В.Б. Тлячев А.Д. Ушхо Д.С. Ушхо

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ФИЗИКЕ

Руководство к практическим занятиям

УДК 517.91
ББК 22.161.6
Т49

ТЛЯЧЕВ В.Б., УШХО А.Д., УШХО Д.С. Дифференциальные уравнения и их применение в физике. Руководство к практическим занятиям: Учеб. пособие. – Майкоп: «ИП Магарин О.Г.», 2018. – 200 с.
ISBN 978-5-91692-253-0

В книге кратко изложены основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, приведены примеры различных методов их решения, к каждому практическому занятию сформулированы контрольные задания различного уровня сложности и рассмотрены их приложение в физике.

Основное назначение пособия – помочь студенту изучить различные приемы решения заданий, закрепить и углубить навыки, приобретенные при их решении, а также рассмотреть задачи физического содержания, связанные с решением дифференциальных уравнений.

Для студентов, обучающихся по программам бакалавриата: 011200 – «Физика», 220400 – «Управление в технических системах», 230100 – «Информатика и вычислительная техника».

Ил. 26. Библиогр. 15 назв.

Рецензенты: д. ф.-м. н., профессор Шумафов М.М., к. ф.-м. н. Шекоян Л.А.

Работа частично выполнена в рамках Госзадания (ЕЗН) Министерства образования и науки Российской Федерации, проект № 451.

ISBN 978-5-91692-253-0

Авторы-составители: Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В процессе изучения явлений, происходящих в природе, решения задач физики, химии, биологии, экономики, экологии и других отраслей знания, не всегда удается установить связь между величинами, характеризующими интересующее нас явление. Вместе с тем в большинстве случаев удается найти зависимость между теми же величинами и скоростями их изменения. Эта зависимость выражается в виде уравнения, содержащего производную (или дифференциал) искомой функции.

Уравнение, в котором искомая функция содержится под знаком производной (или дифференциала), называется дифференциальным.

Рассмотрим некоторые задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям (ДУ).

Задача 1 [1] (о размножении бактерий).

В благоприятных для размножения условиях находится некоторое количество бактерий. Обозначим это число N_0. Из эксперимента установлено, что скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. Найти зависимость роста числа бактерий с течением времени.

Решение. Пусть $N(t)$ – количество размножающихся бактерий в момент времени t, тогда $N(0) = N_0$. Зная тот факт, что численность бактерий может выражаться только целыми числами, мы, тем не менее, будем считать, что функция числа бактерий $N(t)$ изменяется во времени непрерывно и дифференцируема. Поэтому указанный в условии задачи биологический экспериментальный закон выражается дифференциальным уравнением

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN(t), \qquad (k > 0). \tag{1}$$

Здесь коэффициент k зависит от вида бактерий и условий, в которых они находятся. Его можно определить из эксперимента.

Таким образом, мы получили математическую задачу: найти решение $N = N(t)$ уравнения (1) при условии $N(0) = N_0$.

Так как $N(t) > 0$, то, разделив обе части (1) на $N(t)$, получим

$$\frac{dN(t)}{N(t)dt} = k . \tag{2}$$

Из (2) получаем

$$d(\ln N(t)) = k . \tag{3}$$

Интегрируя обе части (3), имеем

$$\ln N(t) = kt + C_1 . \tag{4}$$

Из (4) окончательно находим, что

$$N(t) = Ce^{kt}, \qquad (C = e^{C_1}) . \tag{5}$$

В формуле (5) C – постоянная интегрирования (положительная). Из семейства функций (5) выделим такую, которая удовлетворяет условию поставленной задачи $N(0) = N_0$. Для этого в формулу (5) подставим O вместо t, получим

$$N_0 = C . \tag{6}$$

Подставляя найденное значение постоянной C из (6) в (5) получим закон размножения бактерий:

$$N(t) = N_0 e^{kt} .$$

Как видим, численность бактерий с течением времени растёт по экспоненциальному закону.

Задача 2 [1] (об изменении температуры нагретого тела).

Тело, имеющее в начальный момент времени температуру $T(0) = T_0$, поместили в среду, температура которой T_1. Как будет изменяться температура тела с течением времени?

Решение. Обозначим через $T(t)$ – температуру тела в некоторый произвольный момент времени t. Из эксперимента известно, что скорость, с которой изменяется температура тела, пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Это справедливо для небольших интервалов температур. Тогда, данный экспериментальный физический закон можно записать в виде дифференциального уравнения

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\gamma(T(t) - T_1) \qquad (\gamma > 0)\,. \tag{7}$$

Знак минус в правой части уравнения (7) говорит о том, что при условии $T(t) - T_1 > 0 (< 0)$ температура тела убывает (возрастает). Поэтому скорость ее изменения отрицательна (положительна).

Так как $T(t) - T_1 \neq 0$, то обе части уравнения (7) можно разделить на $T(t) - T_1$:

$$\frac{1}{T(t) - T_1} \cdot \frac{dT(t)}{dt} = -\gamma\,. \tag{8}$$

Воспользуемся тем, что $\dfrac{dT(t)}{dt} = \dfrac{d(T(t) - T_1)}{dt}$ $\quad (T_1 = const)$ и перепишем уравнение (8) в виде

$$\frac{1}{T(t) - T_1} \cdot \frac{d(T(t) - T_1)}{dt} = -\gamma\,. \tag{9}$$

Левая часть уравнения (9) есть не что иное, как $d(\ln|T(t) - T_1|)$, поэтому уравнение (9) перепишем в виде

$$d(\ln|T(t) - T_1|) = -\gamma\,. \tag{10}$$

Интегрируя обе части уравнения (10) по времени t, получим

$$\ln|T(t) - T_1| = -\gamma t + \ln|C_1|\,, \qquad (C_1 \neq 0)\,. \tag{11}$$

Из (11) следует соотношение $|T(t) - T_1| = |C_1| e^{-\gamma t}$, из которого окончательно получаем решение уравнения (7)

$$T(t) = T_1 + Ce^{-\gamma t}\ (C = \pm C_1)\,. \tag{12}$$

Учитывая условие поставленной задачи $T(0) = T_0$, из уравнения (12) найдем соответствующее значение произвольной постоянной:

$$C = T_0 - T_1\,. \tag{13}$$

Подставив значение C из (13) в уравнение (12), получим

$$T(t) = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-\gamma t}. \qquad (14)$$

Из (14) следует, что если разность $T_0 - T_1$ температур нагретого тела и окружающей среды положительна (отрицательна), то тело остывает (нагревается).

Задача 3 [2]. Найти кривую, тангенс угла наклона касательной в каждой точке которой численно равен ординате точки касания.

