СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ МОЛЕКУЛ ГАЗА ПО СКОРОСТЯМ

И.Н. Жукова, М.В. Ершова

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

На основе распределений молекул трехмерного газа по проекции скорости и по модулю скорости рассмотрено распределение молекул по относительной скорости. Вычислены основные статистические характеристики и проведен подробный их анализ.

В настоящее время студенты -физики знакомятся со статистическими распределениями в курсе общей физики (в разделе «Молекулярная физика»), а в курсе «Основы метрологии и стандартизации» знакомятся с общими подходами при описании статистических распределений. В данной статье рассмотрим основные распределения молекул газа по скоростям и проведем оценку их параметров.

Получим трехмерное распределение молекул по скоростям.

В системе, состоящей из большого количества молекул газа, находящихся в беспорядочном движении, скорости молекул как по величине, так и по направлению оказываются случайными величинами. Движение молекул равновероятно по всем направлениям. Вероятность появления молекулы со скоростью в интервале от v до $v+dv$ описывается функцией распределения $f(v)=\dfrac{dN}{N\cdot dv}$.

Задание скоростей всех молекул эквивалентно заданию их положения в пространстве скоростей. Вероятность того, что x-составляющая скорости лежит в пределах от v_x до v_x+dv_x:

$$dP(v_x)=\varphi(v_x)dv_x,$$

аналогично для вероятностей нахождения *y*- и *z*-составляющих скорости в пределах от v_y до v_y+dv_y и от v_z до v_z+dv_z: $dP(v_y)=\varphi(v_y)dv_y$, $dP(v_z)=\varphi(v_z)dv_z$.

Пусть dN – количество молекул, чьи скорости лежат в пределах бесконечно малого элемента объема $dV=dv_xdv_ydv_z$.Вероятность нахождения молекулы в объеме $dV=dv_xdv_ydv_z$ равна:

$$dP(v_x,v_y,v_z)=\varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)dv_xdv_ydv_z=f(v)dv_xdv_ydv_z,\text{ где}$$

$$\varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)=f(v). \tag{1}$$

После логарифмирования (1) и дифференцирования полученного выражения по v_x получим:

$$\ln f(v)=\ln\varphi(v_x)+\ln\varphi(v_y)+\ln\varphi(v_z),\ \frac{f'(v)}{f(v)}\cdot\frac{\partial v}{\partial v_x}=\frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)}.$$

Так как $\dfrac{\partial v}{\partial v_x}=\dfrac{\partial\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}{\partial v_x}=\dfrac{v_x}{v}\Rightarrow\quad \dfrac{1}{v}\cdot\dfrac{f'(v)}{f(v)}=\dfrac{1}{v_x}\cdot\dfrac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)}$,

причем функции от разных переменных могут быть равны, только если они равны некоторой константе, которую обозначим $-\alpha$:

$$\frac{1}{v}\cdot\frac{f'(v)}{f(v)}=-\alpha,\ \frac{1}{v_x}\cdot\frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)}=-\alpha\Rightarrow$$

$$\varphi(v_x)=A\cdot e^{-\frac{\alpha v_x^2}{2}}. \tag{2}$$

Из условия нормировки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\mathrm{v}_x)dv_x = A\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\alpha v_x^2}{2}}dv_x = 1$ находим: $A=\sqrt{\dfrac{\alpha}{2\pi}}$.

Если принять

$$\alpha = \frac{1}{\sigma_0^2}, \tag{3}$$

то функция распределения (2) примет вид:

$$\varphi(v_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0} e^{-\frac{v_x^2}{2\sigma_0^2}}, \tag{4}$$

что при условии $\langle v_x \rangle = 0$ означает, что распределение молекул по проекции скорости является *распределением Гаусса* [1, с.24].

Для вычисления постоянной α найдем давление газа на стенку сосуда. Сила, усредненная по времени, с которой молекула с проекцией скорости v_x действует на стенку, равна:

$$f = \frac{mv_x}{\Delta t} = \frac{mv_x^2}{\ell},$$

где ℓ – расстояние, соответствующее длине свободного пробега молекулы.

Средняя по ансамблю сила равна $\langle f \rangle = \dfrac{m}{\ell}\langle v_x^2 \rangle$.

