - 6x + 8\right| < 5x - x^2$.

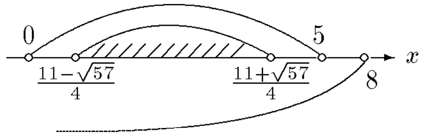
Это неравенство имеет решение только, если $5x - x^2 > 0$; т.к. $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, то $x \in (0; 5)$.

Для этих значений x неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 < 5x - x^2 \\ x^2 - 6x + 8 > -5x + x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 11x + 8 < 0 \\ x < 8 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{11 - \sqrt{57}}{4}, \qquad x_2 = \frac{11 + \sqrt{57}}{4} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \in \left(\frac{11-\sqrt{57}}{4}; \frac{11+\sqrt{57}}{4}\right); \\ x < 8 \end{cases}$$



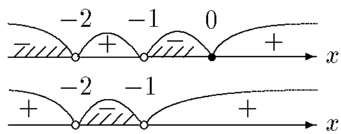
Ответ: $x \in \left(\frac{11-\sqrt{57}}{4}; \frac{11-\sqrt{57}}{4}\right)$

4) $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| \geq 1$

Решение. Неравенство равносильно совокупности неравенств, каждое из которых решим методом интервалов:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geq 1 \\ \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \leq -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} - 1 \geq 0 \\ \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} + 1 \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{-6x}{x^2+3x+2} \geq 0 \\ \frac{2x^2+4}{x^2+3x+2} \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{(x+1)(x+2)} \leq 0 \\ (x+1)(x+2) < 0 \end{array}\right.$$



(т.к. $2x^2+4>0$, $x \in \mathbf{R}$)

Объединим решения неравенств совокупности:

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0)$.

5) $\left|x^2 - 3x + 2\right| > 3x - x^2 - 2$

Решение. $\left|x^2 - 3x + 2\right| > -(x^2 - 3x + 2)$.

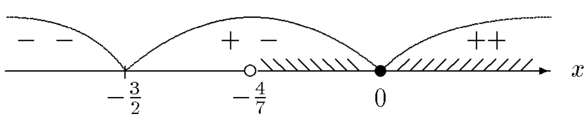
По определению модуля $|a| > -a$ тогда и только тогда, когда a положительное число, $a > 0$.

Значит, данное неравенство равносильно неравенству $x^2 - 3x + 2 > 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2 \Rightarrow x$ принадлежит промежуткам вне корней.

Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

6) $|2x+3| > |x| - 4x - 1$.

Нулями модулей являются числа $-\frac{3}{2}$ и 0, которые разбивают числовую ось на три промежутка.



Решим неравенство в каждом промежутке.

а) в $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$ $2x+3<0$, $x<0 \Rightarrow -(2x+3)>-x-4x-1$, $3x>2$, $x>\frac{2}{3}$. Эти решения не пересекаются с рассматриваемым промежутком; $x\in\emptyset$;

б) в $\left[-\frac{3}{2};0\right]$ $2x+3\geq 0$, $x\leq 0 \Rightarrow 2x+3>-x-4x-1$, $7x>-4$, $x>-\frac{4}{7}$

Пересечем луч $\left(-\frac{4}{7};+\infty\right)$ с отрезком $\left[-\frac{3}{2},0\right]$, получим $x\in\left(-\frac{4}{7},0\right]$.

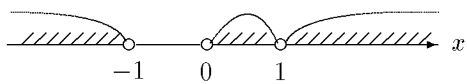
в) в $(0;+\infty)$ $2x+3>0$, $x>0 \Rightarrow 2x+3>x-4x-1$, $5x>-4 \Rightarrow x>-\frac{4}{5}$, $\left(-\frac{4}{5};+\infty\right)\cap(0,+\infty)=(0;+\infty)$, т.е. все $x>0$ удовлетворяют неравенству.

Объединим решения.

Ответ: $x\in\left(-\frac{4}{7};+\infty\right)$.

7) $\left|x^3-1\right|>1-x$.

Решим неравенство методом интервалов, учитывая, что $x=1$ не удовлетворяет неравенству.



а) в $(-\infty;1)$ $x^3-1<0 \Rightarrow -x^3+1>1-x$, $(1-x)(1+x+x^2)>1-x$, разделим неравенство на $1-x>0$: $1+x+x^2>1$, $x^2+x>0$, $x_1=-1$, $x_2=0 \Rightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$. Учитывая промежуток $(-\infty;1)$, имеем $x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$.

б) в $(1;+\infty)$ $x^3-1>0 \Rightarrow x^3-1>-(x-1)$, разделим неравенство на $x-1>0$: $x^2+x+1>-1$, $x^2+x+2>0 \Rightarrow x\in\mathbf{R}$, т.к. $D<0$. Учитывая промежуток, имеем $x\in(1;+\infty)$.

Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$.

8) Найдите целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 7875x^3=1701y^3 \\ |x|<5 \end{cases}$$

Решение. $7875=5^3\cdot 3^2\cdot 7$, $1701=3^5\cdot 7$.

Уравнение принимает вид: $5^3\cdot 3^2\cdot 7\cdot x^3=3^5\cdot 7\cdot y^3 \Rightarrow 5^3\cdot x^3=3^3\cdot y^3 \Rightarrow 5x=3y$. Так как НОД$(5,3)=1$, то x кратен 3, а y кратен 5. Учитывая, что $-5<x<5$, получаем для x только три значения $x_1=-3$, $x_2=0$, $x_3=3$, тогда $y_1=\frac{5\cdot(-3)}{3}=-5$, $y_2=0$, $y_3=\frac{5\cdot 3}{3}=5$.

Ответ: $(-3;-5)$, $(0;0)$, $(3;5)$.

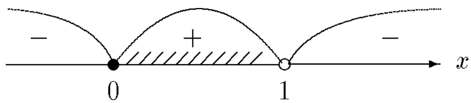
9) Решить неравенство

$$\frac{|x-2|-|x+2|}{x-1}\geq 0.$$

Решим это неравенство методом интервалов.
Найдем нули числителя

$$|x-2| = |x+2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2 = x+2 \\ x-2 = -x-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \emptyset \\ x = 0 \end{array}\right.$$

$x = 0$ (является решением).
Нулем знаменателя является $x = 1$



Ответ: $x \in [0;1)$.

Задания для самостоятельной работы.

1. $|x| < \frac{2}{x}$; 2. $\frac{|x-2|}{x-2} > 0$; 3. $\frac{|x+2|-x}{x} < 2$; 4. $|x^2+2|x|+17| < -1$; 5. $|x^2+2x| < x$; 6. $|x| + x^3 = 0$; 7. $3x^2 - |x-3| > 9x - 2$; 8. $\left|\frac{-5}{x+2}\right| < \left|\frac{10}{x-1}\right|$; 9. $3|x-1| > 7 - x^2$; 10. $|x-1-x^2| \le |x^2-3x+4|$; 11. $\sqrt{(x-7)^2} = 7 - x$; 12. $|x-6| \ge x^2 - 5x + 9$; 13. $|x| < \frac{a}{x}$ – решить при всех значениях a (графическим способом); 14. $\frac{|2x-1|}{x^2+x+2} \ge 3$; 15. $\frac{1}{x-1} + \frac{3}{|x|+1} \ge \frac{1}{|x|-1}$; 16. $\frac{x^2-5x+6}{|x|+7} \le 0$; 17. $(x+2)^2 + |x+2| = 2$; 18. $|x-3| + |x+2| - |x-4| = 3$; 19. $\frac{|x-5|-1}{2|x-6|-4} \le 1$; 20. $2x \ge |x+1|$; 21. $\frac{x^4-8x^2-20}{|x|} \le 0$; 22. $\begin{cases} x - y = 1 \\ |x| + y = 2 \end{cases}$; 23. $\begin{cases} |2x+y| = 2 \\ x - y = -1 \end{cases}$; 24. Сколько решений имеет уравнение $|x^2 - x - 2| = a$ в зависимости от a?

Ответы.

1. $x \in (0, \sqrt{2})$; 2. $x \in (2, +\infty)$; 3. $x \in (-\infty; 0) \cup (1, +\infty)$; 4. $\emptyset$; 5. $\emptyset$; 6. $x = 0$, $x = -1$; 7. $x \in \left(-\infty, \frac{4-\sqrt{19}}{3}\right) \cup \left(\frac{4+\sqrt{19}}{3}, +\infty\right)$; 8. $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty), x \ne 1$; 9. $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$; 10. $x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$; 11. $x \in (-\infty, 7]$; 12. $x \in [1, 3]$; 13. при $a = 0$ $x \in \emptyset$, при $a > 0$ $x \in (0, \sqrt{a})$, при $a < 0$ $x \in (-\sqrt{-a}, 0)$; 14. $\emptyset$; 15. $x \in (-\infty, -3] \cup (-1; 1) \cup (1, +\infty)$; 16. $x \in [2, 3]$; 17. $x = -3$, $x = -1$; 18. $x = -6$, $x = 2$; 19. $x \in (-\infty, 4) \cup (4, 8) \cup [10, +\infty)$; 20. $x \in [1, +\infty)$; 21. $x \in [-\sqrt{10}, 0) \cup (0, \sqrt{10}]$; 22. $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$; 23. $x_1 = -1$,

$y_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $y_2 = \frac{4}{3}$; 24. при $a < 0$ $x \in \emptyset$, при $a = 0$ и $a > \frac{9}{4}$ 2 решения, при $a = \frac{9}{4}$ 3 решения, при $0 < a < \frac{9}{4}$ 4 решения.

<u>Тема VII</u>. Тригонометрия.

Необходимым условием успешного решения тригонометрических задач является прочное знание 1) определений тригонометрических функций и их свойств, 2) тригонометрических формул, 3) решений простейших тригонометрических уравнений.

§1. Числовые выражения.

1. Определить знак выражения:
а) $\cos 5 \cdot \cos 7 \cdot \cos 8$; б) $\mathrm{tg}(-1) \cdot \mathrm{tg}3 \cdot \mathrm{tg}6 \cdot \mathrm{tg}(-3)$; в) $\frac{\sin(-8)+\cos 9}{\cos 11 \cdot \mathrm{tg}(-9)}$; г) $\frac{\sin 5}{\sin 6} \cdot \mathrm{tg}1$; д) $\frac{\cos 10 \sin 7}{\cos(-\sqrt{2}) \cdot \mathrm{ctg}(-4)}$.

2. Найти значение выражения:
а) $\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cos \frac{3}{4}\pi \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; б) $\frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)} + \frac{2}{\sin \frac{\pi}{4}}$; в) $\frac{\cos \frac{\pi}{6} - \mathrm{tg}\frac{\pi}{6}}{\sin(-\pi)+\cos \pi} \cdot \sin \frac{\pi}{6}$; г) $\sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right) \cdot \cos \frac{51\pi}{3} + \mathrm{tg}\left(-\frac{113\pi}{4}\right)$; д) $\left(\mathrm{tg}\left(13\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(15\pi - \frac{5}{6}\pi\right)\right) \cdot \mathrm{tg}\frac{2}{3}\pi$; е) $\sin \frac{13\pi}{2} \cdot \cos(113\pi) + \mathrm{tg}\frac{18\pi}{4} \cdot \cos\left(-\frac{15}{2}\pi\right)$; ж) $\cos \frac{1001\pi}{6}$; $\cos \frac{123\pi}{4}$; $\sin\left(-\frac{117\pi}{4}\right)$; $\mathrm{tg}\frac{1011\pi}{4}$; з) $\frac{\sin^2\left(4x-540^0\right)}{\cos^2(4x-540^0)}$, если $\sin 2x = 3^{-\frac{1}{2}}$; и) $\frac{5}{6+7\sin^2 \alpha}$, если $\mathrm{tg}\alpha = 0,2$; к) $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \pi\right)$, если $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$; л) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)$, если $\mathrm{tg}\alpha = a$; м) $\cos(\alpha + \beta)$, если $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}$ и $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$; н) $3\mathrm{tg}\alpha + \cos \alpha$, если $\cos \alpha = 0,6$ и $270^0 < \alpha < 360^0$; о) $\frac{3}{4}\mathrm{ctg}2\alpha + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$, если $\sin \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos \beta = -\frac{24}{25}$ и $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$, $\pi < \beta < \frac{3}{2}\pi$; п) $\frac{\sin \alpha+\sin 5\alpha}{\cos \alpha+\cos 5\alpha}$, если $\alpha = 10^0$; р) $\frac{\sin \alpha}{\sin^3 \alpha+\cos^3 \alpha}$, если $\mathrm{tg}\alpha = 2$; с) $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{3}\right)$; $\arcsin\left(\sin \frac{13}{6}\pi\right)$; $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}\right)$; $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}3\pi)$; $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}10)$; $\sin\left(\arcsin \frac{\pi}{3}\right)$; $\cos(\arccos(-1))$; $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \arccos \frac{1}{3}\right)$; $\sin\left(\arccos \frac{1}{4}\right)$.

3. Доказать справедливость равенств (неравенств):
$\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; $\mathrm{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$; $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$; $\cos \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$; $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-2}{4}$; $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+2}{4}$; $\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2}{5}\pi = \frac{1}{2}$; $\sin \frac{3}{10}\pi - \sin \frac{\pi}{10} = \frac{1}{2}$; $\cos 1 + \sin 1 > 1$; $\sin \frac{2+\sqrt{3}}{2} > \frac{\sin 2+\sin \sqrt{3}}{2}$; $\sqrt{\sin 7} + \sqrt{\cos 7} > 1$; $8 \cos 20^0 \cdot \cos 40^0 \cdot \cos 80^0 = 1$; $\sqrt{2 \sin \frac{\pi}{2} - 3\mathrm{tg}\frac{3\pi}{4}} > \sqrt[3]{11}$.

Рассмотрим решение некоторых примеров.

1. Вычислить $\arcsin\left(\sin\frac{13\pi}{6}\right)$.

Решение.

Так как $\frac{13\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, запись $\arcsin\left(\sin\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{13\pi}{6}$ неверна. Следует использовать периодичность функции синуса: $\sin\frac{13\pi}{6} = \sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$. Поэтому $\arcsin\left(\sin\frac{13\pi}{6}\right) = \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$ и поскольку $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, имеем $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Итак, $\arcsin\left(\sin\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$.

2. $\arcsin(\sin(-5)) = \arcsin(\sin(2\pi-5)) = 2\pi-5$; т.к. $2\pi-5 \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

3. $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}10) = \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}(10-3\pi)\right) = 10-3\pi$; так как $10-3\pi \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

4. $\arccos(\cos 9) = \arccos(\cos(9-2\pi)) = 9-2\pi$, т.к. $9-2\pi \approx 2,72$ и следовательно, $9-2\pi \in [0;\pi]$.

5. $\sin\left(\arccos\frac{1}{4}\right)$. Обозначим $\arccos\frac{1}{4} = \alpha$, тогда $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ и $\alpha \in \mathrm{I}$ четверти $\Rightarrow \sin\alpha = +\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$;

Итак, $\sin\left(\arccos\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

6. Определить знак выражения $\frac{\sin(-8)+\cos 9}{\cos 11\cdot\mathrm{tg}(-9)}$.

Решение.

$\frac{-\sin 8+\cos 9}{-\cos 11\cdot\mathrm{tg}9}$; выясним какой четверти принадлежат углы, равные 8, 9, 11 радианам:

$\frac{5\pi}{2} < 8 < 3\pi \Rightarrow 8 \in \mathrm{II}$ четверти $\Rightarrow \sin 8 > 0$;

$\frac{5\pi}{2} < 9 < 3\pi \Rightarrow 9 \in \mathrm{II}$ четверти $\Rightarrow \cos 9 < 0$, $\mathrm{tg}9 < 0$;

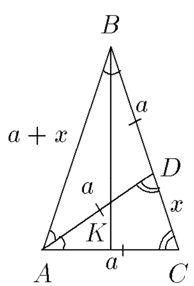
$3\pi < 11 < \frac{7\pi}{2} \Rightarrow 11 \in \mathrm{III}$ четверти $\Rightarrow \cos 11 < 0$;

Итак, числитель $-\sin 8+\cos 9 < 0$, знаменатель $-\cos 11\cdot\mathrm{tg}9 < 0$.

Ответ: знак "+".

7. Доказать, что $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Решение. I способ. Вычислим $\sin\frac{\pi}{10} = \sin 18^0$.



Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с углами $A = C = 72^0$, $B = 36^0$. Проведем биссектрису AD, получим два равнобедренных треугольника ABD и ADC. Обозначим $BD = AD = AC = a$, $DC = x$, $AB = x+a$.

По свойству биссектрисы $\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{a}{a+x} \Rightarrow x^2+ax-a^2 = 0$, положительный корень этого уравнения $x = a\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Из ΔKBC $\sin 18^0 = \frac{KC}{BC} = \frac{a/2}{a+x} = \frac{a}{2\left(a+a\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} = \frac{1}{2+\sqrt{5}-1} = \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

II способ. $\sin 18^0 = \cos 72^0 = 1 - 2\sin^2 36^0 = 1 - 8\sin^2 18^0 \cdot \left(1 - \sin^2 18^0\right)$. Обозначим $\sin 18^0 = a$. Тогда a является корнем уравнения $a = 1 - 8a^2\left(1 - a^2\right)$, $8a^4 - 8a^2 - a + 1 = 0$, $8a^2(a-1)(a+1) - (a-1) = 0$, $(a-1)(8a^3 + 8a^2 - 1) = 0$. Так как $\sin 18^0 \neq 1$, то решим уравнение $8a^3 + 8a^2 - 1 = 0$. Число $a = -\frac{1}{2}$ является корнем уравнения. Поделив $8a^3 + 8a^2 - 1$ на $\left(a + \frac{1}{2}\right)$ "уголком", получим $\left(a + \frac{1}{2}\right)\left(8a^2 + 4a - 2\right) = 0$.

Так как $\sin 18^0 \neq -\frac{1}{2}$, осталось найти корни уравнения $4a^2 + 2a - 1 = 0$, $\Rightarrow a_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} < 0$, $a_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Итак, $\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

8. Доказать неравенство $\sin\frac{2+\sqrt{3}}{2} > \frac{\sin 2 + \sin\sqrt{3}}{2}$.

Преобразуем правую часть: $\sin\frac{2+\sqrt{3}}{2} > \sin\frac{2+\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\frac{2-\sqrt{3}}{2}$. Разделим это неравенство на $\sin\frac{2+\sqrt{3}}{2} > 0$, получим истинное неравенство $1 > \cos\frac{2-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ данное неравенство верно.

§2. Тождественные преобразования.

1. Упростить выражения:
а) $\frac{1+\sin 2x}{(sin x+\cos x)^2}$; б) $\frac{1+\sin 4x - cos 4x}{1+\cos 4x + \sin 4x}$; в) $\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha$; г) $\frac{\sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha}$; д) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha} - \frac{\cos^4\alpha + \sin^4\alpha}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha}$; е) $4\cos^2\left(2\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos(2\alpha - \pi) + \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 6\alpha\right)$; ж) $1 + \cos\alpha + \sin\alpha$ (разложить на множители); з) $3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha$; и) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \sin^2(\alpha + \beta)$.

2. Доказать тождества:
а) $\frac{1-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \mathrm{tg}\alpha$; б) $\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = \frac{1-\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}\alpha}$; в) $\sin^2\left(\frac{7\pi}{8} - 2\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{9\pi}{8} - 2\alpha\right) = \frac{\sin 4\alpha}{\sqrt{2}}$; г) $\cos^2(\alpha - 2\beta) - \cos^2(\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \sin 4\beta$; д) $\frac{\sin(\alpha - \pi)\cdot\cos(\alpha - 4\pi)\cdot\sin(6\pi - \alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cdot\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = \cos\alpha$; е) $\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}} = \sin\alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$; ж) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin\gamma \cdot \sin(\alpha - \beta)$, если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$; з) $\frac{\mathrm{tg}2\alpha + \mathrm{ctg}3\beta}{\mathrm{ctg}2\alpha + \mathrm{tg}3\beta} = \frac{\mathrm{tg}2\alpha}{\mathrm{tg}2\beta}$.

§3. Решение тригонометрических уравнений.

1. Уравнения, сводящиеся к алгебраическому уравнению различными подстановками.

Рассмотрим примеры применения некоторых подстановок. Желательно, чтобы множество значений новой переменной указывалось сразу.

а) $3\sin^2 x - 10\sin x + 3 = 0$

Решение. Положим $\sin x = y$, $y \in [-1; 1]$. Получим квадратное уравнение $3y^2 - 10y + 3 = 0$; $y_1 = \frac{1}{3}$, $y_2 = 3$ (не подходит). Решением уравнения $\sin x = \frac{1}{3}$ является множество чисел $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

б) $2\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$.

Решение. Так как $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, то получим $5\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$. Положим $\cos x = y$, $y \in [-1, 1]$. $5y^2 - 4y - 3 = 0$; $y_1 = \frac{-2-\sqrt{19}}{5}$, $y_2 = \frac{-2+\sqrt{19}}{5}$, $y_1 < -1$ – не подходит. Решим уравнение $\cos x = \frac{\sqrt{19}-2}{5}$.

Ответ: $x = \pm \arccos \frac{\sqrt{19}-2}{5} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

в) $2\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 1\right) = \cos x$.

Решение. ОДЗ: $\cos \frac{x}{2} \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \underline{x \neq \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}}$.

Положим, $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = y$ (универсальная подстановка), тогда

$$\cos x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}.$$

Решим полученное алгебраическое уравнение.

$2(y-1) = \frac{1-y^2}{1+y^2}$; $2(y-1)(1+y^2) + (y^2-1) = 0$; $(y-1)(2+2y^2+y+1) = 0$, $(y-1)(2y^2+y+3) = 0$.

$y = 1$, так как дискриминант квадратного трехчлена отрицателен.

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = 1, \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x \in \text{ОДЗ}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

г) $2\sin 2x + 3\mathrm{tg} x - 5 = 0$.

Решение. ОДЗ: $\cos x \neq 0$, $\underline{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}}$.

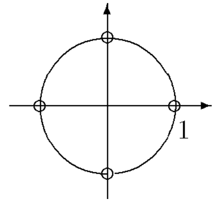
Так как $\sin 2x = \frac{2\mathrm{tg} x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$, то положим $\mathrm{tg} x = y$ (универсальная подстановка). Получим алгебраическое уравнение

$$\frac{4y}{1+y^2} + 3y - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y^3 - 5y^2 + 7y - 5 = 0;$$

$y_1 = 1$ находится подбором. Сгруппируем слагаемые следующим образом: $\left(3y^3 - 3y^2\right) - \left(2y^2 - 2y\right) + (5y - 5) = 0$, $(y-1)\left(3y^2 - 2y + 5\right) = 0 \Rightarrow y = 1$, $\mathrm{tg} x = 1$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ($x \in$ ОДЗ).

д) $7+4\sin x\cos x+1,5(\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x)=0$.
Решение. ОДЗ: $\sin x\neq 0$ и $\cos x\neq 0\Rightarrow x\neq\frac{\pi}{2}n$, $n\in\mathbf{Z}$.
Преобразуем уравнение:



$$7+2\cdot 2\sin x\cos x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=0,\quad 7+2\sin 2x+\frac{3}{\sin 2x}=0,$$

положим $\sin 2x=y$, $y\in[-1;1]$, $7+2y+\frac{3}{y}=0\quad\Rightarrow\quad 2y^2+7y+3=0$; $y_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49-24}}{4}$, $y_1=\frac{-7-5}{4}=-3<-1$; $y_2=\frac{-7+5}{4}=-\frac{1}{2}$; $\sin 2x=-\frac{1}{2}$; $2x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$; $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$.

Метод подстановки часто комбинируется с другими методами решения тригонометрических уравнений.

Задачи для самостоятельного решения

1) $6\cos^2 x+5\sin x-7=0$. 2) $\cos x-\cos 2x=1$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

3) $3\sin^2 2x+7\cos 2x-3=0$, найти решения на $\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$, ответ записать в градусах.

4) $2\cos 2x+2\mathrm{tg}^2x=5$.

5) $\cos^3 x+\cos^2 x-4\cos^2\frac{x}{2}=0$ (примените формулу понижения степени).

6) $2\sin^3 x-\cos 2x-\sin x=0$.

2. Однородные уравнения.

В общем виде уравнение, однородное k-го порядка, имеет вид:

$$a_0\cos^k x+a_1\cos^{k-1}x\sin x+a_2\cos^{k-2}x\sin^2 x+\cdots+a_k\sin^k x=0.$$

Если значения x, такие, что $\cos x=0$, не являются решениями уравнения (это будет,если $a_k\neq 0$), то его можно почленно разделить на $\cos^k x$ и сделать замену $\mathrm{tg}x=y$. В противном случае $\cos x$ является общим множителем левой части, его нужно вынести за скобку, получить решение $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$ и решить оставшееся однородное уравнение $(k-1)$-го порядка. Иногда уравнение не является по виду однородным, но его можно преобразовать к однородному, применив тождество $\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^n = 1$.

Рассмотрим решение нескольких уравнений.

а) $2\sin x + \cos x = 0$ – однородное уравнение I-го порядка.

Решение: Если $\cos x = 0$, то и $\sin x = 0$, что невозможно, значит, разделив уравнение на $\cos x$, мы не потеряем решения. Получим
$2\text{tg}x + 1 = 0, \quad \text{tg}x = -\frac{1}{2}, \quad \underline{x = -\text{arctg}\frac{1}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}}$

б) $\cos^2 x - 3\sin x\cos x = 0$– однородное уравнение II-го порядка, содержащее $\cos x$ общим множителем левой части.

Решение:

$$\cos x(\cos x - 3\sin x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x - 3\sin x = 0 \end{array}\right., \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z} \\ \text{tg}x = \frac{1}{3} \quad (\text{как в а)}) \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \text{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$, $n, k \in \mathbf{Z}$.

в) $6\cos^2 x - \cos x\sin x - \sin^2 x = 3$.

Решение. Сведем уравнение к однородному, положив $3 = 3\sin^2 x + 3\cos^2 x$: $3\cos^2 x - \cos x\sin x - 4\sin^2 x = 0$; $| : \cos^2 x \neq 0$ (объяснить!)
$4\text{tg}^2 x + \text{tg}x - 3 = 0 \Rightarrow \text{tg}x = -1$ или $\text{tg}x = \frac{3}{4}$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \text{arctg}\frac{3}{4} + \pi k$, $n, k \in \mathbf{Z}$.

г) $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x$.

Решение. Сведем уравнение к однородному III порядка, положив $\sin x = \sin x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$: $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin^3 x + \sin x \cdot \cos^2 x$,
$\cos^3 x - \sin x \cdot \cos^2 x = 0$, $\cos^2 x(\cos x - \sin x) = 0$,

$$\begin{array}{llll} \cos^2 x = 0 & \text{или} & \cos x - \sin x = 0, & | : \cos x \neq 0 \\ \cos x = 0 & \text{или} & 1 - \text{tg}x = 0 & \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n & \text{или} & x = \frac{\pi}{4} + \pi k & \end{array}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $n, k \in \mathbf{Z}$.

Задачи для самостоятельного решения.

7) $\sin^2 x + \cos^2 x = 2$. 8) $\sin^4 x + \cos^4 x = 0$.

9) $\cos^2 3x + \sin^2 3x = \sin 6x$. 10) $\cos 2x - 2\sin^2 x = -3$, решить на $[0; \pi]$.

11) $2\sin^3 x + 2\sin^2 x\cos x - \sin x\cos^2 x - \cos^3 x = 0$.

3. Решение уравнений разложением на множители.

Разложение на множители – наиболее частый прием сведения сложного уравнения к совокупности более простых уравнений. Рассмотрим этот способ на примерах.

а) $2\cos x \cdot \sin 2x = \sin x$.

Решение. $4\cos^2 x \cdot \sin x - \sin x = 0$, $\sin x\left(4\cos^2 x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ 4\cos^2 x - 1 = 0\end{array}\right.$ $\Rightarrow x_1 = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Для решения второго уравнения лучше применить формулу понижения степени, (в противном случае оно также распадается на два простейших уравнения, решения которых придется объединять).

$$4\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2},$$

$$2x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n; \quad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3};$$

$$2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $x = \pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, \quad n, k \in \mathbf{Z}$.

б) $1 + \cos x + \cos 2x = 0$.

Решение: $(1+\cos 2x) + \cos x = 0$, $2\cos^2 x + \cos x = 0$, $\cos x(2\cos x + 1) = 0$:

$$\begin{array}{lll}\cos x = 0 & \text{или} & 2\cos x + 1 = 0\\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n & \text{или} & \cos x = -\frac{1}{2}, \quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\end{array}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbf{Z}$.

в) $1 + \cos 4x - 2\cos^2\left(x - 270^0\right) = 0, \quad x \in \left(0^0; 100^0\right)$.

$\cos\left(x - 270^0\right) = \cos\left(270^0 - x\right) = -\sin x$; $1 + \cos 4x - 2\sin^2 x = 0$; $\cos 4x + \left(1 - 2\sin^2 x\right) = 0$;
$\cos 4x + \cos 2x = 0$, $2\cos\frac{4x+2x}{2} \cdot \cos\frac{4x-2x}{2} = 0$;

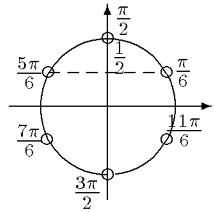
$$2\cos 3x \cdot \cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos 3x = 0 & 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n\\ \cos x = 0 & x = \frac{\pi}{2} + \pi k\end{array}\right.$$

Итак, $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $n, k \in \mathbf{Z}$. При $n = 0$, 1 и при $k = 0$ решения уравнения попадают в $\left(0^0; 100^0\right)$.

Ответ: 30^0, 90^0.

г) $\frac{\cos x - \sin 3x}{\cos 3x} = 1$

ОДЗ: $\cos 3x \neq 0 \Rightarrow 3x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$. Выколем недопустимые точки на единичной окружности. В ОДЗ уравнение равносильно



$\cos x - \sin 3x = \cos 3x$;
$(\cos x - \cos 3x) - \sin 3x = 0$;
$2\sin 2x \cdot \sin x - \sin 3x = 0$.
Воспользуемся формулами $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$, $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, получим:

$4\sin^2 x \cos x - 3\sin x + 4\sin^3 x = 0$, $\sin x\left(4\sin x\cos x - 3 + 4\sin^2 x\right) = 0$, $\sin x = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = \pi n}$, $n \in \mathbf{Z}$, $x \in$ ОДЗ.

Второе уравнение сведем к однородному:

$$4\sin x\cos x - 3\sin^2 x - 3\cos^2 x + 4\sin^2 x = 0.$$

$\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$, $| : \cos^2 x \neq 0$.
$\mathrm{tg}^2 x + 4\mathrm{tg} x - 3 = 0$, $\mathrm{tg} x = -2 \pm \sqrt{4+3} = -2 \pm \sqrt{7}$, $x \in$ ОДЗ.
Ответ: $x = \pi n$, $x = \mathrm{arctg}\left(-2 \pm \sqrt{7}\right) + \pi k$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

д) Изменим слегка условие предыдущего примера.

$$\frac{\cos x - \sin 2x}{\cos 3x} = 1$$

ОДЗ та же самая.
$\cos x - \sin 2x - \cos 3x = 0$, $2\sin 2x \cdot \sin x - \sin 2x = 0$, $\sin 2x(2\sin x - 1) = 0$,

$\sin 2x = 0$	или	$2\sin x - 1 = 0$
$2x = \pi n$	или	$\sin x = \frac{1}{2}$
$x = \frac{\pi n}{2}$	или	$x \notin$ ОДЗ (см. рис.)

при n – нечетных $x = \frac{\pi n}{2} \notin$ ОДЗ, $\Rightarrow n = 2k$ и $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

При решении этого уравнения без нахождения ОДЗ в ответе было бы много посторонних корней, что является грубейшей ошибкой. Проверка корней возможна, но часто затруднительна.

Ответ: $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Задачи для самостоятельного решения.

12) $\cos\left(180^0 - 2x\right) = \sqrt{2}\left(\sin\left(270^0 - x\right) + \sin x\right)$.

13) $\sqrt{2}\cos^2 7x - \cos 7x = 0$. 14) $2\sin x + \mathrm{tg} x = 0$.

15) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 0$. 16) $\sqrt{3}\sin x - \mathrm{tg}x + \mathrm{tg}x \cdot \sin x - \sqrt{3} = 0$.

17) $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x$. 18) $4\cos^2 x - 4\sin^2 x - \cos^2(\pi + x) = 1$.

19) $(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x$.

4. Решение уравнений преобразованием сумм в произведение.

При использовании этого приема важно правильно сгруппировать слагаемые, для этого нужно пробовать разные варианты.

а) $\cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$.

Решение: $(\cos 3x + \cos 7x) + \cos 5x = (\sin 3x + \sin 7x) + \sin 5x$,
$2\cos 5x \cdot \cos 2x + \cos 5x = 2\sin 5x \cdot \cos 2x + \sin 5x$;
$\cos 5x \cdot (2\cos 2x + 1) = \sin 5x(2\cos 2x + 1)$;
$(2\cos 2x + 1) \cdot (\cos 5x - \sin 5x) = 0$;

$$\begin{array}{lcl} 2\cos 2x + 1 = 0 & \text{или} & \cos 5x - \sin 5x = 0 \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} & \text{или} & \mathrm{tg}5x = 1, \\ 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n & \text{или} & 5x = \frac{\pi}{4} + \pi k \end{array}$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}$, $n, k \in \mathbf{Z}$.

б) $\sin 2x - \sin^2 7x = \cos^2 7x + \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Решение:
$\sin 2x - \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin^2 7x + \cos^2 7x$, $\sin 2x - \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$. Применим формулу приведения, превратив sin в cos, например, $\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$,

$$-2\sin\frac{\frac{\pi}{2} - 2x + 2x - \frac{\pi}{6}}{2} \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{2} - 2x - 2x + \frac{\pi}{6}}{2} = 1,$$

$-2\sin\frac{\pi}{6} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 1$; $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -1$; $\frac{\pi}{3} - 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $-2x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; $x = \frac{5\pi}{12} + \pi n$.

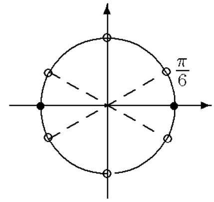
Ответ: $x = \frac{5\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

в) $\mathrm{tg}3x - \mathrm{tg}x = 0$.

Решение. ОДЗ:

$$\begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad n, k\mathbf{Z} \end{cases}$$

Выколем недопустимые значения x на единичной окружности. Применим формулу $\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta$:



$$\frac{\sin(3x - x)}{\cos 3x \cdot \cos x} = 0, \qquad \frac{\sin 2x}{\cos 3x \cdot \cos x} = 0$$

В ОДЗ это уравнение равносильно уравнению $\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi n$, $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. Но при нечетных n значения x попадают в выколотые точки, следовательно, $n = 2k$ и $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Решите самостоятельно.

20) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$; 21) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 5x = \cos 9x$;

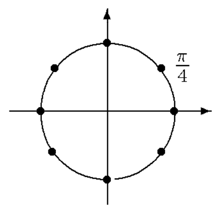
22) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) + \sin x = 2\cos 3x$.

5. Решение уравнений преобразованием произведения в сумму.

Формулы преобразования произведения в сумму абитуриенты запоминают с трудом, применяют с ошибками, на них (как и на формулы понижения степени) нужно обратить особое внимание, тем более, что они часто применяются в высшей математике.

а) $\sin 5x \cdot \cos 3x = \sin x \cdot \cos 7x$.

Решение: $\frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x) = \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin(-6x))$; $\sin 8x + \sin 2x = \sin 8x - \sin 6x$; $\sin 2x + \sin 6x = 0$; $2\sin 4x \cdot \cos 2x = 0$; $4\sin 2x \cdot \cos^2 2x = 0 \Rightarrow$



$$\begin{array}{lcl} \sin 2x = 0 & \text{или} & \cos 2x = 0 \\ 2x = \pi n & \text{или} & 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{array}$$

$x_1 = \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $n, k \in \mathbf{Z}$.

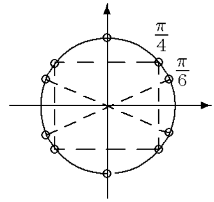
Эти две серии решений можно объединить в одну: $x = \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$ (см. рис.).

Ответ: $x = \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$.

б) $\mathrm{tg}3x - \mathrm{tg}x = \mathrm{tg}2x$.

Решение. ОДЗ:

$$\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \cos 2x\neq 0\\ \cos 3x\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq \frac{\pi}{2}+\pi n\\ x\neq \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\\ x\neq \frac{\pi}{6}+\frac{\pi m}{3}\end{cases}\quad k,n,m\in\mathbf{Z}$$



$$\frac{\sin 2x}{\cos 3x\cdot\cos x}-\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=0,$$

$\sin 2x(\cos 2x-\cos 3x\cdot\cos x)=0.$

1) $\sin 2x=0\Rightarrow x=\frac{\pi n}{2}$, в ОДЗ входят только значения x при четных $n=2k$, $\underline{x=\pi k,\ k\in\mathbf{Z}}$.

2) $\cos 2x-\cos 3x\cdot\cos x=0$, $\cos 2x-\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 2x)=0$; $\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x=0$; $\cos 2x-\cos 4x=0$; $2\sin 3x\cdot\sin x=0\Rightarrow$

$\sin 3x=0$	или	$\sin x=0$
$x=\frac{\pi n}{3}$	или	$x=\pi n$ – уже найдены

Значения $x=\pi n$ являются частью множества значений $x=\frac{\pi n}{3}$ (при n, кратных 3), которые входят в ОДЗ.

Ответ: $x=\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$.

Решите самостоятельно.

23) $\sin(2\pi-4x)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}-8x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}-10x\right)$.

24) $\cos 2x\cdot\cos x=\cos 7x\cdot\cos 6x+5\cos\frac{\pi}{2}$.

25) $1+2\cos 3x\cdot\cos x-\cos 2x=0$.

26) $\cos 3x\cdot\mathrm{tg}5x=\sin 7x$. 27) $\sin x\cdot\sin 3x=\frac{1}{2}$.

6. Применение формул понижения степени.

а) $2\cos^2 3x=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}10x+\cos 6x$.

Решение. ОДЗ: $\cos 10x\neq 0\Rightarrow x\neq\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{10}$, $k\in\mathbf{Z}$.

$2\cdot\frac{1+\cos 6x}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}10x+\cos 6x$; $1=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}10x$; $\mathrm{tg}10x=\sqrt{3}\Rightarrow$ $10x=\frac{\pi}{3}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{30}+\frac{\pi n}{10}$, $n\in\mathbf{Z}$ ($x\in$ ОДЗ).

Ответ: $x=\frac{\pi}{30}+\frac{\pi n}{10}$, $n\in\mathbf{Z}$

б) $\sin x+2\sin^2 x+\sin 5x=1$

$\sin x + (1 - \cos 2x) + \sin 5x = 1. \quad (\sin x + \sin 5x) - \cos 2x = 0$
$2 \sin 3x \cos 2x - \cos 2x = 0, \quad \cos 2x(2 \sin 3x - 1) = 0,$

$$\begin{array}{lcl} \cos 2x = 0 & \text{или} & \sin 3x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} & \text{или} & x = (-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3} \end{array}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$, $n, k \in \mathbf{Z}$.