Решение. Пусть $y = y(x)$ – уравнение искомой кривой. Из геометрического смысла производной следует, что $tg\alpha = y'(x)$. Поэтому определяющее свойство кривой записывается в виде дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = y. \qquad (15)$$

Можно заметить, что $y = 0$ является решением уравнения (15). Считая $y \neq 0$, разделим обе части уравнения (15) на y

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 1. \qquad (16)$$

Так как $\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d(\ln|y|)}{dx}$, то уравнение (16) перепишем в виде $\frac{d(\ln|y|)}{dx} = 1$. Тогда получаем, что

$$\ln|y| = x + \ln|C_1|,\ C_1 \neq 0. \qquad (17)$$

Из (17) следует равенство $|y| = |C_1|e^x$, из которого окончательно получаем

$$y = Ce^x. \qquad (18)$$

Из (18) видно, что решение $y = 0$ уравнения (15) получается, если в (18) принять $C = 0$.

Из семейства (18) найдем ту кривую, которая удовлетворяет условию $y(0)=y_0$. $y_0=Ce^0 \Rightarrow C=y_0$.

$y=y_0e^x$ – уравнение кривой из семейства (18), проходящей через точку $(0,y_0)$.

Задача 4 [3] (о сосуществовании различных видов животных). Из эксперимента известно, что A – число особей в популяции, рождающихся в единицу времени, B – число особей, умирающих в единицу времени. Требуется описать зависимость A и B от числа $x(t)$ особей в популяции в момент времени t.

Простейшим случаем является ситуация, когда

$$A=ax,\ B=bx, \tag{19}$$

где a и b – коэффициенты рождения и смерти особей в единицу времени соответственно.

Скорость изменения числа особей со временем задается уравнением

$$\frac{dx}{dt}=A-B. \tag{20}$$

В силу (19) уравнение (20) перепишем в виде

$$\frac{dx}{dt}=(a-b)x. \tag{21}$$

Полагая $x>0$, разделим обе части (21) на x

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{dt}=a-b. \tag{22}$$

С учетом равенства $\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{d(\ln|x|)}{dt}$ перепишем уравнение (22):

$$\frac{d(\ln|x|)}{dt}=a-b. \tag{23}$$

Из (23) получаем уравнение

$$\ln|x|=(a-b)t+\ln C,\ (C>0). \tag{24}$$

Уравнение (24) можно переписать в виде:

$$x = Ce^{(a-b)t}. \qquad (25)$$

Найдем закон изменения числа особей при условии, что в момент времени $t = t_0$ $x = x_0$, для чего подставим t_0 вместо t и x_0 вместо x.

$$x_0 = Ce^{(a-b)t_0} \Rightarrow C = x_0 e^{-(a-b)t_0}. \qquad (26)$$

Подставив в (25) выражение из (26) вместо C, получим

$$x = x_0 e^{(a-b)(t-t_0)}. \qquad (27)$$

Из (27) следует, что если $a > b$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$ с другой стороны, если $a - b < 0$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$, то есть популяция становится вымирающей.

Дадим теперь строгое определение дифференциального уравнения.

Определение 1 [4]. Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', ... y^{(n)}) = 0. \qquad (28)$$

В уравнении (28) y – искомая функция, x – независимая переменная (аргумент).

Замечание 1. Некоторые из величин $x, y, y', ... y^{(n-1)}$ или даже все могут не входить в уравнение (28), но обязательно в нем содержится производная n-го порядка $y^{(n)}$.

Уравнение (28) называется обыкновенным, так как в него входят только производные функции одной переменной (обыкновенные производные).

Уравнение $y'' + (3x - 5)y' + x^2 - 7x = 0$ является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка.

Замечание 2. В дифференциальном уравнении искомая функция может зависеть от двух и более переменных. Такие уравнения называют дифференциальными уравнениями в частных производных (или с частными производными). Уравнение $y\dfrac{dz}{dx} + x\dfrac{dz}{dy} = 0$ является дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка. В данном уравнении искомой является функция $z = z(x, y)$ двух переменных x и y.

Замечание 3. Всюду в дальнейшем нас будут интересовать только обыкновенные дифференциальные уравнения. Поэтому вместо термина «обыкновенное дифференциальное уравнение» будем пользоваться термином «дифференциальное уравнение» (ДУ).

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Особенностью современного обучения в вузе является большая самостоятельность студента при работе над учебным материалом. Поэтому данное учебное пособие, в первую очередь, ориентировано на то, чтобы помочь студенту в самоподготовке по курсу теории дифференциальных уравнений. Оно содержит необходимый минимальный теоретический материал для освоения курса, задания для аудиторных занятий, задания для выполнения вне аудитории (обязательный минимум задач), задания повышенного уровня сложности и контрольные вопросы. Все это должно позволить глубже понять и закрепить изученный теоретический материал.

Изучать курс нужно по темам в соответствии с рабочей программой из учебно-методического комплекса. Рекомендуется решать все задания обязательного минимума в аудитории, ответы на контрольные вопросы готовить дома в письменном виде, а затем их предоставлять преподавателю, чтобы преодолеть непонимание и исправить ошибки.

Курс дифференциальных уравнений для студентов, обучающихся на инженерно-физическом факультете, является базовым в силу его дальнейшего использования при изучении электротехники, электроники и других дисциплин, прямо или косвенно связанных как с различными разделами физики, так и с самим университетским курсом физики. Поэтому в книге отдельным пунктом даются задачи из различных разделов физики, приводящие к дифференциальным уравнениям. Студент на основе изученного математического материала должен научиться применять полученные знания для решения возникающих в физике дифференциальных уравнений. При этом он может использовать компьютерные системы типа Maple.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ В КВАДРАТУРАХ

1.1. Общие понятия

В соответствии с определением 1, приведенным во введении, дифференциальное уравнение первого порядка записывается в виде

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.1.1}$$

Существуют и другие формы записи дифференциального уравнения первого порядка.

Уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{1.1.2}$$

называется **дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.**

Наряду с уравнением (1.1.2) рассматривают так называемое **перевернутое уравнение**

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}. \tag{1.1.3}$$

Уравнение (1.1.3) используют в окрестности тех точек, в которых функция $f(x, y)$ обращается в бесконечность.