В результате действия на стенку N молекул, сила давления на стенку:

$$F = \langle f \rangle N = \frac{m}{\ell}\langle v_x^2 \rangle nS\ell .$$

С другой стороны давление на стенку равно $P = mn\langle v_x^2 \rangle$.

Среднее значение квадрата проекции скорости $\langle v_x^2 \rangle$ вычислим, используя распределение (4):

$$\langle v_x^2 \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \varphi(v_x) dv_x = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\frac{\alpha v_x^2}{2}} dv_x = \frac{1}{\alpha}.$$

Таким образом,

$$P = mn\cdot\frac{1}{\alpha}. \tag{5}$$

Из эксперимента известно, что давление идеального газа определяется уравнением состояния:

$$P = \frac{mRT}{\mu V} = nkT . \tag{6}$$

Сопоставляя выражения (5) и (6), получим: $\alpha = \dfrac{m}{kT}$, а с учетом связи параметров α и σ_0 (3)

$$\sigma_0^2 = \frac{kT}{m}. \tag{7}$$

Окончательно $A = \sqrt{\dfrac{\alpha}{2\pi}} = \sqrt{\dfrac{1}{2\pi\sigma_0^2}} = \sqrt{\dfrac{m}{2\pi kT}}$, а значит функция распределения Гаусса (4) по одной проекции скорости принимает вид:

$$\varphi(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} . \tag{8}$$

Аналогичный вид имеют функции распределения:

$$\varphi(v_y) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} \quad \text{и} \quad \varphi(v_z) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}}.$$

Тогда вероятность $dP(v_x, v_y, v_z) = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)dv_x dv_y dv_z$ нахождения молекулы в объеме $dV = dv_x dv_y dv_z$ примет вид:

$$dP(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2kT}} dv_x dv_y dv_z.$$

Перейдем к сферической системе координат и запишем элементарный объем:

$$dv_x dv_y dv_z = dV = v^2 dv \sin\theta \, d\theta \, d\varphi, \text{ тогда}$$

$$dP(v, \theta, \varphi) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Т.к. модуль скорости молекул одинаков во всех точках шарового слоятолщиной dv (рис.1), то после интегрирования по θ и φ конечная формула для вероятности примет вид:

$$dP(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv.$$

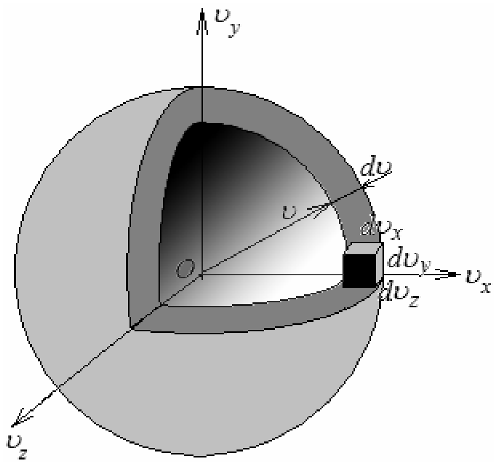

Рис. 1. Элементарный объем в декартовой и сферической системах координат

Окончательно функция плотности вероятности (функция распределения Максвелла по модулю скорости) запишется следующим образом:

$$f(v) = \frac{dP(v)}{dv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}. \quad (9)$$

Переписав $\mathrm{f(v)}$ через параметр σ_0 с учетом (7), получим <u>*распределение Максвелла*</u> в виде[1]:

$$f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{v^2}{\sigma_0^3} \cdot e^{-\frac{v^2}{2\sigma_0^2}}. \quad (9a)$$

В распределении Максвелла (9, 9а) значения скорости молекул лежат в интервале $[0, \infty]$.

Кривые распределения молекул по скоростям $f(v)$ имеют следующие особенности:

1. они проходят через начало координат, что означает, что неподвижных молекул в газе нет;

2. они асимптотически приближаются к оси скоростей при бесконечно больших скоростях, что означает, что очень большие значения скорости молекул маловероятны. Это понятно – чтобы молекула могла приобрести при столкновениях очень большую скорость, ей необходимо при столкновениях только получать энергию, но такое событие крайне маловероятно.

Для описания функций распределения используют ряд параметров.