в) $\sin^2 5x + \sin^2 8x + \sin^2 11x = \frac{3}{2}$.

Решение. $\frac{1-\cos 10x}{2} + \frac{1-\cos 16x}{2} + \frac{1-\cos 22x}{2} = \frac{3}{2}$; $\underline{\cos 10x} + \cos 16x + \underline{\cos 22x} = 0$, $2 \cos 16x \cdot \cos 6x + \cos 16x = 0, \quad \cos 16x(2 \cos 6x + 1) = 0$

$$\begin{array}{lcl} \cos 16x = 0 & \text{или} & \cos 6x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{\pi}{32} + \frac{\pi n}{16} & \text{или} & x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3} \end{array}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{32} + \frac{\pi n}{16}$, $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}$, $n, k \in \mathbf{Z}$.

Решите самостоятельно.

28) $\cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.

29) $(1 + \cos 2x) \cdot \sin x = \cos^2 x$.

30) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$.

7. Решение уравнений вида $a \cos x + b \sin x = c$, $a^2 + b^2 \neq 0$, $c \neq 0$.

I способ – введение вспомогательного угла.

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Обозначим $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = a_1$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = b_1$ и т.к. $a_1^2 + b_1^2 = 1$, то существует такой угол φ, что $a_1 = \cos\varphi$, $b_1 = \sin\varphi$ (или наоборот).

Тогда уравнение принимает вид:

$$\cos\varphi \cdot \cos x + \sin\varphi \cdot \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{или} \quad \cos(x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Если $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq 1$, то уравнение имеет решение, а вспомогательный угол φ находится из условия $\mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{a}$ и знаков $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

а) $3\sin x - \cos x = 2$; $a = -1$, $b = 3$, $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10}$;
$\frac{3}{\sqrt{10}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{10}} \cos x = \frac{2}{\sqrt{10}}$. Пусть $\frac{3}{\sqrt{10}} = \sin\varphi$, $\frac{1}{\sqrt{10}} = \cos\varphi$, тогда $\sin\varphi \cdot \sin x - \cos\varphi \cdot \cos x = \frac{2}{\sqrt{10}}$, $-\cos(x+\varphi) = \frac{2}{\sqrt{10}}$; $\cos(x+\varphi) = -\frac{2}{\sqrt{10}}$; $x + \varphi = \pm\left(\pi - \arccos\frac{2}{\sqrt{10}}\right) + 2k\pi$, $x = -\varphi \pm \left(\pi - \arccos\frac{2}{\sqrt{10}}\right) + 2k\pi$, где $\varphi = \mathrm{arctg} 3$.

II способ. Уравнение можно сделать однородным II порядка относительно функций $\sin\frac{x}{2}$ и $\cos\frac{x}{2}$ следующим образом:

$$a\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) + b \cdot 2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} = c \cdot \left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right)$$

и далее решать известным способом. К тому же результату придем, применив универсальную подстановку $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = y$, но при этом могут быть потеряны те корни, при которых $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ не существует, т.е. точки $x = \pi + 2k\pi$, их нужно проверять отдельно.

Решим то же уравнение $3\sin x - \cos x = 2$.

Решение. Так как $x = \pi + 2k\pi$ не удовлетворяет уравнению $(0 + 1 \neq 2)$, то можно применить универсальную подстановку, не потеряв при этом решений.

Положим $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = y$, $\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$, $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$, получим

$$\frac{6y}{1+y^2} - \frac{1-y^2}{1+y^2} = 2 \Rightarrow 6y - 1 + y^2 = 2 + 2y^2, \quad y^2 - 6y + 3 = 0.$$

$$y_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-3} = 3 \pm \sqrt{6};$$

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = 3 \pm \sqrt{6} \Rightarrow x = 2\mathrm{arctg}\left(3 \pm \sqrt{6}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $x = 2\mathrm{arctg}\left(3 \pm \sqrt{6}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$.

Как видим, ответы по форме различны, выбор метода решения определяет форму ответа.

Метод введения вспомогательного угла удобен, когда угол легко находится:

б) $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$.

Решение. $\cos 3x + \sqrt{3}\sin 3x = \sqrt{3}\cos x + \sin x$. Разделим уравнение на $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$: $\frac{1}{2}\cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$.

$\cos\frac{\pi}{3}\cos 3x + \sin\frac{\pi}{3}\sin 3x = \cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x$;

$\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, $\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$,

$$-2\sin\frac{3x-\frac{\pi}{3}+x-\frac{\pi}{6}}{2}\cdot\sin\frac{3x-\frac{\pi}{3}-x+\frac{\pi}{6}}{2}=0;$$

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=0$;

$$\begin{array}{lcl} \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0 & \text{или} & \sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=0 \\ 2x-\frac{\pi}{4}=\pi n & \text{или} & x-\frac{\pi}{12}=\pi k \\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2} & \text{или} & x=\frac{\pi}{12}+\pi k \end{array}$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\frac{\pi}{12}+\pi k\ n,k\in\mathbf{Z}$.

8. Решение уравнений с использованием свойств ограниченности функций $\sin x$ и $\cos x$.

а) $2\sin x+\cos 3x=5$.

Уравнение не имеет решений, так как наибольшие значения $\sin x$ и $\cos x$ равны 1.

$x\in\emptyset$.

б) $\sin x+\cos x=2$.

Уравнение равносильно системе $\begin{cases}\sin x=1\\ \cos x=1\end{cases}$, которая не имеет решений, т.к. $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

$x\in\emptyset$.

в) $\sin x\cdot\sin 3x=1$.

Решение. $\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)=1\Rightarrow\cos 2x-\cos 4x=2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 2x=1\\ \cos 4x=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi\\ 4x=\pi+2\pi n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\end{cases}$$

Нет ни одного значения x, общего для обеих серий решений $\Rightarrow x\in\emptyset$.

г) $\sin x+2\cos 2x=-3$.

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\sin x=-1\\ \cos 2x=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ 2x=\pi+2\pi n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n\end{cases}$$

Общим является значение $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

9. Решение иррациональных тригонометрических уранений.

Такие уравнения решаются обычными методами решения иррациональных уравнений (см. тему VIII).

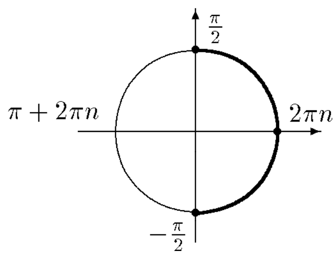
а) $\sqrt{1-\sin x} = \cos x$.

Решение.

$$\sqrt{1-\sin x} = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq 0 \\ 1-\sin x = \cos^2 x \end{cases}$$

Решения неравенства $\cos x \geq 0$ покажем на единичном круге и выберем те решения уравнения $1 - \sin x = \cos^2 x$, которые попали в отмеченный промежуток (с учетом периода 2π всех функций, входящих в уравнение)

$1-\sin x = 1-\sin^2 x$, $\sin^2 x - \sin x = 0$, $\sin x(\sin x - 1) = 0$, $\sin x = 0$ или $\sin x = 1$,



$\sin x = 0$ при $x = \pi n$, но только точки $x = 2\pi n$ удовлетворяют условию $\cos x \geq 0$

$\sin x = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, – удовлетворяют условию.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = 2\pi n$, $n, k \in \mathbf{Z}$.

б) $\sqrt{13 - 18\mathrm{tg}x} = 6\mathrm{tg}x - 3$.

Решение. Уравнение равносильно системе

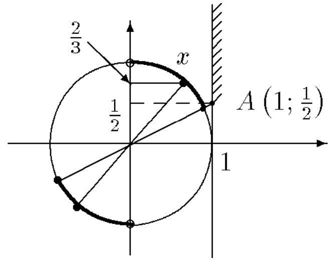
$$\begin{cases} 6\mathrm{tg}x - 3 \geq 0 \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \\ 13 - 18\mathrm{tg}x = (6\mathrm{tg}x - 3)^2 \end{cases}$$

Решение неравенства $\mathrm{tg}x \geq \frac{1}{2}$ покажем на единичной окружности с помощью линии тангенсов.

Решим уравнение в отмеченных промежутках

$$13 - 18\mathrm{tg}x = 36\mathrm{tg}^2 x - 36\mathrm{tg}x + 9,$$

$$36\mathrm{tg}^2 x - 18\mathrm{tg}x - 4 = 0, \quad 18\mathrm{tg}^2 x - 9\mathrm{tg}x - 2 = 0$$



$$(\text{tg}x)_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81+144}}{36} = \frac{9 \pm 15}{36};$$

$\text{tg}x = -\frac{1}{6}$ или $\text{tg}x = \frac{2}{3}$. Только $\frac{2}{3}$ удовлетворяют условию $\text{tg}x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$ $x = \text{arctg}\frac{2}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \text{arctg}\frac{2}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

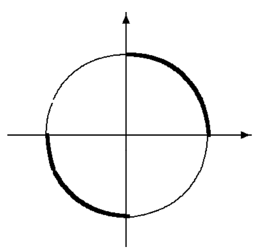
в) $\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x - \sin x - 1}$.

Решение. Уравнение рвносильно системе

$$\begin{cases} \sin 2x \geq 0 \\ \sin 2x = \cos x - \sin x - 1 \end{cases}$$

Решим неравенство $\sin 2x \geq 0$,
$2\pi n \leq 2x \leq \pi + 2\pi n$, $\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
Иначе говоря, решаем уравнение
$\sin 2x = \cos x - \sin x - 1$ в I и III четвертях.
Это уравнение решается подстановкой

$$\cos x - \sin x = y$$



Т.к.$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$, то $y \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$. $y^2 = \cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x$, $y^2 = 1 - \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = 1 - y^2$, подставим эти выражения в уравнение:

$1 - y^2 = y - 1$, $y^2 + y - 2 = 0$; $y_1 = 1$, $y_2 = -2$, $y_2 \notin \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$. $\cos x - \sin x = 1$, $\sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = 1$; $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{\pi}{4} + x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$. $x_1 = +\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = 2k\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Оба решения попадают в отмеченные проежутки.

Ответ: $x = 2k\pi$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Решить самостоятельно.

31) $\sqrt{2 - 3\cos 2x} = \sqrt{\sin x}$. 32) $\sqrt{7\sin x - \cos 2x} = -2\cos x$.

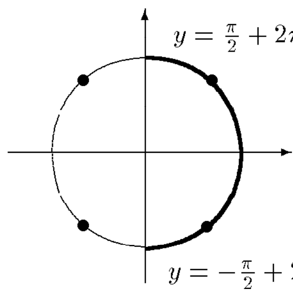
33) $\sqrt{4\cos x + 3\sin 2x} = 1 + 2\cos x$.

10. Решение систем тригонометрических уравнений.

В качестве примера решим систему

$$\begin{cases} \cos x \cdot \sqrt{\cos y} = 0 \\ \cos 2x - 2\cos^2 y + 2 = 0 \end{cases}; \quad \text{ОДЗ:} \qquad \cos y \geq 0,$$

$$\underline{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq y \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k.}$$



Система равносильна совокупности двух систем:

а) $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 2x - 2\cos^2 y + 2 = 0 \end{cases}$

или

б) $\begin{cases} \cos y = 0 \\ \cos 2x - 2\cos^2 y + 2 = 0 \end{cases}$

Решим систему а):

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z} \\ \cos(\pi + 2\pi n) - 2\cos^2 y + 2 = 0 \Rightarrow 1 - 2\cos^2 y = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$1 - (1 + \cos 2y) = 0 \Rightarrow \cos 2y = 0$, $y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. С учетом ОДЗ остаются значения $y = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Итак, $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k, n \in \mathbf{Z}\right)$ – решение системы а).

Решим систему б) $\begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbf{Z} \\ \cos 2x + 2 = 0 - \text{нет решений} \end{cases}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $y = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbf{Z}$.

Предлагаем для самостоятельного решения уравнения различных типов:

34) $|\sin x| = \sin x + 2\cos x$; 35) $2\cos 2x - 4\cos x = 1$;

36) $\cos 9x - 2\cos 6x = 2$; 37) $\sin^3 x = \sin x - \frac{1}{4}\cos x$;

38) $\sin 3x \cdot \cos x = \sin 2x$; 39) $\frac{\sin x + \sin 2x}{\sin 3x} = -1$;

40) $\sin 5x + \cos 3x - \sin x = 0$; 41) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 2x$;

42) $(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x$, если $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$;

43) $(\cos 2x - 1) \cdot \mathrm{ctg}^2 x = -3\sin x$, если $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$;

44) $\cos\left(60^0 + x\right) - \sin\left(60^0 - x\right) = 0$, если $x \in \left(0^0; 180^0\right)$;

45) $\mathrm{tg} x + \mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -2$; 46) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$;

47) $\sin^2 x - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{4} - \cos 2x$; 48) $\frac{\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right)^2}{2\sin 2x - \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

49) $2(\cos 6x + \sin 2x \cdot \cos 4x) = \sin 6x + \sin 2x$; 50) $5\cos x + 2\sin x = 3$;

51) Найти $\sqrt{3} \cdot \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, если $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ и является решением уравнения $\sin 2x - \sqrt{3}\cos x + 6\sin x = 3\sqrt{3}$;

52) $\frac{1 - \cos x}{\cos\frac{\pi + x}{2}} = 2$; 53) $\frac{\sin 2x}{\sin 3x} = 1$; 54) $\left(1 - 2\sin\frac{\pi x}{3}\right) \cdot \sqrt{36 - x^2} = 0$;

55) $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\mathrm{tg}^2 x} - \frac{1}{\mathrm{ctg}^2 x} = -2$.

Ответы.

§1. 1. а) $-$; б) $-$; в) $+$; г) $+$; д) $-$; 2. а) $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$; б) $\sqrt{2}$; в) $\frac{-\sqrt{3}}{12}$; г) $-\frac{1}{2}$; д) $-\frac{9}{2}$; е) не существует; ж) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, -1; з) 8; и) $\frac{130}{163}$; к) $-\frac{5}{\sqrt{26}}$; л) $\frac{1-2a-a^2}{1+2a-a^2}$; м) 1; н) $-3, 4$; о) -6; п) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; р) $\frac{10}{9}$; с) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, 0, $10 - 3\pi$, не существует, -1, $-\frac{1}{3}$, $\frac{\sqrt{15}}{4}$.

§2. 1. а) 1; б) $\mathrm{tg} 2x$; в) $\sin^2\alpha$; г) $\mathrm{tg} 5\alpha$; д) 0; е) $32\sin^4\alpha \cdot \cos^2\alpha$; ж) $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$; з) $8\sin^4\alpha$; и) $2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos(\alpha + \beta)$.

§3. 1. $(-1)^n \arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $n,k\in\mathbf{Z}$; 2. $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$; 3. 135^0; 4. $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 5. $\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 6. $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n,k\in\mathbf{Z}$; 7. $\emptyset$; 8. $\emptyset$; 9. $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$; 10. $\frac{\pi}{2}$; 11. $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+k\pi$, $n,k\in\mathbf{Z}$; 12. $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 13. $\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}$, $\pm\frac{\pi}{28}+\frac{2k\pi}{7}$, $n,k\in\mathbf{Z}$; 14. πn, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $n,k\in\mathbf{Z}$; 15. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $n,k\in\mathbf{Z}$; 16. $-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 17. $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $2\pi k$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi m$, $n,k,m\in\mathbf{Z}$; 18. $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{7}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 19. $\pi+2\pi n$, $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $n,k\in\mathbf{Z}$; 20. $\frac{\pi k}{2}$, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n,k\in\mathbf{Z}$; 21. $\frac{\pi k}{2}$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{21}+\frac{\pi n}{7}$, $n,k\in\mathbf{Z}$; 22. $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $n,k\in\mathbf{Z}$; 23. $\frac{\pi k}{6}$, $k\in\mathbf{Z}$; 24. $\frac{\pi n}{8}$, $\frac{\pi k}{5}$, $n,k\in\mathbf{Z}$; 25. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 26. πn, $\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{10}$, $n,k\in\mathbf{Z}$; 27. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $n,k\in\mathbf{Z}$; 28. $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $n\in\mathbf{Z}$; 29. $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n,k\in\mathbf{Z}$; 30. $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n,k\in\mathbf{Z}$; 31. $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 32. $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 33. $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $\mathrm{arctg}5+\pi n$, $k,n\in\mathbf{Z}$; 34. $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $n,k\in\mathbf{Z}$; 35. $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 36. $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$, $n,k\in\mathbf{Z}$; 37. $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $k,n\in\mathbf{Z}$; 38. πk, $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n,k\in\mathbf{Z}$; 39. $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 40. $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $n,k\in\mathbf{Z}$; 41. πk, $k\in\mathbf{Z}$; 42. $\frac{5\pi}{6}$; 43. $\frac{5\pi}{6}$; 44. 135^0; 45. $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 46. $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 47. $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 48. $-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 49. $-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$, $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$, $k,n\in\mathbf{Z}$; 50. $2\mathrm{arctg}\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 51. 3; 52. $-\pi+4\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; 53. $\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}$, $n\neq 5k+2$, $n,k\in\mathbf{Z}$; 54. ± 6, $-\frac{11}{2}$, $-\frac{7}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$; 55. $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Тема VIII. Иррациональные уравнения и неравенства.

Будем рассматривать уравнения и неравенства, содержащие неизвестную величину под знаком корня.

Корни нечетной степени определены при любом значении подкоренного выражения и знак корня совпадает со знаком подкоренного выражения. Корни четной степени определены лишь для неотрицательных значений подкоренного выражения и являются арифметическими, т.е. при $f(x)\geq 0$ корень $\sqrt[2n]{f(x)}$ существует и $\sqrt[2n]{f(x)}\geq 0$. Нужно помнить, что при возведении уравнения в четную степень возможно появление лишних корней, поэтому нужно или делать проверку полученных корней, или сначала найти ОДЗ уравнения и следить, чтобы каждый переход в решении приводил к равносильному уравнению или неравенству.

Рассмотрим на примерах методы решений уравнений, неравенств и их систем.

1) $\sqrt{x^2-x-1}+\frac{12}{\sqrt{x^2-x-1}}=13.$

Решение. Сделаем замену $\sqrt{x^2 - x - 1} = y$, $y > 0$.

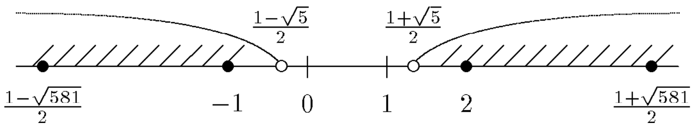
Получим уравнение $y + \frac{12}{y} = 13$, $y^2 - 13y + 12 = 0$; $y = 1$, $y = 12$ (удовлетворяют условию $y > 0$). Решим два уравнения

$$\sqrt{x^2 - x - 1} = 1 \qquad \text{и} \qquad \sqrt{x^2 - x - 1} = 12.$$

Из них следуют (неравносильный переход!) уравнения

$$\begin{array}{ll} x^2 - x - 1 = 1; & x^2 - x - 1 = 144; \\ x^2 - x - 2 = 0; & x^2 - x - 145 = 0; \\ x_1 = -1,\ x_2 = 2 & x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{581}}{2} \end{array}$$

Теперь необходимо сделать проверку, что затруднительно для x_3 и x_4, или, зная, что возведение в квадрат приводит к равносильному уравнению при условии $x^2 - x - 1 > 0$, проверить, входят ли полученные корни во множество решений этого неравенства (ОДЗ уравнения). Решениями неравенства являются $x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$:



Видно, что все корни удовлетворяют данному уравнению.

Ответ: -1; 2; $\frac{1 \pm \sqrt{581}}{2}$.

2) $\sqrt{3x + 4} \cdot \left(9x^2 + 21x + 10\right) = 0$.

ОДЗ: $3x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

В ОДЗ уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} 3x + 4 = 0 \\ 9x^2 + 24x + 10 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{4}{3} \\ x = -\frac{5}{3}, \quad x = -\frac{2}{3} \end{array}\right. ;$$

т.к. $-\frac{5}{3} < -\frac{4}{3}$, то уравнению удовлетворяют корни $x = -\frac{4}{3}$; $x = -\frac{2}{3}$.

Ответ: $x = -\frac{4}{3}$; $x = -\frac{2}{3}$.

3) Уравнение вида

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x), \ (n \in \mathbf{N}) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = (g(x))^{2n} \end{cases}$$

Условие $f(x) \geq 0$ следует из второго уравнения системы, следовательно является лишним. Аналогично уравнение $\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{g(x)}$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \text{или} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases},$$

выбирается то неравенство, которое легче решить.

Пример. $22 - 3x + \sqrt{x^2 - 3x + 7} = (x-3)^2$.

Решение: $x^2 - 3x + 7 > 0$ для любого x $(D < 0) \Rightarrow$ ОДЗ: $x \in \mathbf{R}$. $\sqrt{x^2 - 3x + 7} = x^2 - 3x - 13$.

Если возвести это уравнение в квадрат (при условии $x^2 - 3x - 13 > 0$), то получится уравнение четвертой степени. Чтобы избежать этого, сделаем замену $x^2 - 3x + 7 = y$, $y > 0$, тогда $x^2 - 3x - 13 = (x^2 - 3x + 7) - 20 = y - 20$. Имеем

$$\sqrt{y} = y - 20 \Leftrightarrow \begin{cases} y > 20 \\ y = (y-20)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 20 \\ y_1 = 16, \ y_2 = 25 \Rightarrow y = 25 \end{cases}:$$

Остается решить уравнение $x^2 - 3x + 7 = 25$; $x^2 - 3x - 18 = 0$, $x_1 = -3$, $x_2 = 6$.

Ответ: -3; 6.

Замечание: можно было бы сделать подстановку $\sqrt{x^2 - 3x + 7} = y$, $y > 0$, откуда $x^2 - 3x + 7 = y^2$, $x^2 - 3x = y^2 - 7$. В результате получим квадратное уравнение $y = y^2 - 7 - 13$; $y^2 - y - 20 = 0$, $y_1 = -4$ (не подходит), $y_2 = 5$. Осталось решить уравнение $\sqrt{x^2 - 3x + 7} = 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 7 = 25$; $x_1 = -3$, $x_2 = 6$.

4) $\sqrt{x-9} + \sqrt{x} = \frac{36}{\sqrt{x-9}}$.

Решение: ОДЗ: $x > 9$.

Умножим обе части уравнения на $\sqrt{x-9}$:

$$x - 9 + \sqrt{x(x-9)} = 36, \qquad \sqrt{x(x-9)} = 45 - x;$$

$$\begin{cases} 45 - x \geq 0 \\ x(x-9) = (45-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 < x \leq 45 \\ 81x = 45^2 \end{cases} \Rightarrow x = 25.$$

Ответ: 25.

5. $\sqrt[3]{8x+4} - \sqrt[3]{8x-4} = 2$

Решение: ОДЗ: $x \in \mathbf{R}$

Можно сразу возвести уравнение в третью степень, но легче будет, если сначала перепишем его в виде: $\sqrt[3]{8x+4} = 2 + \sqrt[3]{8x-4}$, возведем уравнение в куб: $8x+4=8+3\cdot4\cdot\sqrt{8x-4}+3\cdot2\cdot\sqrt[3]{(8x-4)^2}+8x-4$; $2\sqrt[3]{(8x-4)}+\sqrt[3]{(8x-4)^2}=0$; $\sqrt[3]{8x-4}\cdot\left(2+\sqrt[3]{8x-4}\right)=0\Rightarrow$

$$\begin{array}{lcl} \sqrt[3]{8x-4}=0 & \text{или} & \sqrt[3]{8x-4}=-2; \\ 8x-4=0 & \text{или} & 8x-4=-8; \\ x=\frac{1}{2} & \text{или} & x=-\frac{1}{2}. \end{array}$$

Ответ: $\pm\frac{1}{2}$.

6. $\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x-1}=0$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x+4\geq 0 \\ 2x+1\geq 0 \\ 3x+1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\geq -\frac{1}{3}.$

Перепишем уравнение так, чтобы в ОДЗ обе его части были неотрицательными: $\sqrt{x+4}=\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+1}\Leftrightarrow$ (возводим в квадрат) $x+4=2x+1+2\sqrt{(2x+1)(3x+1)}+3x+1$; $\sqrt{6x^2+5x+1}=1-2x\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 1-2x\geq 0 \\ 6x^2+5x+1=(1-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}\leq x\leq\frac{1}{2} \\ x_1=0,\ x_2=-\frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow x=0.$$

Ответ: $x=0$

7. $\sqrt{11-x}-\sqrt{x+2}=1$

Решение. ОДЗ: $-2\leq x\leq 11$.

Заметим, что $x=2$ является корнем уравнения. Перепишем уравнение в виде: $\sqrt{11-x}=1+\sqrt{x+2}$. Левая часть уравнения $y=\sqrt{11-x}$ – убывающая, а правая часть $y=1+\sqrt{x+2}$ – возрастающая на $[-2;11]$ функции, графики которых могут пересекаться лишь в одной точке, следовательно, $x=2$ – единственное решение уравнения.

8. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{\frac{2x-1}{y+2}}+\sqrt{\frac{y+2}{2x-1}}=2 \\ x+y=12 \end{cases}.$

Решение. ОДЗ: $\frac{2x-1}{y+2}\geq 0,\qquad (1)$

Из второго уравнения $y=12-x$, подставим в первое и решим полученное уравнение $\sqrt{\frac{2x-1}{14-x}}+\sqrt{\frac{14-x}{2x-1}}=2$ подстановкой $\sqrt{\frac{2x-1}{14-x}}=t$, $t>0$.

$t+\frac{1}{t}=2$, $\quad t^2-2t+1=0$, $\quad t=1$.

Решим уравнение $\sqrt{\frac{2x-1}{14-x}}=1\Leftrightarrow 2x-1=14-x$, $x=5$, $y=12-5=7$. Точка $(5;7)$ удовлетворяет (1).

Ответ: $(5;7)$.

9. Неравенство вида $\sqrt[2n]{f(x)}<\sqrt[2n]{g(x)}$, $n\in\mathbf{N}$, равносильно системе $\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}$. (Условие $g(x)>0$ следует из второго неравенства системы).

Неравенство $\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$. Аналогично возводятся в степень неравенства со знаками $\leq, >, \geq$.

Примеры. 1) $\sqrt[4]{5x - x^2 - 6} \leq \sqrt[4]{4x^2 + 12x + 11}$.

Решение. Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 5x - x^2 - 6 \geq 0 \\ 5x - x^2 - 6 \leq 4x^2 + 12x + 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 \leq 0 \\ 5x^2 + 7x + 17 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in [2;3], \quad \text{т.к.} \quad x_1 = 2,\ x_2 = 3, \\ x \in (-\infty; +\infty) \quad \text{т.к.} \quad D < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [2;3].$$

Ответ: $x \in [2;3]$

2) $\sqrt[3]{x+2} < -5 \Leftrightarrow x + 2 < -125$, откуда $x < -127$.

Ответ: $x \in (-\infty; -127)$.

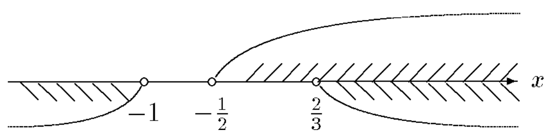
10. Неравенство вида $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$, $n \in \mathbf{N}$, равносильно системе
$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < \left(g(x)\right)^{2n} \end{cases}$$
Если же корень нечетной степени, то неравенство можно возвести в эту степень без ограничений.

Пример: $\sqrt{x^2 + 3x + 3} < 2x + 1$.

Решение. Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 3 \geq 0 \\ 2x + 1 > 0 \\ x^2 + 3x + 3 < (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x + 3 \geq 0 \\ x > -\frac{1}{2} \\ 3x^2 + x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; +\infty) \quad \text{т.к.} \quad D < 0 \\ x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \\ x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right), \quad \text{т.к.} \quad x_1 = -1,\ x_2 = \frac{2}{3} \end{cases}.$$



Ответ: $x \in \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

11. Неравенство $\sqrt[2n]{f(x)} \geq g(x)$ решается отдельно в двух случаях: $g(x) \geq 0$ или $g(x) < 0$, поэтому равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq \left(g(x)\right)^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

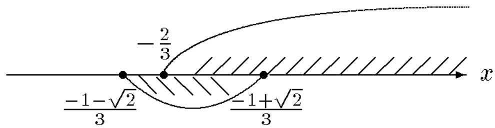
Пример: $\sqrt{6x+5} - 3x \geq 2$.

Решение. Неравенство $\sqrt{6x+5} \geq 2 + 3x$ равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} 2+3x \geq 0 \\ 6x+5 \geq (2x+3)^2 \end{cases} (1) \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} 2+3x < 0 \\ 6x+5 \geq 0 \end{cases} (2).$$

Решим систему (1):

$$\begin{cases} 3x+2 \geq 0 \\ 9x^2+6x-1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{2}{3} \\ x \in \left[\frac{-1-\sqrt{2}}{3}; \frac{-1+\sqrt{2}}{3}\right], \end{cases} \qquad \text{т.к} \qquad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{3}$$



$x \in \left[-\frac{2}{3}; \frac{\sqrt{2}-1}{3}\right]$.

Решим систему (2): $\begin{cases} x < -\frac{2}{3} \\ x \geq -\frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow x \in \left[-\frac{5}{6}; -\frac{2}{3}\right)$. Объединим решения систем.

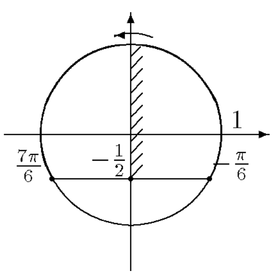
Ответ: $x \in \left[-\frac{5}{6}; \frac{\sqrt{2}-1}{3}\right]$.

12. Решить неравенство $(2\sin x + 1)\sqrt{9-5x-4x^2} \geq 0$.

Решение. Так как арифметический корень неотрицателен (если существует), то неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 9-5x-4x^2 \geq 0 \\ 2\sin x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+5x-9 \leq 0 \\ \sin x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

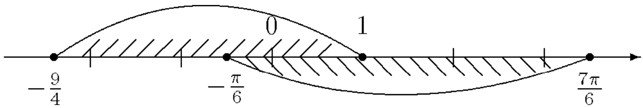
Решения квадратного неравенства $x \in \left[-\frac{9}{4}; 1\right]$, т.к. $x_1 = -\frac{9}{4}$, $x_2 = 1$.



Решим второе неравенство (см. рис.)

$$x \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right]$$

при $n = 0 \quad x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]$.
При остальных n промежутки не пересекаются с $\left[-\frac{9}{4}; 1\right]$ (проверьте)



Точка $x=-\frac{9}{4}$ является решением неравенства, а $x=\frac{7\pi}{6}$ — не является, т.к. при $x=\frac{7\pi}{6}$ подкоренное выражение отрицательно.

Ответ: $x\in\left[-\frac{\pi}{6};1\right]\cup\left\{-\frac{9}{4}\right\}$.

Задания для самостоятельного решения.

1) $\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}=x-8$; 2) $\sqrt{2x-1+\sqrt{x+2}}=4$; 3) $2\sqrt{x-2}=15+\sqrt[4]{x-2}$; 4) $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=3,4$ (при $x>2$); 5) $\frac{x^2-x}{x-\sqrt{x}}=6$; 6) $x\cdot\sqrt{x^2+15}-2=\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x^2+15}$; 7) $2\sqrt[3]{x}+5\sqrt[6]{x}-18=0$; 8) $\sqrt{x^2-8x+16}=x-4$; 9) $\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}-\sqrt{\frac{x+2}{2x+2}}=\frac{7}{12}$; 10) $3(4x+3)\sqrt{16x+7}=(4x+3)(8x+5)$; 11) $\sqrt{x^2-6x-27}<x$; 12) $\frac{2+x}{\sqrt{3x+4}}=\sqrt{2x+3}$; 13) $(x+2)\sqrt{(4-x)(5-x)}\geq 0$; 14) $\frac{2}{x}+3\leq\sqrt{41-\frac{16}{x^2}}$; 15) $x^2-4\left(\sqrt{x+4}\right)^2+11\leq 0$; 16) $1-x<\sqrt{x^2-2x}$; 17) $3\sqrt{x}-\sqrt{x+3}>1$; 18) $x-\sqrt{1-|x|}<0$; 19) $x+42-11\sqrt{x^2-x-42}-x^2=0$; 20) $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x-2}<0$; 21) $\sqrt{8x-7}-\sqrt{2x+1}=2$; 22) $\sqrt{\left(\frac{8}{3}-x\right)(x+1)}\cdot\mathrm{tg}\pi x=0$; 23) $|x-7|\leq 3-\sqrt{x-4}$; 24) $3\sqrt{x+4}=5-2|x+2|$.

Ответы

1) 9; 2) 7; 3) 83; 4) 4,2; 5) 4; 6) 1; 7) 64; 8) $x\in[4;+\infty)$; 9) 7; 10) $\frac{4\pm 3\sqrt{6}}{8}$; 11) $x\in[9;+\infty)$; 12) -1; 13) $[-2;4]\cup[5+\infty)$; 14) $x\in\left(-\infty;-\frac{4}{\sqrt{41}}\right]\cup[1;+\infty)$; 15) $x\in[-1;5]$; 16) $x\in[2;+\infty)$; 17) $x\in(1;+\infty)$; 18) $x\in\left[-1;\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$; 19) -6; 7; 20) $x\in(-2;2)$; 21) 4; 22) 0; ±1; 2; $\frac{8}{3}$; 23) $x\in[5;8]\cup\{4\}$; 24) $-\frac{15}{4}$; -3; $-\frac{7}{4}$.

Тема IX. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства.

§1. При решении показательных уравнений и неравенств используются условия: 1) $a^x=a^y\Leftrightarrow x=y$ $(a>0)$ $a\neq 1$; 2) $a^x<a^y\Leftrightarrow x<y$, если $a>1$;

3) $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$ при $0 < a < 1$. Кроме того, используются тождества, справедливые при $a > 0$, $b > 0$: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $a^x : a^y = a^{x-y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $a^x \cdot b^x = (ab)^x$, $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$. Если $a^x = b$, то $x = \log_a b$ $(a > 0, b > 0, a \neq 1)$.

Рассмотрим некоторые методы решения показательных уравнений и неравенств.

1. Метод приведения обеих частей уравнения или неравенства к одному основанию. Примеры:

1) $4 \cdot \sqrt[3]{(0,125)^{x-3}} = 2^{\sqrt{x+1}}$.

Решение.

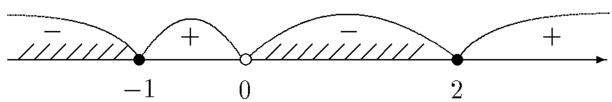
$4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{x-3}{3}} = 2^{\sqrt{x+1}}$; $2^2 \cdot 2^{-3 \cdot \frac{x-3}{3}} = 2^{\sqrt{x+1}}$; $2^{5-x} = 2^{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow$

$$\sqrt{x+1} = 5 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x \geq 0 \\ x + 1 = (5-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x^2 - 11x + 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 3$$

Ответ: 3.

2). $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+\frac{1}{2}-\frac{2}{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{27}}$.

Решение: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+\frac{1}{2}-\frac{2}{x}} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} - \frac{2}{x} \leq \frac{3}{2}$ (т.к. $\frac{1}{3} < 1$); $x - \frac{2}{x} - 1 \leq 0$; $\frac{x^2-x-2}{x} \leq 0$; $\frac{(x+1)(x-2)}{x} \leq 0$.



Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup (0; 2]$.

2. Метод подстановки.

1) $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$

Решение. Имеются три степени с различными основаниями, но так как $9 = 3^2$, $16 = 4^2$, а $12 = 3 \cdot 4$, то, разделив обе части уравнения почленно, например, на $16^x \neq 0$, получим: $64 \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^x - 84 \cdot \left(\frac{12}{16}\right)^x + 27 = 0$ или $64 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{2x} - 84 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x + 27 = 0$. Сделаем замену $\left(\frac{3}{4}\right)^x = t$, $t > 0$, получим квадратное уравнение $64t^2 - 84t + 27 = 0$; $t_{1,2} = \frac{42 \pm \sqrt{42^2 - 64 \cdot 27}}{64} = \frac{42 \pm 6}{64}$; $t_1 = \frac{3}{4}$, $t_2 = \frac{9}{16}$.

Решим уравнения $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3}{4}$ и $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^2$.

Ответ: $x = 1$ и $x = 2$.

2) $4^{\frac{2}{x}} - 5 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 4 < 0$.

Решение. Положим $4^{\frac{1}{x}} = t$, $t > 0$ и решим квадратное неравенство $t^2 - 5t + 4 < 0$.

Корни квадратного трехчлена $t_1 = 1$, $t_2 = 4$. Так как нужно будет сделать обратную подстановку, то решение этого неравенства запишем в виде: $1 < t < 4$, откуда $1 < 4^{\frac{1}{x}} < 4$ или $4^0 < 4^{\frac{1}{x}} < 4^1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1$ (так как $4 > 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} > 0 \\ \frac{1}{x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 0, \ x > 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1$.

Ответ: $x \in (1 + \infty)$

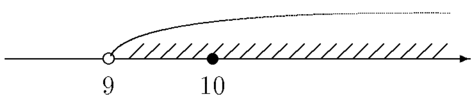
3. Вынесение общего множителя за скобку.

1) $2^{x-1} - 3^{x-1} + 2^{x-2} + 3^{x-2} = 3^{x-3} - 2^{x-3}$.

Решение. Сгруппируем слагаемые:
$2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 3^{x-1} - 3^{x-2} + 3^{x-3}$;
$2^{x-3}\left(2^{x-1-x+3} + 2^{x-2-x+3} + 1\right) = 3^{x-3}\left(3^{x-1-x+3} - 3^{x-2-x+3} + 1\right)$;
$2^{x-3}\left(2^2 + 2 + 1\right) = 3^{x-3}\left(3^2 - 3 + 1\right)$;
$2^{x-3} \cdot 7 = 3^{x-3} \cdot 7$; $2^{x-3} = 3^{x-3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} = 1 \Rightarrow x - 3 = 0$, $x = 3$.
Ответ: 3.

2) Решить неравенство $2^{\sqrt{x}+2} - 2^{\sqrt{x}+1} > 16$ и указать наименьшее целое решение.

Решение: $2^{\sqrt{x}+1}\left(2^{\sqrt{x}+2-\sqrt{x}-1} - 1\right) > 16$;
$2^{\sqrt{x}+1}(2-1) > 16$; $2^{\sqrt{x}+1} > 2^4 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 > 4$ (т.к. $2 > 1$) $\Leftrightarrow \sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x > 0 \\ x > 9 \end{cases} \Rightarrow x > 9$



$x = 10$ – наименьшее целое решение.
Ответ: $x \in (9; +\infty)$, $x = 10$.

4. Уравнение $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, где $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $a \neq b$, решается логарифмированием по какому-нибудь основанию, например, a или b. Так же решаются и неравенства.