Во многих случаях целесообразнее рассматривать вместо уравнений (1.1.2) и (1.1.3) равносильное им одно уравнение [4]

$$dy - f(x, y)dx = 0. \tag{1.1.4}$$

Если в уравнении (1.1.2) ((1.1.3)) искомой функцией является $y(x)$, а независимой переменной – $x(y)$, то в уравнение (1.1.4) обе переменные входят равноправно, и любую из них мы можем принять за независимую переменную. Вместо уравнения (1.1.4) рассматривают уравнение более общего вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{1.1.5}$$

Иногда дифференциальное уравнение первого порядка записывают в так называемой симметрической форме [5]

$$\frac{dx}{X(x,y)} = \frac{dy}{Y(x,y)}.$$

Определение 1.1.1. Будем говорить, что уравнение (1.1.2) задано в области $D \subset R^2$, если функция $f(x,y)$ определена в D.

Определение 1.1.2. Решением дифференциального уравнения (1.1.1) ((1.1.2)) на промежутке (a,b) называется непрерывно дифференцируемая функция $y = y(x)$, обращающая это уравнение в тождество на (a,b), то есть $\forall x \in (a,b)$ выполняется равенство $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ $(y'(x) = f(x, y(x))$.

Из определения 1.1.2 следует, что точка $(x, y(x))$ принадлежит области D $\forall x \in (a,b)$.

Пример 1.1.1. Функция $y = e^x + e^{2x}$ является решением уравнения

$$y' = y + e^{2x}. \tag{1.1.6}$$

В самом деле, $y' = e^x + 2e^{2x}$, и уравнение (1.1.6) превращается в тождество $e^x + 2e^{2x} \equiv e^x + e^{2x} + e^{2x}$, которое справедливо для любого действительного значения x. Решение $y = e^x + 2e^{2x}$ определено на $\boldsymbol{R}$.

Замечание 1.1.1. Иногда функцию $y = y(x)$, являющуюся решением уравнения (1.1.1) ((1.1.2)), называют **интегралом** этого уравнения (см. [4], с. 15).

В большинстве случаев решение дифференциального уравнения удается записать в неявном виде.

Определение 1.1.3. Говорят, что уравнение

$$\Phi(x,y) = 0 \tag{1.1.7}$$

определяет решение уравнения (1.1.2) в неявной форме, если оно определяет y как неявную функцию аргумента x, и эта функция является решением уравнения (1.1.2).

Пусть $y = y(x)$ – решение уравнения (1.1.2), определенное в неявной форме, тогда выполняется равенство

$$\Phi(x, y(x)) \equiv 0. \tag{1.1.8}$$

Продифференцируем обе части тождества (1.1.8) по x:

$$\Phi'_x(x, y(x)) + \Phi'_y(x, y(x))\, y'(x) \equiv 0.$$

Так как $y = y(x)$ – решение уравнения (1.1.2), то в последнем тождестве заменим $y'(x)$ выражением $f(x, y(x))$:

$$\Phi'_x(x, y(x)) + \Phi'_y(x, y(x))\, f(x, y(x)) \equiv 0. \tag{1.1.9}$$

Таким образом, из (1.1.9) следует утверждение: равенство

$$\Phi'_x(x, y) + \Phi'_y(x, y)\, f(x, y) = 0 \tag{1.1.10}$$

выполняется в силу (1.1.7), если (1.1.7) определяет решение уравнения (1.1.2) в неявной форме.

Пример 1.1.1. Функция $y = y(x)$, определяемая уравнением $x^2 + y^2 - 1 = 0$, является решением дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y(x^2 + y^2 - 1)}{-y + x(x^2 + y^2 - 1)}.$$

В самом деле, $\Phi'_x(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)'_x = 2x$, $\Phi'_y(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)'_y = 2y$. Левая часть равенства (1.1.10) в нашем случае имеет вид:

$$2x + 2y\frac{x + y(x^2 + y^2 - 1)}{-y + x(x^2 + y^2 - 1)}. \tag{1.1.11}$$

В силу равенства $x^2 + y^2 - 1 = 0$ выражение (1.1.11) тождественно равно нулю.

Определение 1.1.4. Если рассматривать x и y как прямоугольные координаты, то решению дифференциального уравнения соответствует некоторая кривая на плоскости xOy, называемая **интегральной кривой этого уравнения.**

Так, решению дифференциального уравнения, заданному в неявной форме и рассмотренному в примере 1.1.1, соответствует интегральная кривая – окружность $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Естественно поставить вопрос: чем отличаются интегральные кривые дифференциального уравнения от всевозможных кривых, которые можно провести на плоскости xOy?

Ответом на этот вопрос является геометрическое истолкование дифференциального уравнения (1.1.2).

Пусть уравнение (1.1.2) задано в области D. Под областью следует понимать непустое множество D точек, обладающее двумя свойствами:

1) каждая точка $M(x, y) \in D$ является внутренней, то есть принадлежит D вместе с некоторой окрестностью;

2) множество D связное, то есть любые две точки D можно соединить ломаной, которая целиком лежит внутри D и состоит из конечного числа звеньев.

Через каждую точку $M(x, y) \in D$ проведем единичный отрезок с серединой в точке $M(x, y)$, составляющей с положительным направлением оси Ox угол α, тангенс которого равен $f(x, y)$, то есть $tg\alpha = f(x, y)$. При этом оба направления указанного единичного отрезка для нас безразличны. Тем самым получим так называемое **поле направлений** дифференциального уравнения (1.1.2). Итак, дифференциальное уравнение (1.1.2) геометрически выражает тот факт, что **направление касательной в каждой точке интегральной кривой** совпадает с **направлением поля в этой точке.**

Это свойство и выделяет интегральные кривые дифференциального уравнения (1.1.2) среди всех остальных кривых, расположенных на плоскости.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называют **интегрированием** этого уравнения. Основной задачей интегрирования дифференциального уравнения является нахождение всех его решений и изучение их свойств.

Из геометрической интерпретации дифференциального уравнения первого порядка (1.1.2) следует, что оно выражает общее свойство касательных всех его интегральных кривых. Поэтому задача интегрирования (1.1.2) состоит в том, чтобы по этому свойству восстановить само семейство интегральных кривых.

Пример 1.1.2. Уравнению $y' = 2x$ удовлетворяет всякая функция $y = x^2 + C$, C – некоторая постоянная. Это семейство парабол, обладающих одним общим свойством: в каждой точке $M(x, y)$ любой интегральной кривой угловой коэффициент касательной равен удвоенной абсциссе этой точки ($tg\alpha = 2x$).

Определение 1.1.5. Кривая L, расположенная в области задания уравнения (1.1.2), называется **изоклиной** уравнения (1.1.2), если в каждой точке L наклон поля, определяемого дифференциальным уравнением (1.1.2), один и тот же.