Математическое ожидание случайной величины x - среднее значение x с учетом вероятности осуществления каждого значения x_i. Для непрерывного распределения математическое ожидание имеет вид:

$$M[x] = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx . \tag{10}$$

Среднеквадратичное отклонение (стандартное отклонение) случайной величины σ служит мерой отклонения (разброса) случайной величины x относительно среднего арифметического значения $\bar{x}$ и находится по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} , \tag{11}$$

где x_i – i-й элемент выборки, n – объем выборки.

Дисперсия $D[x]$ так же характеризует разброс значений случайной величины вокруг её математического ожидания $M[x]$. В статистике используют связь $D[x] = \sigma^2$, откуда

$$\sigma = \sqrt{D[x]} . \tag{12}$$

Дисперсия также вычисляется по формуле:

$$D[x] = M[x^2] - (M[x])^2 . \tag{12a}$$

Коэффициент асимметрии - характеристика распределения случайной величины, которая определяется по формуле:

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3} , \tag{13}$$

где третий момент распределения μ_3 имеет вид

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[x])^3 f(x) dx . \tag{14}$$

Если $A = 0$, то кривая распределения является симметричной.

Для характеристики островершинности распределения используют величину, называемую эксцессом, которая определяется формулой:

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3, \tag{15}$$

где четвертый момент распределения μ_4 имеет вид:

$$\mu_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[x])^4 f(x) dx . \tag{16}$$

Если для изучаемого распределения $E > 0$, значит график этого распределения более «островершинный» в сравнении с графиком нормального распределения, а распределение с коэффициентом эксцесса $E < 0$ более «плосковершинное» в сравнении с графиком нормального распределения.

Значения статистических характеристик распределения Максвелла приведены в таблице 1 [1, с. 69].

Основные характеристики распределения Максвелла

Таблица 1

Среднее значение	$M[x] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 2\sigma_0 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{0,5} = 1{,}596\sigma_0$.
Дисперсия	$D[x] = \sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot(x - M[x])^2 dx = \sigma_0^2\left(3 - \frac{8}{\pi}\right) = 0{,}454\sigma_0^2$.
Медиана	$Me = 1{,}538\sigma_0$.
Мода	$f'(x) = 0$, $Mo = \sqrt{2}\sigma_0^2 = 1{,}414\sigma_0^2$.
Коэффициент асимметрии	$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{2\sqrt{2}(16 - 5\pi)}{(3\pi - 8)^{3/2}} = 0{,}486$.
Коэффициент эксцесса	$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{160\pi - 12\pi^2 - 384}{9\pi^2 - 48\pi + 64} = 0{,}108$.

Вычислим для распределения Максвелла (9) основные характеристики, перечисленные в таблице 1.

1. Для нахождения наиболее вероятной скорости (моды распределения) нужно производную от функции распределения приравнять к 0 и решить полученное уравнение относительно скорости:

$$\frac{df(v)}{dv} = 4\pi\left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}\right)^{\frac{3}{2}} ve^{-\frac{v^2}{2\sigma_0^2}}\left(2 - \frac{v^2}{\sigma_0^2}\right) = 0,$$

следовательно, наиболее вероятная скорость равна:

$$v_{вер} = \sigma_0\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \tag{17}$$

2. Среднюю арифметическую скорость находим по формуле:

$$\langle v\rangle = \int\limits_0^{+\infty} vf(v)dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma_0^3}\int\limits_0^{+\infty} v^3 e^{-\frac{v^2}{2\sigma_0^2}}dv = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\sigma_0 = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \tag{18}$$

3. Среднеквадратичную скорость находим по формуле:

$$\langle v^2\rangle = \int\limits_0^{+\infty} v^2 f(v)dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma_0^3}\cdot\int\limits_0^{+\infty} v^4 e^{-\frac{v^2}{2\sigma_0^2}}dv = 3\sigma_0^2 = \frac{3kT}{m},$$

$$v_{кв} = \sqrt{\langle v^2\rangle} = \sigma_0\sqrt{3} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \tag{19}$$

4. Дисперсию модуля скорости найдем по формуле:

$$D[v] = \langle v^2\rangle - \langle v\rangle^2 = 3\sigma_0^2 - \frac{8}{\pi}\cdot\sigma_0^2 = \frac{(3\pi - 8)}{\pi}\cdot\sigma_0^2, \tag{20}$$

что совпадает со значением дисперсии, приведенным в таблице 1.