Пример. $7^{11-x} = 13^{\sqrt{x^2}}$;

Прологарифмируем уравнение по основанию 7:
$\log_7\left(7^{11-x}\right) = \log_7\left(13^{\sqrt{x^2}}\right)$; $11 - x = \sqrt{x^2} \cdot \log_7 13$ и так как $\sqrt{x^2} = |x|$, то $11 - x = \log_7 13 \cdot |x|$. Уравнение равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 11 - x = x \cdot \log_7 13 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 0 \\ 11 - x = -x \cdot \log_7 13 \end{cases};$$

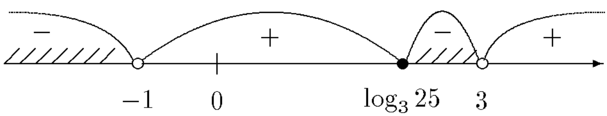
$x = \frac{11}{\log_7 13+1} > 0$; $x = \frac{11}{1-\log_7 13} < 0$, так как $\log_7 13 > 1$.

Ответ: $x = \frac{11}{\log_7 13+1}$, $x = \frac{11}{1-\log_7 13}$.

Решим неравенство смешанного типа:

$$\frac{3^x - 25}{x+1} \geq \frac{3^x - 25}{x-3}.$$

Решение: применим метод интервалов. $(3^x - 25) \cdot \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-3}\right) \geq 0$; $\frac{(3^x-25)\cdot(-4)}{(x+1)(x-3)} \geq 0$; $\frac{3^x-25}{(x+1)(x-3)} \leq 0$. Нуль числителя $x = \log_3 25 < 3$, нули знаменателя $x = -1$, $x = 3$.



Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup [\log_3 25; 3)$.

§2. В разделе "Основные свойства и тождества" приведены все свойства логарифмов, на которых основано решение логарифмических уравнений и неравенств. При решении простейших неравенств используется монотонность логарифмической функции: $\log_a x < \log_a y \Rightarrow x < y$ при $a > 1$; $\log_a x < \log_a y \Rightarrow x > y$ при $0 < a < 1$. Необходимо помнить, что при решении уравнений нужно или сначала найти ОДЗ уравнения и затем отобрать корни, принадлежащие ОДЗ, или делать проверку корней. При решении неравенств нахождение ОДЗ необходимо. Решив неравенство, множество решений нужно пересечь с ОДЗ. Можно заменить неравенство равносильной системой неравенств, в которую войдут неравенства определяющие ОДЗ.

Рассмотрим некоторые методы решения логарифмических уравнений и неравенств.

1. Использование определения логарифма.

$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$, $(x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1)$; $\log_a x < b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$ при $a > 1$; $\log_a x < b \Leftrightarrow x > a^b$ при $0 < a < 1$.

Примеры.

1) $\log_5 (x^2 - 11x + 43) = 2$.

Решение. $x^2 - 11x + 43 = 5^2$; $x^2 - 11x + 18 = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = 9$. Проверка показывает, что оба корня удовлетворяют уравнению. (ОДЗ уравнения – все действительные числа, так как дискриминант трехчлена $x^2 - 11x + 43$ отрицателен).

Ответ: 2; 9.

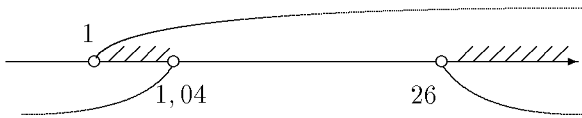
2) $\left(\log_{0,2}(x-1)\right)^2 > 4$.

Решение: ОДЗ: $x-1>0$, $\underline{x \in (1;+\infty)}$. Извлечем квадратный корень из обеих частей неравенства:

$\left|\log_{0,2}(x-1)\right| > 2$. Неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l}\log_{0,2}(x-1) > 2\\ \log_{0,2}(x-1) < -2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x-1 < 0,2^2\\ x-1 > 0,2^{-2}\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}x < 1,04\\ x > 26\end{array}\right.$$

Пересекаем множество решений этой совокупности с ОДЗ:



Ответ: $x \in (1;1,04) \cup (26;+\infty)$

2. Применение основного логарифмического тождества

$$a^{\log_a b} = b \qquad (a>0, a\neq 1, b>0).$$

Пример. $x^{\log_{\sqrt{x}}(x-2)} = 9$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x-2>0\\ x>0\\ x\neq 1\end{cases} \Rightarrow \underline{x>2}$.

$\log_{\sqrt{x}}(x-2) = \log_{(\sqrt{x})^2}(x-2)^2 = \log_x(x-2)^2$ (по свойствам логарифмов). Уравнение принимает вид $x^{\log_x(x-2)^2} = 9$; $(x-2)^2 = 9$; $|x-2| = 3$; $\left[\begin{array}{l}x-2=3\\ x-2=-3\end{array}\right.$; $x_1 = 5$; $x_2 = -1 \notin$ ОДЗ.

Ответ: 5.

3. Приведение к алгебраическому уравнению или неравенству (метод подстановки).

Примеры.

1) $3^{\log_3\left(\lg\sqrt{x}\right)} - \lg x + \lg^2 x - 3 = 0$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x>0\\ \lg\sqrt{x}>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0\\ \sqrt{x}>1\end{cases} \Rightarrow \underline{x>1}$.

Используем основное тождество: $\lg\sqrt{x} - \lg x + \lg^2 x - 3 = 0$; $\frac{1}{2}\lg x - \lg x + \lg^2 x - 3 = 0$; $\lg^2 x - \frac{1}{2}\lg x - 3 = 0$; $2\lg^2 x - \lg x - 6 = 0$.

Положим $\lg x = t$; $2t^2 - t - 6 = 0$; $t_1 = -\frac{3}{2}$, $t_2 = 2$. Тогда $\lg x = -\frac{3}{2}$ или $\lg x = 2 \Rightarrow x_1 = 10^{-\frac{3}{2}} \notin$ ОДЗ, $x_2 = 10^2 = 100$.

Ответ: 100.

2). Решить неравенство $\frac{\log_2^2 x - 3\log_2 x + 3}{\log_2 x - 1} < 1$ и указать целые решения.

Решение. Положим $\log_2 x = t$, получим:

$\frac{t^2-3t+3}{t-1} < 1$; $\frac{t^2-3t+3}{t-1} - 1 < 0$; $\frac{t^2-3t+3-t+1}{t-1} < 0$; $\frac{t^2-4t+4}{t-1} < 0$; $\frac{(t-2)^2}{t-1} < 0 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} t \neq 2 \\ t < 1 \end{cases}$, так как $(t-2)^2 \geq 0$ при всех t. Итак, $t < 1$, $\log_2 x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

Единственное целое решение – $x = 1$.

Ответ: $x \in (0; 2)$, $x = 1$.

4. Потенцирование.

1) $\log_6(x+3) - \log_6(x-1) = 2 - \log_6 12$.

Решение. Рекомендуется переписать уравнение так, чтобы в результате потенцирования не было дробей: $\log_6(x+3) + \log_6 12 = 2 + \log_6(x-1)$.

ОДЗ: $\begin{cases} x+3 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x > 1}$.

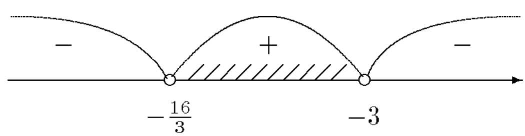
$2 = \log_6 36$; $\log_6\left((x+3)\cdot 12\right) = \log_6\left(36\cdot(x-1)\right)$; $x + 3 = 3(x-1)$, $x = 3 \in$ ОДЗ.

Ответ: $x = 3$.

2) $\log_{0,5}\sqrt{\frac{x-4}{x+3}} < \log_{0,5} 2$.

Решение. Чтобы избежать иррационального неравенства, применим сначала свойство логарифма.

$\frac{1}{2}\log_{0,5}\frac{x-4}{x+3} < \log_{0,5} 2$; $\log_{0,5}\frac{x-4}{x+3} < 2\log_{0,5} 2$; $\log_{0,5}\frac{x-4}{x+3} < \log_{0,5} 4$. Так как $0 < 0,5 < 1$, то неравенство равносильно системе $\begin{cases} \frac{x-4}{x+3} > 0 \\ \frac{x-4}{x+3} > 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{x-4}{x+3} > 4$; $\frac{x-4}{x+3} - 4 > 0$; $\frac{x-4-4x-12}{x+3} > 0$; $\frac{-3x-16}{x+3} > 0$;



Ответ: $x \in \left(-\frac{16}{3}; -3\right)$.

5. Использование перехода к другому основанию логарифма.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}; \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}; \quad \log_a b = n\log_{a^n} b,$$

$$(a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad a \neq 1, \quad c \neq 1, \quad n \in \mathbf{R}, \quad n \neq 0)$$

Примеры.

1) $3 + 2\log_{x+1} 3 = 2\log_3(x+1)$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{x > -1, \ x \neq 0}$.

Заменим $\log_{x+1} 3 = \frac{1}{\log_3(x+1)}$ и положим $\log_3(x+1) = t$. Получим $3 + \frac{2}{t} = 2t$; $2t^2 - 3t - 2 = 0$; $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = 2$; $\log_3(x+1) = -\frac{1}{2}$ или $\log_3(x+1) = 2$; $x+1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ или $x+1 = 9$; $x_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = 8$. Оба корня принадлежат ОДЗ.

Ответ: $\frac{1-\sqrt{3}}{3}$, 8.

2) $\log_x\left(x^2 - x^3 + 21x\right) \geq 3$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - x^3 + 21x > 0 \\ x > 0, \quad x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x\left(x^2 - x - 21\right) > 0 \\ x > 0, \quad x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 21 \\ x > 0, \quad x \neq \end{cases}$

$\begin{cases} x \in \left(\frac{1-\sqrt{85}}{2}; \frac{1+\sqrt{85}}{2}\right) \\ x > 0, \quad x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (0;1) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{85}}{2}\right)$.

Можно решить неравенство методом потенцирования в двух случаях: $x \in (0;1)$ или $x \in \left(1; \frac{1+\sqrt{85}}{2}\right)$.

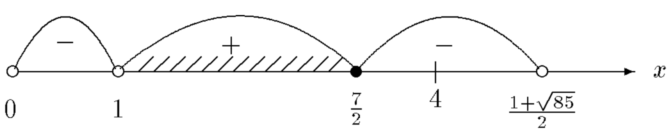
Покажем другой прием решения. Перейдем, например, к десятичному логарифму:

$$\frac{\lg\left(x^2 - x^3 + 21x\right)}{\lg x} - 3 \geq 0; \qquad \frac{\lg\left(x^2 - x^3 + 21x\right) - \lg x^3}{\lg x} \geq 0.$$

Решим неравенство в ОДЗ методом интервалов.

Найдем нули числителя: $\lg\left(x^2 - x^3 + 21x\right) = \lg x^3$; $x^2 - x^3 + 21x = x^3$; $2x^3 - x^2 - 21x = 0$; $x\left(2x^2 - x - 21\right) = 0$; так как $x \neq 0$ то, $2x^2 - x - 21 = 0$; $x_1 = -3$; $x_2 = \frac{7}{2}$; $x_1 \notin$ ОДЗ.

Нуль знаменателя $x = 1$.



Ответ: $x \in \left(1; \frac{7}{2}\right]$.

6. Метод логарифмирования.

Если неизвестная величина имеется и в основании, и в показателе степени, то обе части неравенства или уравнения нужно прологарифмировать по удобному основанию (если логарифмирование возможно).

Примеры.

1) $x^{2\lg^2 x} = 10x^3$.

Решение. ОДЗ: $x > 0$.

Возьмем десятичный логарифм от обеих частей:

$\lg\left(x^{2\lg^2 x}\right) = \lg\left(10x^3\right);\;\; 2\lg^2 x \cdot \lg x = 1 + 3\lg x;\;\; 2\lg^3 x - 3\lg x - 1 = 0.$

Положим $\lg x = t$ и решим уравнение $2t^3 - 3t - 1 = 0$. Подбираем корень $t = -1$ и группируем слагаемые левой части следующим образом (или делим "уголком" многочлен $2t^2 - 3t - 1$ на $t + 1$):

$\left(2t^3 + 2t^2\right) - \left(2t^2 + 2t\right) - (t + 1) = 0;\; 2t^2(t + 1) - 2t(t + 1) - (t + 1) = 0;$
$(t + 1)\left(2t^2 - 2t - 1\right) = 0;\;\; t_1 = -1,\, t_{2,3} = \frac{1\pm\sqrt{1+2}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}.$

Решаем уравнения $\lg x = -1$ и $\lg x = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$, откуда $x_1 = 10^{-1}$, $x_{2,3} = 10^{\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}}$.

Ответ: $0,1;\; 10^{0,5\left(1\pm\sqrt{3}\right)}$.

2) $\frac{1}{\sqrt{2x-1}} = (2x-1)^{\log_{\frac{1}{4}}\left(1+7x-2x^2\right)}$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ 1 + 7x - 2x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 2x^2 - 7x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \in \left(\frac{7-\sqrt{57}}{4}; \frac{7+\sqrt{57}}{4}\right) \end{cases} \Rightarrow \underline{x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{7+\sqrt{57}}{4}\right)}.$

Перепишем уравнение в виде $(2x-1)^{-\frac{1}{2}} = (2x-1)^{\log_{\frac{1}{4}}\left(1+7x-2x^2\right)}$ и прологарифмируем его по основанию 10:

$-\frac{1}{2}\lg(2x-1) = \log_{\frac{1}{4}}\left(1 + 7x - 2x^2\right)\cdot\lg(2x-1);$

$\lg(2x-1)\left(\log_{\frac{1}{4}}\left(1 + 7x - 2x^2\right) + \frac{1}{2}\right) = 0;$

$$\begin{array}{lcl} \lg(2x-1) = 0 & \text{или} & \log_{\frac{1}{4}}\left(1 + 7x - 2x^2\right) = -\frac{1}{2}; \\ 2x - 1 = 1 & \text{или} & 1 + 7x - 2x^2 = 2; \\ x = 1 \in \text{ОДЗ} & \text{или} & 2x^2 - 7x + 1 = 0, \Rightarrow x = \frac{7\pm\sqrt{41}}{4}; \end{array}$$

но $x = \frac{7-\sqrt{41}}{4} \notin$ ОДЗ, так как $\frac{7-\sqrt{41}}{4} < \frac{1}{2}$.

Ответ: $x = 1$, $x = \frac{7+\sqrt{41}}{4}$.

7. Решение систем уравнений.

Пример. $\begin{cases} y - \log_3 x = 1 \\ x^y = 3^{12} \end{cases};$

Решение: ОДЗ: $x>0$, $y\in\mathbf{R}$.

$$\begin{cases}\log_3 x = y-1\\ x^y = 3^{12}\end{cases}; \qquad \begin{cases} x = 3^{y-1}\\ \left(3^{y-1}\right)^y = 3^{12}\end{cases}.$$

Решим второе уравнение: $3^{y^2-y}=3^{12}$; $y^2-y=12$; $y^2-y-12=0$; $y_1=-3$, $y_2=4$. Найдем соответствующие значения x: $x_1=3^{-4}=\frac{1}{81}$, $x_2=3^3=27$.

Ответ: $\left(\frac{1}{81};-3\right)$, $(27;4)$.

Задания для самостоятельного решения.

1) $4^{x+1}+4^x=320$; 2) $12\cdot 3^{\frac{1}{2x}}-3^{\frac{1}{x}}-27=0$; 3) $6^{x+1}+3^{x+1}=3^{x+2}-6^x+3^x$; 4) $5^{2x}-7^x-35\cdot 5^{2x}+35\cdot 7^x=0$; 5) $4^{2x-3}=7^{x-\frac{3}{2}}$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x}<\left(\frac{1}{9}\right)^{16-x}$; 7) $3^{x^2-7,2x}<\frac{1}{3\sqrt[5]{9}}$; 8) $4^x-3\cdot 2^x\le 4$ (решить и указать наибольшее целое решение); 9) $x^{5-\log_3 x^2}=27$ (решить и записать целые корни); 10) $\frac{(0,2)^{x+0,5}}{\sqrt{5}}=\frac{(0,04)^x}{25}$; 11) $5^{\lg x}-3^{\lg x-1}=3^{\lg x+1}-5^{\lg x-1}$; 12) $x^{\log_2^2 x-3\log_2 x-5}=\frac{1}{x}$; 13) $\left(\sqrt[5]{3}\right)^x+\left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10}=84$; 14) $\lg\left(2^{x+2}+2^x+20\right)=2$; 15) $\log_4(x+3)-\log_4(x-1)=2-\log_4 8$; 16) $\log_{5-x}\left(x^2-2x+65\right)=2$; 17) $\log_3\left(3^x-8\right)=2-x$;
18) $\lg 10+\frac{1}{3}\lg\left(271+3^{\sqrt{2x}}\right)=2$; 19) $\lg\left(8\cdot\sqrt[10]{2^{x^2-14,5x}}\right)=0$;
20) $x+\log_2\left(9-2^x\right)=3$; 21) $\log_{\frac{1}{2}}\left(1+x-\sqrt{x^2-4}\right)\le 0$; 22) $\log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}(2x+1)\ge\log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}\left(x^2+1\right)$; 23) $\log_{\sin\frac{\pi}{6}}\left(x^2-4x+3\right)\ge -3$; 24) $\log_3\frac{2x+4}{x-2}<3$ (указать наименьшее натуральное решение); 25) $\log_{0,3}\left(\frac{1}{2x}\right)<4$ (указать наибольшее целое решение); 26) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2-5x+8\right)}\le 2,5$; 27) $\log_3|3-4x|>2$; 28) $\begin{cases}\frac{2^y}{5^x}=200\\ x+y=1\end{cases}$ (решить и найти x^y); 29) $\begin{cases}\log_3(y-x)=1\\ 3^{x+1}\cdot 2^y=24\end{cases}$;
30) $\begin{cases}10^{1+\lg(x+y)}=50\\ \lg(x-y)+\lg(x+y)=2-\lg 5\end{cases}$; 31) $\begin{cases}\log_y x+\log_x y=2,5\\ x\cdot y=27\end{cases}$;
32) $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=576\\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4\end{cases}$; 33) $(\log_x 9-1)\cdot\log_3(9x)\le 3$; 34) $\frac{\left(x^2-7x+10\right)\cdot\sqrt{x+1}}{2-3^{x-5}-3^{5-x}}\ge 0$;
35) $\frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1}\ge 0$.

Ответы.

1) 3; 2) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$; 3) 0; 4) 0; 5) $\frac{3}{2}$; 6) $x\in(-\infty;-8)\cup(4;+\infty)$; 7) $x\in(0,2;7)$; 8) $x\in(-\infty;0]$, $x=0$; 9) $x=3$ $\left(x_2=3\sqrt{3}\right)$; 10) -1; 11) 100; 12) $\frac{1}{2}$, 1, 16; 13) 20; 14) 4; 15) 5; 16) -5; 17) 2; 18) 18; 19) $\frac{5}{2}$, 12; 20) 0; 3; 21) $x\in[2;+\infty)$;

22) $x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right] \cup [2; +\infty)$; 23) $x \in [-1; 1) \cup (3; 5]$; 24) $x \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{58}{25}; +\infty\right)$, $x = 3$; 25) $x \in \left(0; \frac{5000}{81}\right)$, $x = 61$; 26) $x \in [1; 4]$; 27) $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (3; +\infty)$; 28) $(-2; 3)$, -8; 29) $(0; 3)$; 30) $(4,5; 0,5)$; 31) $(3; 9)$, $(9; 3)$; 32) $(2; 6)$; 33) $x \in \left[\frac{1}{81}; 1\right) \cup [3; +\infty)$; 34) $x \in [2; 5) \cup \{-1\}$; 35) $x \in \left(4 + \sqrt{2}; +\infty\right) \cup \{5\}$.

Тема X. Производная и ее приложения.

Рассмотрим решение некоторых задач на применение производной.

1. При каком значении a касательная к параболе $y = ax^2 + x - 30$ в точке $M(2; -3)$ перпендикулярна прямой $y = 2x - 1$?

Решение. Угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = ax^2 + x - 30$ в точке $M(2; -3)$ есть число $f'(2)$. Вычислим это число. $f'(x) = 2ax + 1$ и $f'(2) = 2a \cdot 2 + 1$, $f'(2) = 4a + 1$. По условию задачи касательная с угловым коэффициентом $f'(2)$ перпендикулярна к прямой $y = 2x - 1$. Следовательно, их угловые коэффициенты $4a + 1$ и 2 взаимно обратны (их произведение равно единице) и противоположны по знаку, т.е. $(4a + 1) \cdot 2 = -1$. Отсюда $a = -\frac{3}{8}$.

Ответ: $-\frac{3}{8}$.

2. Найти все такие положительные значения параметра a, что функция $y = ax^2 - \ln x$ убывает на интервале $(0; 5)$.

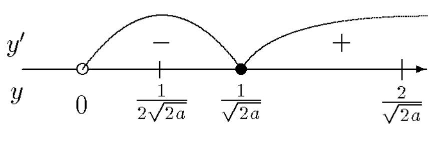
Решение.

$D(y) = (0; +\infty)$, интервал $(0; 5)$ содержится в $D(y)$. Исследуем функцию на монотонность.

$y' = 2ax - \frac{1}{x} = \frac{2ax^2 - 1}{x}$;

$y' = 0; \quad 2ax^2 - 1 = 0; \quad x^2 = \frac{1}{2a}$.

Так как по условию $a > 0$ и $x > 0$, то имеется единственная критическая точка $x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$



Определим знак производной в каждом из двух интервалов:

$$y'\left(\frac{1}{2\sqrt{2a}}\right) = \frac{2a \cdot \frac{1}{8a} - 1}{\frac{1}{2\sqrt{2a}}} < 0; \qquad y'\left(\frac{2}{\sqrt{2a}}\right) = \frac{2a \cdot \frac{2}{a} - 1}{\frac{2}{\sqrt{2a}}} > 0.$$

Итак, функция убывает только на промежутке $\left(0; \frac{1}{\sqrt{2a}}\right]$. Для того, чтобы функция убывала на $(0;5)$, необходимо и достаточно, чтобы интервал $(0;5)$полностью содержался в $\left(0; \frac{1}{\sqrt{2a}}\right]$. Это будет при условии $5 \le \frac{1}{\sqrt{2a}}$; $\sqrt{2a} \le \frac{1}{5}$. Это неравенство равносильно системе

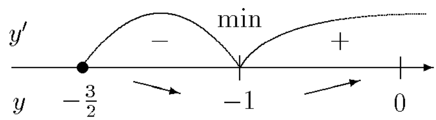
$$\begin{cases} a > 0 \\ 2a \le \frac{1}{25} \end{cases} \Rightarrow a \in \left(0; \frac{1}{50}\right].$$

Ответ: $a \in \left(0; \frac{1}{50}\right]$.

3. Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции $y = x - 7 - \sqrt{2x+3}$.

Решение: $D(y) = \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right]$.

$y' = 1 - \frac{(2x+3)'}{2\sqrt{2x+3}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$; $y' = 0 \Rightarrow \sqrt{2x+3} = 1$; $2x+3 = 1$; $x = -1$. Других критических точек в $D(y)$ нет, так как точка $x = -\frac{3}{2}$, в которой производная не существует, является граничной точкой области определения функции и не может быть точкой экстремума.



$y'(0) > 0$, $y'\left(-\frac{5}{2}\right) < 0$.

Функция убывает на $\left[-\frac{3}{2}; -1\right]$ и возрастает на $[-1; +\infty)$, в точке $x = -1$ принимает минимальное значение $y(-1) = -9$.

Ответ: $\left[-\frac{3}{2}; -1\right]$ – промежуток убывания, $[-1; +\infty)$ – промежуток возрастания, $x_{\min} = -1$, $y_{\min} = -9$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = |x| \cdot (x-1)$ на $[-1; 1]$.

Решение: так как функция $|x|$ не дифференцируема в точке $x = 0$, то $y'(0)$ не существует, следовательно, $x = 0$ – критическая точка функции, принадлежащая $[-1; 1]$.

Найдем другие критические точки. По определению модуля $y = \begin{cases} x(x-1), \text{ если } x \ge 0 \\ -x(x-1), \text{ если } x < 0 \end{cases}$; $y = \begin{cases} x^2 - x, \ x \ge 0 \\ -x^2 + x, \ x < 0 \end{cases}$; $y' = \begin{cases} 2x - 1, \ x > 0 \\ -2x + 1, \ x < 0 \end{cases}$; $y' = 0$ при $x = \frac{1}{2}$ и $x = -\frac{1}{2}$.

Обе эти точки принадлежат $[-1;1]$. Вычислим значения функции в критических точках и в граничных точках отрезка $[-1;1]$:
$y(-1)=-2$; $y\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4}$; $y\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$; $y(1)=0$.

Выберем самое большое и самое маленькое из этих значений.

Ответ: $y_{\text{наиб}}=y(1)=0$, $y_{\text{наим}}=y(-1)=-2$.

5. Составить уравнение касательной к графику функции $y=x^2-2x+2$, проходящей через точку $A(2;-2)$.

Решение. Пусть $M_0\,(x_0;y_0)$ – искомая точка касания, лежащая на графике функции, т.е. $y_0=x_0^2-2x_0+2$. Производная $y'=2x-2$, $f'\,(x_0)=2x_0-2$. Составим уравнение касательной:

$$y=x_0^2-2x_0+2+(2x_0-2)\cdot(x-x_0)\,.$$

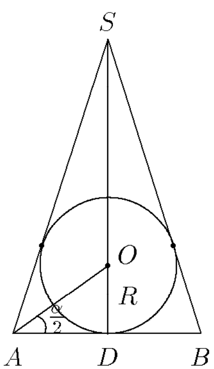
По условию эта касательная проходит через точку $A(2;-2)$, т.е. при $x=2 \quad y=-2$:
$-2=x_0^2-2x_0+2+(2x_0-2)\cdot(2-x_0)$; $x_0^2-4x_0=0$; $x_0=0$ или $x_0=4$; $y_0=2$ или $y_0=10$. Таким образом, существуют две касательные, проходящие через точку A.

$$\begin{array}{lcl} y=2+(-2)\cdot(x-0) & \text{и} & y=10+6(x-4) \\ y=-2x+2 & \text{и} & y=6x-14 \end{array}$$

Ответ: $y=-2x+2$, $y=6x-14$.

6. Найти высоту прямого кругового конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.

Решение: Сделаем чертеж в осевом сечении.



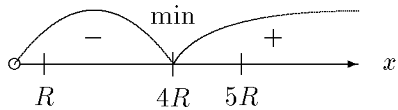
Обозначим высоту конуса $DS=x$, $(x>2R)$ и выразим объем конуса через x и R.
$V_{\text{к}}=\frac{1}{3}\pi\cdot AD^2\cdot DS$.
Из треугольника $AOD \quad AD=\frac{R}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$;
из треугольника $ASD \quad AD=\frac{x}{\operatorname{tg}\alpha}$;
Решим уравнение $\frac{R}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{x}{\operatorname{tg}\alpha}$ относительно $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;
$R\cdot\operatorname{tg}\alpha=x\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; $R\cdot\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=x\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; так как $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\neq 0$ (α – острый угол), то $\frac{2R}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=x$; $1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{2R}{x}$; $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=1-\frac{2R}{x}=\frac{x-2R}{x}$, откуда $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{x-2R}{x}}$. Теперь можем выразить AD:

$AD=\frac{R}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=R\cdot\sqrt{\frac{x}{x-2R}}$;
$V_{\text{к}}=\frac{1}{3}\pi\cdot R^2\cdot\frac{x}{x-2R}\cdot x$; $V_{\text{к}}(x)=\frac{\pi R^2}{3}\cdot\frac{x^2}{x-2R}$.

Найдем наименьшее значение объема на $(2R;+\infty)$

$V'(x)=\frac{\pi R^2}{3}\cdot\frac{2x\cdot(x-2R)-x^2\cdot 1}{(x-2R)^2}=\frac{\pi R^2}{3}\cdot\frac{x^2-4xR}{(x-2R)^2}=\frac{\pi R^2}{3}\cdot\frac{x(x-4R)}{(x-2R)^2}$;

$V'(x)=0$ при $x=4R$ – единственная критическая точка.



$V'(R)<0$, $V'(5R)>0$, следовательно в единственной точке экстремума достигается наименьшее значение объема конуса.

При $x=4R$ выполнено условие задачи.

Ответ: $4R$.

Задания для самостоятельного решения.

1) Найти производные функций:

$y=\operatorname{tg}^3 x$; $y=\sin\sqrt{x}$; $y=\ln\left(2x^2-3x+1\right)$; $y=\sqrt{\ln x}$; $y=\sqrt{\sin 2x}$; $y=(\cos 2x+8)^2$; $y=\left(2x^3+5\right)\cdot\cos x$.

2) Найти интервалы монотонности функций:

а) $f(x)=2x+\frac{2}{x}$; б) $f(x)=x+\ln(1-4x)$; в) $f(x)=x^2\cdot e^{-x}$;

г) $f(x)=3+8x+4x^4$; д) $f(x)=2x+\sin x$.

3) Найти критические точки функции:

а) $f(x)=\left(x^2-4\right)^{10}$; б) $f(x)=\frac{x^3}{3}+2x^2-5x+4$.

4) Найти экстремумы функций

а) $y=x^2-\ln(1+2x)$; б) $y=1-(x-2)^{\frac{1}{5}}$.

5) Найти наибольшее (наименьшее) значение функции $y=x^{\frac{2}{3}}(x-2)$ на отрезке $[-8;-1]$.

6) При каком значении a касательная к параболе $y=ax^2+x-3$ в точке $x_0=1$ параллельна прямой $y=2x-1$?

7) В точке $x_0=2$ определить угол между осью Ox и касательной к кривой $y=\frac{1}{1-x}$.

8) Найти наибольшее значение функции $y=x\ln x-x\ln 5$ на отрезке $[1;5]$.

9) Найти наименьшее значение x, удовлетворяющее неравенству

$f'(x)\geq 0$, если $f(x)=16\ln x-2x^2$.

10) Найти $2\cdot[f'(3)-f'(-3)]$, если $f(x)=\frac{\sqrt{9+x^2}}{x}$.

11) Найти ускорение точки, движущейся по закону $y=10x^2+3$.

12) Найти сумму наибольшего и наименьшего значений функции

$y = 3x^2 - x + 1$ на отрезке $[1; 2]$.

13) Под каким углом кривая $y = e^x$ пересекает ось Oy?

14) При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $y = x + e^{a-x}$ равно 4?

15) Написать уравнение касательной к графику функции $y = 3^{x+1} - 27^x$ в точке ее максимума.

16) Среди равнобедренных треугольников с данной боковой стороной a указать треугольник наибольшей площади.

Ответы.

1) $\frac{3\sin^2 x}{\cos^4 x}$, $\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, $\frac{4x-3}{2x^2-3x+1}$, $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$, $\frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$, $-4\sin 2x \cdot (\cos 2x + 8)$, $6x \cdot \cos x - \left(2x^3 + 5\right) \cdot \sin x$;

2) а) возрастает на $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$, убывает на $[-1; 0) \cup (0; 1]$;

б) возрастает на $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right]$, убывает на $\left[-\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$;

в) возрастает на $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, убывает на $(-\infty; 0] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$;

г) возрастает на $\left[-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; +\infty\right]$, убывает на $\left[-\infty; -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$;

д) возрастает на $(-\infty; +\infty)$;

3) а) 0; 2; -2; б) -5; 1; 4) а) $x_{\min} = \frac{1}{2}$, $y_{\min} = \frac{1}{4} - \ln 2$; б) нет экстремумов; 5) $y_{наим} = y(-8) = -40$, $y_{наиб} = y(-1) = -3$; 6) $a = \frac{1}{2}$; 7) 45^0; 8) $y_{наиб} = y(5) = 0$; 9) $x = 2$; 10) 0; 11) 20; 12) 14; 13) 45^0; 14) $a = 3$; 15) $y = 2$; 16) прямоугольный треугольник с катетом a.

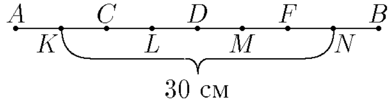
Тема XI Решение основных типов геометрических задач.

При решении задач обращайте внимание на чертеж. Правильно и аккуратно выполненный чертеж может стать хорошим помощником при решении задачи. Однако помните, что чертеж, как бы хорошо он не был сделан, сам по себе ничего не доказывает. Поэтому ссылка на то, что "это видно из чертежа" не является доказательством истинности чего-то, все утверждения должны быть обоснованы, доказаны со ссылкой на соответствующие аксиомы или теоремы.

Рассмотрим решение нескольких задач.

Задача 1 . Отрезок в 36 см разделен на четыре равные друг другу части. Расстояние между серединами крайних частей равно 30 см. Найдите расстояние между серединами средних частей.

Дано:
$AB = 36$см,
$C,\ D,\ F \in$ отрезку AB
$K,\ L,\ M,\ N$ – середины
$AC,\ CD,\ DF,\ FB$ (соответственно)
$KN = 30$см
Найти LM



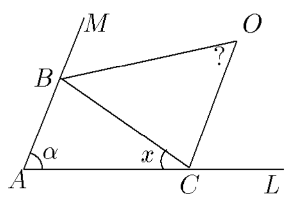
Решение:

1. Так как K – середина AC, N – середина FB, то $KC + FN = AK + NB = AB - KN = 36 - 30 = 6$ см.
2. $CF = KN - (KC + FN) = 30 - 6 = 24$ см.
3. Так как L – середина CD, M – середина DF, то $CL + MF = LD + DM = \frac{CF}{2} = 12$ см

Ответ: 12 см.

Задача 2. Прямые, содержащие биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC, пересекаются в точке O. Найдите угол BOC, если угол A равен α.

Дано:
$\angle MBC$, $\angle BCL$ – внешние углы ΔABC.
BO, OC – биссектрисы углов MBC и BCL
$\angle A = \alpha$
Найти угол BOC



Решение:

При пересечении биссектрис BO и CO внешних углов треугольника образовался треугольник BOC. Для нахождения угла BOC найдем два других угла этого треугольника.

1. Обозначим $\angle ACB$ ΔABC через x. Тогда $\angle MBC = \alpha + x$, как внешний угол ΔABC.

   $\angle OBC = \frac{1}{2}\angle MBC = \frac{\alpha + x}{2}$, так как BO – биссектриса $\angle MBC$.
2. $\angle BCL = 180^0 - x$, так как $\angle BCL$ и $\angle BCA$ – смежные.

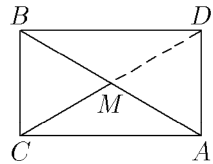
3. $\angle BCO = \frac{1}{2}\angle BCL = \frac{180^0 - x}{2}$, так как CO биссектриса $\angle BCL$.

4. Так как сумма углов треугольника равна 180^0, то $\angle OBC + \angle BCO + \angle BOC = 180^0$. Отсюда находим $\angle BOC = 180^0 - (\angle OBC + \angle BCO) = 180^0 - \left(\frac{\alpha + x}{2} + \frac{180^0 - x}{2}\right) = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$.

Ответ: $90^0 - \frac{\alpha}{2}$.

Задача 3. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная из вершины прямого угла равна одному из катетов. Найти меньший угол треугольника.

Дано:
ΔABC – прямоугольный
$\angle C = 90^0$, CM – медиана,
$CM = CB$
Найти меньший угол ΔABC



Решение:

Найдем острые углы треугольника ABC.

1. Сначала докажем, что медиана в прямоугольном треугольнике, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

Достроим треугольник ABC до прямоугольника $ADBC$. Так как AB его диагональ и M – середина диагонали, то диагональ CD проходит через точку M. В прямоугольнике диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам. Значит, $CM = MD = BM = AM$.

Таким образом доказано, что медиана CM равна половине гипотенузы AB.

2. По условию задачи и по доказанному $BC = CM = BM$.

Следовательно, ΔBCM – равносторонний, а значит, $\angle CBM = 60^0$.

3. В треугольнике ABC $\angle B = 60^0$, значит, $\angle A = 30^0$.

Ответ: 30^0.

Доказанное свойство медианы прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла, часто используется при решении задач. Мы можем это утверждение записать так:

медиана, проведенная из вершины прямого угла треугольника, равна половине гипотенузы.

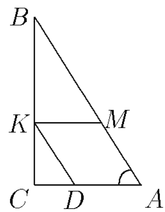
Из этого свойства следует, что середина гипотенузы равноудалена от всех его вершин, поэтому:

середина гипотенузы является центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника.

Задача 4. В прямоугольный треугольник с углом 60^0 вписан ромб так, что угол в 60^0 у них общий. Остальные три вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найти длину большего катета, если длина стороны ромба равна $\frac{\sqrt{12}}{5}$.

Дано:
ΔABC,
$\angle C = 90^0$, $\angle A = 60^0$,
$ADKM$ – ромб,
$AD = \frac{\sqrt{12}}{5}$, $K \in BC$, $D \in AC$

Найти CB.



Решение:

Больший катет BC (лежит против большего острого угла), найдем, используя подобие треугольников, учитывая тот факт, что в треугольнике прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает треугольник, подобный данному.

1. Так как $KD||AB$, то $\Delta KCD \sim \Delta BCA$, значит,

$$\frac{KC}{BC} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow BC = \frac{KC \cdot AC}{CD} \tag{1}$$

2. Найдем длины отрезков KC и CD из прямоугольного треугольника KCD. Так как $KD||AD$, то $\angle KDC = \angle BAC = 60^0$.

$KC = KD \cdot \sin 60^0 = \frac{\sqrt{12}}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{5}$

$CD = KD \cdot \cos 60^0 = \frac{\sqrt{12}}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{5}$

3. $AC = AD + CD = \frac{\sqrt{12}}{5} + \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{3\sqrt{3}}{5}$.

4. Подставим значения KC, AC, CD в (1)

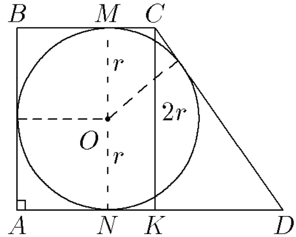
$$BC = \frac{3}{5} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{9}{5} = 1,8$$

Ответ: 1,8.

Задача 5. Прямоугольная трапеция описана около окружности. Найти радиус окружности, если длины оснований трапеции равны a и b.

Дано:
$ABCD$ – трапеция,
$AD||BC$, $AD \perp AB$
$AD = a$ $BC = b$
Окружность вписана в трапецию.

Найти радиус окружности.



Решение:

Чтобы найти радиус, необходимо определить длину боковой стороны CD.

1. Пусть радиус вписанной в трапецию окружности r. Тогда, так как трапеция прямоугольная, то $h = AB = 2r$.

2. Известно, что если около окружности описан четырехугольник, то суммы длин противолежащих сторон равны, т.е. $BC + AD = AB + CD = a + b$, но так как $AB = 2r$, то $CD = a + b - 2r$.

3. Опустим из точки C перпендикуляр на AD, т.е. $CK \perp AD$.