Из определения 1.1.5 следует, что изоклина L задается уравнением

$$f(x, y) = k, \ (k - const). \tag{1.1.12}$$

Пример 1.1.3. Уравнением $y = -x$ задается изоклина дифференциального уравнения

$$y' = x + y. \tag{1.1.13}$$

Это означает, что интегральные кривые уравнения (1.1.13) имеют в точках прямой $y = -x$ касательные, параллельные оси Ox, то есть $tg\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.

Одной из важнейших задач теории дифференциальных уравнений (впрочем, она возникла из потребностей практики) является так называемая **задача Коши.** Для дифференциального уравнения (1.1.2) она ставится так: среди всех решений уравнения (1.1.2) найти такое решение $y = y(x)$, которое удовлетворяет условию

$$y(x_0)=y_0, \qquad (1.1.14)$$

где x_0 и y_0 – заданные числа.

Числа x_0 и y_0 называются начальными данными, а условие (1.1.14) – начальным условием решения задачи.

Задача Коши геометрически трактуется так: среди всех интегральных кривых уравнения (1.1.2) найти ту, которая проходит через заданную точку $M(x_0, y_0)$.

Пример 1.1.4. Найти решение уравнения $y'=y$, удовлетворяющее условию $y(0)=1$.

Очевидно, что $y=0$ – решение данного дифференциального уравнения. Полагая $y\neq 0$, разделим обе части дифференциального уравнения на y:

$\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}=1 \Rightarrow \dfrac{d(\ln|y|)}{dx}=1 \Rightarrow \ln|y|=x+\ln|C| \Rightarrow y=Ce^x$ – семейство всех интегральных кривых дифференциального уравнения.

Впрочем, при $C=0$ из этого семейства находим решение $y=0$.

В формулу семейства интегральных кривых подставим 0 вместо x и 1 вместо y и найдем $C=1$. Таким образом, из семейства решений выделено решение $y=e^x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$.

Говорят, что задача Коши с начальным условием (1.1.14) имеет единственное решение, если существует число $h>0$, такое, что на отрезке $[x_0-h, x_0+h]$ определено решение $y=y(x)$ уравнения (1.1.2), такое, что $y(x_0)=y_0$ и не существует решения, определенного на этом же отрезке и не совпадающего с решением $y=y(x)$ хотя бы в одной точке отрезка $[x_0-h, x_0+h]$, отличной от $x=x_0$.

В противном случае в точке (x_0, y_0) нарушается единственность решения задачи Коши.

При решении дифференциального уравнения (1.1.2) мы получаем целое семейство решений, зависящее от одной произвольной постоянной $\tilde{N}$:

$$y = \varphi(x, C). \tag{1.1.15}$$

Функцию (1.1.15) называют общим решением дифференциального уравнения (1.1.2). Дадим строгое определение общего решения дифференциального уравнения, следуя Еругину Н.П. (см. [5], с. 29).

Пусть уравнение (1.1.2) задано в области D так, что через каждую точку $(x, y) \in D$ проходит интегральная кривая уравнения (1.1.2), и притом единственная.

Определение 1.1.6. Функция (1.1.15) называется общим решением уравнения (1.1.2) в области D, если для любой точки $(x, y) \in D$ уравнение (1.1.15) определяет значение (быть может, не одно) постоянной

$$\tilde{N} = \psi(x, y), \tag{1.1.16}$$

и если подстановка этого значения C в равенство

$$y' = \varphi'_x\,(x, C) \tag{1.1.17}$$

приводит к уравнению (1.1.2), то есть $y' = \varphi'_x\,(x, C) = \varphi'_x\,(x, \psi(x, y)) = f(x, y)$.

Коротко: (1.1.15) есть общее решение уравнения (1.1.2) в области D, если в этой области уравнение (1.1.2) является следствием (1.1.15) и (1.1.17) через (1.1.16).

Пример 1.1.5. Покажем, что $y = Cx$ является общим решением уравнения $y' = \dfrac{y}{x}$ в области $D = \{0 < x < +\infty, -\infty < y < +\infty\}$.

Разрешим уравнение $y = Cx$ относительно C:

$$C = \frac{y}{x}, \tag{1.1.18}$$

$$y' = (Cx)'_x = C. \tag{1.1.19}$$

В равенство (1.1.19) подставим вместо C дробь и получим требуемое уравнение $y' = \dfrac{y}{x}$.

Замечание 1.1.2. В области D, где задано общее решение уравнения (1.1.2), выполняются условия существования и единственности решения задачи. Они нами будут приведены в дальнейшем.

В большинстве случаев, решая уравнение (1.1.2), мы получаем общее решение (однопараметрическое семейство интегральных кривых) в неявном виде, то есть в виде, не разрешенном относительно y:

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{1.1.20}$$

или

$$\varphi(x, y) = C. \tag{1.1.21}$$

Такая форма общего решения называется **общим интегралом**. Итак, соотношение (1.1.20) или (1.1.21) будем называть **общим решением в неявной форме** или **общим интегралом** уравнения (1.1.2) в области D, если это соотношение определяет общее решение (1.1.15) в области D.

Пример 1.1.6. Уравнением $x^2 + y^2 = C$ задается общий интеграл дифференциального уравнения $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ в каждой из полуплоскостей $D_1 = \{(x, y) / -\infty < x < +\infty, 0 < y < +\infty\}$ и $D_2 = \{(x, y) / -\infty < x < +\infty, -\infty < y < 0\}$.

В самом деле, в области D_1 функция $y = \sqrt{C - x^2}$ – решение уравнения $x^2 + y^2 = C$. Согласно определению 1.1.6 $\left(\sqrt{C - x^2}\right)'_x = -\dfrac{x}{\sqrt{C - x^2}}$, то есть имеем равенство

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{C - x^2}}. \tag{1.1.22}$$

Подставим выражение $x^2 + y^2$ вместо C в правую часть (1.1.22):

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

В результате мы получим дифференциальное уравнение $y' = -\dfrac{x}{y}$, а значит, $x^2 + y^2 = C$ – общий интеграл этого уравнения в области D_1. Такими же рассуждениями устанавливается, что $x^2 + y^2 = C$ – общий интеграл в области D_2.

Определение 1.1.7 [4]. Если решение дифференциального уравнения (1.1.2) состоит только из точек единственности решения задачи Коши, то такое решение называется **частным решением** этого уравнения.

Из определения 1.1.7 следует, что решение, получающееся из формулы общего решения (1.1.15) при фиксированном значении произвольной постоянной C, является **частным решением.**

В связи с задачей Коши в теории дифференциальных уравнений рассматриваются **особые решения** дифференциального уравнения (1.1.2).

Определение 1.1.8 [4]. Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется **особым решением** уравнения (1.1.2).