5. Стандартное отклонение найдем с помощью дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{D[v]} = \sigma_0\sqrt{\frac{(3\pi - 8)}{\pi}}. \tag{21}$$

Перепишем распределение (9а) через стандартное отклонение:

$$f(v)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{v^2}{\sigma_0^3}\cdot e^{-\frac{v^2}{2\sigma_0^2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{v^2}{\sigma^3\cdot\left(\frac{\pi}{3\pi-8}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot e^{-\frac{v^2(3\pi-8)}{2\pi\sigma^2}}. \qquad (9б)$$

Величина стандартного отклонения σ, как указывалось, отвечает за разброс значений относительно среднего значения, что показано на рисунке 2.

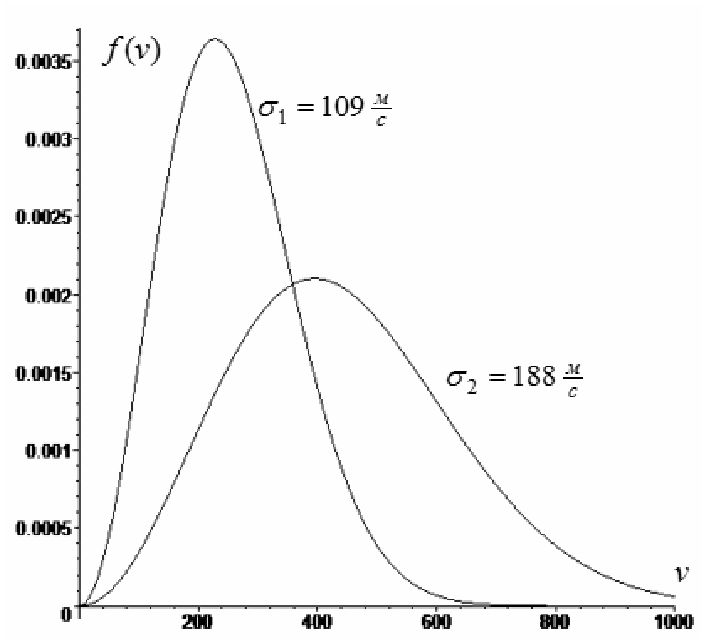

Рис.2. Функция распределения Максвелла для кислорода для различных значений σ:

$$\sigma_1 \approx 109\frac{м}{с},\ T_1 = 100K;\quad \sigma_2 \approx 188\frac{м}{с},\ T_2 = 300K.$$

6. Вычислим коэффициент асимметрии для распределения Максвелла. Для этого нам понадобятся табличные интегралы:

$$\Im_1=\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\ \text{[2, 3]}. \qquad (22)$$

$$\Im_2=\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx=-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\Big|_0^\infty=\frac{1}{\alpha}. \qquad (23$$

$$\Im_3=\Im_{2k}=\int_0^\infty x^{2k}e^{-\alpha x^2}dx=\frac{1\cdot 3...(2k-1)}{2^{k+1}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2k+1}}}\ \text{[3]}. \qquad (24)$$

$$\Im_4=\int_0^\infty xe^{-\alpha x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx=-\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^2}\Big|_0^\infty=\frac{1}{2\alpha}. \qquad (25)$$

$$\Im_5=\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-\alpha x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty y^n e^{-\alpha y}dy,\ y=x^2,\ n=0,1... \qquad (26)$$

$$\Im_6=\Im_k=\int_0^\infty y^k e^{-\alpha y}dy=\frac{k!}{\alpha^{k+1}}\ \text{[3]}. \qquad (27)$$

$$\Im_7 = \int_0^\infty \sqrt{y}\ e^{-y} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad [4]. \tag{28}$$

Найдем третий момент распределения Максвелла [1]:

$$\mu_3 = \int_0^\infty (\mathrm{v} - \bar{v})^3 f(v) dv,$$

$$\mu_3 = \int_0^\infty (\mathrm{v} - \bar{v})^3 f(v) dv = \int_0^\infty \left(v^3 - 3v^2\bar{v} + 3v\bar{v}^2 - \bar{v}^3\right) f(v) dv =$$

$$= \int_0^\infty v^3 f(v) dv - 3\bar{v}\int_0^\infty v^2 f(v) dv + 3\bar{v}^2 \int_0^\infty v f(v) dv - \bar{v}^3 \int_0^\infty f(v) dv,$$