4. Рассмотрим треугольник CKD. В нем СК $= 2r$, $CD = a + b - 2r$, $KD = AD - AK = AD - BC = a - b$.

Применим к треугольнику CKD теорему Пифагора:

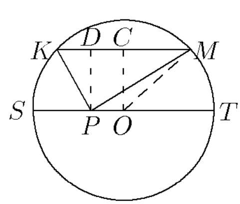
$CD^2 = CK^2 + KD^2$, т.е. $(a + b - 2r)^2 = 4r^2 + (a - b)^2$;
$a^2 + 2ab + b^2 - 4ar - 4br + 4r^2 = 4r^2 + a^2 - 2ab + b^2$; $4ar + 4br = 4ab$;
$4r(a + b) = 4ab$; $r = \frac{ab}{a+b}$.

Ответ: $\frac{ab}{a+b}$.

Задача 6. Гипотенуза KM прямоугольного треугольника KMP является хордой окружности радиуса $\sqrt{7}$. Вершина P находится на диаметре, который параллелен гипотенузе. Расстояние от центра окружности до гипотенузы равно $\sqrt{3}$. Найти острые углы треугольника KMP.

Дано:
ΔKMP, $\angle P = 90^0$
Окружность с центром O и радиусом $\sqrt{7}$, ST – диаметр, $P \in ST$, $ST||KM$,
K, $M \in$ окружности.
Расстояние от O до KM равно $\sqrt{3}$

Найти $\angle MKP$, $\angle KMP$.



Решение:

1. Обозначим $\angle MKP = \alpha$, тогда $\angle KMP = 90 - \alpha$.

2. Опустим из центра окружности на хорду KM перпендикуляр OC. По условию задачи $OC = \sqrt{3}$. Из треугольника OCM найдем CM по теореме Пифагора:

$$CM = \sqrt{OM^2 - OC^2} = \sqrt{7-3} = 2.$$

3. Так как $OC \perp KM$, то $CM = CK = 2$, значит $KM = 4$.

4. Проведем $PD \perp KM$. Так как $ST||KM$ и $P \in ST$, то $PD = OC = \sqrt{3}$.

Из ΔKDP $\quad KD = PD \cdot \text{ctg}\alpha$.

Из ΔPDM $\quad MD = PD \cdot \text{ctg}\left(90^0 - \alpha\right) = PD \cdot \text{tg}\alpha$.

$$KM = KD + MD = PD \cdot \text{ctg}\alpha + PD \cdot \text{tg}\alpha = \sqrt{3}(\text{ctg}\alpha + \text{tg}\alpha).$$

так как $KM = 4$, то получаем уравнение для нахождения α

$$\sqrt{3}(\text{ctg}\alpha + \text{tg}\alpha) = 4.$$

5. Решим его:

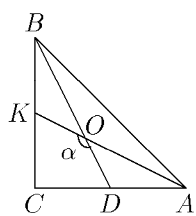
$\sqrt{3}\left(\frac{1}{\text{tg}\alpha} + \text{tg}\alpha\right) = 4$; $\sqrt{3}\text{tg}^2\alpha - 4\text{tg}\alpha + \sqrt{3} = 0$; $\text{tg}\alpha_1 = \sqrt{3}$; $\text{tg}\alpha_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\alpha_1 = 60^0$; $\alpha_2 = 30^0$.

Значит, если $\angle MKP = 60^0$, то $\angle KMP = 30^0$, а если $\angle MKP = 30^0$, то $\angle KMP = 60^0$.

Ответ: 30^0, 60^0.

Задача 7. Найти угол между медианами равнобедренного прямоугольного треугольника, проведенными к катетам этого треугольника.

Дано:
ΔABC, $\angle C = 90^0$
$AC = BC$
AK, BD – медианы
$\underline{AK \cap BD = O}$
Найти $\angle KOD$.



Решение:

I способ.

1. Обозначим один из углов между медианами BD и AK, например угол KOD, через α. Найдем этот угол. Угол KOD является углом четырехугольника $CKOD$. Известно, что сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360^0, значит,

$$\angle C + \angle OKC + \angle KOD + \angle ODC = 360^0. \tag{1}$$

2. Так как ΔABC – равнобедренный и прямоугольный, AK и BD его медианы, то $\Delta BDC = \Delta AKC$ (по двум катетам). Из равенства этих треугольников следует, что $\angle BDC = \angle AKC$, тогда равенство (1) перепишется

$$90^0 + \alpha + 2 \cdot \angle ODC = 360^0.$$

Отсюда

$$\alpha = 270^0 - 2 \cdot \angle ODC.$$

3. Угол ODC (или угол BDC) найдем из прямоугольного треугольника DBC. Обозначим $BC = a$, тогда $CD = \frac{a}{2}$.

$$\mathrm{tg} \angle BDC = \frac{BC}{CD} = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2$$

Так как угол BDC острый, то $\angle BDC = \mathrm{arctg} 2$.

Тогда $\alpha = 270^0 - 2\mathrm{arctg}2$.

Ответ: $\alpha = 270^0 - 2\mathrm{arctg}2$.

II способ.

Введем систему координат с началом в точке C. Обозначим катеты $BC = AC = a$. Тогда $A(a; 0)$, $K\left(0; \frac{a}{2}\right)$, $B(0; a)$, $D\left(\frac{a}{2}; 0\right)$.

Найдем координаты векторов $\overline{AK}\left(-a; \frac{a}{2}\right)$ и $\overline{BD}\left(\frac{a}{2}; -a\right)$. Косинус угла α между ними определяется по формуле

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AK} \cdot \overline{BD}}{\left|\overline{AK}\right| \cdot \left|\overline{BD}\right|} = \frac{-a \cdot \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cdot (-a)}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}} = \frac{-a^2}{\frac{5}{4}a^2} = -\frac{4}{5};$$

$\alpha = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) = 180^0 - \arccos\frac{4}{5}$.

Ответ: $180^0 - \arccos\frac{4}{5}$.

Докажем, что ответы совпадают, т.е. что верно равенство:

$$\begin{array}{c} 270^0 - 2\mathrm{arctg}2 = 180^0 - \arccos\frac{4}{5}; \\ 90^0 - 2\mathrm{arctg}2 = -\arccos\frac{4}{5} \end{array}.$$

Вычислим косинус от обеих частей (оба угла острые, отрицательные).

$$\begin{array}{c} \cos\left(90^0 - 2\mathrm{arctg}2\right) = \cos\left(-arccos\frac{4}{5}\right) \\ \sin(2\mathrm{arctg}2) = \frac{4}{5}; \\ 2\sin(\mathrm{arctg}2) \cdot \cos(\mathrm{arctg}2) = \frac{4}{5}. \end{array}$$

Обозначим $\mathrm{arctg}2 = \alpha$; тогда $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\mathrm{tg}\alpha = 2$. Выразим $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ через $\mathrm{tg}\alpha$:

$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$; $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$; $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$; $\sin\alpha=\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$.

Теперь $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\cdot\frac{\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{2\cdot 2}{2+4}=\frac{4}{5}$, равенство доказано.

Задача 8. Две касательные, проведенные из одной точки к окружности радиуса R, образуют угол 60^0. Найти радиус окружности, которая вписана в угол, образованный этими касательными, и касается данной окружности.

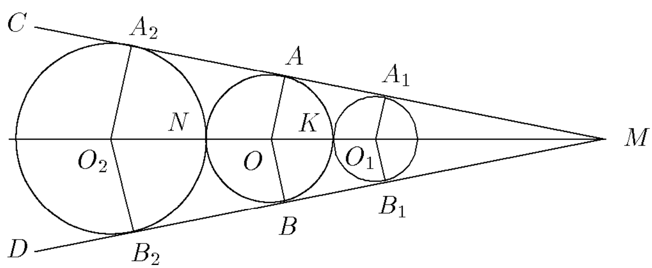
Дано: (см.рис.)
$(O;R)$ – окружность, $\angle CMD=60^0$;
A, B – точки касания MC и MD с $(O;R)$
$(O_1;r_1)$, $(O_2;r_2)$ – окружности;
A_1, B_1 – точки касания MC и MD с $(O_1;r_1)$;
A_2, B_2 – точки касания MC и MD с $(O_2;r_2)$;
N – точка касания $(O;R)$ с $(O_2;r_2)$;
K – точка касания $(O;R)$ с $(O_1;r_1)$;

Найти r_1 и r_2.

Решение:

Заметим, что окружностей, вписанных в угол CMD, а значит, касающихся сторон этого угла и касающихся данной окружности $(O;R)$, две – $(O_1;r_1)$ и $(O_2;r_2)$.

Покажем, что точки O, O_1, O_2, N и K лежат на одной прямой.



Центры окружностей O, O_1 и O_2 равноудалены от сторон угла CMD, следовательно, лежат на биссектрисе этого угла. Точки касания окружностей K и N лежат на линии центров OO_1 и OO_2 соответственно. Итак, доказали, что точки O, O_1, O_2, N и K лежат на одной прямой, а именно на биссектрисе угла CMD. Радиусы окружностей r_1 и r_2 найдем, используя подобие треугольников.

1. Прямоугольные треугольники O_1A_1M, OAM и O_2A_2M – подобны, так как имеют общий острый угол A_2MO_2. Из подобия треугольников следует

$$\frac{R}{r_1} = \frac{MO}{MO_1} \qquad \text{и} \qquad \frac{r_2}{R} = \frac{MO_2}{MO} \tag{1}$$

2. В ΔOAM $\angle A = 90^0$, $\angle M = 30^0$ (так как MO – биссектриса угла CMD). Значит, $MO = 2R$.

3. Отрезки $MO_1 = MO - OO_1 = 2R - (R + r_1) = R - r_1$,

$$MO_2 = MO + OO_2 = 2R + (R + r_2) = 3R + r_2.$$

4. Пропорции (1) перепишутся:

$$\frac{R}{r_1} = \frac{2R}{R - r_1} \qquad \text{и} \qquad \frac{r_2}{R} = \frac{3R + r_2}{2R}.$$

Отсюда

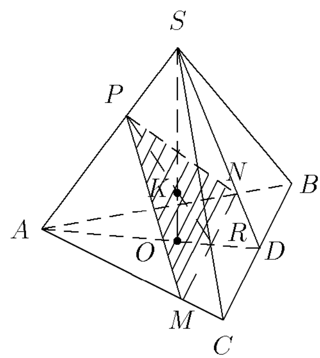
$$r_1 = \frac{R}{3} \qquad \text{и} \qquad r_2 = 3R.$$

Ответ: $\frac{R}{3}$; $3R$.

Задача 9. Найти площадь сечения правильной треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через середину высоты пирамиды параллельно боковой грани, если сторона основания пирамиды равна a, высота пирамиды равна h.

Дано:
$SABC$ – правильная пирамида,
AB=a
$SO = h$ – высота,
плоскость α проходит через середину высоты;
$\alpha ||$ боковой грани.

Найти площадь сечения.



Решение:

1. Построим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину высоты SO, точку K, параллельно грани, например CSB. Проведем плоскость через SO и SA. Эта плоскость пересечет боковую грань CSB по апофеме SD, а основание ABC по высоте AD. В этой плоскости через точку K, середину SO, проведем прямую параллельно SD. Обозначим точки

пересечения этой прямой с SA и AD через P и R соответственно. Через точку P проведем прямые $PN||SB$, $PM||SC$. Соединим точки M и N. MN пройдет через R параллельно CB. В сечении получится равнобедренный треугольник MPN. Найдем его площадь.

$$S_{\Delta MPN} = \frac{1}{2} MN \cdot PR.$$

$AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ – высота равностороннего треугольника со стороной a.

$AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$OD = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

$SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = \sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{36}} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}$.

Так как K – середина SO и $KP||SD$, то R – середина OD, значит, $OR = RD = \frac{1}{2}OD = \frac{a\sqrt{3}}{12}$, $AR = AO + OR = \frac{a\sqrt{3}}{3} + \frac{a\sqrt{3}}{12} = \frac{5a\sqrt{3}}{12}$.

Из подобия треугольников AMN и ACB следует, что $\frac{AR}{AD} = \frac{MN}{CB}$, отсюда $MN = \frac{AR \cdot CB}{AD} = \frac{5a\sqrt{3} \cdot a}{12} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{5a}{6}$.

Из подобия треугольников APR и ASD $(PR||SD)$ следует, что

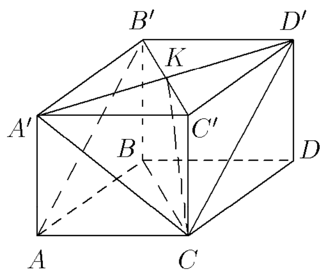
$\frac{AR}{AD} = \frac{PR}{SD}$, отсюда $PR = \frac{AR \cdot SD}{AD} = \frac{5a\sqrt{3}}{12} \cdot \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{5}{6}\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}$;

$S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5a}{6} \cdot \frac{5}{6}\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}} = \frac{25a}{72}\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}$.

Ответ: $\frac{25a}{72}\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}$.

Задача 10. Найти угол между скрещивающимися диагоналями двух боковых граней прямой треугольной призмы, все ребра которой равны между собой.

Дано:
$ABCA'B'C'$ – прямая призма,
$A'C$ и AB' – скрещивающиеся диагонали граней.
$\underline{AB = BC = \cdots = B'C'.}$
Найти угол между $A'C$ и AB'



Решение:

Обозначим ребро призмы через a. Достроим призму до параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$. Так как грани $CC'D'D$ и $AA'B'B$ параллельны и равны, то $CD'||AB'$ и $CD' = AB'$.

Следовательно, искомый угол есть $\angle A'CD'$.

Так как ребра призмы $ABCA'B'C'$ равны a, то $A'C = CD' = a\sqrt{2}$. Высота CK равнобедренного треугольника $CA'D'$ является и медианой, а так как $A'B'C'D'$ – параллелограмм, то K – точка пересечения его диагоналей, а значит, $C'K = \frac{a}{2}$.

Из прямоугольного треугольника $CC'K$ найдем CK.

$$CK = \sqrt{CC'^2 + C'K^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Из $\Delta CA'K$: $\cos\angle A'CK = \frac{CK}{A'C} = \frac{a\sqrt{5}}{2a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

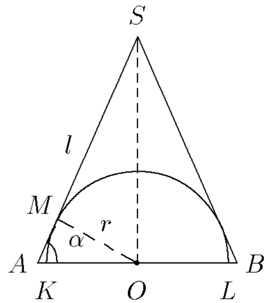
Значит, $\angle A'CK = \arccos\frac{\sqrt{10}}{4}$, а $\angle A'CD' = 2\angle A'CK = 2\arccos\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Ответ: $2\arccos\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Задача 11. В конус вписан полушар. Большой круг полушара лежит в плоскости основания, а поверхность шара касается поверхности конуса. Найти объем полушара, если образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол α

Дано:
SAB – конус,
$SA = l$, $\angle SAO = \alpha$,
Полушар вписан в конус,
KL – диаметр полушара
KL лежит на AB – диаметре основания конуса.

Найти V полушара.



Решение:

Чтобы вычислить объем шара, надо найти r. $OM = r$. Найдем r:

1. $OA = l\cos\alpha$ из ΔSOA.

2. Из ΔAMO $MO = AO\sin\alpha = l\cos\alpha\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}l\sin 2\alpha$,
значит, $r = \frac{1}{2}l\sin 2\alpha$.

3. $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi r^3$.

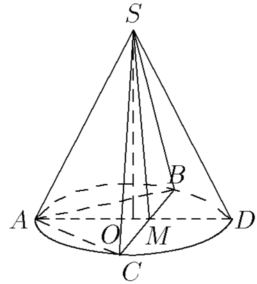
$\frac{1}{2}V_{\text{шара}} = \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi\frac{1}{8}l^3\sin^3 2\alpha = \frac{1}{12}\pi l^3\sin^3 2\alpha$.

Ответ: $\frac{1}{12}\pi l^3\sin^3 2\alpha$.

Задача 12. В конус вписана правильная треугольная пирамида. Площадь боковой грани пирамиды равна площади осевого сечения конуса. Найти отношение площадей боковых поверхностей конуса и пирамиды.

Дано:
$SABC$ – правильная треугольная пирамида, вписанная в конус,
$S_{\text{бок.грани пирам}} = S_{\text{ос.сечен. конуса}}$

Найти $S_{\text{б.п.к}} : S_{\text{б.п.пир.}}$



Решение:

В основании правильной треугольной пирамиды лежит правильный треугольник. Пусть его сторона равна a. И пусть высота конуса равна h. Так как пирамида правильная и вписана в конус, то высота пирамиды совпадает с высотой конуса и основанием высоты будет центр равностороннего треугольника ABC.

1. Все боковые грани пирамиды равны, поэтому

$$S_{\Delta SAB} = S_{\Delta SAC} = S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}a \cdot SM,$$

где SM – высота боковой грани.

По теореме о трех перпендикулярах, так как $SM \perp BC$, то $AM \perp BC$. OM – радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

$$OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Из прямоугольного треугольника SOM

$$SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}} = \frac{\sqrt{a^2 + 12h^2}}{2\sqrt{3}}.$$

Итак,

$$S_{\text{бок.грани}} = \frac{a\sqrt{a^2 + 12h^2}}{4\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}\sqrt{a^2 + 12h^2}}{12}.$$

2. Площадь осевого сечения конуса

$$S_{\text{ос.сеч.}} = \frac{1}{2}AD \cdot SO = \frac{1}{2}2R \cdot h = R \cdot h,$$

где R – радиус основания конуса или радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC.

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \qquad S_{\text{ос.сеч.}} = \frac{ah\sqrt{3}}{3}.$$

3. Так как по условию задачи площадь боковой грани пирамиды равна площади осевого сечения конуса, то

$$\frac{a\sqrt{3}\sqrt{a^2+12h^2}}{12} = \frac{ah\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a^2+12h^2 = 16h^2; \qquad a = 2h.$$

4. Площадь боковой поверхности конуса $S_{\text{б.к.}} = \pi Rl$, где $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, l – образующая конуса,

$$l = SA = \sqrt{SO^2+AO^2} = \sqrt{R^2+h^2} = \frac{\sqrt{3a^2+9h^2}}{3}.$$

$$S_{\text{б.к.}} = \pi\frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3a^2+9h^2}}{3} = \frac{\pi a\sqrt{a^2+3h^2}}{3}.$$

Так как $a = 2h$, то

$$S_{\text{б.к.}} = \frac{2\pi\sqrt{7}h^2}{3}.$$

5. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды

$$S_{\text{б.п.}} = \frac{1}{2}P_{\text{осн.}}\cdot SM = \frac{1}{2}\cdot 3a\cdot\frac{\sqrt{a^2+12h^2}\cdot\sqrt{3}}{3\cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a\sqrt{a^2+12h^2}.$$

Так как $a = 2h$, то

$$S_{\text{б.к.}} = \frac{6\sqrt{3}h^2}{3} = 2\sqrt{3}h^2.$$

6.

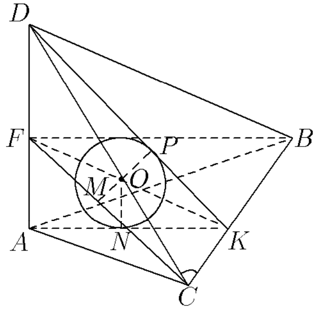
$$\frac{S_{\text{б.к.}}}{S_{\text{б.п.}}} = \frac{2\pi\sqrt{7}h^2}{3} : 2\sqrt{3}h^2 = \frac{\pi\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{21}}{9}.$$

Ответ: $\frac{\pi\sqrt{21}}{9}$.

Задача 13. В тетраэдре $ABCD$ грань ABC – прямоугольный треугольник $(\angle BCA = 90^0)$, ребро AD перпендикулярно плоскости ABC; $AD = BC = 3$ см, $AC = 4$ см. Найти радиус сферы, вписанной в тетраэдр.

Дано:
$ABCD$ – тетраэдр,
$\angle ACB = 90^0$,
$DA \perp$ пл. ABC
$AD = BC = 3$ см, $AC = 4$ см
Сфера, вписанная в тетраэдр

Найти радиус сферы.



Решение:

I способ.

Определим положение центра данной сферы.

Так как сфера вписана в тетраэдр, то она касается всех граней тетраэдра, а значит центр сферы равноудален от граней тетраэдра на расстояние, равное радиусу сферы. Любые две грани тетраэдра образую двугранный угол, а точки, равноудаленные от граней двугранного угла, находятся на плоскости, делящей двугранный угол пополам. Эту плоскость называют биссектором (по аналогии с биссектрисой угла).

Следовательно, центр сферы, вписанной в тетраэдр, есть точка пересечения биссекторов всех двугранных углов тетраэдра.

Биссекторы двугранных углов содержат биссектрисы линейных углов. Построим биссекторы двугранных углов тетраэдра при ребрах AD и CB и найдем их линию пересечения, на которой и будет лежать центр сферы, вписанной в тетраэдр.

1. Линейным углом двугранного угла при ребре AD по определению является угол BAC, так как $BA \perp AD$ и $AB \subset$ пл.ADB, и $AC \perp AD$ и $AC \subset$ пл.ADC. (Перпендикулярность прямых AB и AC к прямой AD следует из определения перпендикулярности прямой AD к плоскости ABC).

Проведем биссектрису AK ($K \in BC$) угла BAC. Полуплоскость DAK является биссектором двугранного угла при ребре AD.

2. Аналогично построим биссектор двугранного угла при ребре BC. Линейным углом этого двугранного угла является угол ACD, так как $AC \perp CB$ (по условию) и $AC \subset$ пл.ACB, и $DC \perp CB$ (по теореме о трех перпендикулярах) и $DC \subset$ пл.DCB.

Проведем биссектрису CF ($F \in AD$) угла ACD. Полуплоскость CBF является биссектором двугранного угла тетраэдра при ребре BC.

Итак, центр сферы, вписанной в тетраэдр, лежит на линии пересечения биссекторов DAK и CBF, т.е. на KF.

Пусть O – центр сферы, r – ее радиус.

3. Опустим перпендикуляры ON и OM из центра сферы на грани ABC и ADC, тогда $ON = OM = r$ ($N \in AK,\ M \in CF$).

Радиус сферы найдем, используя подобие треугольников.

4. $\Delta FOM \sim \Delta FKC$, т.к. $OM \perp FC$, $KC \perp FC$.

Тогда
$$\frac{r}{KC} = \frac{FO}{FK} \tag{1}$$

5. $\Delta KON \sim \Delta KFA$, т.к. $ON \perp AK$, $FA \perp AK$.

Тогда
$$\frac{r}{AF} = \frac{KO}{KF} \tag{2}$$

6. $\Delta ADC = \Delta CBA$, т.к. они прямоугольные и $AD = BC$ (по условию) и AC – общий катет.

Из равенства этих треугольников и из того, что CF и AK – биссектрисы этих треугольников, следует, что $AF = CK$.

Сравнив пропорции (1) и (2), делаем вывод, что $FO = OK$

А из этого следует, что $r = \frac{1}{2}KC$.

Найдем длину отрезка KC. Ее можно найти различными способами. Мы предлагаем способ с использованием формул тригонометрии.

7. Обозначим в треугольнике ABC угол BAC через α, тогда
$$\angle CAK = \frac{\alpha}{2}$$

Из прямоугольного треугольника AKC
$$KC = AC \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{AC\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{AC \cdot \frac{BC}{AB}}{1+\frac{AC}{AB}} = \frac{AC \cdot BC}{AB + AC} = \frac{4 \cdot 3}{\sqrt{25}+4} = \frac{4}{3};$$
$$r = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

Ответ: $r = \frac{2}{3}$.

II способ

Известно, что если в многогранник можно вписать сферу радиуса r, то его объем вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}r \cdot S_{\text{п}}$, где $S_{\text{п}}$ – полная поверхность многогранника.

Вычислим V и $S_{\text{п}}$.

1) $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot AD = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 6;$

2) $S_{\text{п}} = S_{ABC} + S_{ADC} + S_{ADB} + S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD + \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{16+9} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{16+9} \cdot 3 = 27.$

3) $r = \frac{3V}{S_{\text{п}}} = \frac{3 \cdot 6}{27} = \frac{2}{3}$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения рекомендуется взять из вариантов письменных работ и из заданий устных вступительных экзаменов.

4. Задания для самоконтроля

Задание 1

I. Письменно ответить на следующие вопросы:

1. Простые и составные числа. Разложение составных чисел на простые множители. Правило нахождения НОД и НОК нескольких чисел.
2. Основное свойство дроби и его применение. Сравнение двух дробей, правила сложения, умножения и деления дробей.
3. Отношение и пропорция. Прямая и обратная пропорциональность. Свойства пропорции.
4. Понятие о проценте. Основные три типа задач на проценты.
5. Модуль действительного числа, его геометрический смысл.

II. Решить следующие упражнения и задачи
(решения сопровождать объяснениями основных положений):

1. Найти наименьшее натуральное число, которое при делении на 7 дает в остатке 6, а при делении на 9 дает в остатке 8.

2. При каких x и y НОД(x, y) =13, НОК(x, y)=1989? Найти числа a и b, если число $84a9b$ делится нацело на 12.

3. Найти разность наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя чисел 180 и 168.

4. В каких случаях неправильная дробь равна 1, больше 1? Может ли такая дробь быть меньше 1? Записать условия, когда дробь $\frac{115}{a}$ правильная (неправильная).

5. Вычислить:

а) $$\left[27^{10}-5\left(\frac{1}{9}\right)^{-8}\cdot 3^{12}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{3^2}\right)^{-8}\cdot 3^8\right]:\left[41\cdot\left(3^{-2}\right)^{-12}\right].$$

б) $$\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{2}\right)^3}\right)^2+2^{-\frac{3}{2}}\cdot\cos\frac{3\pi}{4}.$$

6. Упростить:

а) $$\frac{(a-b)^2+ab}{(a+b)^2-ab}:\frac{a^5+b^5+a^2b^3+a^3b^2}{\left(a^3+b^3+a^2b+ab^2\right)\left(a^3-b^3\right)},\ a\neq\pm b.$$

б) $$\frac{x-1}{x^{3/4}+x^{1/2}}\cdot\frac{x^{1/2}+x^{1/4}}{x^{1/2}+1}x^{1/4}+1.$$

7. Найти число, 3,2% которого равно A, где

а) $$A=\frac{3\cdot\left(0{,}5:1{,}25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)}{\left(1{,}5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}.$$

б) Число А меньше числа В на 60%. На сколько процентов число В больше числа А?

8. Найти такие значения A, B, C и D, при которых справедливы равенства:

а) $\dfrac{x^2-1}{x^3+5x^2+3x-9}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+3}+\dfrac{C}{(x+3)^2}$;

б) $\dfrac{5x^3+x^2-1}{x^4-10x^3+25x^2}=\dfrac{A}{x^2}+\dfrac{B}{x}+\dfrac{C}{(x-5)^2}+\dfrac{D}{x-5}$;

в) $x^4+2x^3-16x^2-2x+15=(x+1)\cdot\left(x^3+Ax^2+Bx+C\right)$;

г) $\dfrac{8x+1}{x^3+2x^2+2x+1}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$.

9. Решить уравнения:

1) $|2x-5|=3$;

2) $3x-7=|7-3x|$;

3) $|4x-5|=x^2$;

4) $\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\cos x}=1$;

5) $\dfrac{3x}{x-1}-\dfrac{2x}{x+2}=\dfrac{3x-6}{x^2+x-2}$;

6) $\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^3}}{x^2-1}=3x-1$;

7) $\dfrac{\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^3}}{x^3+x}=4$;

8) $\dfrac{x-3}{x^2+4x+9}+\dfrac{x^2+4x+9}{x-3}=-2$;

9) $x^3+4x^2+5x+2=0$ (решить уравнение двумя способами: методом подбора и методом разложения на множители).

10) Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases}x^2+xy=2,\\ y^2+xy=2;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{36},\\ xy^2-x^2y=324;\end{cases}$

в) $\begin{cases}xy+x^2+y^2=13,\\ x+y=4.\end{cases}$

10. а) Две автомашины вышли одновременно из одного пункта и идут в одном направлении. Скорость первой машины 40 км/час, а скорость вто-

рой составляет 125% скорости первой. Через 30 минут из того же пункта и в том же направлении вышла третья машина, которая догнала вторую на 1,5 ч. позже, чем первую. Определите скорость третьей машины.

б) Количество работы, выполняемой каждым из трех рабочих, находится в отношении 1:7/4:1/2. За всю работу им заплатили 130 руб. Сколько получил каждый рабочий, если заработок должен быть распределен пропорционально выполняемой работе?

в) Товар, стоивший 100 руб. дважды понижался в цене на одно и тоже количество процентов и стал стоить 64 руб. На сколько процентов каждый раз происходило снижение цены?

г) Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили литр глицерина, а взамен долили литр воды. После перемешивания снова отлили литр смеси и долили литр воды. Наконец, опять после перемешивания отлили литр смеси и долили литр воды. В результате этих операций количество воды в сосуде оказалось в 7 раз большим по объему оставшегося в нем глицерина. Сколько литров глицерина и воды оказалось в сосуде в результате проделанных операций?

Задание 2
Тема. Алгебраические функции

I. Дать письменные ответы на вопросы:

1. Числовые промежутки, их изображение на прямой.
2. Функции, прямая и обратная пропорциональность, их свойства и графики.
3. Линейная функция, её свойства и график.
4. Понятие области определения функции, заданной аналитически. Примеры.
5. Основные свойства числовых неравенств, их применение при решении неравенств, содержащих переменную /привести примеры/.
6. Определение степени с целым, рациональным и действительным показателем. Основные свойства степени.
7. Тождественно равные выражения. Формулы сокращенного умножения. Одночлен и многочлен. Способы разложения многочлена на множители.
8. Определение арифметического квадратного корня, его связь с понятием модуля числа. Основные тождества

$$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}|a|, & n - \text{ четное},\\ a, & n - \text{ нечетное},\end{cases} \qquad \sqrt{a^2}=|a|.$$

Свойства и графики функций $y=\sqrt{x}$, $y=|x|$.

9. Разложение квадратного трехчлена на множители.
10. Метод интервалов. Решение алгебраических квадратных неравенств. Примеры.

11. Арифметическая прогрессия: $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + a_{n+1}\right) \cdot a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$. Геометрическая прогрессия: $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$ $(q \neq 1)$ и $S = \frac{b_1}{1-q}$ для бесконечной прогрессии $\left(|q| < 1\right)$.

II.Выполнить следующие задания:

1. а) Что больше 7^{300} или 3^{500} ?

б) Равносильны ли неравенства $\frac{2}{\sqrt{x+1}} < 0$ и $\left(\frac{2}{\sqrt{x}+1}\right)^2 < 0$?

2. Число a составляет 75% числа b и 40% числа c. Число c на 42 больше числа b. Найти числа a и b.

3. Третий член арифметической прогрессии равен 11, пятый член - 19. Найти десятый член этой прогрессии.

4. Турист рассчитывал пройти a км за определенное время. Пройдя b км, турист отдохнул 15 мин, и чтобы прийти вовремя, увеличил скорость на 6 км/ч. Определить первоначальную скорость движения туриста.

5. Решить неравенства:

а) $x \cdot \frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+9}} \leq 0$; б) $\left|x^2 + 8x + 7\right| < 11$; в) $\left|3x - x^2\right| \geq 4$; г) $x \cdot |5 - x| > 3$;

д) $\frac{\left|x^2 - 1\right|}{x^4 - 1} < 1$; е) $\frac{1}{(3-x)(x+5)} > 1$; ж) $\left|x^2 - 3x\right| \geq x^2 - 3x$. з) $\frac{x+27}{16-2x} < x$;

и) $\left(x^2 - x\right)^2 + 3\left(x^2 - x\right) + 2 \geq 0$; к) $\frac{x^3 - 2x^2 + 5x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geq 1$; л) $x \cdot \frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+9}} \leq 0$.

6. Найти область определения и построить графики следующих функций:

а) $y = \frac{\left|x^5\right|}{x^2}$; б) $y = -\sqrt{4-x}$; в) $y = -x^2 + |x| + 1$;

г) $y = x^2 - |x|$; д) $y = \frac{1}{1+x^2}$; е) $y = -\sqrt{x} + 1$; ж) $y=x^2-9x$.

По графику каждой из этих функций записать область их монотонности (возрастания и убывания).

7. Упростить выражения:

а) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^2}-\sqrt[4]{a}}{1-\sqrt{a}}+\dfrac{1+\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}\right)\cdot\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}$; б) $\dfrac{\sqrt{(x+3)^2-12x}}{\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}}$;

в) $\dfrac{1-a^{-\frac{1}{2}}}{a+a^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}{a-1}$ (вычислить значение при $a=5$) ;

г) $\dfrac{\frac{|x-1|}{x}+x|x-1|+2-\frac{2}{x}}{\sqrt{x-2+\frac{1}{x}}}$.

8. Вычислить:

а) $\dfrac{3:\frac{2}{5}-0{,}09:\left(0{,}5:2\frac{1}{2}\right)}{0{,}32\cdot 6+0{,}03+\left(8{,}3^2-3{,}7^2\right)-0{,}64}$;

б) $\left(9^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}-\left(25^{\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{1}{10}}+\left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{2}{9}\right)^{\frac{6}{7}}\right]^0:36^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

9. Решить уравнения и системы уравнений:

а) $\dfrac{4}{|x-2|}=|x-2|$; б) x^2-y^2 =0; в) $x^3 + 4x^2 + 4x+1=0$;

г) $\begin{cases} x+xy+y=11, \\ x-xy+y=1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} \dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{y}=9, \\ \dfrac{7}{x}-\dfrac{5}{y}=9 \end{cases}$ и найти 2xy;

е) $\sqrt{(x-7)^2}=7-x$; ж) $(x+2)^2+|x+2|=3$;

з) $\left|x^2-2x-1\right|=\dfrac{5x+1}{3}$; и) $\left|x^2-4x\right|=x^2-4x$;

к) $\dfrac{\sqrt[4]{(x-1)^4}}{x^2-1}=3x-1$.

10. При каких значениях a неравенство $\dfrac{ax}{x^2+4}<1{,}5$ выполняется для всех x из **R?**

Задание 3

Тема 1. Функции и графики

1. Понятие четной (нечетной) функции. Перечислить четные (нечетные) основные элементарные функции. Особенности их графиков показать на чертеже.

2. Понятие ограниченной функции. Какие из основных функций ограничены (неограничены) в области их задания? Особенности их графиков.
3. Известные вам периодические функции и особенности построения их графиков.
4. Монотонные функции. Показать их свойства на графиках. Понятие обратимости функции. Может ли обратимая на $[2;5]$ функция иметь минимум в точке x=3? Дайте объяснение.

Выполните следующие практические задания:

1. Найти область определения и множество значений функции:

а) $y=\sqrt[4]{1-2\cos x}$; б) $y=\sqrt{9-x^2}$; в) $y=\sqrt{\sin x}$;

г) y=cosx+2; д) $y=\sqrt{1-tg^2 x}$.

2. Построить графики функций:

а) $y=x^{-\pi}$; б) $y=\arccos(\cos x)$, в) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

г) $y=\left|x^2\right|$; д) $y=\dfrac{1}{|x|}+1$; е) $y=\sin^2 x+\cos^2 x$;

ж) $y=\cos^2 x-\sin^2 x$; з) $y=\dfrac{1-x^2}{|1-x|}$; и) $y=tg|x|$.

Тема II. Тождественные преобразования

1. Упростить выражения:

а) $\left(\dfrac{x^2+y^2}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{x+y}{y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot xy^{-1}$; б) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos(\pi-\alpha)}{\cos^2(\pi-\alpha)\cdot tg\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$;

в) $\dfrac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}+\dfrac{\cos(6\alpha-\pi)}{\cos 2\alpha}$; г) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{tg\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\cdot tg\alpha$;

д) $\dfrac{1+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+2x\right)-\sin^2 x}{\sin 2x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin x\cdot\cos(\pi-2x)}$;

е) $\cos^4 2\alpha-6\cos^2 2\alpha\cdot\sin^2 2\alpha+\sin^4 2\alpha$.

2. Вычислить:

а) sinα, cosα, если $tg\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{2}$;

б) $\dfrac{2\sin 2\alpha - 3\cos 2\alpha}{4\sin 2\alpha + 5\cos 2\alpha}$, если tg α =3;

в). $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = n$.

3. Преобразовать в произведение: $\dfrac{1-\cos(8\alpha - 3\pi)}{tg 2\alpha - ctg 2\alpha}$.

4. Проверить справедливость неравенства: $\dfrac{1}{\sin 10^0} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^0} = 4$.

5. Доказать тождества:

а) $1 - \dfrac{2\sin 4\alpha}{ctg\alpha - tg\alpha} = \cos 4\alpha$; б) $\dfrac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha} \cdot \dfrac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = ctg\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

в) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = \dfrac{1-tg\alpha}{1+tg\alpha}$; г) $\dfrac{\sqrt{a^3} + \sqrt{ab^2} - \sqrt{a^2 b} - \sqrt{b^3}}{a-b} \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{b}}\right) = \dfrac{a+b}{\sqrt{ab}}$;

д) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = \dfrac{1-tg\alpha}{1+tg\alpha}$; е) $\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha} = 2\sin\frac{\alpha}{2}$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

ж) $\cos(270^0 + 4\alpha) + \sin(540^0 - 8\alpha) - \sin(720^0 - 12\alpha) = 4\cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \sin 6\alpha$;

з) $\cos^6\alpha + \sin^6\alpha = \frac{1}{8}(5 + 3\cos 4\alpha)$.

6. Решить уравнения и неравенства:

а) $\sqrt{3}\sin 2x - 6\cos^2 x = -3$; б) $\dfrac{\cos 2x - \sin 4x}{\sin 2x - 1} = 0$;

в) $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = tgx + ctgx$; г) $\cos x - \cos 2x > 0$;

д) $\cos x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin 3x < \sin x$; $(\cos x + 1)\cdot \sin x > 0$;

е) $\cos^2 6x - \sin^2 3x = 1$ и определить сумму корней из промежутка $[-\pi; \pi]$;

ж) $2\sin^2 x - 2\cos x = 3$; з) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$;

и) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$;

к) $2\cos^2\dfrac{x}{2}(1 - \sin x) = \cos^2 x$ и указать решения из промежутка $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$;

л) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4} + \cos^2 2x$; м) $6\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 1$;

н) $tgx - \sin x = 1 - tgx \cdot \sin x$; о) $\sin 3x < \dfrac{1}{2}$; п) $\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) \geq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Тема III. Прогрессии

1. Найти сумму бесконечной геометрической прогрессии, если первый член равен 9, а пятый член - 1/9.
2. Решить уравнение $1+x+x^2+\ldots=7/2$, если $|x|<1$.
3. Первый член арифметической прогрессии равен 429, разность этой прогрессии равна (-22). Сколько нужно взять членов, чтобы сумма прогрессии была равна 3069?

Задание 4
Тема. Производная и её применение

1. Найти производную функций:

а) $f(\mathrm{x}) = x^{\sqrt{3}} - x^{-\sqrt{3}}$;

б) Найти $y'(2)$, если $y = x^{-\sqrt{2}} + x^{-2}$;

в) Найти $f'(-1)$, если $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$;

г) Найти $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, если $f(x) = ctgx + (1+tgx)\cdot\cos x$.