Геометрически особому решению соответствует интегральная кривая, не содержащаяся в семействе интегральных кривых, образующих общее решение. Иначе говоря, особое решение нельзя найти из формулы общего решения (общего интеграла) ни при каком значении $\tilde{N} \in [-\infty, +\infty]$.

Пример 1.1.7. Покажем, что $y = 0$ – особое решение дифференциального уравнения

$$y' = 2\sqrt{y} \quad y \geq 0. \tag{1.1.23}$$

$y = 0$ – очевидное решение уравнения (1.1.23).

Считая, что $y \neq 0$, разделим обе части уравнения (1.1.23) на $2\sqrt{y}$:

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}dx} = 1 \Rightarrow \frac{d(\sqrt{y})}{dx} = 1 \Rightarrow \sqrt{y} = x + C,\ x > -C.$$

Итак, уравнение (1.1.23) имеет семейство решений

$$y = (x + C)^2 \qquad (x \geq -C). \tag{1.1.24}$$

Интегральные кривые, входящие в семейство (1.1.24) при любом вещественном значении произвольной постоянной C, являются «правыми» полупараболами, оси симметрии которых параллельны оси Oy, а вершины лежат на оси Ox (см. рис. 1).

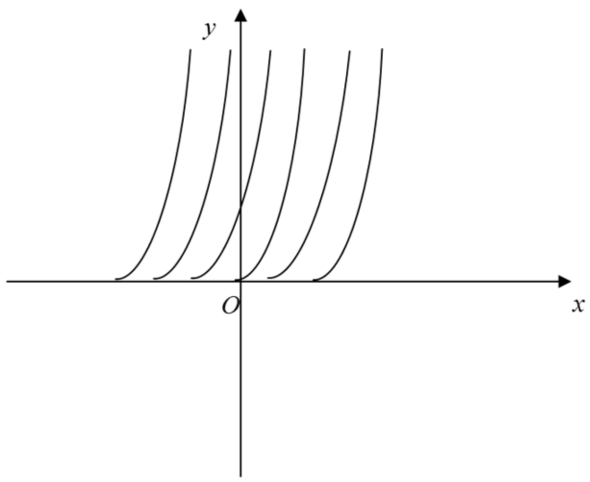

Рис. 1. Интегральные кривые являются правыми полупараболами, оси симметрии которых параллельны оси Оy, а вершины лежат на оси Оx.

Можно показать, что в области $D = \{(x, y) / -\infty < x < +\infty, 0 < y < +\infty\}$ функция $y = (x + C)^2$ $(x > C)$ является общим решением уравнения (1.1.23).

В каждой точке прямой $y = 0$ нарушается единственность решения задачи Коши, так как через точку $(x, 0)$, кроме прямой $y = 0$ проходит, примыкающая к ней правая полупарабола. Тем самым доказано, что $y = 0$ – особое решение уравнения (1.1.23).

Определение [2]. Дифференциальное уравнение (1.1.1) называется интегрируемым в квадратурах, если его общее решение (общий интеграл) может быть получено в результате конечной последовательности элементарных операций (сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в целую степень, извлечения корня, суперпозиции функций) над элементарными функциями и операции взятия неопределенного интеграла от этих функций.

Сразу отметим, что таких уравнений относительно мало.

Настоящее пособие посвящено изучению дифференциальных уравнений первого порядка, интегрируемых в квадратурах.

Литература

1. Самойленко А.А. Дифференциальные уравнения: Практ.курс: Учеб. пособие для вузов / А.А. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. 3-е изд., перераб. – М.: Высшая школа, 2006. – 382 с.

2. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями / М.Л. Краснов, А. Киселев, Г. Макаренко. – М. : Либроком, 2013. – 256 с.

3. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В.В. Амелькин. – М. : Либроком, 2012. – 208 с.

4. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений: учеб. пособие / Н.М. Матвеев. - 5-е изд., доп. – СПб. : Лань, 2003. – 832 с.

5. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н.П. Еругин. – Минск: Наука и техника, 1979. – 744 с.

Практическое занятие № 1. Тема. Приближенное решение методом изоклин дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной

Как уже отмечалось, подавляющее большинство дифференциальных уравнений не интегрируется в квадратурах. Поэтому важное значение имеют приближенные методы интегрирования уравнения (1.1.2). Рассмотрим один из них, основанный на геометрической интерпретации дифференциального уравнения (1.1.2). Согласно определению 1.1.5 изоклина дифференциального уравнения (1.1.2) есть геометрическое место точек плоскости, в которых касательные к искомым интегральным кривым имеют один и тот же угол наклона к положительному направлению оси Ox. Семейство изоклин уравнения (1.1.2) задается уравнением

$$f(x,y)=k \text{ , где } k \text{ – параметр.}$$

Если придавать k близкие числовые значения, то можно найти достаточно густую сеть изоклин, с помощью которых приближенно можно построить интегральные кривые уравнения (1.1.2).

Приближенное решение уравнения (1.1.2) методом изоклин рекомендуется осуществлять по следующему правилу:

1) строится поле направлений с помощью изоклин $f(x,y)=k_1, f(x,y)=k_2,... f(x,y)=k_m$, где $k_i=tg\alpha_i$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$;
2) для более точного построения интегральных кривых, если можно, изображается на плоскости xOy геометрическое место точек перегиба интегральных кривых уравнения (1.1.2);
3) на основе полученных сведений о поведении интегральных кривых, строятся они плавными линиями.

Замечание 2.1.1. Уравнение линии точек перегиба имеет вид [4] (задача №15):

$$f'_x(x,y)+f'_y(x,y)\cdot f(x,y)=0. \tag{2.1.1}$$

Если левая часть уравнения (2.1.1) сохраняет положительный (отрицательный) знак, то всякая интегральная кривая уравнения (1.1.2) выпукла вниз (вверх) (почему?).

Пример 2.1.1. С помощью изоклин приближенно начертить интегральные кривые уравнения

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}. \tag{2.1.2}$$

Решение.