где $\int_0^\infty f(v)dv = 1, \int_0^\infty v\ f(v) dv = \bar{v} = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\sigma_0$,

$$\int_0^\infty v^2 f(v) dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma_0^3} \int_0^\infty v^4 e^{-\frac{v^2}{2\sigma_0^2}} dv = (\text{формула}(24)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma_0^3} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2^3} \sqrt{\pi \left(2\sigma_0^2\right)^5} = 3\sigma_0^2,$$

$$\int_0^\infty \mathrm{v}^3 f(v) dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma_0^3} \cdot \int_0^\infty v^5 e^{-\frac{v^2}{2\sigma_0^2}} dv = (\text{формула}(26)) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma_0^3} \cdot \frac{1}{2} \int_0^\infty y^2 e^{-\alpha y} dy = \begin{pmatrix} (\text{формула}(27)), \\ \alpha = \frac{1}{2\sigma_0^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_0^3} \cdot \frac{2!}{\alpha^3} = 8\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_0^3.$$

Подставляя записанные интегралы в выражение для μ_3, получаем:

$$\mu_3 = \sigma_0^3 \left\{ \frac{16\sqrt{8}}{\pi^{3/2}} - \frac{10\sqrt{2}}{\pi^{1/2}} \right\}. \tag{29}$$

Коэффициент асимметрии с учетом связи (21) стандартного отклонения σ и параметра σ_0 принимает вид:

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sigma_0^3 \left(\frac{3\pi - 8}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\sqrt{2}(16 - 5\pi)}{(3\pi - 8)^{\frac{3}{2}}} = 0{,}486, \tag{30}$$

что совпадает со значением коэффициента асимметрии, приведенным в таблице 1.

7. Вычислим коэффициент эксцесса для распределения Максвелла. Ссылку на соответствующие интегралы также будем указывать в процессе вычислений. Согласно формуле (16) четвертый момент распределения Максвелла μ_4 :

$$\mu_4 = \int_0^\infty (\mathrm{v} - \bar{v})^4 f(v) dv = \int_0^\infty \left(v^4 - 4v^3\bar{v} + 6v^2\bar{v}^2 - 4v\bar{v}^3 + \bar{v}^4\right) f(v) dv =$$

$$= \int_0^\infty v^4 f(v) dv - 4\bar{v}\int_0^\infty v^3 f(v) dv + 6\bar{v}^2 \int_0^\infty v^2 f(v) dv - 4\bar{v}^3 \int_0^\infty v f(v) dv + \bar{v}^4 \int_0^\infty f(v) dv.$$

Вычислим интеграл:

$$\int_0^\infty \mathrm{v}^4 f(v) dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_0^3} \int_0^\infty v^6 e^{-\alpha v^2} dv = \begin{pmatrix} (24) \\ \alpha = \frac{1}{2\sigma_0^2} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_0^3} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^7}} = 15\sigma_0^4.$$

Подставляя этот и вычисленные ранее интегралы в формулу для μ_4, получаем:

$$\mu_4 = \left(15 + \frac{16}{\pi} - \frac{192}{\pi^2}\right)\sigma_0^4. \tag{31}$$

Коэффициент эксцесса с учетом связи (21) стандартного отклонения σ и параметра σ_0 принимает вид:

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{160\pi - 12\pi^2 - 384}{(3\pi-8)^2} = 0{,}108, \tag{32}$$

что совпадает со значением эксцесса, приведенным в таблице 1.

Распределение Максвелла характеризуется одним параметром σ_0, который однозначно связан со средним значением скорости $\bar{v}$ и стандартным отклонением σ формулами (18) и (21).