2. Вычислить $5\left[f'(1) - f'(-1)\right]$, если $f(x) = \dfrac{\sqrt{4+x}}{x}$.
3. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3 + x$ в точке с абсциссой $x_o = 0$.
4. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^{-3}$ в точке с абсциссой $x_o = 1$. Выполнить рисунок к задаче.
5. Каковы должны быть размеры квадратного бака, чтобы полная поверхность была наименьшей, если бак вмещает 27 л ?
6. Найдите скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $S = 3t^2 + 4\cos(0{,}5t)$, в момент времени $t = 2c$, если путь измеряется в сантиметрах.
7. Тело движется вдоль оси Ох по закону $x(t) = t - \sin 2t$. Определить ускорение движения этого тела при $t = \frac{\pi}{4}$.
8. Построить график функции:

а) $y = \dfrac{x\sqrt{\left(x-1\right)^2}}{|x|}$; б) $y = \left|3 + 2x - x^2\right| + 3x - 2.$.

9. Найти производную функции $y = f(x)$:

а) $f(x)=\dfrac{3x-\sqrt{x}}{x+1}$;   б) $f(x)=\cos\frac{1}{x}$;   в) $f(x)=x\ln(x^2-1)$.

10. Решить неравенство $\dfrac{y'+2}{y'-1}<2$, если $y=e^{-3x}+2x+16$.

11. а) Сформулировать, в чем состоит геометрический смысл производной функции $y=f(x)$ в точке $x=x_o$.

б) Написать уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$, проведенной в точке $M_o(x_o;y_o)$.

в) Написать условия параллельности и перпендикулярности двух прямых $y=к_1x+b_1$ и $y=к_2x+b_2$.

г) При каком значении x касательная к линии $y=x^2-2x+5$ параллельна прямой $y=2x$?

д) На параболе $y=2x^2-3x+8$ найти точки, касательные в которых проходят через начало координат.

12.1. Сформулировать: а) признак возрастания (убывания) функции;

б) определение критических точек функции;

в) необходимое условие экстремума;

г) признак максимума (минимума) функции;

д) алгоритм исследования функции на экстремум;

е) алгоритм нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке.

12.2. Исследовать функцию на возрастание (убывание) и экстремумы

а) $f(x)=(2x-1)\cdot e^{3x}$.

б) Исследуйте функцию и постройте её график $f(x)=(x^2-6)(3-2x)$.

Сколько действительных корней имеет уравнение $f(x)=a$ в зависимости от a.

в) Найти множество значений функции $y=10^x+3\cdot 10^{-x}$.

Указание: используйте методы дифференциального исчисления.

13. а) Найти наименьшее значение функции $y=\frac{3}{4}|x|-x^3$ на отрезке $[-1;1]$.

б) На координатной плоскости Оxy вершина A прямоугольного треугольника ABC ($\angle B=90^0$) имеет координаты (-2; 0), вершина B лежит на отрезке [2; 3] оси Ox, а вершина C лежит на параболе $y=x^2-4x+1$. Какие координаты должна иметь вершина C, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей?

14. Объем правильной четырехугольной пирамиды равен $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. Какое наименьшее значение может принимать площадь боковой поверхности пирамиды?

15. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 5 + 4x - x^2$, $2x - y - 3 = 0$.

Задание 5

Тема. Начальные геометрические понятия. Треугольники. Параллельные прямые. Четырехугольники

I. Ответить письменно на следующие вопросы:

1. Дать определение равнобедренного треугольника. Доказать свойства равнобедренного треугольника.
2. Сформулировать и доказать свойства точек, равноудаленных от концов отрезка.
3. Дать определение параллельных прямых. Доказать два признака параллельных прямых.
4. Доказать теорему о сумме углов треугольника и о сумме углов выпуклого многоугольника.
5. Дать определение параллелограмма и сформулировать его свойства. Доказать три признака параллелограмма.
6. Дать определения прямоугольника, ромба, квадрата и сформулировать их свойства.

II. Решить следующие задачи:

1. Отрезок, равный 28 см разделен на три неравных отрезка. Расстояние между серединами крайних отрезков равно 16 см. Найти длину среднего отрезка.
2. Найти угол, образованный биссектрисами двух смежных углов.
3. Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.
4. Периметр одного треугольника больше периметра другого. Могут ли быть равными эти треугольники?
5. На сторонах угла САД отмечены точки В и Е так, что точка В лежит на отрезке АС, а точка Е- на отрезке АД, причем АС=АД, АВ=АЕ. Докажите, что ∠СВД=∠ДЕС.
6. Отрезки АВ и СД пересекаются в их общей середине О. Точки М и F – середины отрезков АС и ВД. Докажите, что точка О – середина отрезка MF.
7. Докажите, что треугольники АВС и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $AM=A_1M$, где АМ и A_1M – медианы треугольников.
8. На стороне АД треугольника АДС отмечена точка В так, что ВС=ВД. Докажите, что прямая ДС параллельная биссектрисе угла АВС.
9. В трапеции АВСД углы АВС и АСД равны. Определить диагональ АС, если основания ВС и АД соответственно равны 12 см и 27 см.
10. На сторонах ВС и СД квадрата АВСД взяты точки Н и М, так, что

ВН:НС = СМ:МД =1:2. Отрезки АН и ВМ пересекаются в точке Р. Найти отношение АР:РН.

11. В прямоугольный треугольник, каждый катет которого равен 6 м, вписан прямоугольник, имеющий с треугольником общий угол. Найти периметр прямоугольника.
12. Доказать, что биссектрисы всех четырех углов параллелограмма, пересекаясь, образуют прямоугольник.

Дополнительные задачи

1. В треугольник вписан параллелограмм со сторонами 3 см и 5 см и диагональю 6 см. Найти стороны треугольника, если диагонали параллелограмма параллельны боковым сторонам треугольника, а меньшая из его сторон лежит на основании треугольника.
2. Один из углов параллелограмма равен 60°, а меньшая диагональ $2\sqrt{31}$ см. Перпендикуляр, проведенный из точки пересечения диагоналей к большей стороне равен $\sqrt{75}/2$ см. Определить стороны и большую диагональ параллелограмма.
3. Определить катеты прямоугольного треугольника, если гипотенуза равна *с*, а медиана, проведенная из вершины острого угла к одному из катетов, равна m.
4. В ромбе АВСД со стороной, равной 6 см, и углом ВАД, равным $\dfrac{\pi}{3}$, на стороне ВС взята точка Е на расстоянии 2 см от С. Найти расстояние от точки Е до центра симметрии ромба.

Задание 6

Тема: Окружность. Вписанные и описанные многоугольники. Площади плоских фигур. Векторы

I. Ответить письменно на следующие вопросы:

1. Дать определение окружности, описанной около треугольника. Доказать теорему о центре описанной около треугольника окружности.
2. Дать определение вписанной в данный треугольник окружности.
3. Дать определение касательной к окружности. Сформулировать и доказать свойство касательной к окружности.
4. Вывести формулы площадей параллелограмма, треугольника, трапеции.
5. Дать определение окружности. Вывести формулу расстояния между двумя точками и уравнение окружности.

II. Решить следующие задачи:

6. Могут ли касаться две окружности, если их радиусы равны 30 см и 40 см, а расстояние между их центрами 65 см ?
7. Радиусы двух внешне касающихся окружностей 20 см и 12 см. Общая внешняя касательная этих окружностей пересекает линию их центров в точке М. Найти расстояние точки М от центра большей окружности.
8. В треугольник вписан полукруг, у которого полуокружность касается основания, а диаметр (с концами на боковых сторонах треугольника) параллелен основанию. Определить радиус, если основание треугольника равно a, а высота h.
9. Величина угла при основании равнобедренного треугольника равна φ. Найти отношение радиуса вписанной в данный треугольник окружности к радиусу описанной около данного треугольника окружности.
10. Из внешней точки проведены к окружности две секущие, из которых одна проходит через центр и имеет внешний отрезок, равный $\frac{1}{4}$ радиуса окружности, у другой секущей внешний и внутренний отрезки равны между собой. Определить угол между секущими.
11. Меньшая сторона параллелограмма равна 13 см, высота, опущенная на боковую сторону, равна 12 см, меньшая диагональ равна 15 см. Найти площадь параллелограмма.
12. В треугольник, у которого основание равно 30 см, а высота 10 см, вписан прямоугольник с площадью 63 см^2. Определить стороны этого прямоугольника.
13. В равнобокой трапеции большее основание 44 см, боковая сторона 17 см и диагональ 39 см. Найдите площадь трапеции.
14. Катеты прямоугольного треугольника 6 см и 8 см. Через середину меньшего катета и середину гипотенузы проведена окружность, касающаяся гипотенузы. Найти площадь круга, ограниченного этой окружностью.
15. При каком значении x векторы $\vec{a}$ (6;0;12) и $\vec{b}$ (-8;13;x) перпендикулярны?

16.Определить угол между векторами $2\vec{a}$ и $1/2\vec{b}$, если $\vec{a}(-4;2;4)$, $\vec{b}(2;-2;0)$.

17.Найдите вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}(2;1;-1)$ и удовлетворяющий условию $\vec{a}\cdot\vec{b}=3.$

18. Доказать, что точки А(2;4;-4), В(1;1;3), С(-2;0;3), Д(-1;3;-4) являются вершинами параллелограмма.

Дополнительные задачи

1. В параллелограмме PQRS угол при вершине Q равен 110^o, а биссектриса угла при вершине P пересекает сторону RS в точке L. Найти радиус ок-

ружности, касающейся отрезка PQ и лучей QR и PL, если известно, что PQ=9.

2. В данном квадрате каждая вершина соединена с серединой стороны, лежащей между двумя следующими вершинами (считая вершины в одинаковом порядке). Соединительные прямые образуют своим пересечением внутренний квадрат. Найти отношение площадей этих квадратов.
3. Около окружности с радиусом R описан равнобедренный треугольник с углом 120^{o}. Найти стороны этого треугольника.
4. Периметр ромба равен 2p см, сумма длин его диагоналей равно m см. Найти площадь ромба.
5. Вычислить площадь трапеции по разности оснований, равной 14 см, и двум непараллельным сторонам, равным 13 см и 15 см, если известно, что в трапецию можно вписать окружность.
6. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов и боковой стороны на расстоянии 3 см и 9 см. Найти стороны трапеции, радиус окружности.

Задание 7
Тема: Стереометрия

I. Письменно ответить на следующие вопросы:

1. Дать определение параллельности прямой и плоскости. Сформулировать и доказать признак параллельности прямой и плоскости.
2. Дать определение параллельности двух плоскостей. Сформулировать и доказать признак параллельности двух плоскостей.
3. Дать определение перпендикулярности прямой и плоскости. Доказать теорему о перпендикулярности прямой и плоскости.
4. Дать определение перпендикулярности двух плоскостей. Доказать теорему о перпендикулярности двух плоскостей (признак перпендикулярности двух плоскостей).

II. Решить следующие задачи:

1. Даны параллелограмм АВСД и не пересекающая его плоскость. Через вершины параллелограмма проведены параллельные прямые, пересекающие данную плоскость в точках A_1, B_1, C_1, $Д_1$. Найти длину отрезка $ДД_1$, если $BB_1=b$, $CC_1=c$.
2. Дан равнобедренный треугольник с основанием 6 м и боковой стороной 5 м. Из центра вписанного круга восстановлен перпендикуляр к плоскости треугольника длиной 2 м. Найдите расстояния от конца этого перпендикуляра до сторон и вершин треугольника.

3. Катеты прямоугольного треугольника АВС равны 12 дм и 16 дм. Из вершины прямого угла С восстановлен к плоскости треугольника перпендикуляр СМ=28 дм. Найдите расстояние от точки М до гипотенузы.
4. В прямом параллелепипеде $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ АВ=29 см, АД=36 см, ВД=25 см и боковое ребро равно 48 см. Определить площадь сечения $АВ_1С_1Д$.
5. Дана правильная треугольная призма, сторона основания которой равна *а*. Через середины двух сторон основания M и N проведена плоскость под углом 60^o к основанию, которая пересекает боковое ребро в точке К. Найти площадь сечения КMN.
6. Основанием пирамиды SABCD служит квадрат ABCD, длина стороны которого равна *а*. Ребро BS перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2*а*. Найти периметр сечения, проходящего через сторону AD и середину ребра BS.
7. Основание пирамиды – ромб с острым углом α и меньшей диагональю d. Все двугранные углы при сторонах основания равны β. Найти объем пирамиды.
8. Отношение высоты конуса к радиусу описанного около него шара равно q и высота больше радиуса. Найти отношение объемов конуса и шара.
9. Определите объем шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой b, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом α.
10. Радиус основания цилиндра равен R, а боковая поверхность его равна сумме площадей оснований. Найти объем цилиндра.
11. Прямоугольный треугольник с катетом b и острым углом 60^o вращается вокруг гипотенузы. Найти площадь поверхности фигуры вращения.
12. Найти объем конуса, вписанного в правильную треугольную пирамиду с боковым ребром *l* и плоским углом α при вершине.

Дополнительные задачи

1. На ребрах АВ и СД правильного тетраэдра АВСД расположены соответственно точки М и Р так, что АМ:АВ=ДР:ДС=1:3. Найти площадь сечения тетраэдра, проведенного через точки М и Р параллельно прямой АС, если ребро тетраэдра равно *l*.
2. В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида. Определить объем этой пирамиды, если радиус окружности, описанной около её основания равен r.
3. Около сферы радиуса r описан усеченный конус (основания и каждая образующая конуса касается сферы), образующая которого равна *l*. Найти объем этого конуса.

4. Боковая поверхность цилиндра вдвое больше суммы площадей его оснований. Найти угол между диагональю осевого сечения и плоскостью основания цилиндра.
5. Конус вписан в шар. Найти длину образующей конуса, если она составляет с плоскостью основания угол 30°, а площадь поверхности шара равна 16π ед.^{2}.

Задание 8

Тема 1: Свойства показательной и логарифмической функции

1. Понятие логарифма числа. Десятичный и натуральный логарифмы числа.
2. Основные свойства степени с действительным показателем и основные логарифмические тождества.
3. Какими основными свойствами обладает показательная и логарифмическая функции?
4. Каков геометрический и механический смысл первой (второй) производной функции в точке?

Выполните следующие практические задания:

1. Вычислить:

а) $\log_{\sqrt{3}} 18 - \log_3 4$; б) $\left(\dfrac{1}{13}\right)^{\log_{13}(3+1+\frac{1}{3}+\ldots)}$;

в) $\left(\dfrac{\log_6 27 - 2\log_6 2}{\log_6 \sqrt[3]{0{,}25} - \log_6 \dfrac{1}{3}}\right)^3$.

2. Сравните числа:

а) $7^{\log_7 11}$ и $11^{\log_{11} 3}$; б) $\log_2 5 + \log_5 3$ и 4;

в) $\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$ и $3^{1{,}5}$; г) $\log_{0,2}0{,}8 + \log_{0,2}5$ и 0;

д) $9^{\log_3 6}$ и $2^{\frac{1}{2}\log_2 16}$; е) $\dfrac{\lg 5 + \lg\sqrt{7}}{2}$ и $\lg\dfrac{5+\sqrt{7}}{2}$.

3. Решить уравнения:

а) $7\cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$; б) $34^x - 5\cdot 6^x + 2^{3x} = 0$;

в) $\log_2(1-x) + \log_2(-5x-2) = 2 + \log_2 3$; г) $4\ln^2 x - \ln x^2 = 2$;

д) $\log_2(4^x+4) = x + \log_2(2^{x+1}+3)$, е) $25^{|1-2x|} = 5^{4-6x}$;

ж) $4^x - 3^{x-0{,}5} = 3^{x+0{,}5} - 2^{2x-1}$; з) $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$;

и) $3\cdot 16^x + 36^x = 18\cdot 81^{x-0,5}$; к) $x^{0,5\log_{\sqrt{x}}(x^2-x)} = 3^{\log_9 4}$;

л) $x^{\log_3^3 x - 3\log_3 x} = 3^{-\log_{\sqrt{2}} 64+8}$; м) $3\lg(x^2) - \lg^2(-x) = 9$;

н) $\log_{49}(2x^2 + x - 5) + \log_{1/7}(1+x) = 0$;

о) $\log_2 \log_3(x^2 - 16) - \log_{1/2} \log_{1/3} \dfrac{1}{x^2-16} = 2$;

п) $\log_4 x + \log_x 2 - \log_4 \sqrt{x} = 1.$

р) Найти наибольший положительный корень уравнения

$$\log_{3x} \frac{3}{x} + \log_3^2 x = 1.$$

4. Решить неравенства:

а) $2^{3-x} : 16 < \dfrac{1}{8}\cdot 4^{0,5+2x}$; б) $9\cdot\left(\dfrac{1}{27}\right)^{1+\frac{1}{2}x} > \dfrac{1}{81^x}$;

в) $\log_2(2-x) - \log_2 x < \log_2 0,2$; г) $\dfrac{2\log_2(3-3x)}{\log_{0,2} 0,1} < 0$;

д) $8\cdot\dfrac{3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$; е) $0,008^x + 5^{1-3x} + 0,04^{\frac{3}{2}(x+1)} < 30,04$;

ж) $\log_5(x+2) + \log_5(x-5) < \log_{25}(x-5)^2$; з) $\log_{x-\sqrt{2}} \dfrac{x+7}{x+2} \le \log_{x-\sqrt{2}} 2x$;

5. Решить системы:

а) $\begin{cases} 3^{1+\log_3(x+2y)} = 6x \\ 3^{x^2-2y} = 9^{0,5x} \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+2y = 13 \\ 2\log_4 x - \log_4(2y-1) = 0,5 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} \log_{\sqrt{3}}(x-y) = 2 \\ 2^{x+2}\cdot 5^x = 40; \end{cases}$ г) Найти x^y, если $\begin{cases} \dfrac{2^y}{5^x} = 200, \\ \lg(x+y) = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2,5 \\ x : y = 27; \end{cases}$

е) Вычислить: $5^{\log_{1/5}\frac{1}{2}} + \log_{\sqrt{2}} \dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} + \log_{1/2} \dfrac{1}{10+2\sqrt{21}}$.

Тема II. Задачи на применение производной

1. Доказать, что $y = 5\cdot e^{-3x}$ удовлетворяет уравнению $y' = -3y$

2. Найти $f'(x)$ и $f'(0)$, если $f(x)=10\ln\left(\frac{1}{5}x+e\right)$ и $f'(x)$, если

$$f(x)=\frac{4}{x}-x^3-1.$$

3. Составить уравнение касательной к графику f(x)= e^x-e^{-x}, параллельной прямой y=2x+1.

4. Найти экстремумы функций:

а) $y=x^3\ln x$; б) $y=e^{x^4-2x^2}$.

5. Исследовать на монотонность функции:

а) $f(x)=\ln x-x$; б) $f(x)=\dfrac{x^3-x^2}{e^{-x^2}}$.

6. Конус наибольшего объема вписан в шар. Найти отношение радиуса шара к высоте конуса.

Задание 9

Вариант 1

1. Решить систему неравенств $\begin{cases}\left|x^2+5x\right|<6,\\ \left|x+1\right|\le 1.\end{cases}$
2. Решить уравнение $\sqrt{2}\cdot\cos^2 7x-\cos 7x=0.$
3. Решить неравенства:

а) $\log_3\dfrac{1-2x}{x}\le 0$; б) $\dfrac{x}{x+1}>\dfrac{2x}{x+3}-\dfrac{1}{4}$ (удобно использовать метод интервалов).

4. Найти высоту цилиндра с наибольшей площадью боковой поверхности, который может быть вписан в шар радиуса R.
5. В первой сетке 150 тетрадей, из них 32% - тетради в клетку, во второй сетке 210 тетрадей, из них 20% - тетради в клетку. Какой процент составляет тетради в клетку от общего числа?

Вариант 2

1. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна $16\sqrt{3}$ дм^2. Какой наибольший объем может иметь эта пирамида?

2. Упростить выражение $\dfrac{\sin^4\alpha+2\cos\alpha\cdot\sin\alpha-\cos^4\alpha}{2\cos^2\alpha-1}$ и вычислить его значение при $\alpha=-\dfrac{3\pi}{8}$.
3. Решить неравенства:

   а) $\ln(2x-3)<\ln(x+1)$; б) $\dfrac{\sqrt{x^2-5}}{3-x}\ge 0$.
4. Решить уравнение $x\sqrt{36x+1261}=18x^2-17x$.
5. В арифметической прогрессии сумма второго и пятого членов равна 8б, а третьего и седьмого равна 14. Найти прогрессию.

Вариант 3

1. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен 90^0. Найти отношение боковой поверхности этой пирамиды и площади её основания.
2. Решить неравенство $\log_{\sin\frac{\pi}{6}}(x^2-4x+3)\ge -3$. Найти наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $\sqrt{x^2-14x+49}\ge x+11$.
3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=tgx+ctgx$, если $x\in\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$.
4. Решить уравнение $3\sin x+\cos 2x=-1$.
5. Найти x из уравнения $\dfrac{0{,}125x}{\left(\dfrac{19}{24}-\dfrac{27}{40}\right)\cdot 8\dfrac{7}{10}}=\dfrac{\left(1\dfrac{28}{63}-\dfrac{17}{21}\right)\cdot 0{,}7}{0{,}675\cdot 2{,}4-0{,}02}$.

Вариант 4

1. Найти сумму трех чисел, зная, что третье число относится к первому как 4,5:15/4 и составляет 40% второго, а сумма первого и второго равна 400.
2. Решить неравенства:

   а) $\sqrt{2x+3}\ge -2-3x$; б) $(x^2+2x-24)\sqrt{x^2-3x-5}\ge 0$;

   в) $\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}\ge\dfrac{1}{x+1}$; г) $\sqrt{2-x}\le\sqrt{x+17}+\sqrt{2x-4}$;

   д) $\sqrt{2x^2-3x-5}<x-1$; е) $4^{-|x-5|}\le 0{,}125$.

3. Найти точки экстремума у = 3^{x^3-3x} и промежутки монотонности функции.
4. Решить уравнения:

а) $\lg(3x-2)-2=\lg(x^2-1)-\lg 50;$ б) $3^{|\sin x-1|}=9;$

в) $8\cos^4 x-8\cos^2 x-\cos x+1=0,$ где $x\in\left(120^0;180^0\right).$

5. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Высота пирамиды равна h. Все боковые ребра составляют с плоскостью основания один и тот же угол β. Найти объем пирамиды.

Вариант 5

1. а) Вычислить наиболее рациональным способом

$$\left(\frac{\sqrt{561^2-459^2}}{4\frac{2}{7}\cdot 0{,}15+4\frac{2}{7}:\frac{20}{3}}+4\sqrt{10}\right):\frac{1}{3}\sqrt{40}.$$

б) Вычислить $\log_{11/25}|\sin 3\beta|+\log_{11/25}|\sin\beta|$, если $\sin(\beta-\frac{\pi}{4})+\cos(\beta-\frac{\pi}{4})=\sqrt{\frac{2}{5}}.$

2. Решить уравнение $\log_{\sqrt{2}\sin x}(1+\cos x)=2.$
3. Решить неравенство $|x+1|^{2x^2 3x}+|x+1|^{x^2+\frac{3}{2}x}-2>0.$
4. При каком целом значении b один из корней уравнения $4x^2-(3b+2)x+(b^2-1)=0$ втрое меньше другого?
5. Прямой параллелепипед, имеющий в основании ромб со стороной a и острым углом 2α, пересечен плоскостью, проходящей через вершину угла 2α и дающей в сечении ромб с острым углом α. Определить площадь сечения.
6. От двух кусков сплава с различным процентным содержанием меди, весящих соответственно m кг и n кг, было отрезано по курсу равного веса. Каждый из отрезанных кусков был сплавлен с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих сплавах стало одинаковым. Сколько весил каждый из отрезанных кусков?

Задание 10

I. Ответить письменно на следующие вопросы:

1. Какие замечательные точки треугольника вы знаете?
2. Как исследовать функцию $y=tgx+\dfrac{1}{x^2-1}$ на четность ?
3. Как определить, является ли числовая последовательность a_n прогрессией? Исследовать последовательность $a_n=3n^2-1.$
4. Какие методы решения систем уравнений вы знаете?

5. Как построить линейный угол двугранного угла?
6. Как найти радианную меру угла?
7. Что больше, $\cos 1235^0$ или $\cos 35^0$?
8. Как построить график функции $y = \dfrac{x-1}{x+3}$?
9. Сформулировать достаточное условие экстремума функции.
10. Найти сумму корней уравнения $x^2 - 4|x| + 3 = 0$.
11. Решить уравнение $\dfrac{1}{4}\lg x^{2\lg x} = \lg\sqrt{x}$.
12. Укажите два промежутка, являющиеся решениями уравнения $\sqrt{(x-1)^2} = 1 - x$. Укажите наибольшее число, являющееся решением данного уравнения.

II.Решить следующие задачи:

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = 0{,}5x^2 - 3x + 2$ и y = x - 4;

б) $y = \dfrac{5}{x}$ и y = 6 - x.

2. Решить системы:

а) $\begin{cases} x^2 - xy = 28, \\ y^2 - xy = -12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x > 3 - \dfrac{13x-2}{11}, \\ \dfrac{x}{6} + \dfrac{2}{3}(x-7) < \dfrac{3x-20}{9}. \end{cases}$

3. Решить уравнения:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} - \dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}} = 3;$ б) $|2x-5| = |7-2x|.$

4. Найдите промежутки возрастания (убывания) и точки экстремума:

а) $y = \dfrac{2x+1}{1-3x};$ б) $y = x - \ln x.$

5. Упростить: $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right).$

6. Решить неравенства:

а) $\dfrac{x^2-9}{\log_{0,5}(x-5)}<0;$ б) $\log_{0,2}\log_2\dfrac{x^2}{x+2}>0;$

в) $4^x-10\cdot 2^x+6<0.$

7. Построить графики функций:

а) $y=\log_{1/2}x^3;$ б) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3-x};$ в) $y=\left|\log_3(x-2)\right|.$

8. Написать уравнение касательной к кривой $y=3x^2-4x+1$, параллельной прямой y= -2x +1.

9. Выполнить задания с полным объяснением:

1) Пусть $(x_0;y_0)$ – решение системы $\begin{cases}3^x-y=1,\\ |2x-6|-y=2.\end{cases}$

Найдите сумму x_0+y_0.

2) Вычислите значение выражения $7\sqrt{33}\sin\left(\arccos\dfrac{4}{7}\right).$

3) Найдите наименьшее значение функции $h(x)=\dfrac{1}{x}+x$ на промежутке $(0;\infty)$.

4) Найдите область значений функции $f(x)=\arccos\dfrac{x^2-2}{x^2+4}.$

5) Найдите все значения a, при которых уравнение $(5a-x)\sqrt{2x-2}=0$ имеет один корень.

6) При каких значениях x выражение

$$\frac{33}{2\sin^2 x}-\frac{63}{3+\cos 2x}-\frac{16-64\sin^2 x\cos^2 x}{2\cos^2 x-1}-\frac{3}{\sin^4 x}$$

принимает неотрицательные значения?

7) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=-2\cos x$ и $y=3\cos x$ на промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{2};0\right]$.

8) Сколько корней имеет уравнение $(\cos\pi x+1)\log_4\left(9-x^2\right)=0$?

9) Найдите наименьшее значение a, при котором функция $f(x)=\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{2a}{3}x^3+1$ возрастает на всей числовой прямой.

10) Найдите сумму целых решений неравенства

$$\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^{\sqrt{13-5x}} \geq 4^{-\sqrt{5x+3}}.$$

10. Выполнить тестовое задание.

1) Найти частное от деления наименьшего общего кратного чисел 6300 и 990 на их наибольший общий делитель.

1) 2420 2) 30 3) 2310 4) 770 5) 385.

2) Упростить $(l\text{-}2m)^2+8lm$.

1) $l+2m$ 2) l^2+4m^2 3) $(l+2m)^2$ 4) $l\text{-}m$ 5) $(l\text{-}m)^2$.

3) При каких значениях a прямые ax-$2y = -1$ и $6x + 6y = 5$ пересекаются?

1) $a \neq -2$ 2) $a \neq -3$ 3) $a \neq 1$ 4) $a \neq 4$ 5) $a \neq 5$.

4) При каком значении a парабола $y = 4ax^2 - 8x + 25$ касается оси Ох?

1) $\frac{9}{36}$ 2) $\frac{4}{25}$ 3) $\frac{7}{18}$ 4) $-\frac{12}{35}$ 5) $\frac{47}{11}$.

5) Составить квадратное уравнение с корнями x_1+7 и x_2+7, где x_1 и x_2 - корни уравнения x^2-$5x+1=0$.

1) x^2-$19x+15=0$ 2) x^2-$20x+50=0$ 3) x^2-$19x+49=0$
4) x^2-$18x+49=0$ 5) x^2-$19x+85=0$.

6) Вычислить $\sqrt{x}+x$, где x - корень уравнения $5-\sqrt{16+\sqrt[3]{3x+582}}=0$.

1) 90 2) 30 3) 42 4) 72 5) 56.

7) Решить неравенство $\dfrac{(2x+2)(2x+3)}{1-2x} \geq 0$.

1) $\left[-\frac{3}{2};-1\right]\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ 2) $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\{-1\}$

3) $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ 4) $\left\{-\frac{3}{2}\right\}\cup\{-1\}\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}$

5) $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left[-1;\frac{1}{2}\right)$

8) Вычислить $\dfrac{2-3^{1-2\log_4 2}}{5^{\log_5 \frac{1}{\sqrt{3}}}}$.

1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 2) 2 3) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ 4) 3 5) $\sqrt{3}$.

9) Найти x^2+2x, где x - корень уравнения $\lg(\frac{3}{2}+x) = \lg\frac{1}{2} - \lg(1+x)$.

1) $-\frac{5}{6}$ 2) $\frac{4}{5}$ 3) $\frac{3}{4}$ 4) $-\frac{4}{5}$ 5) $-\frac{3}{4}$.

10) Решить неравенство $2^{x+4}-2^{x+5}-2^{x+6}\geq 5^{x+3}-5^{x+4}$.

1) $[1;+\infty)$ 2) $(-\infty;-2]$ 3) $(-\infty;1]$ 4) $[-2;+\infty)$ 5) $[-2;1]$

11) Найти сумму шести первых членов геометрической прогрессии, если знаменатель её равен 3, а сумма первого и пятого членов равна 410.

1) 1740 2) 1760 3) 1780 4) 1800 5) 1820.

12) Дано: $tg\alpha=\frac{5}{12}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Вычислить $3\sin\alpha-\cos\alpha$.

1) $-\frac{3}{13}$ 2) $\frac{3}{13}$ 3) $\frac{27}{13}$ 4) $-\frac{12}{13}$ 5) $-\frac{27}{13}$.

13) Вычислить $tg\left(2arctg\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

1) $-\frac{3}{4}$ 2) $-\frac{4}{3}$ 3) $-\frac{5}{4}$ 4) $-\frac{3}{5}$ 5) $-\frac{5}{6}$.

14) Найти сумму корней уравнения $\sin x-\cos x=\sqrt{2}$, принадлежащих интервалу $(-180^0;180^0)$.

1) 135^0 2) -135^0 3) 90^0 4) 180^0 5) -90^0.

15) Вычислить значение производной функции $f(x)=\frac{\ln x}{e^{2x}}+1$ в точке $x=e$ (e - основание натурального логарифма).

1) $\frac{1+e}{e^{2e+1}}$ 2) $\frac{1-2e}{e^{2e+1}}$ 3) $\frac{1-e}{e^{2e+1}}$ 4) $\frac{1+2e}{e^{2e+1}}$ 5) $\frac{1+2e}{e^{2e+1}}+1$.

16) К графику функции $f(x)=\ln(3x)$ в точке с абсциссой $x=\frac{1}{3}$ проведена касательная. Найти абсциссу точки графика касательной, ордината которой равна y=29.

1) 13 2) 9 3) 10 4) 12 5) 11.

17) Найти значение выражения x_1+3x_2, где x_1- точка минимума, а x_2- точка максимума функции.

1) 4 2) 8 3) 2 4) 5 5) 3.

18) Найти длину вектора $\vec{AB}$ по заданным координатам его концов A(-1,-1,0), B(1,1,-2).

1) $4\sqrt{3}$ 2) 2 3) $3\sqrt{3}$ 4) 6 5) $2\sqrt{3}$.

19) Величина одного из углов треугольника равна 18^0. Найти величину острого угла между биссектрисами двух других углов треугольника.

1) 80^0 2) 81^0 3) 82^0 4) 83^0 5) 84^0.

20) Основание прямоугольного параллелепипеда - квадрат. Найти объем параллелепипеда, если высота его равна 4, а диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 45^0.

1) 36 2) 28 3) 32 4) 40 5) 42.

5. Примерные образцы оформления заданий

Рассмотрим оформление некоторых заданий типа «С».

Вариант 1

1. Решить уравнение $2(1+\sin 2x)\cdot\cos 2x+(\sin x+\cos x)^2=0.$ (1)

2. Найти промежутки возрастания и убывания функции $y=x^3-2x^2+x.$

3. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ x+y=1. \end{cases}$

4. Решить неравенство $\log_3(x^2-2)<1.$

5. Основанием прямой призмы служит равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a. Диагональ боковой грани, проходящей через катет, составляет с гранью, которая проходит через гипотенузу, угол α . Определить объем призмы.

Решение

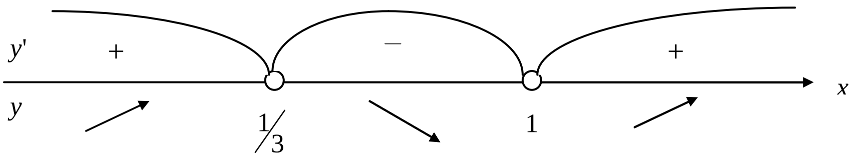
1. Так как $1+\sin 2x=(\cos x+\sin x)^2,$ то данное уравнение (1) равносильно уравнению: $(\cos x+\sin x)^2\cdot(2\cos 2x+1)=0 \Leftrightarrow \cos x+\sin x=0$ или $\cos 2x=-\dfrac{1}{2};$ $2x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$ или $tgx=-1;$ $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi,$ $k\in Z$, $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,$ $k\in Z$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;$ $\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi,$ $k\in Z$.

2. Данная функция дифференцируема на множестве всех действительных чисел как многочлен. $y'=3x^2-4x+1;$ $3x^2-4x+1=0;$ $x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\dfrac{4\pm 2}{6};$ $x_1=\dfrac{1}{3}$ или $x_2=1.$

Таким образом, $y'=3\cdot\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\cdot(x-1),$ $(ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)).$ Чтобы найти промежутки монотонности, необходимо решить неравенства $y'>0$

и $y' < 0$. Методом интервалов решим неравенство $y' > 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)(x-1) > 0.$



Так как данная функция непрерывна в точках $x = \frac{1}{3}$ и $x = 1$, то как видно из геометрического изображения, функция возрастает на промежутках: $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$, $[1; +\infty)$ и убывает на отрезке $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$.

3. а) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x + y = 1. \end{cases}$ Используя тождество

$x^3 + y^3 = (x+y)\cdot\left(x^2 - xy + y^2\right)$, получим: $\begin{cases} (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) = 7, \\ x + y = 1; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x + y = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x^2 + 2xy + y^2 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 3xy = -6, \\ x + y = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} xy = -2, \\ x + y = 1; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 1 - x, \\ x\cdot(1-x) = -2; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 - x, \\ x - x^2 + 2 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 - x, \\ x^2 - x - 2 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 - x, \\ x = -1 \text{ } \textit{или} \text{ } x = 2; \end{cases}$

$\begin{cases} x = -1, \\ y = 2; \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$

Ответ: $(-1; 2)$; $(2; -1)$.

б) Решение данной системы можно оформить и так:

$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x + y = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 - x, \\ x^3 + (1-x)^3 = 7; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 - x, \\ x^2 - x(1-x) + (1-x)^2 = 7; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 1 - x, \\ x^2 - x - 2 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 - x, \\ x = 2 \text{ } \textit{или} \text{ } x = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} y = -1, \\ x = 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} y = 2, \\ x = -1. \end{cases}$

Ответ: (-1; 2); (2; -1).

4. $\log_3(x^2 - 2x) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \log_3(x^2 - 2x) < \log_3 3.$

Так как $D(\log_a) = R_+$ и $y = \log_3 u$ $\uparrow$, то данное неравенство равносильно системе: $\begin{cases} x^2 - 2x > 0, \\ x^2 - 2x - 3 < 0. \end{cases}$

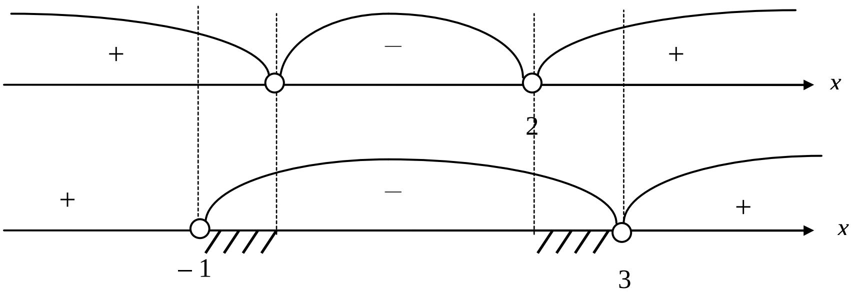
Найдем корни уравнения $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$ x = -1 или x = 3 ,

: $$x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3).$$

Следовательно имеем:

$$\begin{cases} x^2 - 2x > 0, \\ (x+1)(x-3) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) > 0, \\ (x+1)(x-3) < 0. \end{cases}$$

Решим каждое неравенство методом интервалов и найдем пересечение их решений.

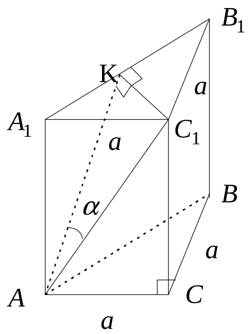


Как видно из геометрического изображения, решениями исходного неравенства являются промежутки (-1; 0) и (2; 3).

Ответ: (-1; 0)$\cup$(2;3).

5. Заметим, что построение наиболее наглядного изображения значительно облегчает решение задачи.

Дано:
AB_1 - прямая призма.
ABC - равнобедренный треугольник.
$\angle C_1AK$ - угол между прямой AC_1 и плоскостью AA_1B_1B. $\angle C_1AK=\alpha$.
V= ?



Решение

Объем призмы вычисляется по формуле V= $B \cdot H$. Площадь основания B= $\frac{1}{2}a^2$, так как треугольник ABC - прямоугольный треугольник с катетами AC= a и BC=a.