1) Строим поле направлений уравнения (2.1.2) с помощью изоклин

$$-\frac{x}{y}=k$$

$k_1=1 \Rightarrow tg\alpha_1=1 \Rightarrow \alpha_1=\frac{\pi}{4}$ ($y=-x$ – изоклина наклона 1)

$k_2 = -1 \Rightarrow tg\alpha_2 = -1 \Rightarrow \alpha_2 = -\dfrac{\pi}{4}$ ($y = x$ – изоклина наклона -1)

$k_3 = 2 \Rightarrow tg\alpha_3 = 2 \Rightarrow \alpha_3 = arctg2$ ($y = -\dfrac{1}{2}x$ – изоклина наклона 2)

$k_4 = -2 \Rightarrow tg\alpha_4 = -2 \Rightarrow \alpha_4 = -arctg2$ ($y = \dfrac{1}{2}x$ – изоклина наклона -2)

$k_5 = 0 \Rightarrow tg\alpha_5 = 0 \Rightarrow \alpha_5 = 0$ ($x = 0$ – изоклина наклона 0)

Так как правая часть уравнения (2.1.2) не определена в точках прямой $y = 0$ (обращается в ∞), то рассмотрим перевернутое уравнение

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}. \tag{2.1.3}$$

Семейство изоклин уравнения (2.1.2) ((2.1.3)) не содержит прямую $y = 0$ ($x = 0$). Пусть $-\dfrac{y}{x} = k_6$, где $k_6 = 0 \Rightarrow tg\alpha_6 = 0 \Rightarrow \alpha_6 = 0$, то есть $y = 0$ – изоклина уравнения (2.1.3).

Угол наклона касательных в точках прямой $y = 0$ рассматривается относительно положительного направления оси Oy (искомая функция x, а y – независимая переменная). Итак, $y = 0$ – изоклина вертикальных наклонов для уравнения (2.1.2). На рис.2 изображено поле направлений уравнения (2.1.2).

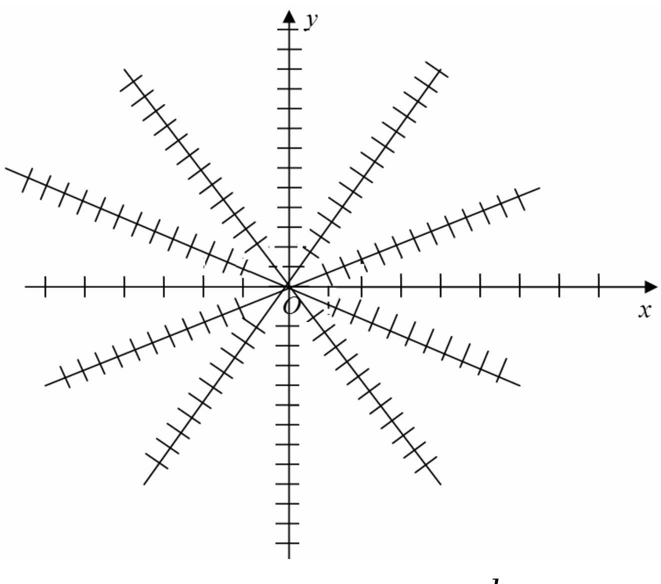

Рис 2. Поле направлений ДУ $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

2) Рассмотрим уравнение $y'' \equiv f'_x(x,y) + f'_y(x,y) \cdot f(x,y) = 0$,

$$-\frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\left(-\frac{x}{y}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{y}\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) = 0. \qquad (2.1.4)$$

Из (2.1.4) следует, что при $y > 0$ $(y < 0)$ интегральные кривые уравнения (2.1.2) имеют выпуклость вверх (вниз).

Проводя кривые, касательные к которым совпадают с направлением поля, изображенного на рис. 2, получим окружности с центром в начале координат - интегральные кривые уравнения (2.1.2) (см. рис.3).

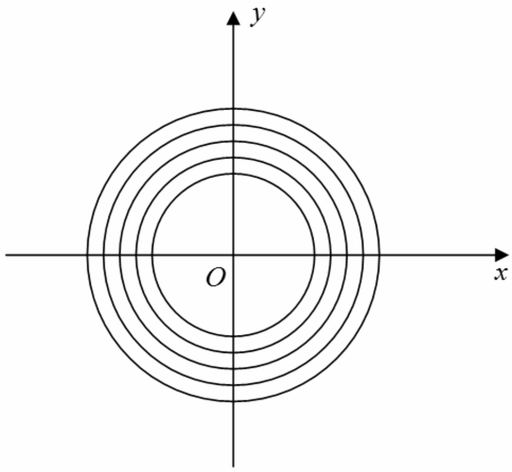

Рис. 3. Интегральные кривые уравнения $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

Пример 2.1.2. Построить приближенно интегральные кривые уравнения

$$y' = \frac{y}{x}. \qquad (2.1.5)$$

Решение. Рассмотрим произвольную точку (x, y) плоскости R^2, отличную от точки $(0,0)$. Через нее проходит единственная окружность – интегральная кривая уравнения (2.1.2). Заметив, что произведение правых частей уравнения (2.1.2) и (2.1.5) равно -1, делаем заключение: в каждой точке $(x, y) \neq (0,0)$ интегральные кривые уравнений (2.1.2) и (2.1.5) взаимно перпендикулярны. Поэтому интегральными кривыми уравнения (2.1.5) являются полупрямые, примыкающие к началу координат (см. рис. 4).

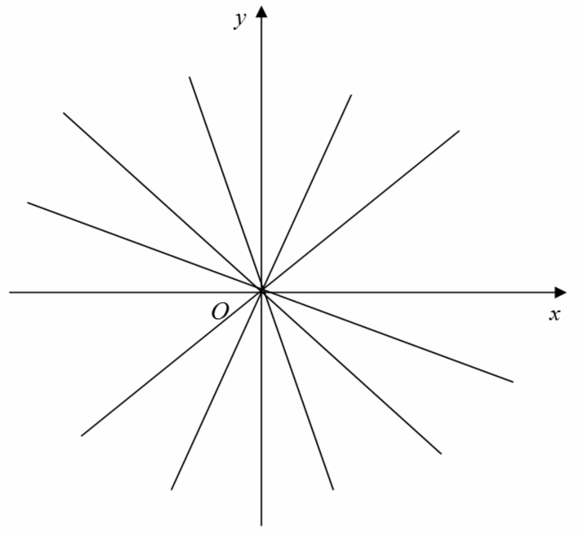

Рис. 4. Интегральные кривые ДУ $y' = \dfrac{y}{x}$

Как уже отмечалось выше, применение метода изоклин заключается в построении эскиза линии уровня кривых $f(x, y) = C$ для различных значений постоянной C. На выбранных точках этих кривых мы строим короткие линейные сегменты, каждый из которых имеет одинаковый наклон, равный C. Покажем это на следующем примере. (Это легко можно сделать в современных математических пакетах, таких, как Maple, Mathematica, Scilab.)

Пример. Используя метод изоклин, построить поле направлений для следующего дифференциального уравнения $dy/dx = -x + y$.