Перепишем распределение Максвелла (9а) через σ и $\bar{v}$:

$$f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(\frac{3\pi-8}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{v^2}{\sigma^3} \cdot e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}\cdot\left(\frac{3\pi-8}{\pi}\right)}, \tag{33}$$

$$f(v) = \frac{32 v^2}{\pi^2 \bar{v}^3} \cdot e^{-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{v^2}{\bar{v}^2}}. \tag{34}$$

Как отмечалось (рис.1), форма кривых распределения и положение максимума зависят от массы молекул и температуры газа, согласно формул (17-19) и (21). Но если по оси абсцисс откладывать отношение скорости молекулы к наиболее вероятной скорости, то есть ввести относительную скорость $u = \frac{v}{v_в}$, то для всех температур и любых масс молекул получится одна универсальная кривая $f(u)$:

$$f(u) = \frac{dn}{ndu} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot u^2 \cdot e^{-u^2}, \tag{35}$$

график которой приведен на рисунке 3.

Как показали расчеты, переход к распределению для относительных скоростей (35) не меняет значений коэффициентов асимметрии A и эксцесса E распределения Максвелла, приведенных в таблице 1.

Вычислим для распределения (35) среднее значение, дисперсию и стандартное отклонение.

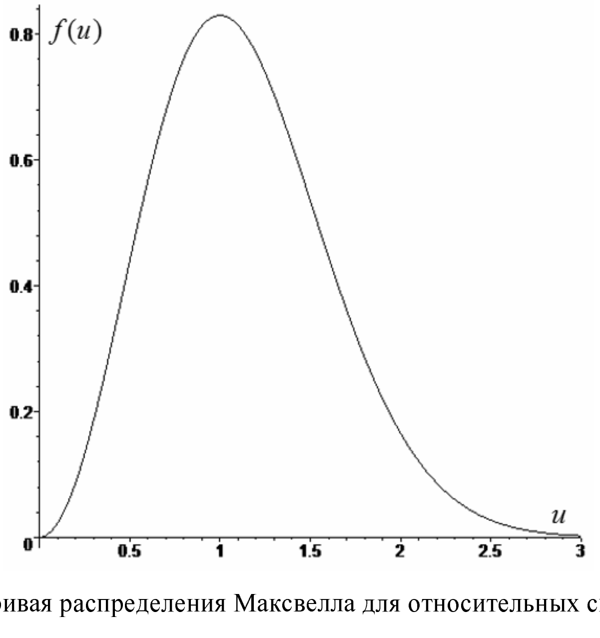

Рис.2. Кривая распределения Максвелла для относительных скоростей

$$\langle u\rangle = \int_0^\infty uf(u)du = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u^3 e^{-u^2}du = (26,27) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}. \tag{36}$$

$$\langle u^2\rangle = \int_0^\infty u^2 f(u)du = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u^4 e^{-u^2}du = (24) = \frac{3}{2}.$$

$$D[u] = \langle u^2\rangle - (\langle u\rangle)^2 = \frac{3}{2} - \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = \frac{3\pi-8}{2\pi} = 0,23. \tag{37}$$

Тогда стандартное отклонение:

$$\sigma = \sqrt{D[u]} = 0,48. \tag{38}$$

Вычисленные статистические характеристики функции $f(u)$ приведем в таблице 2.

Основные характеристики распределения $f(u)$

Таблица 2

Вид распределения	$x_в$	$\langle x\rangle$	$D[x]$	σ	A	E
$f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}u^2 e^{-u^2}$	1	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1,1$	$\frac{3\pi-8}{2\pi} = 0,23$	0,4 8	0,4 9	0,1 1

Литература

1. *Кобзарь А.И.* Прикладная математическая статистика: для инженеров и научных работников. – М.: Физматлит, 2006. – 816 с.
2. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, Гл. ред. физ.- мат. лит., 1986. – 544 с.
3. *Шпольский Э.В.* Атомная физика: Учебное пособие в 2-х томах. Т.II. Основы квантовой механики и строение электронной оболочки атома. – М.: Наука, Гл. ред. физ.- мат. лит., 1984. – 440 с.
4. *Иродов И.Е.* Задачи по общей физике. – М.: Наука, гл.ред.физ.-мат.лит., 1979. – 369 с.

STATISTICAL ANALYSIS OF VELOCITY DISTRIBUTIONS OF GAS MOLECULES

I.N. Zhukova, M.V. Ershova

On the basis of the distributions of three-dimensional gas molecules by the velocity projection and modulus of velocity, the distribution of molecules by relative velocity is considered. The main statistical characteristics are calculated and their detailed analysis is carried out.

