БАЗИСНЫЕ КОНСТАНТЫ ПРИ АКСИОМАТИЧЕСКОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Е.Н. Червякова, А.Б. Шишкин

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

Аксиоматический метод определения основных элементарных функций предполагает формулировку двух (или трех) аксиом и последующую проверку существования и единственности функции, удовлетворяющей данным аксиомам. При этом определяемые функции предполагаются непрерывными. В качестве первой аксиомы выступает характеристическое свойство выбранной элементарной функции (функциональное уравнение, которому она удовлетворяет). Последняя аксиома содержит условие единственности (начальное условие), которое опирается на некоторые базисные константы. В заметке обсуждаются базисные константы, используемые при аксиоматическом определении тригонометрических функций.

Функциональное уравнение

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

известно из работ Д. Д´Аламбера (1769 г.) и С. Пуассона (1804 г.). В классе непрерывных функций уравнение Д´Аламбера-Пуассона решил О. Коши (1821 г.). Он показал, что все непрерывные решения этого уравнения исчерпываются тождественным нулём, тождественной единицей и функциями

$$x \mapsto \cos ax, \quad x \mapsto \operatorname{ch} ax, \quad a \in \mathbf{R}.$$

Значит, уравнение Д´Аламбера-Пуассона можно использовать при аксиоматическом определении тригонометрического косинуса $x \mapsto \cos x$ (и гиперболического косинуса $x \mapsto \operatorname{ch} x$). При этом тригонометрический синус определяется конструктивно, например, с помощью формулы приведения $\sin x := \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

Современный подход к аксиоматическому определению тригонометрических функций основан на теоремах сложения:

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin(y),$$
$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y.$$

При этом определяется сразу пара тригонометрических функций $x \mapsto \cos x$ и $x \mapsto \sin x$. Другими словами, при таком подходе определяется векторная функция $x \mapsto (\cos x, \sin x)=\exp ix$ [1–5].

Аксиоматическое определение тригонометрических функций может быть сформулировано следующим образом.

Определение. *Непрерывные функции* c *и* s, *определённые на множестве всех действительных чисел, называются косинусом и синусом соответственно, если они удовлетворяют следующим условиям:*

1) $c(x+y)=c(x)c(y)-s(x)s(y)$ *для любых* $x, y \in \mathbf{R}$;
2) $s(x+y)=s(x)c(y)+c(x)s(y)$ *для любых* $x, y \in \mathbf{R}$;
3) $c(\pi/2)=0$, $s(\pi/2)=1$, $c(1)=c$.

Это определение использует две базисные константы π и σ. Определение этих констант в рамках аксиоматической теории обладает естественной спецификой, связанной с ограничением на использование еще не определенных элементарных функций. В этой работе мы рассмотрим такие «*аксиоматические*» определения констант π и c.

Определение константы π. Обозначение «числа пи» символом π впервые использовал У. Джонс в 1706 году в своей работе «Synopsis Palmariorum Matheseos» (что в переводе на русский язык означает «Обозрение достижений математики»). Немного позже Л. Эйлер использовал это обозначение в своих работах, получивших всемирное признание. Вскоре после этого проявилась общая тенденция к обозначению «числа пи» символом π и в работах других математиков.

Пусть $n \in \mathbf{N}$ и

$$\pi_n := 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{1}{4n+1}\right) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{4}{2k+1}.$$

Согласно этому определению для любого $n \in \mathbf{N}$ имеем

$$\frac{\pi_n}{4} = 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+1}\right) < 1,$$

$$\frac{\pi_{n+1}}{4} = \frac{\pi_n}{4} - \left(\frac{1}{4n+3} - \frac{1}{4n+5}\right) < \frac{\pi_n}{4}.$$

Значит, $\pi_{n+1} < \pi_n$ и при этом

$$\frac{\pi_n}{4} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-1}\right) + \frac{1}{4n+1} > \frac{2}{3}.$$

Отсюда вытекает, что

$$2 < 8/3 < \pi_{n+1} < \pi_n < 4.$$

Из доказанных неравенств вытекает, что последовательность π_n ограничена и убывает. Следовательно, она сходится. Её предел называется «*числом пи*» и обозначается символом π. При этом

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{4}{2k+1} - \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \frac{4}{2k+1} = \frac{4}{4n+1} \to 0,$$

значит, по определению суммы числового ряда

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{4}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{2k+1}.$$

При этом π принадлежит отрезку [2;4].