(1) $V=\frac{1}{2}a^2\cdot H$. Если найдем H, то задача решена. Так как призма прямая, то $H=AA_1=BB_1=CC_1$. ΔA_1AK – прямоугольный: $A_1A^2=AK^2-A_1K^2$ – по теореме Пифагора. $A_1A=\sqrt{AK^2-A_1K^2}$ (2). Так как $\Delta A_1B_1C_1$ – равнобедренный, то $A_1K=\frac{A_1B_1}{2}\cdot A_1B_1=a\sqrt{2}$, следовательно, $A_1K=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Из прямоугольного треугольника ΔA_1KC_1 имеем (по теореме Пифагора), что

$KC_1=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Из прямоугольного треугольника AKC_1 АК$=\frac{KC_1}{tg\alpha}=\frac{a\sqrt{2}}{2tg\alpha}$. Найдем из формулы (2)

$$A_1A=\sqrt{\frac{a^2}{2tg\alpha}-\frac{a^2}{2}}=$$

$=\sqrt{\frac{a^2}{2}\cdot\left(-1+\frac{1}{tg^2\alpha}\right)}=\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}=\frac{a\sqrt{2\cos 2\alpha}}{2\sin\alpha}$, так как

$\left(\frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}-1=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-1=\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)$. $\mathrm{A}_1A=\frac{a\sqrt{2\cos 2\alpha}}{2\sin\alpha}$.

Подставим в формулу (1), получим:

$V=\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{a\sqrt{2\cos 2\alpha}}{2\sin\alpha}=\frac{a^3\sqrt{2\cos 2\alpha}}{4\sin\alpha}$.

Вариант 2

1. Решить уравнение $\sin^2 x\cdot\sin 2x=\frac{1}{4}\sin 4x$.
2. Решить неравенство $\left(\frac{2}{9}\right)^{x^2+x}\geq(20{,}25)^{2x-7}$.
3. Решить неравенство: $\left|x^3-1\right|>1-x$
4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

f(x) = $2x^4-\frac{8}{3}x^3-8x^2+16$ на отрезке [1;3].

5. Магазин получил 64 чайника двух разных емкостей, причем меньший из них стоил на 1 рубль дешевле, чем больший. За большие чайники было выручено 100 рублей, а за меньшие 36 рублей. Сколько было тех и других чайников, и по какой цене они продавались?

6. Угол при основании равнобедренного треугольника равен φ. Найдите отношение радиуса вписанной в данный треугольник окружности к радиусу описанной окружности.

Решение

1. а) $\sin^2 x \cdot \sin 2x = \frac{1}{4}\sin 4x$. Так как $\sin 4x = 2\cos 2x \cdot \sin 2x$, то

имеем: $\sin^2 x \cdot \sin 2x - \frac{1}{2}\sin 2x \cdot \cos 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x \cdot \left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) = 0,$

$\sin 2x = 0$ или $\sin^2 x - \frac{1}{2}\cos 2x = 0;$ $2x = k\pi$ или $2\sin^2 x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\sin^2 x - \cos^2 x = 0$ или $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$. Т. к. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,

$$3\sin^2 x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 3tg^2 x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |tgx| = \frac{1}{\sqrt{3}}. \Leftrightarrow \; tgx = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ или}$$

$tgx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Отсюда имеем: $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ или $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in Z$.

Ответ: $\frac{k\pi}{2}, \quad \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in Z.$

Решение данного уравнения можно оформить ещё так:

б) $\sin^2 x \cdot \sin 2x = \frac{1}{4}\sin 4x. \quad 4\sin^2 x \cdot \sin 2x = \sin 4x.$

Так как

$\sin 4x = 2\sin 2x \cdot \cos 2x$, а $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$, то $2 \cdot (1 - \cos 2x) \cdot \sin 2x =$

$= 2\sin 2x \cos 2x$, $\sin 2x \cdot (1 - \cos 2x - \cos 2x) = 0$, $\sin 2x = 0$, $x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z$,

или $\cos 2x = \frac{1}{2}$, $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in Z$.

Ответ: $\frac{k\pi}{2}, \quad \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in Z.$

2. $\left(\frac{2}{9}\right)^{x^2+x} \geq (20{,}25)^{2x-7}; \quad \left(\frac{2}{9}\right)^{x^2+x} \geq \left(\frac{81}{4}\right)^{2x-7}; \quad \left(\frac{2}{9}\right)^{x^2+x} \geq \left(\frac{9}{2}\right)^{-14+4x};.$

$\left(\frac{2}{9}\right)^{x^2+x} \geq \left(\frac{2}{9}\right)^{14-4x}$. Так как функция $y=\left(\frac{2}{9}\right)^{x} \downarrow$ $\left(a=\frac{2}{9}<1\right)$, то данное неравенство равносильно неравенству $x^2+x \leq 14-4x$, $x^2+5x-14 \leq 0$, $x^2+5x-14=0$. По теореме Виета $x_1=-7$, а $x_2=2$, $(x_1+x_2=-5,\ x_1 \cdot x_2=-14)$. Таким образом, $x^2+5x-14 \leq 0$ равносильно неравенству $(x+7)\cdot(x-2) \leq 0$. Решаем методом интервалов

Как видно из геометрического изображения, решениями неравенства являются те значения x, которые принадлежат промежутку $[-7;2]$.

Ответ: $[-7;2]$.

3.

$|x^3-1|>1-x \iff x^3-1>1-x$ или $x^3-1<x-1 \iff x^3-1+x-1>0$

или $x^3-1+1-x<0$;

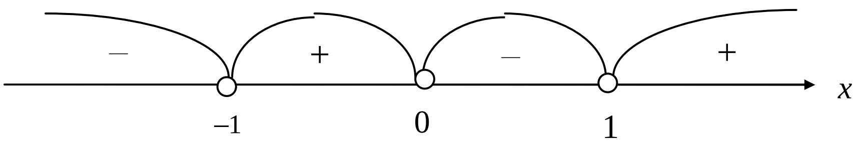
$(x-1)(x^2+x+2)>0$ или $x^3-x<0$,

$(x-1)(x^2+x+2)>0$ или $x(x-1)(x+1)<0$.

$x^2+x+2>0$ для любых $x \in R$, так как $Д=1-8=-7<0$, $a=1>0$.

Следовательно, неравенство $(x-1)(x^2+x+2)>0$ равносильно неравенству $x-1>0$, т.е. $x>1$.

Решим второе неравенство $x(x-1)(x+1)<0$. методом интервалов.



Как видно из геометрического изображения, решениями второго неравенства являются промежутки $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$.

Ответ: $(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$.

4. $f(x)=2x^4-\frac{8}{3}x^3-8x^2+16$, $[1;3]$

Данная функция дифференцируема на множестве всех действительных чисел как многочлен, следовательно, она дифференцируема и на отрезке [1;3]

$$f'(x) = 8x^3 - 8x^2 - 16x = 8x\cdot\left(x^2 - x - 2\right) = 8x\cdot(x+1)(x-2);$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \iff (\mathrm{x}-2)\cdot(x+1) = 0,$$

$$f'(x) = 0 \iff \mathrm{x}\cdot(\mathrm{x}+1)\cdot(x-2) = 0;\quad \mathrm{x} = 0,\ \mathrm{x} = -1,\ \ \mathrm{x} = 2,$$

$$-1 \notin (1;3)\ \text{ и }\ 0 \notin (1,3),\quad 2 \in (1;3).$$

Таким образом, данная функция имеет единственную критическую точку на (1;3). Найдем $f(1)$, f(2), f(3) и сравним их:

$$f(1) = 2\cdot 1 - \frac{8}{3} - 8 + 16 = 10 - \frac{8}{3} = \frac{30-8}{3} = \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3};$$

$$f(2) = 2\cdot 4^2 - \frac{8}{3}\cdot 8 - 32 + 16 = -29\frac{1}{3} + 24 = -5\frac{1}{3};$$

$$f(3) = 2\cdot 81 - \frac{8}{3}\cdot 27 - 72 + 16 = 34.$$

$$\min_{[1;3]} \mathrm{f(x)} = -5\frac{1}{3},\quad \max_{[1;3]} \mathrm{f(x)} = 34.$$

5. Обозначим число чайников первого вида через х, тогда второго вида (64-х) чайников. Обозначим стоимость чайников первого вида через у, где у>1, тогда стоимость меньших чайников будет (у-1). По условию

$$\begin{cases} xy = 100, \\ (64-x)(y-1) = 36; \end{cases}\quad \begin{cases} xy = 100, \\ 64y - xy + x = 100; \end{cases}\quad \begin{cases} xy = 100, \\ 64xy + x = 200; \end{cases}\quad \begin{cases} xy = 100, \\ x = 200 - 64y; \end{cases}$$

$$(200 - 64y)y = 100;\ \ 10y^2 - 50y + 25 = 0;\quad y = \frac{50 \pm \sqrt{2500 - 1600}}{32} = \frac{50 \pm 30}{32};$$

у = 2,5 или у= $\frac{5}{8}$ - не удовлетворяет условию задачи.

У-1= 2,5 – 1 = 1,5. Таким образом, стоимость чайников большей вместимости 2,5 рубля, а стоимость меньших чайников 1,5 рубля.

Найдем теперь число чайников первого вида:

$$x = 200 - 64y = 200 - 64\cdot 2{,}5 = 200 - 160 = 40.$$

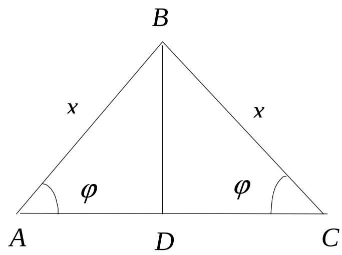
Число чайников первого вида 40 штук.

64-х=64-40=24.

Чайников второго вида 24 шт.

Ответ: 40 чайников и 24 чайника.

6. Сделаем схематический чертеж:
Используя известные формулы



$r = \frac{2S}{p}$ и $R = \frac{abc}{4S}$,

получим: $\frac{r}{R} = \frac{8S^2}{pabc}$ (1).

Выразим искомое отношение через принятые обозначения.

Т.к. АС=2АД=2xcosφ, ВД= sinφ; то

$$S = \frac{1}{2}ah = x \cdot \cos\varphi \cdot x \cdot \sin\varphi = x^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi;$$

$$\mathrm{p} = 2\mathrm{x} + 2\mathrm{x} \cdot \cos\varphi = 2\mathrm{x} \cdot (1 + \cos\varphi) == 4x \cdot \cos^2\frac{\varphi}{2};$$

$$\mathrm{abc} = 2\mathrm{x} \cdot \mathrm{x} \cdot \mathrm{x}\cos\varphi = 2\mathrm{x}^3 \cdot \cos\varphi.$$

Подставив полученные значения в равенство (1), имеем:

$$\frac{r}{R} = \frac{8x^4 \cdot \sin^2\varphi}{8x^4 \cdot \cos\varphi \cdot \cos^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin^2\varphi \cdot \cos\varphi}{\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{4\sin^2\frac{\varphi}{2} \cdot \cos^2\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\varphi}{\cos^2\frac{\varphi}{2}} = 4\sin^2\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\varphi.$$

Ответ: $4\sin^2\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\varphi.$

Вариант 3

1. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 - 25}} - \log_5(49 - x^2) + \frac{x^2 + 16}{4 - x}.$$

2. Заработная плата рабочего ежегодно повышалась на одно и то же число процентов. В конце I-го года она составила 242 рубля, а второго года – 121% первоначальной. Каковы первоначальная зарплата и процент ежегодного повышения её?

3. Решить уравнение: $\sqrt{3x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{6x^2 + 10}$, вводя переменную $t=x^2+1$.

4. Доказать тождества:

а) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \sin^2(\alpha + \beta) = 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos(\alpha + \beta)$,

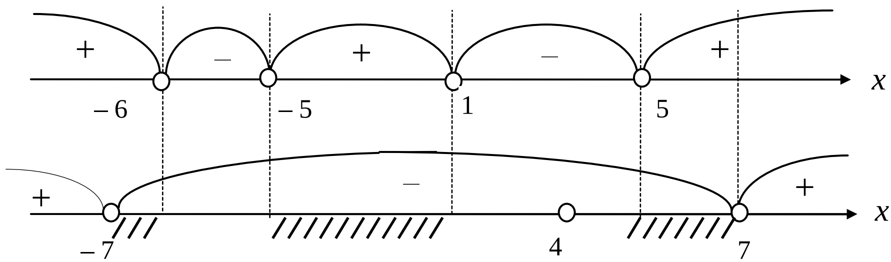
б) $\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{1 - tg\alpha}{1 + tg\alpha}$.

5. Решить неравенство: $\sqrt{x + 5} \geq 2x + 1$.

Решение

1. Так как $\sqrt{a}$ имеет смысл, если $a \geq 0$, $\mathrm{D}(\log_a) = R_+$ и делить на нуль нельзя, то область определения данной функции совпадает с множеством решений системы
$$\begin{cases} \frac{x^2+5x-6}{x^2-25} \geq 0, \\ 49 - x^2 > 0, \\ 4 - x \neq 0. \end{cases} \quad (1)$$

После преобразований получим:
$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+6)(x-1)}{(x-5)(x+5)} \geq 0, \\ (x-7)(x+7) < 0, \\ x \neq 4. \end{cases}$$
Решим неравенства этой системы методом интервалов и найдем пересечение решений, пользуясь методом сопоставления промежутков.



Как видно из геометрического изображения, решениями системы (1) являются промежутки (– 7;-6], (– 5;1] и (5;7) Множеством всех решений является их объединение.

Ответ: $\mathrm{D}(f) = (-7;-6] \cup (-5;1] \cup (5;7)$.

2. Пусть заработная плата ежегодно повышалась на х%, тогда обозначив первоначальную зарплату за A_o мы получим:

$$(1)\quad 242 = A_o\left(1 + \frac{x}{100}\right) \quad \text{или} \quad 1{,}21A_o = A_o\left(1 + \frac{x}{100}\right)^2; \quad (2)$$

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 = 1{,}21; \quad 1 + \frac{x}{100} = 1{,}1; \quad \frac{x}{100} = 0{,}1; \quad x = 10.$$

Подставив x=10 в (1) получим: 242=A_o(1+0,1); $A_o=\frac{242}{1{,}1}$; A_o=220.

Ответ: первоначальная зарплата 220 рублей и ежегодное повышение 10%.

3.Возводя обе части данного уравнения в квадрат, получим:

$3x^2+1+2\sqrt{(3x^2+1)(x^2+3)}+x^2+3=6x^2+10$. Отсюда

$\sqrt{(3x^2+1)(x^2+3)}=x^2+3$. Данное уравнение равносильно уравнению

$(3x^2+1)(x^2+3)-(x^2+3)^2=0$, т.е. $(x^2+3)(3x^2+1-x^2-3)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ x = ± 1. Ответ: ± 1.

4. а) $\cos^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)$. Преобразуем левую и правую части данного равенства, применив известные тригонометрические тождества:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta-\cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta-2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta=$$
$$=2\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\cos^2\alpha(1-\sin^2\beta)+\cos^2\beta(1-\sin^2\alpha)-2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta=$$
$$=2\cos^2\alpha\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta+\cos^2\beta\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta=0.$$

Следовательно данное равенство является тождеством.

б) $\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{1-tg\alpha}{1+tg\alpha}$:

$$\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{1-tg\alpha}{1+tg\alpha};$$

(разделили числитель и знаменатель на $\cos\alpha\neq 0$).

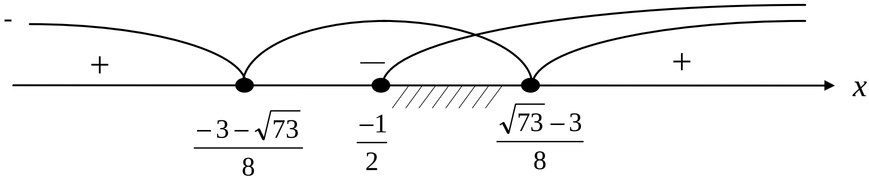
5. $\sqrt{x+5}\geq 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases}2x+1\geq 0\\ x+5\geq 4x^2+4x+1\end{cases}$ или $\begin{cases}2x+1<0\\ x+5\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -\frac{1}{2}\\ 4x^2 3x-4\leq 0\end{cases}$ или $\begin{cases}x<-\frac{1}{2}\\ x\geq -5\end{cases}$ (1). Найдем корни уравнения

$4x^2+3x-4=0$; $x=\frac{-3\pm\sqrt{9+64}}{8}=\frac{-3\pm\sqrt{73}}{8}$. Таким образом, совокупность (1) равносильна совокупности

$$\begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ \left(x+\dfrac{3+\sqrt{73}}{8}\right)\left(x+\dfrac{3-\sqrt{73}}{8}\right) \le 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad -5 \le x < -\frac{1}{2}.$$

Решим второе неравенство первой системы методом интервалов и найдем пересечение с неравенством $x \ge -\frac{1}{2}$.



Ответ: $\left[-5; \frac{\sqrt{73}-3}{8}\right]$.

6. Математический диктант по школьному курсу математики

1. Определение модуля действительного числа.
2. Решить уравнение $\left|x^2-4\right|=x^2-4$.
3. Линейная функция. График линейной функции.
4. Обратная пропорциональность. График обратной пропорциональности.
5. Теорема Виета.
6. Правило нахождения НОД и НОК двух чисел.
7. Найти все решения уравнения $\sqrt{x}=x$.
8. Сколько решений имеет уравнение $\sqrt{x}=-x$?
9. Имеет ли решение уравнение $\sqrt{x-5}=1-x$?
10. Построить график функции $y=-\sqrt{x-1}$.
11. Признаки параллелограмма.
12. Свойства равнобедренного треугольника.
13. Теорема Пифагора.
14. Решить неравенство $\dfrac{x^2-3}{x-1}\le 0$.
15. Решить уравнение $1+\cos 4x=2\cos 2x$.
16. График квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$.
17. Определить четность функции $f(x)=\sin x+\cos x$.
18. Теорема о трех перпендикулярах.
19. Теорема синусов.
20. Теорема косинусов.
21. Свойства функции $y=\sin x$.
22. Свойства функции $y=\cos x$.
23. График функции $y=tgx$.
24. Упростить: $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\cos(\pi-2x)+\cos 2x$.
25. График функции $y=|x|$.
26. Основное тождество арифметического корня.
27. Уравнение касательной к кривой.
28. График функции $y=a^x$, $0<a<1$. $\left(y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}\right)$.

29. График функции $y = \log_a x, \quad 0 < a < 1. \quad \left(y = \log_{\frac{1}{3}} (x+1) \right).$

30. Найти производную функции $y = \sin 2x \cdot tgx.$

31. Найти значение $y'(1)$, y(3), если y=In(x-2).

32. Формула объема шара.

33. Формула полной поверхности пирамиды.

34. Найти промежутки возрастания функции y= x^3 -3x^2 +1.

35. Вычислить $\int_0^1 \sqrt{x}dx.$

36. Определить знак выражения $\cos 1245^o$.

37. Уравнение окружности с центром в точке О(а;в).

38. Формулы площади треугольника.

39. Формулы площади трапеции и параллелограмма.

40. Как найти центр тяжести треугольника?

41. Найти центр описанной окружности около произвольного треугольника.

42. Сумма внутренних углов любого выпуклого многоугольника.

43. Найти координаты вектора $\vec{a} + 2\vec{b}$, если $\vec{a}(5;-7)$, $\vec{b}(\frac{1}{2};-\frac{3}{2})$.

44. К данной окружности провести касательную в любой точке.

45. Найти радиус окружности, заданной уравнением x^2 -2x +y^2 +4x -6 = 0.

46. Вычислить $\log_{\sqrt{3}} 27 - \log^2_{\sqrt{5}} 25$.

47. Теорема о перпендикулярности прямой и плоскости.

48. Решить неравенство $|2x-3| > x-1.$

49. Признаки подобия треугольников.

50. Решить графически неравенство $\lg(x-1) < \sqrt{x} - 3.$

7. Тренировочные тестовые задания

Вариант 1

1. Вычислить $0{,}25+\frac{1}{12}:\left(\frac{1}{3}\cdot 1{,}25-\frac{9}{16}\right)$

1) $-\frac{11}{36}$; 2) $-0{,}321$; 3) $-\frac{5}{16}$; 4) $-0{,}313$; 5) $-\frac{9}{28}$.

2. Упростить $\left(\frac{\sqrt{7m}-\sqrt{n}}{7m-n}\right)^{-1}$

1) $\sqrt{n}-\sqrt{7m}$; 2) $\sqrt{n}+\sqrt{7m}$; 3) $\sqrt{7m}-\sqrt{n}$; 4) $\sqrt{7m-n}$; 5) $\sqrt{n-7m}$.

3. Найти число x^3+5x, где $x-$ корень уравнения $\frac{x+12}{2x-6}=1$.

1) 5922; 2) 6000; 3) 6074; 4) 6112; 5) 6207.

4. При каком значении a уравнение $4x^2+14x-35a=0$ имеет два совпадающих корня?

1) $-\frac{7}{20}$; 2) $\frac{8}{35}$; 3) $-\frac{5}{14}$; 4) $\frac{7}{17}$; 5) $\frac{8}{15}$.

5. Составить квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, один из корней которого равен $3+2\sqrt{5}$.

1) $2x^2+2x-1=0$ 2) $3x^2-2x-7=0$ 3) $4x^2+x-2=0$ 4) $x^2-6x-11=0$ 5) $x^2+5x-7=0$.

6. Вычислить x^2+x+12, где x – корень уравнения

$\sqrt{x-1+\sqrt{x+10}}+\sqrt{x-1-\sqrt{x+10}}=4$.

1) 42; 2) 54; 3) 84; 4) 32; 5) 68.

7. Решить неравенство $\frac{1-|2x+1|}{2}>-3$.

1) $(-\infty;-3)$; 2) $(-4;+3)$; 3) $(-3;3)$; 4) $(-7;7)$; 5) $(0;3)$.

8. Вычислить $\frac{16^{\log_{81}3}}{5^{-\log_{25}9}}$.

1) $\frac{3}{2}$; 2) 12; 3) $\frac{2}{3}$; 4) 6; 5) $\frac{4}{5}$.

9. Найти $\frac{x}{x+1}$, где x - корень уравнения $3^{5x+1}+3^{5x-1}=30$.

1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{2}{7}$; 4) $\frac{4}{9}$; 5) $\frac{2}{3}$.

10. Решить неравенство $\log_4(x+7)>\log_2(x+1)$.

1) (-3;2); 2) $(-1;+\infty)$; 3) $(0;2)\cup\{-1\}$; 4) $(-3;-1)\cup(-1;2)$; 5) $(-1;2)$.

11. Третий член арифметической прогрессии на 9 меньше её шестого члена, а сумма трех её первых членов равна 18. Найти частное от деления седьмого члена прогрессии на её второй член.

1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{5}{2}$; 3) $\frac{7}{2}$; 4) $\frac{9}{2}$; 5) $\frac{11}{2}$.

12. Дано: $\sin\alpha = \frac{40}{41}$. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Вычислить $2tg\alpha + ctg\alpha$.

1) $-9\frac{221}{360}$; 2) $9\frac{41}{360}$; 3) $\frac{81}{360}$; 4) $4\frac{161}{180}$; 5) $-4\frac{161}{180}$.

13. Вычислить $ctg\left(\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\right)$.

1) $\sqrt{6}$; 2) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$; 3) $2\sqrt{6}$; 4) $\frac{5\sqrt{6}}{2}$; 5) $3\sqrt{6}$.

14. Найти сумму корней уравнения

$\cos^4 2x + 6\cos^2 2x = \frac{25}{16}$, принадлежащих отрезку $\left[o^o;90^o\right]$.

1) 30^o ; 2) 90^o ; 3) 180^o ; 4) 135^o ; 5) 150^o.

15. Вычислить значение производной функции $f(x) = ctg^2 x - \frac{1}{x} + 1$ в точке $x = \frac{\pi}{3}$.

1) $\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{9}{\pi^2}$; 2) $-\frac{8\sqrt{3}}{9} - \frac{9}{\pi^2}$; 3) $\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{9}{\pi^2} + 1$; 4) $-\frac{8\sqrt{3}}{9} + \frac{9}{\pi^2}$; 5) $\frac{8\sqrt{3}}{9} + \frac{9}{\pi^2}$.

16. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{x}$, которая параллельна прямой, заданной уравнением $y = x - 5$.

1) $y = x + \frac{1}{2}$; 2) $y = x - 1$; 3) $y = x - \sqrt{5}$; 4) $y = x + \frac{1}{4}$; 5) $y = x + 5$.

17. Найти все интервалы возрастания функции $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 1$.

1) $(-\infty;0)$; $(5;+\infty)$; 2) $(0;5)$; $(5;+\infty)$; 3) $(5;+\infty)$; 4) $(-\infty;0)$; $(0;5)$; 5) $(-\infty;0)$.

18. При каких значениях k, m векторы $\vec{a}(-1,-1,m)$ и $\vec{b}(k,4,5)$ коллинеарные?

1) $k = -\frac{5}{4}; m = 4$; 2) $k = 4; m = \frac{5}{4}$; 3) $k = -4; m = -\frac{5}{4}$;

4) $k = 4; m = -\frac{5}{4}$; 5) $k = -4; m = \frac{5}{4}$.

19. Около круга радиуса 3 описана равнобедренная трапеция с площадью 21. Определить боковую сторону этой трапеции.

1) 2; 2) 2,5; 3) 3; 4) 3,5; 5) 4.

20.Высота правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{3}$, а боковая грань образует с плоскостью основания угол 60°. Найти объем пирамиды.

1) 36; 2) 18; 3) 24; 4) 27; 5) 42.

Вариант 2

1. Найти сумму остатков, получающихся при делении числа 7263544587435873 на 2, 4, 5, 9, 10, 25.

1) 34; 2)33; 3)32; 4)31; 5)30.

2. Упростить $\dfrac{(2m)^{3/2}-(5n)^{3/2}}{(2m)^{1/2}-(5n)^{1/2}}$.

1) $2m+3\sqrt{10mn}+5n$; 2) $2m-3\sqrt{10mn}+5n$; 3) $2m-\sqrt{10mn}+5n$;

4) $2m+\sqrt{10mn}+5n$; 5) $\left(\sqrt{2}m+\sqrt{5}n\right)^2$.

3. Найти число 7^{2x+1}, где x - корень уравнения $\dfrac{2x-1}{x+1}=1$.

1) 2401; 2) 32807; 3) 11013; 4) 16807; 5) 823543.

4. При каких значениях a уравнение $25x^2-25x+12a=0$ имеет два различных действительных корня?

1) $a<\dfrac{17}{26}$; 2) $a<\dfrac{12}{35}$; 3) $a<\dfrac{11}{42}$; 4) $a<\dfrac{25}{48}$; 5) $a<\dfrac{1}{7}$.

5. Вычислить $\dfrac{(x_1+x_2)^2}{5x_1x_2}$, где x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения $4x^2-14x+3=0$.

1) $\dfrac{18}{5}$; 2) $\dfrac{49}{15}$; 3) $-\dfrac{12}{17}$; 4) $-\dfrac{18}{7}$; 5) $\dfrac{27}{53}$.

6. Найти сумму корней уравнения $\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-3}=2$.

1) 7; 2) 10; 3) 9; 4) 11; 5) 8.

7. Решить неравенство $\dfrac{(x-2)^2(x-3)}{x+1}\geq 0$.

1) $(-1;2]\cup[3;+\infty)$; 2) $(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$; 3) $(-\infty;-1)\cup\{2\}\cup[3;+\infty)$;

4) $(-\infty;-1)\cup[3;+\infty)$; 5) $(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$.

8. Вычислить $9^{1+\log_3\sqrt[4]{2}}$.

1) $9\cdot\sqrt[4]{2}$; 2) $6\cdot\sqrt[4]{3}$; 3) $9\sqrt{2}$;4) $6\sqrt{3}$; 5) $9\sqrt{3}$.

9. Найти x^2-x, где x - корень уравнения $\dfrac{\lg\left(x^{0,5}\right)}{1-\lg 2}=1$.

1) 600; 2) 552; 3) 506; 4) 462; 5) 420.

10. Решить неравенство $9^{x+2}+3<4\cdot 3^{x+2}$.

1) $(0;1)$; 2) $(-2;-1)$; 3) $(1;3)$; 4) $(-\infty;-1)$; 5) $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

11. Сумма первого и четвертого членов арифметической прогрессии равна 14, а её второй член меньше пятого на 6. Найти сумму третьего и пятого членов прогрессии.

1) 19; 2) 20; 3) 21; 4) 22; 5) 23.

12. Дано: $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Вычислить $tg\alpha-\cos\alpha$.

1) $-\frac{31}{20}$; 2) $\frac{31}{20}$; 3) $-\frac{1}{20}$; 4) $\frac{1}{20}$; 5) $\frac{20}{31}$.

13. Вычислить: $\sin\left(arcctg\left(\frac{1}{7}\right)\right)$.

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{5\sqrt{7}}{21}$; 3) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$; 4) $\frac{4\sqrt{7}}{21}$; 5) $\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

14. Найти сумму корней уравнения $\sin^4 x+\cos^4 x=\cos 4x$, принадлежащих отрезку $[90^o;270^o]$.

1) 180^o; 2) 360^o; 3) 225^o; 4) 540^o; 5) 720^o.

15. Вычислить значение производной функции $f(x)=tg^2x-\frac{1}{x}+1$ в точке $x=\frac{\pi}{3}$.

1) $2\sqrt{3}-\frac{9}{\pi^2}$; 2) $8\sqrt{3}+\frac{9}{\pi^2}$; 3) $2\sqrt{3}+\frac{9}{\pi^2}+1$; 4) $8\sqrt{3}-\frac{9}{\pi^2}$; 5) $2\sqrt{3}+\frac{9}{\pi^2}$.

16. На графике функции $y=x^2+x-5$ взята точка А. Касательная к графику, проведенная через точку А, наклонена в оси Ox под углом, тангенс которого равен 5. Найти абсциссу точки А.

1) 1; 2) 3; 3) 3/2; 4) 2; 5) 7/2.

17. Найти все интервалы убывания функции $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+11$.

1) (0;1); 2) $(-\infty;0)$; $(1;+\infty)$; 3) $(-\infty;0)$; 4) $(0;1)$; $(1;+\infty)$; 5) $(-\infty;1)$.

18. Найти все значения m, при которых длина вектора $\overline{a}(2\sqrt{5};\ 2m;\ 5)$ меньше 9.

1)(-2;2); 2)(-3;3); 3) (0;3); 4) (-5;5); 5) (-3,5; 3,5).

19. Наибольшая сторона треугольника больше наименьшей на 8. Определить длину средней линии треугольника, если длины сторон треугольника относятся как 3:4:5.

1) 8; 2) 10; 3) 12; 4) 14; 5) 16.

20. Объем куба равен $16\sqrt{2}$. Найти радиус окружности, описанного вокруг грани куба.

1) $2\sqrt{2}$; 2) 3; 3) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$; 4) 2; 5) $\frac{5}{2}\sqrt{2}$.

Вариант 3

1. Выражение $\sqrt[6]{4x\left(11+4\sqrt{6}\right)}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{3x}-4\sqrt{2x}}$ равно :

1) $10x$; 2) $\sqrt[6]{20x}$; 3) $\sqrt[3]{5x}$; 4) $-\sqrt[3]{20x}$.

2. Найти сумму корней уравнения

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}\,.$$

1) 25; 2) 13; 3) 15; 4) 8.

3. Решить неравенство $|x|+|x-1|\le 1$.

1) [0; 1]; 2) (–1; 1); 3) [–1; 0]; 4) $x\le 1$.

4. Вычислить сумму корней уравнения $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$ в промежутке $\left[0^o;180^o\right]$.

1) 124^0; 2) 150^0; 3) 144^0; 4) 180^0.

5. Дано: $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Вычислить $\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha$.

1) $\frac{17}{18}$; 2) $\frac{53}{65}$; 3) $\frac{5}{156}$; 4) $-\frac{125}{156}$.

6. Упростить выражение $\left(\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}\alpha\right)^{-1}-\left(\operatorname{ctg}3\alpha-\operatorname{ctg}\alpha\right)^{-1}$

1) $\sin 2\alpha$; 2) $\operatorname{ctg}3\alpha$; 3) $\operatorname{tg}2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}2\alpha$.

7. Решить уравнение $\frac{6b+7a}{6b}-\frac{3ay}{2b^2}=1-\frac{ay}{b^2-ab}$.

1) $\frac{4b(b+2a)}{b^2-a}$; 2) $\frac{7b(b-a)}{3(b-3a)}$; 3) $\frac{b}{3b^2-a^2}$; 4) $\frac{a+b}{b^2-a^2b}$.

8. В параллелограмме даны острый угол α и расстояния m и p от точки пересечения диагоналей до неравных сторон. Вычислить площадь параллелограмма.

1) $mp\sin\alpha$; 2) $\frac{4mp}{\sin\alpha}$; 3) $3mp\sin^2\alpha$; 4) $mp\operatorname{tg}\alpha$.

9. Средняя линия трапеции длиной 12 делится диагональю на два отрезка, разность длин которых равна 3. Найти длину большего основания трапеции.

1) 15; 2) 16; 3) 18; 4) 22.

10. Сумма первых десяти членов арифметической прогрессии равна 80, а ее пятый член равен 6. Найти сумму второго и четвертого членов прогрессии.

1) 5; 2) – 4; 3) 3; 4) 6.

11. Найти наибольшее значение выражения $2x_0–3y_0+5$, где x_0,y_0 - решение

системы: $\begin{cases} x^2 - 3xy + 14 = 0, \\ x^2 - xy = 28. \end{cases}$

1) 10, 2) 26, 3) 32, 4) 20.

12. Найти сумму первых шестидесяти положительных корней уравнения:

$$(\sin x + \cos x)^2 = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

1) 1620π; 2) $922{,}5\pi$; 3) 1720π; 4) 1810π.

13. Вычислить сумму целых решений уравнения: $|x-1| + |x-2| = 1$.

1) 3; 2) 6; 3) 4; 4) 10.

14. Указать множество чисел, не содержащее ни одного решения неравенства $\dfrac{(x+2)(x-3)}{(x+3)(x-2)} < 0$.

1) *-5,51; -4,7; -1,12; 0; 1,3;* *2) -7,2; -2,5; 4; 1; 2,7; 3;*
3) -3; 2,8; 4; 5; 6; *4) -6; -3, -2,8; 5; 7.*

15. Сумма целых решений системы

$$\begin{cases} \dfrac{x^3(x-3)}{(x+1)^2} > 0, \\ |x-5| \le 1. \end{cases}$$ равна:

1) 12; 2) 21; 3) 19; 4) 15.

16. При каком значении a выполняется равенство $x_1+x_2=-4$, где x_1, x_2 - корни уравнения $ax^2 + a^2x + 3a - 2 = 0$?

1) a=2; 2)a=-5; 3) a=4; 4) a=6.

17. Найти площадь трапеции, у которой боковые стороны и меньшее основание равны, высота равна h и тупой угол равен α.

1) $\dfrac{h^2(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}$; 2) $h^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$; 3) $h^2 \sin\frac{\alpha}{2}$; 4) $h^2 ctg\ \frac{\alpha}{2}$.

18. Кусок сплава меди с оловом весом 12 кг. содержит 45% меди. Сколько чистого олова надо добавить к этому куску, чтобы получившийся новый сплав имел 40% меди?

1) *1,5кг.;* *2) 3кг.;* *3) 4,5кг;* *4) 2,5кг.*

19. При совместной работе двух тракторов различной мощности поле было вспахано за 8 дней. Если бы половину поля сначала вспахать одним

трактором, то при дальнейшей совместной работе двух тракторов вся работа была бы закончена за 10 дней. За сколько дней может вспахать все поле каждый трактор в отдельности?

1) *15дн., 30дн.;* *2) 16дн., 30дн.;* *3) 14дн., 28дн.;* *4) 12дн., 24дн.*

20. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, равные стороны которого имеют длину a и составляют угол α. Боковые ребра пирамиды составляют с ее высотой угол β. Найти объем пирамиды.

1) $\frac{a^3}{6}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$; 2) $\frac{a^3}{3}tg2ctg\beta$;

3) $\frac{a^3}{6}\sin\frac{\alpha}{2}ctg\beta$; 4) $\frac{a^3}{3}\sin\alpha\cos\beta$.

Вариант 4

1. Частное от деления наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя чисел 270 и 144 равно

1) 192; 2) 120; 3) 234; 4) 360; 5) 252.

2. Выражение $\left(\frac{\sqrt{64m^3}-\sqrt{27n^3}}{(4m)^{0,5}-(3n)^{0,5}}-\sqrt{12mn}\right)$ после упрощения имеет вид:

1) 4m+3n ; 2) 4m-3n; 3) 3n-4m; 4) $(3n-4m)^2$; 5) $(3n+4m)^2$.

3. Если $(x,\ y)$ решение системы уравнений $\begin{cases}3x+5y=28\\5x-y=-28\end{cases}$, то значение выражения $x-y^2$ равно

1)-72; 2) –68; 3) 4; 4)-24; 5) 12.

4. Парабола $y=9x^2-\frac{15}{2}x+12a$ касается оси ОХ при значении *a*, равном

1) $\frac{16}{27}$; 2) $\frac{11}{18}$; 3) –2; 4) $-\frac{11}{7}$; 5) $\frac{25}{32}$.

5. Если корни приведенного квадратного уравнения равны -3 и 5, то сумма коэффициентов этого уравнения равна

1) 10; 2)17; 3)-16; 4)-15; 5)-12.

6. Если x – корень уравнения $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+11}=1$, то значение выражения x^2+2x+2 равно

1)20; 2)17; 3)-10; 4)10; 5)19.

7. Пусть x - наименьшее целое решение неравенства $\frac{(x-5)(x+2)^2}{x-1}\le 0$. Тогда значение выражения x^2+3x равно

1) 2; 2)4; 3)-2; 4)0; 5)1.

8. Решение неравенства $\left|\frac{3x-1}{x-3}\right| < 3$ имеет вид

1) $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right)$ 2) $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$ 3) $\left(-\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$ 4) $(0;\ 1)$ 5) $(-\infty;\ 3)\cup(3;+\infty)$.

9. Значение выражения $\frac{3^{\log_9 25}}{2^{\log_9 9}}$ равно

1) $\frac{5}{4}$; 2) $\frac{25}{9}$; 3) $\frac{25}{4}$; 4) $\frac{5}{9}$; 5) $\frac{625}{9}$. .

10. Пусть *(x,y)* - решение системы уравнений $\begin{cases} 3^{2x}-2^{y}=77, \\ 3^{x}-2^{\frac{y}{2}}=7. \end{cases}$, тогда значение выражения x^2-y равно

1)0; 2)4; 3)2; 4)1; 5) -1.

11. Решение неравенства $(10)^{3x-1} \le (2)^{2x+1}\cdot(5)^{5x-2}$ имеет вид

1) $(-\infty;\ 2]$; 2) $[2;+\infty)$; 3) $[-2;\ 2]$; 4) $[-1;\ 1]$; 5) $[0;\ 2]$.

12. Если разность пятого и первого членов геометрической прогрессии с положительными членами равна 5, а разность между её четвертым и вторым членами равна 2, то произведение второго и пятого членов прогрессии равно

1) 32; 2) $3\frac{5}{9}$; 3) $\frac{9}{32}$; 4)16; 5) $\frac{16}{9}$.

