ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬ БАЗОВОЙ КОНСТАНТЫ ПРИ АКСИОМАТИЧЕСКОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

М.А. Аболонкина, А.Б. Шишкин

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

Основная трудность аксиоматического определения тригонометрических функций заключается в нахождении «удобных начальных условий», обеспечивающих единственность определяемых элементарных функций. В этой работе мы приводим аксиоматическое определение тригонометрических функций с простым набором начальных условий. Доказательство теоремы единственности для этого определения обладает естественной спецификой, связанной с ограничением на использование еще не определенных элементарных функций. Оно существенным образом опирается на иррациональность числа пи (π). В этой статье мы приводим «аксиоматическое доказательство» иррациональности этого числа.

Аксиоматический метод определения основных элементарных функций предполагает формулировку двух (или трех) аксиом и последующую проверку существования и единственности функции, удовлетворяющей данным аксиомам. В качестве первой аксиомы выступает характеристическое свойство выбранной элементарной функции (функциональное уравнение, которому она удовлетворяет). Последняя аксиома содержит условие единственности (начальное условие). При этом определяемые функции предполагается непрерывной [1–5].

Условие единственности предполагает предварительное определение базовых констант. В случае тригонометрических функций основной базовой константой является число π. С глубокой древности число, которое со времён Л. Эйлера обозначают символом π, означало площадь единичного круга. Известная задача о квадратуре круга состояла в проблеме построения квадрата, площадь которого равна π. Из этого определения числа π вытекает, что

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Интеграл в правой части этого равенства совпадает с интегралом

$$\int_0^1\frac{dt}{1+t^2},$$

который сводится к нему с помощью замены переменной

$$t\mapsto \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\right).$$

Первый крупный шаг в теоретическом изучении арифметической природы числа π сделал И.Г. Ламберт (1728–1777). Иррациональность числа π Ламберт доказал в двух работах 1766 года: в работе «Предварительных сведениях для ищущих квадратуру и спрямление круга», напечатанной во втором томе «Очерков о математике и ее применении», и, более подробно, в «Мемуаре о некоторых замечательных свойствах круговых и логарифмических трансцендентных количеств» (1768 г.). В своих учениях Ламберт доказал, что число π иррационально, опираясь на понятие непрерывной дроби.

Аксиоматическое определение тригонометрических функций. Современный подход к аксиоматическому определению тригонометрических функций основан на их теоремах сложения. При этом определяется сразу пара тригонометрических функций $x\mapsto\cos x$ и $x\mapsto\sin x$. Это определение тригонометрических функций может быть сформулировано следующим образом.

Непрерывные функции $\cos$ *и* $\sin$, *определённые на множестве всех действительных чисел, называются косинусом и синусом соответственно, если они удовлетворяют следующим условиям:*

1) $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$ *для любых* $x, y\in \mathbf{R}$;
2) $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ *для любых* $x, y\in \mathbf{R}$;
3) $\cos(\pi/2)=0$, $\sin(\pi/2)=1$, $\cos 1=c$.

Данное определение опирается на базовые константы π и

$$c=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}.$$

При доказательстве теоремы существования и единственности определяемых функций существенным образом используется факт иррациональности базовой константы π. Доказательство этого факта в рамках аксиоматической теории обладает естественной спецификой, связанной с ограничением на использование еще не определенных элементарных функций. В этой статье мы рассмотрим такое «аксиоматическое» доказательство иррациональности числа π. В основу доказательства положим идею из работы [6]. Для этого предположим противное и будем считать, что число π является рациональным, то есть $\pi = p/q$ при некоторых $p,q\in \mathbf{N}$.

Вспомогательные функции. По свойствам интеграла с переменным верхним пределом функция

$$t\mapsto x(t):=\int_0^t\frac{2d\tau}{1+\tau^2}=-\int_0^{-t}\frac{2d\tau}{1+\tau^2},\ t\in\mathbf{R}.$$

дифференцируема в любой точке из $\mathbf{R}$ и

$$x'(t)=\frac{2}{1+t^2}>0.$$

При этом из интегрального представления числа π вытекает, что $x(1)=\pi/2$, $x(-1)=-\pi/2$. Значит, обратная функция $x\mapsto t(x)$ возрастает, дифференцируема в окрестности отрезка $[-\pi/2,\pi/2]$ и по теореме о производной обратной функции

$$t'(x)=\left.\frac{1}{x'(t)}\right|_{t=t(x)}=\frac{1+t^2(x)}{2}.$$

Рассмотрим еще функцию

$$x\mapsto c(x):=\frac{1-t^2(x)}{1+t^2(x)}.$$

По определению обратной функции из равенств $x(1)=\pi/2$, $x(-1)=-\pi/2$ вытекают равенства $t(\pi/2)=1$, $t(-\pi/2)=-1$ и равенства $c(\pi/2)=c(-\pi/2)=0$. Из легко проверяемых соотношений

$$\left(\frac{1-t^2(x)}{1+t^2(x)}\right)''=-\left(\frac{2t(x)}{1+t^2(x)}\right)'=-\frac{1-t^2(x)}{1+t^2(x)}$$