Интегральное представление числа π. При аксиоматическом определении тригонометрических функций доказывается теорема существования и единственности определяемых функций. В ходе доказательства этой теоремы используется следующее интегральное представление числа π:

$$\pi = \int_0^1 \frac{4dt}{1+t^2} dt.$$

Убедимся в справедливости этого интегрального равенства. Для этого рассмотрим функцию

$$t \mapsto x(t) := \int_0^t \frac{d\tau}{1+\tau^2},$$

определенную на множестве всех действительных чисел. Нам необходимо показать, что значение функции $t \mapsto x(t)$ в точке $t = 1$ равно $\pi/4$. По свойствам интеграла с переменным верхним пределом она дифференцируема в любой точке $t \in \mathbf{R}$ и, значит, непрерывна в любой точке $t \in \mathbf{R}$. Пусть $t \in (-1;1)$. Тогда по свойствам геометрической прогрессии (с комплексными членами) имеем

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-(it)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}.$$

По теореме о почленном интегрировании степенных рядов выполняются равенства

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^t \tau^{2k} d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1}.$$

Значит, для любого натурального n имеет место представление

$$x(t) = S_{2n-1}(t) + R_{2n-1}(t),$$

где

$$S_{2n-1}(t)=\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\,\frac{t^{2k+1}}{2k+1},\quad R_{2n-1}(t)=\sum_{k=2n}^{\infty}(-1)^k\,\frac{t^{2k+1}}{2k+1}.$$

В силу непрерывности функции $x(t)$ в точке $t=1$

$$x(1)=\lim_{t\to 1-0}S_{2n-1}(t)+\lim_{t\to 1-0}R_{2n-1}(t)=S_{2n-1}(1)+\lim_{t\to 1-0}R_{2n-1}(t).$$

При этом для любого $t\in[0;1]$ последовательность $\left\{\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right\}_{k=0}^{\infty}$ не возрастает, значит,

$$R_{2n-1}(t)=\left(\frac{t^{4n+1}}{4n+1}-\frac{t^{4n+3}}{4n+3}\right)+\left(\frac{t^{4n+5}}{4n+5}-\frac{t^{4n+7}}{4n+7}\right)+\ldots\geq 0,$$

$$R_{2n-1}(t)=\frac{t^{4n+1}}{4n+1}-\left(\frac{t^{4n+3}}{4n+3}-\frac{t^{4n+5}}{4n+5}\right)-\ldots\leq\frac{t^{4n+1}}{4n+1}\leq\frac{1}{4n+1}.$$

Следовательно, для любого натурального n имеют место неравенства

$$0\leq x(1)-S_{2n-1}(1)\leq 1/(4n+1),$$

из которых следуют равенства

$$x(1)=\lim_{n\to+\infty}S_{2n-1}(1)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{1}{2k+1}=:\ \frac{\pi}{4}.$$

Определение константы c. Пусть $n\in\mathbf{N}$ и

$$c_n\ :=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\ldots+\frac{1}{(4n)!}=\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}.$$

Убедимся, что для любого натурального n выполняются неравенства

$$1/2<c_{n+1}<c_n<1.$$

Действительно, согласно определению числа c_n, для любого $n\in\mathbf{N}$ имеем

$$c_n=1-\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}\right)-\ldots-\left(\frac{1}{(4n-2)!}-\frac{1}{(4n)!}\right)<1,$$

$$c_{n+1}=c_n-\left(\frac{1}{(4n+2)!}-\frac{1}{(4n+4)!}\right)<c_n.$$

Значит, $c_{n+1}<c_n$ и при этом

$$c_n=\left(1-\frac{1}{2!}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(4n-4)!}-\frac{1}{(4n-2)!}\right)+\frac{1}{(4n+4)!}>\frac{1}{2}.$$

Отсюда вытекает, что $1/2<c_{n+1}<c_n<1$. Из доказанных неравенств вытекает, что последовательность c_n ограничена снизу и убывает. Следовательно, она сходится. Её предел обозначим c. При этом

$$\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}-\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{(2k)!}=\frac{1}{(4k)!}\to 0,$$

значит, по определению суммы числового ряда

$$c\ :=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}.$$

Из этого определения вытекает, что константа c принадлежит отрезку [1/2;1].

Литература

1. *Одинец В.П.* Построение элементарных функций. / В.П. Одинец, А.И. Поволоцкий; Рос. гос. пед. ун-т им. А. И. Герцена. – Санкт-Петербург: Образование, 1995. – 71 с.
2. *Любецкий В.А.* Основные понятия школьной математики / В.А. Любецкий. – М.: Просвещение, 1987. – 400 с.
3. *Любецкий В.А.* Основные понятия элементарной математики / В.А. Любецкий. – 2-е изд., испр. – Москва : Айрис-пресс, 2004. – 624 с.
4. Лихтарников Л.М. Элементарное введение в функциональные уравнения / Л.М. Лихтарников. – Санкт-Петербург: Лань, 1997. – 160 с.
5. *Шишкин А.Б.* Элементарные функции комплексной переменной : учебное пособие / А.Б. Шишкин; Кубанский государственный университет. – Славянск-на-Кубани: Филиал КубГУ, 2016. – 127 с.

Basic constants in the axiomatic definition of trigonometric functions

E.N. Chervyakova, A.B. Shishkin

The axiomatic method for determining basic elementary functions involves the formulation of two (or three) axioms and the subsequent verification of the existence and uniqueness of a function that satisfies these axioms. The defined functions are assumed to be continuous. The first axiom is the characteristic property of the selected elementary function (the functional equation that it satisfies). The last axiom contains the uniqueness condition (the initial condition), which is based on some basic constants. This article discusses the basic constants used in the axiomatic definition of trigonometric functions.