13. Пусть $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\alpha=\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$. Тогда значение выражения $tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ равно

1) –7; 2) $-\frac{1}{7}$; 3) $\frac{1}{7}$; 4) 7; 5) $\frac{7}{4}$.

14. Значение выражения $\cos\left(2\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ равно

1) $-\frac{2}{3}$; 2) $\frac{2}{9}$; 3) $\frac{7}{9}$; 4) $-\frac{7}{9}$; 5) $\frac{7}{4}$.

15. Модуль разности корней уравнения $\sin x+\cos x=\frac{1}{\sin x}$, принадлежащих отрезку $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$, равен

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{6}$; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) $\frac{\pi}{12}$.

16. Значение производной функции $y = \sin^2 2x + 1$ в точке $x_o = \frac{\pi}{4}$ равно

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 5; 5) 4.

17. К графику функции y= x^3 -2x +1 в точке с абсциссой x_o=0 проведена касательная. Ордината точки пересечения этой касательной с осью ОУ равна

1) 1; 2) 3; 3) –3; 4) –1; 5) $\frac{1}{2}$.

18. Если x_o - точка максимума функции $f(x) = -x^2 + 4x - 3$, то значение выражения $x_o + f\left(x_o\right)$ равно

1) 3; 2) –1; 3) 2; 4) –3; 5) 5.

19. Векторы $\vec{a}\ (5,4,n)$ и $\vec{b}\ (m,1,3)$ коллинеарны при следующих значениях m и n.

1) $m = \frac{5}{4}, n = 12$; 2) $m = \frac{4}{5}$, $\text{n} = \frac{1}{12}$; 3) $m = 3$, $n = 6$;

4) $m = \frac{1}{3}$, $n = \frac{5}{4}$; 5) m = -3, n = -1.

20. В треугольнике АВС АС=ВС=4 см, а угол В равен 30^o. На сторонах АВ и ВС отложены отрезки ВК+BL длиной 1 см и проведен отрезок KL. При этих условиях площадь трапеции AKLC равна

1) 3 см^2; 2) $\sqrt{3}$ см^2; 3) $2\sqrt{3}$.см^2; 4) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см^2; 5) $\frac{15}{4}$ см^2.

21. Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, делит её на отрезки 51,2 см и 28,8 см. В таком случае величина площади треугольника равна

1) 1536 см^2; 2) 3072 см^2; 3) 768 см^2; 4)1474,56 см^2; 5)737,28 см^2.

22. Высота правильной шестиугольной призмы равна 4 см. Площадь круга, описанного около основания, равна 25 см^2. При таких условиях боковая поверхность призмы равна

1) 20 см^2; 2)120 см^2; 3) 124 см^2; 4) 64 см^2; 5) 128 см^2.

23. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна 4 см, угол при вершине 30^o, а все боковые грани пирамиды образуют с основанием углы по 60^o. При этих условиях площадь боковой поверхности пирамиды равна

1) 8 см^2; 2) 16 см^2; 3) 4 см^2; 4) 12 см^2; 5) $\frac{7}{2}см^2$.

24. Конус вписан в шар радиуса 3 см, угол при вершине осевого сечения конуса равен 60°. Площадь боковой поверхности конуса равна

1) $\frac{27\pi}{2}$ см^2; 2) 13π см^2; 3) 6π см^2; 4) 15π см^2; 5) $\frac{15\pi}{2}$ см^2.

Вариант 5.

ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
А1. Если $\sqrt{26-t}-\sqrt{9-t}=3$, то $\sqrt{26-t}+\sqrt{9-t}$ равно	1) $\frac{17}{3}$ 2) 9 3) 6 4) $\frac{9}{2}$ 5) 5.
А2. Если $f(x)=\frac{7x-1}{2x+9}$, то $f(x-3)-f(x-6)$ приводится к виду	1) $\frac{19x}{4x^2-9}$ 2) $\frac{19x-1}{4x^2-9}$ 3) $\frac{190}{4x^2-9}$ 4) $\frac{190x}{4x^2-9}$ 5) $\frac{195}{4x^2-9}$
А3. Произведение координат вершины параболы $y=-x^2+6x-11$ равно	1) –10 2) –9 3) –8 4) –7 5) –6
А4. Корень уравнения $\frac{27x^3-1}{6x-2}=6x-0{,}5$ принадлежит промежутку	1) $(-4;-2)$ 2) $\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$ 3) $\left(0;\frac{2}{3}\right)$ 4) $\left[\frac{2}{3};1\right)$ 5) $[2;4)$
А5. Результат вычисления выражения $2^{\log_{\sqrt{2}}\left(7-\sqrt{14}\right)+\log_{1/2}\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)^2}$ равен	1) 1 2) $\sqrt{2}$ 3) $\sqrt{7}$ 4) 7 5) $\sqrt{14}$
А6. Сумма корней уравнения $\sqrt{25^{x+3}}=\left(\sqrt[7]{5^{x-1}}\right)^{x+3}$ равна	1) –5 2) 4 3) 8 4) 5 5) -4
А7. Сумма корней уравнения $\left[\log_{0,3}(x+5)+\log_{0,3}(1-x)\right]\cdot\left(x^2-4x\right)=0$ равна	1) 0 2) –1 3) 3 4) 5 5) –4
А8. Если в геометрической прогрессии произведение второго и седьмого членов равно 0,5, первый член равен 8, то знаменатель прогрессии равен	1) $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) 2 4) 4 5) $\frac{1}{8}$
А9. Значение выражения	1) $-\frac{\sqrt{2}}{8}$ 2) $-\frac{\sqrt{2}}{7}$ 3) $-\frac{\sqrt{2}}{6}$ 4) $-\frac{\sqrt{2}}{5}$

$ctg\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ равно	5) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$
A10. Результат упрощения выражения $\frac{\cos\alpha-\cos3\alpha}{1-\cos2\alpha}+\frac{\sin\alpha-\sin3\alpha}{\sin2\alpha}$ равен	1) $\frac{1}{\cos\alpha}$ 2) $\frac{1}{\sin\alpha}$ 3) $tg\alpha$ 4) $\sin2\alpha$ 5) $\frac{1}{\cos2\alpha}$
A11. Если в равнобокой трапеции длины оснований равны 10 см и 6 см, диагональ равна 10 см, то площадь трапеции равна	1) 40 см^2 2) 42 см^2 3) 44 см^2 4) 48 см^2 5) 46 см^2
A12. Если сфера радиуса 3,5 см проходит через все вершины прямоугольного параллелепипеда, в основании которого прямоугольник со сторонами 2 см и 3 см, то объем этого параллелепипеда (в куб. см) равен	1) 30 2) 32 3) 34 4) 36 5) 38

Б1. Найдите сумму целых решений системы $\begin{cases}|x-3|\ge 2\\ -2<x<7\end{cases}$

Б2. Укажите число целых решений неравенства $\frac{x^2+2x+1}{(x+1)(x-1)}\ge -1$, принадлежащих отрезку $[-2;2]$

Б3. Найдите число целых решений неравенства $\sqrt{x-5}-\sqrt{x-8}\ge 1$

Б4. Найдите сумму целых решений неравенства $\left(ctg\frac{\pi}{3}\right)^{x^2+2x-8}\ge\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^{x^2+2x-8}$.

Б5. Найдите наибольшее целое решение неравенства $5^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}<2x^{4\log_x 5}$

Б6. Найдите число решений уравнения $3\cos^2 x-10\sin x-6=0$, принадлежащих отрезку $[0;5\pi]$.

Б7. Вычислите сумму целых значений x, не превышающих по модулю 5 или принадлежащих промежутку (или промежуткам) убывания функции $f(x)=-4x^3-18x^2+21x-3$

Б8. Сколько точек (x,y) с целыми координатами x, y лежат внутри прямоугольника с вершинами A(1,5; 0,5), B(1,5; 2,5), C(3,5; 2,5), D(3,5; -0,5) ?

Б9. Найдите $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$, если $\left|\vec{a}\right|=17$, $\left|\vec{b}\right|=21$ и $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=28$

Б10. Найдите значение параметра a, при котором наименьшее решение неравенства $\frac{ax-6}{x}\geq 4$ равен –3

С1. Найти область значений функции $f(x)=\arcsin\frac{2x^2-1}{x^2+2}$.

С2. Найти все значения a, при которых уравнение $(a-3x)\lg x=0$ имеет только один корень.

С3. При каких значениях x выражение

$$\frac{15}{\cos^4 x}+\frac{128}{4+\sin^2 x}-\frac{69+25\sin^2 x}{1+\cos 2x}-12{,}5\cos 2x$$

принимает неположительное значение?

С3 (геометрическая). В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным $2\sqrt{3}$, расположен конус так, что его вершина находится в точке D_1, а центр его основания, точка O, лежит на диагонали BD_1 и делит её в отношении $DO:OD_1=1:3$. Известно, что окружность основания конуса имеет с каждой гранью, содержащей точку B, ровно по одной общей точке. Определите объем конуса.

С4. Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $\left|ax+3|x|-5\right|<1$ содержит какой-нибудь отрезок длиной 10 и при этом содержится в некотором отрезке длиной 20.

8. Примерный образец выполнения варианта 5

А1. Обозначим $\begin{cases} \sqrt{26-t}-\sqrt{9-t}=3 \\ \sqrt{26-t}+\sqrt{9-t}=x \end{cases} \Rightarrow\ 26-t-9+t=3x \Leftrightarrow x=\dfrac{17}{3}.$

Ответ 1.

А2.

$$f(x)=\frac{7x-1}{2x+9};\ f(x-3)-f(x-6)=\frac{7(x-3)-1}{2(x-3)+9}-\frac{7(x-6)-1}{2(x-6)+9}=\frac{7x-21-1}{2x-6+9}-$$

$$-\frac{7x-42-1}{2x-12+9}=\frac{7x-22}{2x+3}-\frac{7x-43}{2x-3}=\frac{(7x-22)(2x-3)-(7x-43)(2x+3)}{4x^2-9}=$$

$$=\frac{14x^2-44x-21x+66-14x^2+86x-21x+124}{4x^2-9}=\frac{195}{4x^2-6}:$$

Ответ: 5.

А3.

$$y=-x^2+6x-11=-(x^2-6x+11)=-\left(x^2-6x+9+2\right)=-(x-3)^2-2.$$

$$B(3;-2):\quad x_0\cdot y_0=-6.$$

Ответ: 5.

А4.

$$\frac{27x^3-1}{6x-2}=6x-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{(3x-1)\left(9x^2+3x+1\right)}{2(3x-1)}=6x-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 9x^2+3x+1=12x-1 \\ x\neq\dfrac{1}{3} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 9x^2-9x+2=0 \\ x\neq\dfrac{1}{3} \end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$$

$$9x^2-9x+2=0$$

$$x=\frac{9\pm\sqrt{81-72}}{18}=\frac{9\pm3}{18}:\quad x=\frac{1}{3}\vee x=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}:$$

Ответ: 4.

А5.

$$2^{\log_{\sqrt{2}}\left(7-\sqrt{14}\right)+\log_{1/2}\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)^2}=2^{\log_2\left(\sqrt{7}^2-\sqrt{7\cdot2}\right)^2-\log_2\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$=2^{\log_2\frac{7\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)^2}}=2^{\log_2 7}=7.$$

Ответ: 4.

A6.

$$\sqrt{25^{x+3}}=\left(\sqrt[7]{5^{x-1}}\right)^{x+3}\Leftrightarrow 5^{x+3}=5^{\frac{(x-1)(x+3)}{7}}\Leftrightarrow 7(x+3)=$$

$$=(x-1)(x+3)\Leftrightarrow x=-3\vee x=8.$$

$$x_1+x_2=5.$$

Ответ: 4.

A7.

$$\left[\log_{0,3}(x+5)+\log_{0,3}(1-x)\right]\cdot\left(x^2-4x\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<1\\ x>-5\\ x=0\vee x=4.\end{cases}\Leftrightarrow x=0\\ \begin{cases}(x+5)(1-x)=1\\ x<1\\ x-5\end{cases}\Leftrightarrow x=-2\pm2\sqrt{2}\end{array}\right.$$

$$x^2+4x-4=1$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16+16}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{32}}{2}=-2\pm2\sqrt{2};$$

$$-2+2\sqrt{2}-2-2\sqrt{2}=-4.$$

Ответ: 5.

A8.

$b_1, b_2, \ldots$ - геометрическая прогрессия.

$$b_2\cdot b_7=\frac{1}{2}\qquad\qquad b_2=b_1q$$

$$b_1=8\qquad\qquad b_7=b_1q^6$$

$$q=?$$

$$b_2\cdot b_7=b_1^2\cdot q^7=\frac{1}{2}:$$

$$b_1=2^3\quad ,b_1^2=2^6,\quad q^7=\left(\frac{1}{2}\right)^7.\ q=\frac{1}{2}.$$

Ответ: 2.

A9.

$$ctg\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=ctg\left(\pi-\arccos\frac{1}{3}\right)=-ctg\arccos\frac{1}{3}=-\frac{1/3}{\sqrt{1-\frac{1}{9}}}=-\frac{3}{3\sqrt{8}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{8}}=-\frac{\sqrt{8}}{8}=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: 5.

А10.

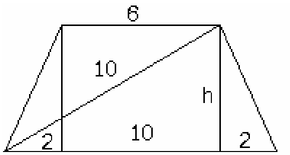
$$\frac{\cos\alpha-\cos3\alpha}{1-\cos2\alpha}+\frac{\sin\alpha-\sin3\alpha}{\sin2\alpha}=\frac{\cos\alpha-\cos3\alpha}{2\sin^2\alpha}+\frac{\sin\alpha-\sin3\alpha}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-\cos\alpha\cdot\cos3\alpha+\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot\sin3\alpha}{2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1-\cos2\alpha}{2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin^2\alpha}{2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}:$$

Ответ: 1.

А11.

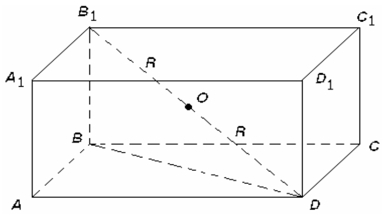


$S=8h.$

$h=\sqrt{100-64}=6.$ $S=48.$

Ответ: 4.

А12.



$V=6\cdot h.$

$h=\sqrt{79-13}=6.$ $V=36.$

Ответ: 4.

Б1.

$$\begin{cases}|x-3|\ge2\\-2<x<7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3\ge2\vee x-3\le-2\\-2<x<7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge5\\-2<x<7\end{cases}\vee\begin{cases}x\le1\\-2<x<7\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\le x<7\vee-2\le x\le1.$$

В первом промежутке целыми решениями являются числа 5 и 6, а во втором промежутке целыми решениями являются –1, 0 и 1. Таким образом, искомая сумма имеет вид: 5+6-1+0+1=11.

Ответ: 11.

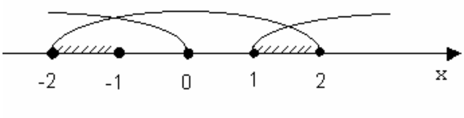
Б2.

$$\frac{x^2+2x+1}{(x+1)(x-1)}\ge-1\Leftrightarrow\frac{x^2+2x+1}{(x+1)(x-1)}+1\ge0\Leftrightarrow\frac{x^2+2x+1+\left(x^2-1\right)}{(x+1)(x-1)}\ge0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2+2x+1+x^2-1}{(x+1)(x-1)}\ge0\Leftrightarrow\frac{2x^2+2x}{(x+1)(x-1)}\ge0\Leftrightarrow\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}\ge0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne-1\\\dfrac{x}{x-1}\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le0\vee x>1\\x\ne-1\end{cases}:$$

Найдем пересечение данного множества с отрезком $[-2;2]$.



Как видно из геометрического изображения, целыми решениями, принадлежащие отрезку $[-2;2]$ являются числа –2; 0 и 2.

Таким образом, число целых решений, удовлетворяющих условию задачи, равно трем.

Ответ: 3.

Б3.

$$\sqrt{x-5}-\sqrt{x-8}\ge 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-5}\ge 1+\sqrt{x-8} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 8 \\ x-5\ge 1+2\sqrt{x-8}+x-8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 8 \\ \sqrt{x-8}\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 8 \\ x-8\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 8 \\ x\le 9 \end{cases} \Leftrightarrow 8\le x\le 9.$$

Число целых решений два.

Ответ: 2.

Б4.

$$(1)\quad \left(ctg\frac{\pi}{3}\right)^{x^2+2x-8} \ge \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^{x^2+2x-8} \Leftrightarrow \text{ т.к. } ctg\frac{\pi}{3}=\frac{\cos\pi/3}{\sin\pi/3}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \text{то}\ (1) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{x^2+2x-8} \ge \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{x^2+2x-8} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{x^2+2x-8} \ge$$

$$\ge \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{x^2+2x-8} \Leftrightarrow \left(x^2+2x-8\right)\log_{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{3} \ge \left(x^2+2x-8\right)\log_{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+2x-8\right)\log_{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} \ge \left(x^2+2x-8\right)\log_{\sqrt{3}}\frac{2}{3}\ge 0 \Leftrightarrow x^2+2x-8\le 0.$$

Так как $\log_{\sqrt{3}}\frac{2}{3}<0 \quad \left(a>1,\ \frac{2}{3}<1\right).$

$$x^2+2x-8\le 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-2)\le 0 \Leftrightarrow -4\le x\le 2.$$

Целыми решениями являются числа: -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2.

Найдем сумму целых решений –4-3-2-1-1+1+2=-7.

Ответ: -7.

Б5.

$$5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} < 2x^{4\log_x 5} \Leftrightarrow 5^{\log_5^2 x} + 5^{\log_5^2 x} < 2^{5^4} \Leftrightarrow 2\cdot 5^{\log_5^2 x} < 2\cdot 625^{5^4} \Leftrightarrow 5^{\log_5^2 x} < 5^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_5^2 x < 4 \Leftrightarrow \left|\log_5 x\right| < 2 \Leftrightarrow -2 < \log_5 x < 2 \Leftrightarrow 5^{-2} < x < 5^2 \Leftrightarrow \frac{1}{25} < x < 25.$$

Ответ: 24.

Б6.

$3\cos^2 x - 10\sin x - 6 = 0;\;\; 3\left(1-\sin^2 x\right) - 10\cos x - 6 = 0.$

$3 - 3\sin^2 x - 10\sin x - 6 = 0;\; -3\sin^2 x + 10\sin x + 3 = 0:$

Обозначим: $\sin x = y$, где $\left|y\right| \le 1.\quad 3y^2 + 10y + 33 = 0;$

$y = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100-36}}{6} = \dfrac{-10\pm 8}{6};\quad y_1 = -3$ - не удовлетворяет, $y_2 = -\dfrac{1}{3}:$

$$x = \left(-1\right)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3} + n\pi.$$

$n = 0:\quad x_0 = -\arcsin\dfrac{1}{3};\quad x_0 \notin [0;\, 5\pi].$

$n = 1:\quad x_1 = \pi + \arcsin\dfrac{1}{3};\quad x_1 \in [0;\, 5\pi].$

$n = 2:\quad x_2 = 2\pi - \arcsin\dfrac{1}{3};\quad x_2 \in [0;\, 5\pi].$

$n = 3:\quad x_3 = 3\pi + \arcsin\dfrac{1}{3};\quad x_3 \in [0;\, 5\pi].$

$n = 4:\quad x_4 = 4\pi - \arcsin\dfrac{1}{3};\quad x_4 \in [0;\, 5\pi].$

$n = 5:\quad x_5 = 5\pi + \arcsin\dfrac{1}{3};\quad x_1 \notin [0;\, 5\pi].$

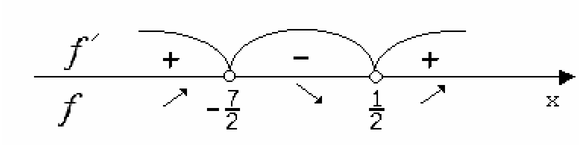
Ответ: 4.

Б7.

$$f(x) = -4x^3 - 18x^2 + 21x - 3:\quad f'(x) = -12x^2 - 36x + 21.$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -12x^2 - 36x + 21 > 0 \Leftrightarrow 12x^2 + 36x - 21 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x - 7 < 0 \Leftrightarrow 4\left(x + \dfrac{7}{2}\right)\left(x - \dfrac{1}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{7}{2}\right)\left(x - \dfrac{1}{2}\right) < 0$

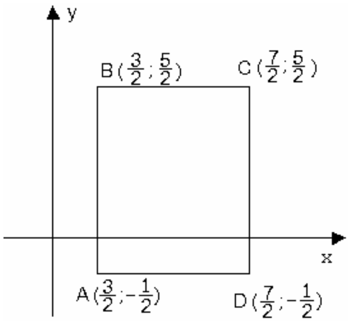


Как видно из геометрического изображения, функция убывает на промежутке $\left(-\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$. Целые значения x, принадлежащие данному промежутку: -3; -2; -1; 0. Их сумма равна: -3-2-1=-6.

Ответ: -6.

Б8.

Сделаем схематический чертеж, изобразив указанные точки на координатной плоскости. Внутри промежутка (1,5; 3,5) две точки с целочисленными абсциссами, а внутри промежутка $\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$ три точки с целочисленными ординатами.

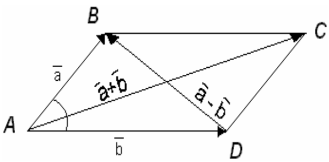


Таким образом, внутри прямоугольника АВСД 6 точек с целочисленными координатами.

Ответ: 6.

Б9.

Сложив два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по правилу параллелограмма, заметим, что $\left|\overline{AC}\right| = \left|\bar{a}+\bar{b}\right|$, а $\left|\overline{ВД}\right| = \left|\bar{a}-\bar{b}\right|$.



Используя теорему косинусов, получим:

$$\left.\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \left|\bar{a}\right|^2 + \left|\bar{b}\right|^2 - 2\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\cos\left(180^o-\varphi\right)\\ \overline{ВД}^2 &= \left|\bar{a}\right|^2 + \left|\bar{b}\right|^2 - 2\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\cos\varphi\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Так как по условию $\left|\overline{AC}\right| = 28,$ а $\left|\overline{ВД}\right| = \left|\bar{a}-\bar{b}\right|,$ $\left|\bar{a}\right| = 17;$ $\left|\bar{b}\right| = 21$ и $\cos(180^o-\varphi) = -\cos\varphi.$ Следовательно, сложив левые и правые части системы (1), получим:

$$\left|\overline{AC}\right|^2 + \left|\overline{ВД}\right|^2 = 2\left|\bar{a}\right|^2 + 2\left|\bar{b}\right|^2 + 2\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\cdot\cos\varphi - 2\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\cdot\cos\varphi = 2\left|\bar{a}\right|^2 + 2\left|\bar{b}\right|^2 :$$

Отсюда,

$$\left|\bar{a}-\bar{b}\right| = \sqrt{21\left|\bar{a}\right|^2 + 2\left|\bar{b}\right|^2 - 28^2} = \sqrt{2\cdot 17^2 + 2\cdot 21^2 - 28^2} = \sqrt{1460-784} == \sqrt{676} = 26.$$

Ответ: 26.

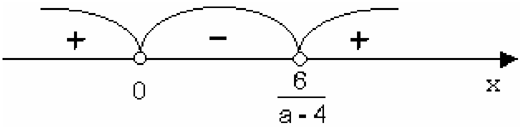
Б10.

$$\frac{ax-6}{x} \ge 4 \Leftrightarrow \frac{ax-6-4x}{x} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(a-4)x-6}{x} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(a-4)\left(x-\frac{6}{a-4}\right)}{x} \ge 0.$$

$a = 4$ особая точка.

При $a = 4$: $\frac{4x-6}{x} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{4x-4x-6}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x < 0.$ Наименьшего решения нет.

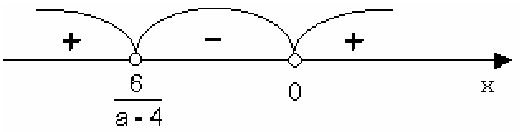
Если $a > 4$, то имеем: $x - \frac{6}{a-4} \geq 0.$



Решив методом интервалов заметим, что наименьшего решения нет.

$$x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{6}{a-4}; +\infty\right).$$

Если $a < 4$, то имеем:



$$\frac{x - \frac{6}{a-4}}{x} \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{6}{a-4}; 0\right).$$

Наименьшее решение $\frac{6}{a-4}$, что по условию равно –3. Таким образом, имеем: $\frac{6}{a-4} = -3$, т.е. $6 = -3a + 12$: $3a = 6$: $a = 2$.

Ответ: 2.

C1.

Дробно рациональная функция $g(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 2}$ определена, следовательно, непрерывна на множестве всех действительных чисел.

$$g'(x) = \frac{4x(x^2+2) - 2x(2x^2-1)}{(x^2+2)^2} = \frac{10x}{(x^2+2)^2}.$$

Производная g' определена на множестве всех действительных чисел и равна нулю при $x = 0$. Если $x < 0$, то $g'(x) < 0$, следовательно, функция g убывает на интервале $(-\infty; 0)$. Если $x > 0$, то $g'(x) > 0$, и функция g возрастает на интервале $(0;+\infty)$. Точка $x=0$ - точка минимума функции g.

$$\frac{2x^2-1}{x^2+2}=\frac{2(x^2+2)-5}{x^2+2}=2-\frac{5}{x^2+2}.$$ При $x\to\pm\infty$ $\left(2-\frac{5}{x^2+2}\right)\to 2$

При $x\to 0$ $\left(2-\frac{5}{x^2+2}\right)\to -\frac{1}{2}$ и $\left(2-\frac{5}{0^2+2}\right)=-0{,}5$ при $x=0$.

Следовательно, непрерывная функция $g(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^2+2}$ принимает все значения из промежутка $[-0{,}5;\ 2)$.

Областью определения функции $f(t)=\arcsin t$ является отрезок $[-1;1]$. Общей частью промежутков $[-1;1]$ и $[-0{,}5;\ 2)$ является отрезок $[-0{,}5;1]$.

На отрезке $[-0{,}5;1]$ непрерывная функция $f(t)=\arcsin t$ принимает все значения от $-\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$.

C2.

Это уравнение всегда имеет корень $x=1$. Левая часть уравнения определена только для положительных значений x.

Рассмотрим два случая.

1) Если $a\le 0$, то первый множитель $(a-3x)$ отрицателен, следовательно, не равен нулю. Поэтому уравнение имеет единственный корень $x=1$.

2) $a>0$. Множитель $(a-3x)$ обращается в нуль при $x=\frac{a}{3}$. Если $a\ne 3$, то получаем корень уравнения, отличный от $x=1$, следовательно, в этом случае уравнение имеет два корня. Если $a=3$, то оба множителя обращаются в нуль при $x=1$, т.е. уравнение имеет единственный корень.

Ответ: $a\le 0\vee a=3$ (возможны и другие формы ответа, например, $(-\infty;0]\cup\{3\}$.

C3.

$$\frac{15}{\cos^4 x}+\frac{128}{4+\sin^2 x}-\frac{69+25\sin^2 x}{1+\cos 2x}-12{,}5\cos 2x=$$

$$=\frac{15}{\cos^4 x}+\frac{128}{4+\sin^2 x}+\frac{25\cos^2 x-94}{2\cos^2 x}-12{,}5\cos 2x=$$

$$= \frac{15}{\cos^4 x} + \frac{128}{4+\sin^2 x} - \frac{47}{\cos^2 x} + 25\sin^2 x.$$

Введем обозначение: $t = \sin^2 x$, где $t \in [0;1)$. Тогда последнее выражение примет вид: $25t - \frac{47}{1-t} + \frac{15}{(1-t)^2} + \frac{128}{4+t}$.

Общий знаменатель полученного выражения всегда положителен. Найдем его числитель:

$$25(t^2+4t)(t^2-2t+1)+47(t^2+3t-4)+15(t+4)+128(t^2-2t+1)=$$

$$=25t^4+50t^3+(-175+47+128)t^2+(100+11+15-256)t+(-188+60+128)=$$

$$=25(t+2)t^3.$$

Первый и второй множители всегда положительны, а третий не положителен только тогда, когда равен нулю.

Итак, $t = \sin^2 x = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \pi k$, где k - целое.

Ответ: $x = \pi k$, где k - целое.

С3 (геометрическая).

1. Проведем через точку O плоскость, перпендикулярную BD_1. Пусть эта плоскость пересекает лучи BA, BB_1, BC в точках P, T, Q соответственно. Диагональ BD_1 куба образует равные углы с ребрами AB, B_1B, CB, поэтому прямоугольные треугольники POB, TOB, QOB равны по катету и острому углу. Следовательно, $BP = BT = BQ$. Треугольники PBT, TBQ, PBQ, равны по двум катетам, следовательно, $PT = TQ = QP$. Значит, треугольник PQT – правильный.

2. $AB \perp AA_1D_1$, поэтому $AB \perp AD_1$, а треугольник BAD_1 – прямоугольный. $OP \perp BD_1$, поэтому треугольник POB также прямоугольный. Треугольники BAD_1 и POB подобны (имеют общий острый угол), следовательно,

$$\frac{OP}{AD_1} = \frac{OB}{AB} = \frac{PB}{BD_1}.$$

Так как $AB = 2\sqrt{3},\ AD_1 = AB\sqrt{2} = 2\sqrt{6},\ BD_1 = AB\sqrt{3} = 6,\quad OB = \frac{1}{4}BD_1 = 1{,}5,$

то $OP = \frac{OB \cdot AD_1}{AB} = \frac{3\sqrt{2}}{2},\quad PB = \frac{BD_1 \cdot TD_1}{AB} = 1{,}5\sqrt{3}.$

Поскольку $1/5\sqrt{3} < 2\sqrt{3}$, то $PB < AB$, значит, точка P лежит на ребре AB.

Аналогично, точки T и Q лежат на ребрах куба. Откуда ΔPQT – сечение куба проведенной плоскостью. Окружность, вписанная в правильный треугольник PQT, имеет с каждой из его сторон, а значит, с каждой гранью, содержащей точку B, ровно по одной общей точке. Следовательно, она является окружностью основания данного конуса.

3. Пусть OM – радиус основания конуса. $OM = \frac{1}{2}OP = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Высота D_1O конуса равна $\frac{3}{4}BD_1 = \frac{9}{2}$. Найдем объем конуса: $V = \frac{\pi OM^2 \cdot D_1O}{3} = \frac{27\pi}{16}$.

Ответ: $\frac{27\pi}{16}$.

С4.

1. По определению модуля исходное неравенство равносильно двойному неравенству $-1 < ax + 3|x| - 5 < 1$, $4 < ax + 3|x| < 6$.
2. Если $x \ge 0$, то $|x| = x$ и тогда получаем $4 < (a+3)x < 6$. Так как $a+3 > 0$, то $\frac{4}{a+3} < x < \frac{6}{a+3}$. Длина интервала $\left(\frac{4}{a+3}; \frac{6}{a+3}\right)$ равна $\frac{2}{a+3} < \frac{2}{3}$.

Поэтому отрезок длиной 10 может содержаться только во множестве отрицательных решений исходного неравенства.

3. Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и тогда получаем $4 < (a-3)x < 6$.

Если $a \ge 3$, то $a - 3 \ge 0$, $(a-3)x \le 0$ и поэтому отрицательных решений у неравенства $4 < (a-3)x < 6$ нет. Значит, $a \ge 3$ не удовлетворяют условию.

Если $0 < a < 3$, то $a - 3 < 0$, и поэтому $\frac{6}{a-3} < x < \frac{4}{a-3}$. Длина интервала $\left(\frac{6}{a-3}; \frac{4}{a-3}\right)$ равна $\frac{2}{3-a}$.

4. Интервал $\left(\frac{6}{a-3}; \frac{4}{a-3}\right)$ содержит отрезок длиной 10, только если его длина больше 10. Значит, $\frac{2}{3-a} > 10$, $2 > 30 - 10a$, $a > 2{,}8$. Интервалы $\left(\frac{6}{a-3}; \frac{4}{a-3}\right) \cup \left(\frac{4}{a+3}; \frac{6}{a+3}\right)$ содержатся в отрезке длиной 20, только если $\frac{6}{a+3} - \frac{6}{a-3} = \frac{36}{9-a^2} \le 20$. Значит, $1{,}8 \le 9 - a^2$, $a^2 \le 7{,}2$. Но если $a > 2{,}8$, то $a^2 > 7{,}84 > 7{,}2$. Таким образом, не существуют такие значения a, которые удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $\varnothing$.

Замечания

А) Возможно решение с использованием графика левой части. Пункт 4 при этом все равно должен сохранится.

Б) Возможен другой порядок раскрытия модулей, начиная с внутреннего.

9. Образцы итоговых заданий по алгебре и геометрии (9 и 11 классы)

Геометрия для 9 класса

Часть А

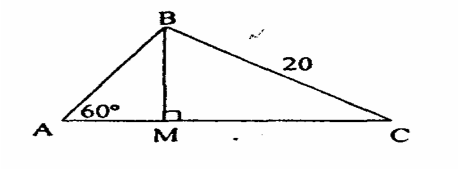
А1. Внешний угол при вершине равнобедренного треугольника, противолежащей основанию, равен 106°. Найдите внешний угол при основании.

1) 127° 2) 53° 3) 74° 4) 158°

А2. В треугольнике АВС проведена высота ВК. Найдите периметр треугольника АВК, если АВ = ВС = 17, АС = 30.

1) 64 2) 40 3) 56 4) 96

А3. Отрезок ВМ - высота прямоугольного треугольника АВС. Найдите ВМ, если
$\angle A = 60°$, ВС = 20.



1) 10 2) $10\sqrt{2}$

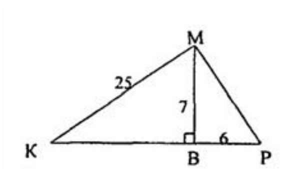
3) $5\sqrt{3}$ ' 4) 15

А4. В треугольнике ВКТ ВК=3, КТ=5, $\angle K=60°$. Найдите ВТ.

1) 49 2) 7 3) 19 4) $\sqrt{19}$

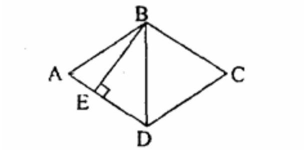
А5. Высота МВ треугольника КМР равна 7м, КМ = 25 м, ВР = 6 м. Найдите площадь треугольника КМР.

1) 210м^2 2) 84м^2 3) 168 м^2 4) 105 м^2



А6. ВЕ - высота ромба АВСD, $\angle ADB = 65°$.
Найдите угол АВЕ

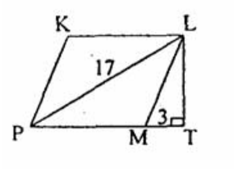
1) 40° 2) 25° 3) 30° 4) 75°



А7.Найдите площадь параллелограмма KLMP, если PL=17м, PT=15м, MT=3м.

1) 120м^2 2) 96м^2

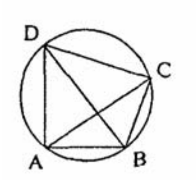
3) 136м^2 4) 148м^2



А8. Найдите угол ADC, если $\angle BAC = 48°$, $\angle ADB = 32°$

1) 80° 2) 96°

3) 100° 4) 64°



А9. Диагональ прямоугольника равна 8 м. Найдите длину описанной около него окружности.

1) 4π м 2) 16π м 3)8π м 4) 12π м

А 10.Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

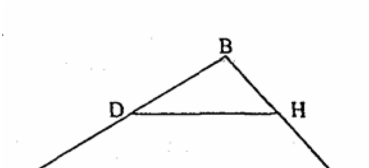
1) 10 2) 6 3) 5 4) 8

А 11 .Какая из следующих фигур имеет только одну ось симметрии?

1) квадрат 2) прямоугольная трапеция 3) равнобедренный треугольник 4) ромб •

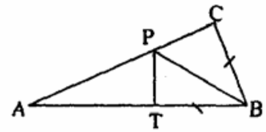
А12.0трезок DH - средняя линия треугольника ABC. Найдите сумму векторов $\overline{AD}$ и $\overline{HD}$.

1) $\overline{BH}$ 2) $\overline{HB}$ 3) $\overline{DB}$ 4) $\overline{AB}$

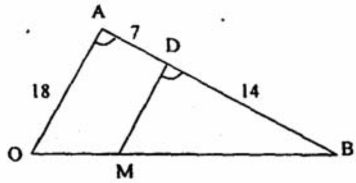


Часть В

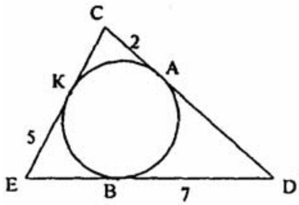
В1. Отрезок ВР – биссектриса треугольника АВС, ВС=ВТ, ∠АРТ=70°. Найдите угол ВРС.



В2. В треугольнике АВО $\angle BDM$ = ∠ВАО. Используя данные, указанные на рисунке, найдите DM.

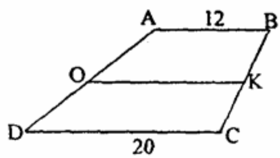


В3. Окружность, вписанная в треугольник CDE, касается его сторон в точках А, В и К. Найдите периметр треугольника CDE, если АС = 2, КЕ = 5, BD = 7.



В4. Основания равнобедренной трапеции равны 6 м и 14 м, а один из углов - 45°. Найдите площадь трапеции.

В5. В трапеции ABCD точка О - середина AD, ВК = СК. Используя данные, указанные на рисунке, найдите ОК.



Часть С

С1. Из точки А катета МР прямоугольного треугольника КМР проведен перпендикуляр АВ к гипотенузе КМ. Найдите АМ, если ВМ = 3 см, ВК = 7 см, КР = 8 см.

С2. Биссектриса угла М параллелограмма КМРТ пересекает сторону РТ в точке С. Найдите периметр параллелограмма, если РС = 3 см, СТ = 2 см.

С3. Диагонали трапеции КМОР (КМ || РО) пересекаются в точке Е. Найдите площадь трапеции, если S_{OPE}= 16 м^2, S_{PME} = 12 м^2.

Алгебра для 9 класса

Часть А

А 1. Упростите выражение . $\dfrac{x^3}{\left(x^{-4}\right)^{-2}}$.

1)x^{-1} 2) x^{-3} 3)x^5 4)x^{-5}

А2. Найдите значение выражения $16n^3$–n, если n = 2.
1) 0 2) -130 3) 126 4)-4

А3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+7y=-39, \\ 3x-y=15. \end{cases}$

1) (-4;-5) 2) (5; 0) 3) (-18; -3) 4) (3; -6)

А4. Сократить дробь $\dfrac{16t^2-1}{5t-20t^2}$.

1) $\dfrac{4t+1}{5t}$ 2) $-\dfrac{1-4t}{5t}$ 3) $\dfrac{4t-1}{5t}$ 4) $-\dfrac{4t+1}{5t}$

А5. Упростите выражение $(4t-3)^2+12t$.
1) $16t^2$ +9 2) $4t^2$-12t+9 3) $16t^2$-12t+9 4) $4t^2$+9

А6. Упростите выражение • $\sqrt{28}\cdot\sqrt{14}\cdot\sqrt{24}$.