вытекает, что для всех x из некоторой окрестности отрезка $[-\pi/2,\pi/2]$ выполняется равенство

$$c''(x)=-c(x).$$

Основное рекуррентное соотношение. Далее выберем произвольное целое $n\geq 0$ и рассмотрим функцию

$$x\mapsto y_n(x):=\frac{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-x^2\right)^n}{n!}.$$

Если $n>0$, то $y_n(\pi/2)=y_n(-\pi/2)=0$. Кроме того, легко убедиться, что при $n\geq 2$ для всех x из $\mathbf{R}$ выполняются равенства:

$$y_n' = -2xy_{n-1}, \quad y_n''(x) = -2y_{n-1} - 2xy_{n-1}' =$$
$$= -2y_{n-1} + 4x^2 y_{n-2} = (-4n+2)\,y_{n-1}(x) + \pi^2 y_{n-2}(x).$$

Значит, для любого x из некоторой окрестности отрезка $[-\pi/2, \pi/2]$ выполняются равенства

$$\left(c(x)y_n(x)\right)'' = c(x)y_n''(x) + 2(c'(x)y_n(x))' - c''(x)y_n(x) =$$
$$= (-4n+2)c(x)y_{n-1}(x) + \pi^2 c(x)y_{n-2}(x) + 2(c'(x)y_n(x))' + c(x)y_n(x).$$

Учитывая, что при $n \ge 2$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(c(x)y_n(x)\right)'' dx = \left(c(x)y_n(x)\right)'\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0,$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(c'(x)y_n(x)\right)' dx = c'(x)y_n(x)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0,$$

после интегрирования получаем

$$0 = (-4n+2)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} c(x)y_{n-1}(x)dx + \pi^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} c(x)y_{n-2}(x)dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} c(x)y_n(x)dx.$$

Значит, справедлива рекуррентная формула

$$I_n = q(4n-2)I_{n-1} - p^2 I_{n-2},$$

где

$$I_n := q^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} c(x)y_n(x)dx.$$

Иррациональность числа π. Воспользуемся полученной рекуррентной формулой и покажем, что равенство $\pi = p/q$, где $p, q \in \mathbf{N}$ приводит к противоречию. Действительно, легко убедиться, что справедливы равенства:

$$I_0 := \int_{-\pi/2}^{\pi/2} c(x)dx = \frac{2t(x)}{1+t^2(x)}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2,$$

$$I_1 := q\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)c(x)dx = -q\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)'' c(x)dx = 4q.$$

Значит, из полученной рекуррентной формулы вытекает, что числа I_n являются целыми. Но $c(x) \ge 0$ и $y_n(x) \ge 0$ для любых x из отрезка $[-\pi/2, \pi/2]$ и

$$c(0) = 1 > 0, \quad y_n(0) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} > 0,$$

следовательно, $I_n > 0$. Так как числа I_n являются целыми, то это неравенство означает, что $I_n \ge 1$. При этом из очевидных оценок

$$I_n \le q^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |c(x)| \frac{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^n}{n!} dx \le \frac{q^n \pi^{2n+1}}{4^n n!} \max_{x\in[-\pi/2,\pi/2]} |c(x)|$$

вытекает, что $I_n \to 0$ при $n \to \infty$. Это противоречие и доказывает иррациональность числа π.

Литература

1. *Одинец В.П.* Построение элементарных функций. / В.П. Одинец, А.И. Поволоцкий; Рос. гос. пед. ун-т им. А. И. Герцена. – Санкт-Петербург: Образование, 1995. – 71 с.

2. *Любецкий В.А.* Основные понятия школьной математики / В.А. Любецкий. – М.: Просвещение, 1987. – 400 с.
3. *Любецкий В.А.* Основные понятия элементарной математики / В.А. Любецкий. – 2-е изд., испр. – Москва : Айрис-пресс, 2004. – 624 с.
4. *Лихтарников Л.М.* Элементарное введение в функциональные уравнения / Л.М. Лихтарников. – Санкт-Петербург: Лань, 1997. – 160 с.
5. *Шишкин А.Б.* Элементарные функции комплексной переменной : учебное пособие / А.Б. Шишкин; Кубанский государственный университет. – Славянск-на-Кубани: Филиал КубГУ, 2016. – 127 с.
6. *Zhou L., Markov L.* Recurrent Proofs of the Irrationality of Certain Trigonometric Values // American Mathematical Monthly : journal. – 2010. – Vol. 117. – P. 360–362.

Irrationality of the base constant in the axiomatic definition of trigonometric functions

M.A. Abolonkina, A.B. Shishkin

The main difficulty of axiomatic definition of trigonometric functions is to find «convenient initial conditions» that ensure the uniqueness of the defined elementary functions. In this paper, we present an axiomatic definition of trigonometric functions with a simple set of initial conditions. The proof of the uniqueness theorem for this definition has a natural specificity associated with the restriction on the use of yet undefined elementary functions. It is essentially based on the irrationality of the number pi (π). In this article, we provide an «axiomatic proof» of the irrationality of this number.