Решение. В нашем случае $f(x, y) = -x + y$ и тогда изоклины имеют вид $-x + y = C$, что графически соответствуют прямым линиям, таким образом, как это изображено на рис. 5.

```
> restart:
  with(plots):
  p0:=plot(x,x=-2.5..2.5, y=-2.5..2.5,color=black,thickness=3)
  p1:=plot(1+x,x=-2.5..2.5, y=-2.5..2.5,color=black,thickness=
  p2:=plot(2+x,x=-2.5..2.5, y=-2.5..2.5,color=black,thickness=
  p3:=plot(3+x,x=-2.5..2.5, y=-2.5..2.5,color=black,thickness=
  p4:=plot(-1+x,x=-2.5..2.5, y=-2.5..2.5,color=black,thickness
  p5:=plot(-2+x,x=-2.5..2.5, y=-2.5..2.5,color=black,thickness
  p6:=plot(-3+x,x=-2.5..2.5, y=-2.5..2.5,color=black,thickness
  display(p0,p1,p2,p3,p4,p5,p6);
```

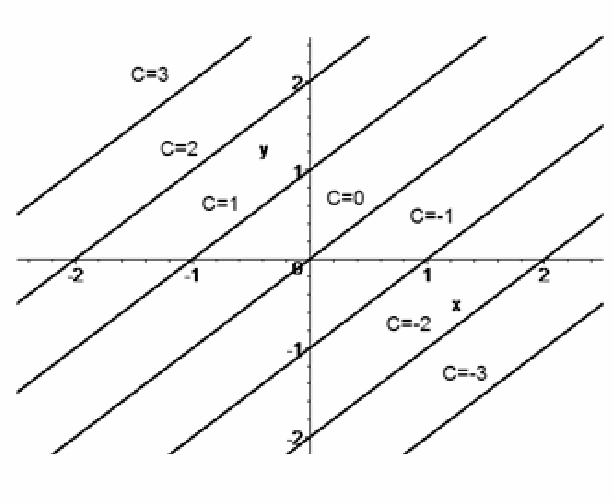

Рис. 5. Код программы в системе Maple и результат – прямые изоклины $-x+y=C$, построенные для значений $C=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3$.

Выбираем точки, расположенные на прямых изоклинах и строим короткие векторы (сегменты), каждый из которых имеет одинаковый наклон С так, как это показано на рисунке 6.

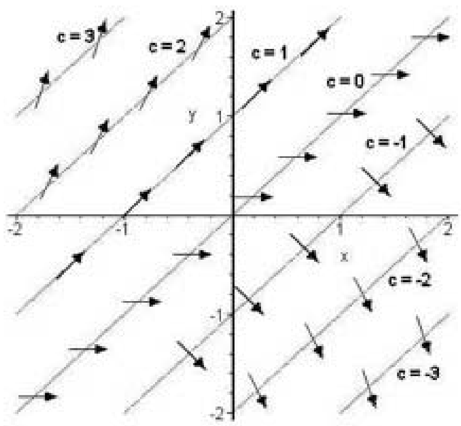

Рис. 6. Векторы одинакового наклона, построенные на прямых изоклинах

Код программы в системе Maple и поле направлений для дифференциального уравнения $dy/dx=-x+y$ изображены на рисунке 7.

```
> with(DEtools): #Подключение пакета DEtools, который содержит функции,
                  помогающие работать с дифференциальными уравнениями
  dfieldplot(diff(y(x),x)=-x+y(x), y(x), x=-3..3,
  y=-3..2, title=`Поле направлений`,color=1/2*(-x+y));# Команда, реализующая
                     построение поля направлений дифференциального уравнения
```

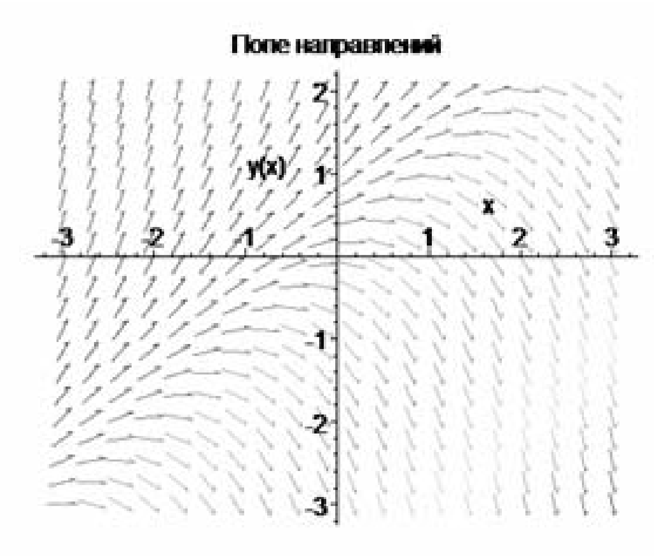

Рис. 7. Код программы в системе Maple и поле направлений для дифференциального уравнения $dy/dx = -x + y$

В приложениях часто приходится находить решения ДУ, проходящие через точки (состояния) равновесия. Их иногда называют равновесными решениями. Для нахождения равновесных решений необходимо ДУ привести к уравнению первого порядка, разрешенного относительно производной $y' = f(y)$, затем приравнять нулю правую часть уравнения, то есть записать $f(y) = 0$, и решить это уравнение относительно y. Если y_0 является таким числом (значением), что $f(y_0) = 0$, то тогда функция $y = y_0$ для всех значений x является равновесным решением.

Задания для работы в аудитории

I. С помощью изоклин начертить (приближенно) интегральные кривые данных уравнений.

1) (№1 [4]). $y' = y - x^2$.

2) (№3 [4]). $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2} - 1$.

3) (№6[4]) . $xy' = 2y$.

4) (№12 [4]). $y' = \dfrac{y}{x + y}$.

II. Найти все равновесные решения для каждого из дифференциальных уравнений. Описать словами, каким образом кривые неравновесного решения ведут себя в различных областях плоскости xOy. Построить поле направлений и интегральные кривые в заданных областях. (Подсказка: Определить знак y_0 выше и ниже каждого равновесного решения.)

a) $y' = y^2 - 11y + 10,\ |x| \le 1,\ -5 \le y \le 15$. *b*) $y' = |y| - y^2,\ |x| \le 5,\ |y| \le 2$.

c) $y' = \sin\left(\dfrac{2\pi y}{1+y^2}\right),\ |x| \le 5,\ |y| \le 2$.

d). Придумайте и запишите свое дифференциальное уравнение, которое будет иметь указанные вами равновесные решения.

Задания для выполнения вне аудитории
Обязательный минимум задач

1. Найти семейство изоклин следующих дифференциальных уравнений:

а) $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$; б) $y' = xy$; в) $y' = x^2 - y^2$.