1) $56\sqrt{3}$ 2) $12\sqrt{7}$ 3) $48\sqrt{6}$ 4) $64\sqrt{2}$

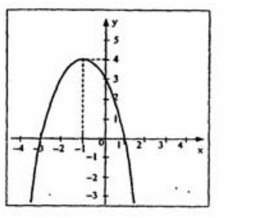
A7. Решите систему неравенств $\begin{cases} x-7<2, \\ -7x \le 8. \end{cases}$

1) $(9;+\infty)$ 2) $\left(-\frac{8}{7};9\right)$ 3) $\left(-\infty;-\frac{8}{7}\right)$ 4) $\left[-\frac{8}{7};9\right)$.

A8. График функции $y=5+\dfrac{2}{x+4}$ проходит через точку с координатами

1) (0;6) 2) (-2; 6) 3)(-6; 6) 4) (-2; 4)

A9. По графику квадратичной функции найдите промежутки ее убывания.



!) $[-1;+\infty)$

2) $(-\infty;-3]$

3) $[1;+\infty)$

4) $[0;+\infty)$

A 10. Упростите выражение $\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{3x-4}{2x-x^2}$.

1) $\dfrac{2x+4}{2x-x^2}$ 2) $\dfrac{2}{x}$ 3) $-\dfrac{2}{x}$ 4) $\dfrac{x^2-x-4}{2-x}$

A11.Выразите из формулы $S=\dfrac{9R^2}{2\sqrt{3}}$ переменную R (R > 0).

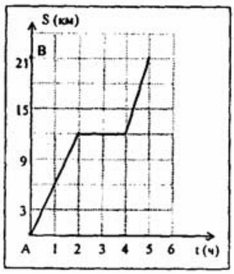
1) $R=\dfrac{\sqrt{2S\sqrt{3}}}{3}$ 2) $R=\sqrt{\dfrac{2S}{\sqrt{3}}}$

3) $R=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}S$ 4) $R=3\sqrt{\dfrac{S}{2\sqrt{3}}}$

A12. На рисунке изображен график движения туристического теплохода по озеру от города А до города В с остановкой в заповеднике.

Сколько времени плыл теплоход от города А до города В, не считая времени на стоянку в заповеднике?

1) 2 ч 2) 1 ч 3) 5 ч 4) 3 ч



A13. Расположите в порядке возрастания числа $\sqrt{17}$; $3\sqrt{2}$; 4.

1) $\sqrt{17}$; 4; $3\sqrt{2}$ 2) 4, $\sqrt{17}$; $3\sqrt{2}$

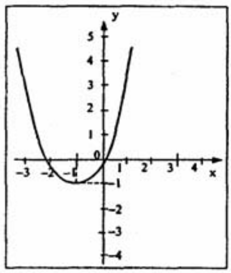
3) $3\sqrt{2}$; $\sqrt{17}$; 4 4) 4; $3\sqrt{2}$; $\sqrt{17}$

A14. Моторная лодка прошла по течению реки 16 км и вернулась обратно, потратив на весь путь 10 часов. Скорость течения реки - 3 км/ч.
Найдите собственную скорость лодки.
Обозначьте собственную скорость лодки буквой x и составьте уравнение по условию задачи.

1) $\frac{16}{x+3}+\frac{16}{x-3}=10$ 2) $5(x+3)+5(x-3)=16$

3) $\frac{10}{x+3}+\frac{10}{x-3}=16$ 4) $\frac{x+3}{5}+\frac{x-3}{5}=16$

А 15.По графику квадратичной функции найдите все значения аргумента, при которых значения функции положительны.



1) $(-\infty; -2)$
2) (-2; 0)
3) $(0; +\infty)$
4) $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$

A16. Выполните действия в выражении $(1{,}47 \cdot 10^6):(3{,}5 \cdot 10^8)$ и представьте полученное число в стандартном виде.

1) $4{,}2 \cdot 10^{-3}$ 2) $4{,}2 \cdot 10^{-1}$ 3) $4{,}2 \cdot 10^{-2}$ 4) $42 \cdot 10^{-2}$

A17. Решить неравенство $x-4+3x^2<0$.

1) $\left(-1; \frac{4}{3}\right)$ 2) $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup (1; +\infty)$

3) $\left(-\frac{4}{3}; 1\right)$ 4) $\left[-\frac{4}{3}; 1\right]$

Часть B

B1. Сколько процентов составляет 279 от 620 ?

В2. Найдите больший корень уравнения $(5x+45)(8x-32)=0$.

В3. Решите уравнение $5-\frac{x}{3}=\frac{x-5}{2}$.

В4. Найдите ординату точки пересечения оси Оу и графика функции $y=3x-2-\frac{4}{x+2}$.

В5.Найдите больший корень уравнения $\frac{7}{x}-6=x$.

Часть С

С1. Решите уравнение $\frac{x}{x-3}=\frac{18}{x^2-9}+\frac{2}{x+3}$.

С2. Найдите область определения функции $y\frac{\sqrt{2-4x}}{x^2+2x+1}$.

С3. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} y=x^2+2x-3, \\ y=3x+3. \end{cases}$

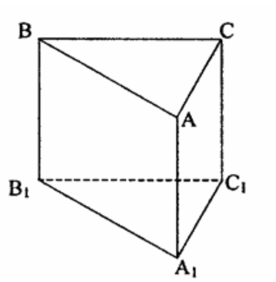
Геометрия для 11 класса

Часть А

А1. Основание прямой призмы - прямоугольный треугольник, гипотенуза и катет которого равны 41 м и 9 м, высота призмы равна 10 м.
Найдите площадь полной поверхности призмы. •
1) 1260 м^2 2) 900м^2 3) 801 м^2 4) 550 м^2

А2. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $\sqrt{6}$ м, а сторона основания–2 м. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины В, С и A_1.

1) $2\sqrt{3}$ м^2 2) 6 м^2 3) 3м^2 4) $\sqrt{6}$ м^2

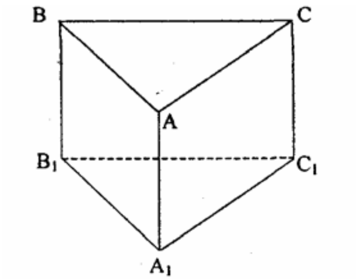


А3. Две стороны основания прямого параллелепипеда, равные 6 м и 4 м, образуют угол в 30°. Найдите объем параллелепипеда, если боковое ребро равно 8 м.

1) 96 м^3 2) 48 м^3 3) $96\sqrt{3}$ м^3 4) $48\sqrt{3}$ м^3

А4. Ребро AA_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно 2, АС = 4. Найдите расстояние от вершины С до прямой A_1B_1.

1) $\sqrt{14}$ 2) $3\sqrt{2}$ 3) 6 4) 4



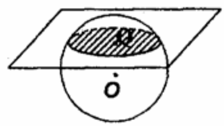
А5. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 15м, а сторона основания - 18м. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
1) 405 м^2 2) 628 м^2 3) 108 м^2 - 4) 324 м^2

А6. Основание пирамиды - ромб, диагонали которого равны 6 м и 8 м, а высота пирамиды равна стороне основания. Найдите объем пирамиды.
1) 40 м^3 2) 80 м^3 3) 160 м^3 4) 240 м^3

А7. Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольника ABCD вокруг стороны ВС, если ВС=8 м, BD=10 м.
1) 288 м^3 2) 36π м^3 3) 288π м^3 4) 800π м^3

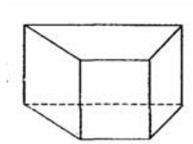
А8, Образующая конуса равна 5 м, а высота - 3 м. Найдите объем конуса.
1)16м^3 2) 25π м^3 3) 16π м^3 4)21π м^3

А9. Радиус шара равен 10 м, а расстояние от его центра до секущей плоскости равно 6 м. Найдите площадь сечения.
1) 64π м^2 2) 16π м^2 3) 256π м^2 4) 32π м^2

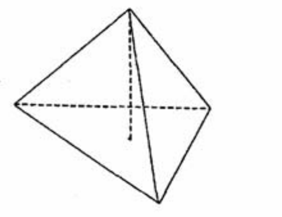


Часть В

В1. Основание прямой призмы - равнобедренная трапеция. Высота трапеции равна $3\sqrt{3}$ м, а основания - 5 м и 11м. Найдите величину острого двугранного угла, образованного боковыми гранями призмы.

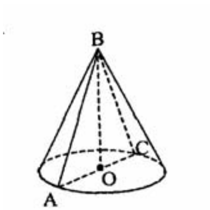


B2. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 3, а боковое ребро $\sqrt{6}$. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания.

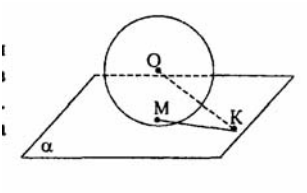


B3. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 120π м^2, а радиус основания –6 м. Найдите длину образующей цилиндра.

B4. Радиус основания конуса равен 12 м, а образующая -13 м. Найдите площадь осевого сечения конуса.



B5. Сфера с центром в точке О касается плоскости в точке М. Точка К лежит в касательной плоскости, КО =10 дм. Найдите КМ, если площадь сферы равна 144π дм^2.



Часть С

C1. Высота конуса равна 8 м. Осевое сечение – прямоугольный треугольник. Найдите площадь сечения, проходящего через две образующие, угол между которыми равен 45^o.

C2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ BC=4, CD=3, $CC_1 = 4$. Вычислите расстояние от вершины С до прямой B_1D.

C3. Основание пирамиды KABCD – прямоугольник ABCD, AB= 3 м, AD=1 м. Ребро KB перпендикулярно плоскости основания, а грань KAD образует с плоскостью основания двугранный угол в 30^o. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Алгебра 11 класс

Часть А

A1. Найдите значение выражения • $\sqrt{49} - \sqrt[4]{80} - \sqrt{169} + 3\sqrt[4]{5}$.

1) $5\sqrt[4]{5}-6$ 2) $\sqrt[4]{5}-6$ 3) $20-\sqrt[4]{5}$ 4) $-6-\sqrt[4]{5}$

А2. Упростите выражение $6ctg(3\pi+x)-8tg\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)+ctg(\pi+x)$. .

1) ctgx 2) 15ctgx 3) -ctgx 4) 7ctgx-8tgx

А3. Выполните действия $\frac{b+c+2\sqrt{bc}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}-\sqrt{b}$.

1) $\sqrt{c}$ 2) $\sqrt{c}+2\sqrt{bc}$ 3) $2\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 4) $-\sqrt{c}$.

А4. Упростите выражение $\log_{\frac{1}{14}} 49+2\log_{\frac{1}{14}} 2$.

1) 2 2) 98 3) 196 4) -2

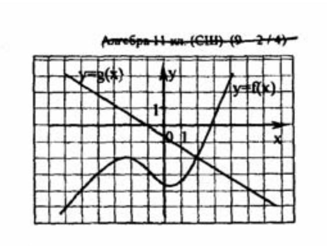
А5. Какие выражения имеют смысл?
1) $\log_{0,5} 0{,}01$ 2) $\log_{0,5}(\sin x-8)$ 3) $\log_{0,5}(\sin 2\pi)$ 4) $\log_{0,5} tg\pi$

А6. Какие уравнения имеют корни?

1) $\sqrt{x+1}=-3$ 2) $\sqrt{x^2-1}=3$

3) $\sqrt{x}+2=0$ 4) $\sqrt{-x^2-1}=0$

А7. Решите графически неравенство
$f(x)\le g(x)$
1) $(-\infty;-2]$ 2) $(2;\infty)$
3) $(-\infty;\infty)$ 4) $(-\infty;2]$



А8. Решением какого неравенства является множество всех действительных чисел?

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\ge 1$ 2) $\log_4 x\ge 2$ 3) $x^2+2x+2\ge 0$ 4) $\cos x\ge 2$

А9. При каких значениях аргумента значения функции $f(x)=\log_{0,1}(x^2-3x)$ равны -1?

1) -2; 5 2) $3-\sqrt{5};\ 3+\sqrt{5}$ 3) 5 4) нет таких

A10. Решите неравенство $\log_6(8x+8) < \log_6(x+2)$.

1) (-2;-1) 2) $\left(-1;\ -\frac{6}{7}\right]$ 3) нет решений 4) $\left(-1;\ -\frac{6}{7}\right)$

A11. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $f(x)=\sqrt{5-x}$ и g(x) = x-5.

1) 4; 5 2) нет таких 3)0 4)5

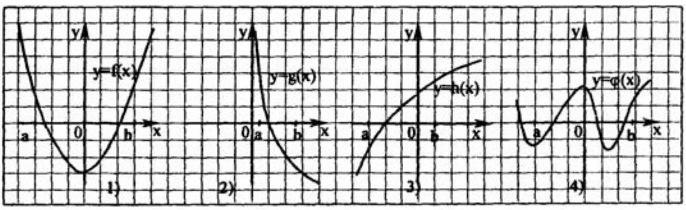
A12.Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{0{,}49-0{,}7^{4x-2}}$.

1) $(-\infty;\ 1]$ 2) $[0;\ \infty)$ 3) $[1;\ \infty)$ 4) $(-\infty;\ 0]$

A13.Какие функции являются нечетными?

1) $y=\sqrt{x^2+1}$ 2) y = x+3 3) y = Iog$_6$(x+4) 4) $y=x\cdot\cos x$

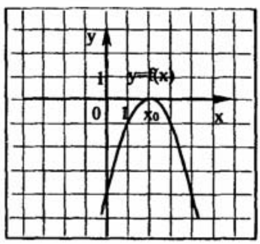
A 14. Какие функции убывают на заданной области?



A15.Найдите значение производной функции y = f(x) в точке x_o.

1) 0 2) не существует

3) 2 4) -4



A16.Для функции $f(x)=3x^2-2$ укажите ту первообразную, которая проходит через точку М (1;-8).

1) F(x) = 6x-14 2) F(x) = x^3-2x-7

3) F(x) = x^3-2x-9 4) F(x) = x^3-2x

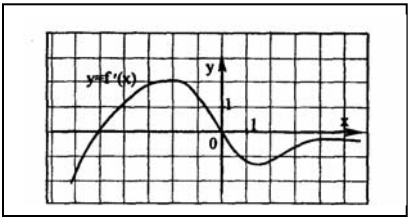
А17. Найдите производную функции h(x) = $4x^5$-lnx.
1) h'(x)=$20x^5$-lnx   2) h'(x)=$5x^4$-lnx
3) h'(x) = $\frac{1}{6}x^6 - e^x$ 4) h'(x) = $20x^4$- $\frac{1}{x}$

Часть В

В1. Решите уравнение 2^{2X-1}•$0{,}3^{2X-1}$= 0,216

В2. Вычислите $10^{1+\lg 6}$

В3. Найдите корни уравнения sin2x+6cos$x$ = 0, принадлежащие промежутку [180°; 270°].
В4. Найдите точку минимума функции *f*, если на рисунке изображен график ее производной.



Часть С

С1. Вычислите значение выражения $\left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{2}{3}x-1}$, если $\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$ = 2.

С2. Как изменится частное $7^x : 7^y$, если каждое из чисел x и y увеличить на 3? Ответ обосновать.

С3. Совпадают ли графики функций $y = 0{,}3^{\log_{0,3}(\cos x+1)}$ и y = cos x+1? Ответ обосновать.

С4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции g(x) = $x \cdot e^{5x}$.

10. Инструкции по проверке итоговых заданий по математике

В экзаменационной работе используются три типа заданий. Задания Части 1 (с выбором ответа) считается выполненным верно, если в «Бланке ответов» отмечена цифра, которой обозначен верный ответ.

Верный ответ в заданиях Части 2 (с кратким ответом) – некоторое число. Такое задание считается выполненным верно, если в «Бланке ответов» записано это число. Проверка выполнения этих двух типов заданий осуществляется с помощью компьютера. За каждое верно выполненное задание выставляется 1 балл.

Выполнение заданий Части 3 (с развернутым ответом) оценивается экспертной комиссией. На основе критериев, представленных в приведенной ниже таблице, за выполнение каждого задания выставляется от 0 до 4 баллов.

Задания С1 – С3 предназначены для более детальной проверки знаний, умений и навыков учащихся, выявления способности выполнять более сложную, многошаговую деятельность.

При выполнении алгебраических заданий, в отличие от геометрических, редко требуется обосновывать те или иные элементы решения. Поскольку нет и невозможно сформулировать четкие, всеобъемлющие критерии оформления решений, то при проверке работ учащихся следует руководствоваться целесообразностью: решение должно быть подробным, логичным, читающий не должен догадываться, какие операции пропущены, восстанавливать логику рассуждений. То есть учащийся должен продемонстрировать математическую грамотность, а также умение последовательно, связно и ясно изложить решение.

Оценка в баллах	**Критерий оценки выполнения заданий с развернутыми ответами**
4	Приведена верная, логически правильная последовательность шагов решения. Имеются верные обоснования всех ключевых моментов решения. Необходимые для решения чертежи, рисунки, схемы выполнены безошибочно. При этом правильно выполнены все преобразования и вычисления, получен верный ответ.
3	Приведена верная, логически правильная последовательность шагов решения. Имеются верные обоснования всех ключевых моментов решения. Необходимые для решения чертежи, рисунки, схемы выполнены безошибочно. Возможны 1–2 негрубые ошибки или описки в вычислениях или преобразованиях, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. При этом возможен неверный ответ.

2	Приведена верная, логически правильная последовательность шагов решения. Обоснованы только некоторые ключевые моменты решения. Возможны негрубые ошибки в чертежах, рисунках, схемах, приведенных в решении. Возможны 1-2 негрубые ошибки или описки в вычислениях или преобразованиях, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. При этом возможен неверный ответ.
1	При верной последовательности хода решения отсутствуют некоторые этапы решения. Большинство ключевых моментов решения не обосновано. Возможны ошибки в чертежах, рисунках, схемах, приведенных в решении. Возможны 1-2 негрубые ошибки или описки в вычислениях или преобразованиях, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. При этом возможен неверный ответ.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям оценок в **1**, **2**, **3**, **4** балла.

Приведем варианты развернутых ответов к заданиям Части 3.

С1. Найдите количество целых чисел, принадлежащих множеству значений функции $f(x)=16\log_{\frac{1}{16}}\dfrac{\sin x+\cos x+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

Решение

Так как $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, то множество значений этой суммы есть отрезок $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$. Значит, множество значений числителя дроби – это отрезок $\left[2\sqrt{2};4\sqrt{2}\right]$, а для всей дроби – это отрезок $[2;4]$. Так как функция $y=16\log_{\frac{1}{16}}x$ является монотонно убывающей и непрерывной, то множество значений данной функции – это отрезок $\left[16\log_{\frac{1}{16}}4;16\log_{\frac{1}{16}}2\right]$. Вычислив значение логарифмов, получаем, что множеством значений функции $f(x)$ является отрезок $[-8;-4]$. Этому отрезку принадлежит ровно пять целых чисел: –8; –7; –6; –4.

Ответ: 5.

С2. Найдите наибольшее значение a, при котором уравнение $x^3+5x^2+ax+b=0$ с целыми коэффициентами имеет три различных корня, один из которых равен –2.

Решение

1) Подставим $x=-2$ в левую часть уравнения.

$$-8+20-2a+b=0 \ \Rightarrow \ b=2a-12.$$

2) Так $x=-2$ является корнем, то в левой части уравнения можно вынести общий множитель $x+2$. Производим тождественные преобразования, выделяя общий множитель $(x+2)$.

$$x^3+5x^2+ax+b=x^3+2x^2+3x^2+ax+(2a-12)=$$

$$=x^2(x+2)+3x(x+2)-6x+ax+(2a-12)=$$

$$=x^2(x+2)+3x(x+2)+(a-6)(x+2)-2(a-6)+(2a-12)=$$

$$=\left(x^2+3x+(a-6)\right)(x+2).$$

3) По условию имеется еще два корня уравнения. Значит, дискриминант первого сомножителя положителен.

$$D=(-3)^2-4(a-6)=33-4a>0 \ \Rightarrow \ a<8{,}25.$$

4) Подставим $a=8$ в исходное уравнение

$$x^3+5x^2+ax+b=x^3+5x^2+8x+4=\left(x^2+3x+2\right)(x+2)=(x+1)(x+2)^2.$$

Тогда уравнение имеет только два различных корня. Подставим $a=7$ в исходное уравнение

$$x^3+5x^2+ax+b=x^3+5x^2+7x+2=\left(x^2+3x+2\right)(x+2).$$

У первого сомножителя корни различны, так как дискриминант $D=(-3)^2-4=5>0$. Эти корни – иррациональные, так как иррационален $\sqrt{5}$. Значит, у уравнения есть три различных корня.

Ответ: 7.

С3. При каком $x\in\{1,2,3,\ldots,98,99\}$ значение выражения

$$\left(\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}-\sqrt{1-\frac{2}{x+2}}}\right):\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\sqrt{\frac{x}{x+2}-2}}\right)\right):\left(1+\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right)$$

ближе всего к 73?

Решение

После тождественных преобразований данного выражения, учитывая, что x принимает только натуральные значения, получаем:

$$\left(\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}-\sqrt{1-\frac{2}{x+2}}}\right):\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\sqrt{\frac{x}{x+2}-2}}\right)\right):\left(1+\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right)=$$

$$\frac{(x+2)-x}{\sqrt{x(x+2)}}\cdot\frac{\sqrt{x(x+2)}}{(x+2)-2\sqrt{x(x+2)}+x}\cdot\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{(x+2)-x}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}{2}=1+\frac{x+\sqrt{x(x+2)}}{2}.$$

Оценим подкоренное выражение $x(x+2)$ сверху и снизу.

Так как $x^2<x(x+2)<(x+1)^2$, то

$$1+\frac{x+x}{2}<1+\frac{x+\sqrt{x(x+2)}}{2}<1+\frac{x+x+1}{2}.$$

Значит, исходное выражение больше, чем $1+x$ и меньше, чем $1+x+0{,}5$. Поэтому, при $x=72$ значение этого выражения в интервале $(73;\ 73{,}5)$.

При $x\geq 73$ все значения этого выражения больше 74, а при $x\leq 71$ все значения меньше 72,5.

Ответ: 72.

11. Дополнительные задания

Вариант 1

1. Решить неравенства:

а) $\frac{x-1}{3}-1{,}25>\frac{2x+6}{3}-\frac{x}{2}$; б) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6-5x}{2+5x}}>\frac{25}{4}$.

2. Решить уравнения:

а) $\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{2x+2}=x+1$; б) $\sin x-1=\frac{1}{2}\sin 2x-\cos x$.

3. Упростить выражение $\frac{1-a^{-\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}{a-1}$.

4. В равнобедренном треугольнике высота относится к основанию как 3:4, а боковая сторона равна $2\sqrt{13}$ см. Найти площадь треугольника.

5. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6, двугранный угол при основании равен 45^0. Определить объем пирамиды.

Вариант 2

1. Сумма цифр трехзначного числа равна 19. Если поменять местами две крайние справа цифры, то новое число будет на 72 больше первоначального. Цифра сотен равна цифре единиц. Найти первоначальное число.

2. Упростить выражение $\frac{a}{\sqrt[3]{a}-1}-\frac{\sqrt[3]{a^2}}{1+\sqrt[3]{a}}+\frac{1}{\sqrt[3]{a}+1}+\frac{1}{1-\sqrt[3]{a}}-\sqrt[3]{a^2}$.

3. Решить систему неравенств $\begin{cases}\lg^2 x+\lg 0{,}01x>0,\\ \frac{1}{x}<1000.\end{cases}$

4. Решить уравнение $\sin^2 x-10\sin x\cos x+9\cos^2 x=0$.

5. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно высоте основания, а площадь сечения, проведенного через них, равна 75. Найти объем призмы.

Вариант 3

1. Сумма цифр трехзначного числа, у которого в середине стоит ноль, равна 12. Если поменять местами первую и последнюю цифры, то новое число будет на 594 меньше данного. Найти данное число.

2. Упростить выражение $\left(\frac{n+3-\sqrt{n^2-9}}{n+3+\sqrt{n^2-9}}+\frac{n+3+\sqrt{n^2-9}}{n+3-\sqrt{n^2-9}}\right)\cdot\frac{6}{n}.$

3. Решить систему неравенств $\begin{cases}\lg\left(x^2-3x-3\geq 0,\right)\\ \lg\left(x^2-15\right)<1.\end{cases}$

4. Решить уравнение $tgx=\frac{-\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}.$

5. В прямой треугольной призме стороны основания равны 4, 5 и 7, а боковое ребро равно большей высоте основания. Найти объем призмы.

Вариант 4

1. Упростить выражение $\left(\frac{m-n}{m^{\frac{3}{4}}+m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{4}}}-\frac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{4}}}\right)\cdot\left(\frac{n}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}.$

2. Вычислить $tg\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos\alpha=-\frac{9}{41},\ \alpha\in\left(\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right).$

3. Разность между пятым и третьим членами геометрической прогрессии равна квадрату знаменателя прогрессии, а сумма её первых трех членов равна $\left(-\frac{7}{3}\right).$ Найти знаменатель прогрессии, если известно, что он положителен.

4. Решить неравенство $6\sqrt[x]{9}-13\sqrt[x]{3}\cdot\sqrt[x]{2}+6\sqrt[x]{4}\leq 0.$

5. Решить уравнение $\frac{2(\cos x+\sin x)+1-\cos 2x}{2(1+\sin x)}=\sqrt{3}+\sin x.$

6. Решить уравнение $\log_{\sqrt{3}}\left|x^2+2x-15\right|+\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-6x+9\right)=0.$

7. Определить боковую сторону равнобедренной трапеции, описанной около окружности, если острый угол при основании трапеции равен $\frac{\pi}{3}$, а площадь трапеции равна $288\sqrt{3}.$

8. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равная m, образует с боковыми гранями углы α и β. Найти объем параллелепипеда.

Вариант 5

1. Упростить выражение $\left(\frac{x-9}{x+3x^{\frac{1}{2}}+9}:\frac{x^{0,5}+3}{x^{1,5}-27}\right)^{\frac{1}{2}}-x^{0,5}.$

2. Вычислить $tg2\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}25, \quad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$

3. Найти сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если известно, что $a_3 + a_7 + a_{14} + a_{18} = 10.$

4. Решить уравнение $\dfrac{4^x - 2^{x+2} + 3}{2^{\frac{x}{2}} - 1} + 2^{\frac{x}{2}} + 1 = 0.$

5. Решить уравнение $\dfrac{\left(\cos x - \sqrt{3}\sin x\right)^2}{\sqrt{3} - 2\sin 2x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

6. Решить неравенство $\log_{0,7}\left(1 + x - \sqrt{x^2 - 4}\right) \le 0.$

7. В прямоугольной трапеции диагональ является биссектрисой острого угла. Высота, проведенная из вершины тупого угла, делится этой диагональю на отрезки 9 см и 15 см. Найти периметр трапеции.
8. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 7, 8 и 9. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60^0. Найти высоту пирамиды.

Вариант 6

1. Упростить выражение $\dfrac{x-1}{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}}} \cdot \dfrac{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} + 1} \cdot x^{\frac{1}{4}} + 1.$

2. Доказать тождество $\cos^2\alpha + \cos^2\left(60^0 + \alpha\right) + \cos^2\left(60^0 - \alpha\right) = \dfrac{3}{2}.$

3. Решить уравнение $\cos 2x = 2(\cos x + \sin x)$ и найти корни, удовлетворяющие условию $\cos x < 0.$
4. Произведение первого и пятого членов геометрической прогрессии равно 12. Частное от деления второго члена на четвертый равно 3. Найти второй член прогрессии.

5. Решить неравенство $\dfrac{3^{2|x-1|} + 3}{4} < 3^{|x-1|}.$

6. Решить уравнение $3\log_8(x-2) = \log_2\sqrt{2x-1}.$
7. Около трапеции ABCD с основаниями AD и BC описана окружность (R=6). Центр описанной окружности лежит на основании AD. BC=4. Найти площадь трапеции.
8. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно l, а высота равна h. Определить объем пирамиды.

Вариант 7

1. Упростить выражение $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a}}{1-\sqrt{a}}+\dfrac{1+\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}\right)\cdot\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}$.
2. Доказать тождество $\cos^3\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{4}\sin4\alpha$.
3. Решить уравнение $\sin\left(x+\dfrac{5}{2}\pi\right)+2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos(3x+\pi)$ и найти корни, удовлетворяющие условию $tgx\geq 0$.
4. Сколько членов арифметической прогрессии нужно взять, чтобы их сумма равнялась 91, если её третий член равен 9, а разность седьмого и второго членов равна 20 ?
5. Решить уравнение $\log_{4x+1}7+\log_{9x}7=0$.
6. Решить неравенство $\left(\sqrt[3]{7}\right)^{35x}>\dfrac{1}{7}\cdot 7^{\left|4x^2-12x-1\right|}$.
7. В правильном треугольнике со стороной равной 6, на одной из сторон взята точка на расстоянии 1 от ближайшей вершины. Найдите расстояние от этой точки до центра треугольника.
8. Определить объем правильной треугольной пирамиды, если высота треугольника, служащего её основанием, равна **h**, а апофема пирамиды равна **m**.

Вариант 8

1. Решить уравнение $5^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}+\log_5\sin x}=15^{\frac{1}{2}+\log_{15}\cos x}$.
2. Определить значение выражения

   $\dfrac{(m+x)^{\frac{1}{2}}+(m-x)^{\frac{1}{2}}}{(m+x)^{\frac{1}{2}}-(m-x)^{\frac{1}{2}}}$, если $x=\dfrac{2mn}{n^2+1}$, причем $m>0,\ 0<n<1$.
3. Решить неравенство $\lg\left(9^{\lg x}+1\right)\geq\lg\dfrac{10}{3}+(\lg x)\cdot\lg 3$.
4. Найти длину дуги сектора с центральным углом 90^0, если длина окружности, вписанной в этот сектор, равна $12\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$.
5. Составить квадратное уравнение, корни которого равны кубам корней уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Вариант 9

1. Решить систему $\begin{cases}\cos x\cdot\sqrt{\cos y}=0,\\ \cos 2x-2\cos^2 y+2=0.\end{cases}$

2. Решить уравнение $x^2 \cdot 3^{x-2} + 3^{\sqrt{x}+2} = 3^x + x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}}$.
3. Решить неравенство $\left|\log_4(x+2) - 2\log_{16}(x-3)\right| > 1$.
4. Два тела, двигаясь по окружности в одном и том же направлении, сходятся через каждые 56 минут. Если бы они двигались с теми же скоростями в противоположных направлениях, то встречались бы каждые 8 минут. Известно, что при движении в противоположных направлениях расстояние по окружности между сближающимися телами уменьшилось с 40 до 26 метров за 24 сек. Какова скорость каждого тела ?
5. Даны цилиндр с квадратным осевым сечением и конус, осевое сечение которого есть равносторонний треугольник. Найти отношение объемов цилиндра и конуса, если их полные поверхности равны между собой.

Вариант 10

1. Решите уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} + 3^{x-3} = 99 + \sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^{4-x}}$.
2. Из пункта А в пункт В вышел пешеход. Спустя 1 ч 24 мин в том же направлении из пункта А выехал велосипедист и через 1 ч был на 1 км сзади пешехода, а еще через 1 ч велосипедисту оставалось до В вдвое меньшее расстояние, чем пешеходу. Найдите скорость велосипедиста, если известно, что расстояние АВ равно 27 км.
3. Решите неравенство $\log_2 \frac{6+x}{x-3} > 2$.
4. В основании прямой призмы лежит равносторонний треугольник. Плоскость, проходящая через одну из сторон нижнего основания и противоположную вершину верхнего, наклонена к плоскости нижнего основания под углом 60^0. Найдите объем призмы, если её высота равна $4\sqrt{3}$.
5. Решите уравнение $|4x+2| \cdot |\sin x| = 2x+1$.

Вариант 11

1. Решить неравенство $\log_\pi(x+27) - \log_\pi(16-2x) < \log_\pi x$.
2. Решить уравнение $3\sin x = 2(1-\cos x)$.
3. Решить уравнение $3 \cdot 81^{\frac{1}{x}} - 10 \cdot 9^{\frac{1}{x}} + 3 = 0$.
4. Упростить выражение $\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\left(1 - \frac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right)$ и вычислить его значение при $x = \frac{1}{a-1}$.

5. Сколько членов арифметической прогрессии 3, 5, 7, … нужно взять, чтобы получить сумму 10200 ?
6. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, угол между диагоналями боковых граней, исходящими из одной вершины, равен β. Найти объем призмы.

Вариант 12

1. Решите уравнение: $\frac{x^4-256}{16-x^2}=2(7x+12)$.
2. Если одновременно открыть два крана, то бассейн наполнится за 4 ч 30 мин. Если же наполнить половину бассейна, через один кран, а другую половину – через другой, то для наполнения бассейна потребуется 12 ч. За какое время наполняет бассейн каждый кран ?
3. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}\frac{3x+1}{x-2}>-1$.
4. Найти объем наклонной треугольной призмы, основанием которой служит равносторонний треугольник со стороной 2. Если боковое ребро призмы равно стороне основания и наклонено к плоскости основания под углом 60^0.
5. Решите уравнение: $(4x+2)\cdot|\sin x|=|2x+1|$.

Вариант 13

1. Решить неравенство $\frac{2-x^2}{1-x}\le x$.
2. Упростить выражение $\left(\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)^2-4ab}-\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)^2+4ab}\right)\cdot\frac{\left(a^2-b^2\right)10^{-\lg\left(a^2+b^2\right)}}{2ab}$.
3. Решить уравнение $6\cos^2 x+5\sin x=2$.
4. Решить уравнение $\log_3\left(4\cdot 3^x-1\right)=2x+1$.
5. Найдите объем пирамиды, высота которой равна 6 см, а основанием служит ромб со стороной 4 см и углом 60 градусов.

Вариант 14

1. Решите уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}+3^{x-3}=99+\sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^{4-x}}$.

2. Из пункта А в пункт В вышел пешеход. Спустя 1ч24мин в том же направлении из пункта А выехал велосипедист и через 1ч был на 1км сзади пешехода, а еще через 1ч велосипедисту оставалось до В вдвое меньше расстояние, чем пешеходу. Найдите скорость велосипедиста, если известно, что расстояние АВ равно 27км.

3. Решите неравенство $\log_2 \frac{6+x}{x-3} > 2$.

4. В основании прямой призмы лежит равносторонний треугольник. Плоскость, проходящая через одну из сторон нижнего основания и противоположную вершину верхнего, наклонена к плоскости нижнего основания под углом 60^0. Найдите объем призмы, если ее высота равна $4\sqrt{3}$.

5. Решите уравнение $|4x+2| \cdot |\sin x| = 2x+1$.

Вариант 15

С1 Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{-7x+2y-9} = \frac{2y-7x-1}{6}, \\ \frac{x-4y-1}{7x-2y+13} = x+2y. \end{cases}$

Ответ: (-3;2).

С2 Найдите наибольшее значение периметра прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, и с диагональю ОМ, где О – начало координат, а М – точка на графике функции

$$y = 3\ln(9-5x) + 2x, \ \ 0{,}2 \le x \le 1{,}2.$$

Ответ: $6\ln 5 + 4{,}5$.

С3 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположен конус. Вершина конуса находится в точке C_1, а центр его основания, точка О, лежит на диагонали AC_1 так, что $AO : OC_1 = 2:5$. Окружность основания конуса имеет с каждой гранью, содержащей точку А, ровно по одной общей точке. Определите ребро куба, если площадь боковой поверхности конуса равна $108\pi\sqrt{6}$.

Ответ: $14\sqrt{3}$.

С4 Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых для любого числа отрезка $[1;4]$ верно неравенство

$$|ax+3|x|-13| < 10,$$

а для любого отрезка $[-4;-1]$ это неравенство **неверно**.

Ответ: $[2{,}25;\ 2{,}75)$.

Вариант16

С1 Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{5x+4y-4} = \frac{5x+4y+2}{7}, \\ \frac{2y-x+1}{5x+4y-5} = \frac{y-x}{5}. \end{cases}$

Ответ: (4;5).

С2 Найдите наибольшее значение периметра прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, и с диагональю ОМ, где О – начало координат, а М – точка на графике функции

$$y = 9\ln(11 - 2x) + 2x,\ \ 2{,}2 \le x \le 3{,}3.$$

Ответ: $18\ln 6 + 15$.

С3 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположен конус. Вершина конуса находится в точке C_1, а центр его основания, точка О, лежит на диагонали AC_1 так, что $AO : OC_1 = 1 : 3$. Известно, что окружность основания конуса имеет с каждой гранью, содержащей точку B, ровно по одной общей точке. Определите отношение площади боковой поверхности конуса к площади поверхности куба.

Ответ: $\dfrac{\pi\sqrt{19}}{64}$.

С4 Найдите все положительные значения параметра a, при которых для любого числа из отрезка $[5; 6]$ верно неравенство $|ax + 2|x| - 13| < 3$, а для каждого числа из отрезка $[-6; -5]$ это неравенство **неверно**.

Ответ: $[1/3; 2/3)$.

СПИСОК
ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Справочник для поступающих в вузы России. – М., 2004 г.
2. Пособие по математике для поступающих во ВТУЗы (под ред. Сканави И.И.). – М., 1988.
3. Журнал «Квант. 1998–2004.
4. Журнал «Математика в школе». 1998–2004.
5. Алгебра и начала анализа 10–11 (школьный учебник). – М., 1998.
6. Погорелов А.В. Геометрия 7–11. – М., 1998.
7. Атанасян Л.С. Геометрия 7–9 и Геометрия 10–11. – М., 2000–2004.
8. Школьные учебники: Математика–5, Математика–6, Алгебра–7, Алгебра–8, Алгебра–9. – М., 1998.
9. Мельников И.И., Сергеев И.Н. Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах. – М., 1998.
10. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. Справочник по методам решения задач по математике. – М., 1989.
11. Богус В.А., Куприенко Н.Н., Афанасьева С.С. Повторяем школьную математику. – Майкоп, 2001.
12. Газета «Математика» (приложение к газете «1 сентября»). 1998–2004.
13. Варианты заданий единого государственного экзамена по математике. 2003–2004.
14. Варианты заданий государственного централизованного тестирования по математике. 1999–2004.
15. Математика. Рекомендации по оценке заданий единого государственного экзамена с развернутым ответом (C_1 – C_4). – М., 2004.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Учебное издание

БОГУС Валид Ахмедович

МАТЕМАТИКА

Сдано в набор 12.10.2004. Подписано в печать 15.01.2005.
Формат бумаги 84x108/32. Способ печати офсетный.
Усл. печ. л. 35. Заказ 025.
Тираж 500 экз. Цена договорная.

Издательство Адыгейского государственного университета
385000, Республика Адыгея, г. Майкоп, ул. Ю. Гагарина, 13
E-mail: vemit01@yandex.ru
http://adygnet.ru
http://fora.adygnet.ru