2. С помощью изоклин начертить (приближенно) интегральные кривые данных уравнений.

а) $y' = 1 + xy$; б) $y' = y - x$; в) $y' - y = \frac{1}{2}x^2$;

г) $y \cdot y' - 2x = x^2 + 1$; д) $y' - y^2 = x$; е) $y' + x^2 = y$.

3. Найти и построить с помощью системы Maple изоклины для следующих дифференциальных уравнений:

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3y}{x}$; *b*) $\dfrac{dy}{dx} = -x + 1$; *c*) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 1$; *d*) $\dfrac{dy}{dx} = y + x$; *e*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2x}$.

Задания повышенного уровня сложности

1. С помощью изоклин начертить (приближенно) интегральные кривые данных уравнений:

а) (№8 [4]). $y' + y = (x - y')^3$; б) (№10 [4]). $y(y' + x) = 1$;

в) (№14[4]). $(x^2 + y^2)y' = 4$; г) (№13 [4]). $x^2 + y^2 y' = 1$.

2. Написать уравнение геометрического места точек, являющихся точками максимума или минимума решений уравнения $y' = f(x, y)$. Как отличить точки максимума от точек минимума?

а) $y' = x^2 + y^2$; б) $y' = x^2 + y^2 - 9$; в) $y'y + x = y^2$.

3. Написать уравнение геометрического места точек перегиба графиков решений уравнений:

а) (16а) [4]) $y' = y - x^2$. б) (16б) [4]) $y' = x - e^y$.
в) (16в) [4]) $x^2 + y^2 y' = 1$. г) (16г) [4]) $y' = f(x, y)$.

Литература

1. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений: учеб. пособие / Н.М. Матвеев. - 5-е изд., доп. – СПб. : Лань, 2003. – 832 с. (§1, 2).

2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения: [учебник для физических и физико-математических факультетов университетов] / Л.Э. Эльсгольц. – Изд. 8-е. – М. : URSS, 2013. – 309 с.

3. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями / М.Л. Краснов, А. Киселев, Г. Макаренко. – М.: Либроком, 2013. – 256 с. (§1).

4. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: Учеб. пособие для вузов / А.Ф. Филиппов. – М. : ЛКИ, 2011. – 240 с. (§1).

5. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учеб. пособие / Н.М. Матвеев. - 7-е изд.,доп. – СПб. : Лань, 2002. – 431 с. (§1).

Практическое занятие № 2. Тема: Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение 2.2.1. Уравнение вида

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \tag{2.2.1}$$

называется уравнением с разделенными переменными (коэффициент при $dx\,(dy)$ зависит только от $x\,(y)$).

Если $M(x)$ и $N(y)$ – непрерывные функции, то общий интеграл уравнения (2.2.1) записывается в виде:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C \tag{2.2.2}$$

или

$$\int_{x_0}^{x} M(x)dx + \int_{y_0}^{y} N(y)dy = C\,. \tag{2.2.2a}$$

Особых решений уравнение (2.2.1) не имеет.

Если $|M(x_0)| + |N(y_0)| > 0$, то решение уравнения (2.2.1) с начальными данными x_0 и y_0 можно найти обычным способом по общему интегралу (2.2.2) или сразу по формуле (2.2.2*a*), полагая $C = 0$.

В случае $|M(x_0)| + |N(y_0)| = 0$ решение с начальными данными x_0 и y_0 может вовсе не существовать или быть не единственным.

Пример 2.2.1. Общий интеграл уравнения $xdx + ydy = 0$ имеет вид:

$$x^2 + y^2 = C\text{, где } C \geq 0.$$

У данного дифференциального уравнения нет решения с начальными данными $x_0 = 0, y_0 = 0$, так как к началу координат не примыкает ни одна интегральная кривая уравнения.

Определение 2.2.2. Уравнение вида

$$M_1(x) \cdot N_1(y)dx + M_2(x) \cdot N_2(y)dy = 0 \tag{2.2.3}$$

называется уравнением с разделяющимися переменными.

Уравнение (2.2.3) приводится к уравнению с разделенными переменными умножением обеих его частей на $\frac{1}{M_2(x)\cdot N_1(y)}$:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0. \qquad (2.2.4)$$

Поэтому общий интеграл уравнения (2.2.3) можно записать в виде:

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=C \qquad (2.2.5)$$

или

$$\int_{x_0}^{x}\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\int_{y_o}^{y}\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=C. \qquad (2.2.6)$$

Если $x=a$ – решение уравнения $M_2(x)=0$ ($y=b$ – решение уравнения $N_1(y)=0$), то $x=a$ ($y\neq b$) и $y=b$ ($x\neq a$) – решения уравнения (2.2.3) (почему?).

Решения $x=a$ и $y=b$, и только они могут быть особыми для уравнения (2.2.3).

Если $M_2(x_0)\cdot N_1(y_0)\neq 0$, $|M_1(x_0)|+|N_2(y_0)|>0$, то решение уравнения (2.2.3) с начальными данными определяется формулой:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\int_{y_o}^{y}\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0.$$

Если $|M_1(x_0)|+|N_2(y_0)|=0$, то нельзя гарантировать ни существование, ни единственность решения с начальными данными x_0 и y_0 [4].

Заметим, что в начальной точке $(x_0=a,\ y_0=b)$ поле дифференциального уравнения (2.2.3) не определено. К этой точке примыкают лишь решения $x=a$ ($y\neq b$) и $y=b$ ($x\neq a$).

Уравнение с разделяющимися переменными может быть записано и в виде [6]:

$$y'=M(x)N(y).$$

Пример 2.2.2. Проинтегрировать уравнения:

а) (№ 138 [8]). $\left(x+2x^3\right)dx+\left(y+2y^3\right)dy=0$.

Общий интеграл находим по формуле (2.2.2):

$$\int\left(x+2x^3\right)dx+\int\left(y+2y^3\right)dy=C,$$

$\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{2}=C$, или, что то же самое $x^2+y^2+x^4+y^4=C_1$, где $C_1=2C$.

Ответ: $x^2+y^2+x^4+y^4=C_1$;

б) (№ 149 [8]). $dx-\sqrt{1-x^2}\,dy=0$.

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные, для чего умножим обе части уравнения на $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($x\neq\pm1$).

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-dy=0\to\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int dy=C\to\arcsin x-y=C$$ – общий интеграл уравнения.

Из формулы общего интеграла нельзя найти очевидные решения $x=\pm1\vee x\neq\pm1$ исходного уравнения ни при каком значении произвольной постоянной $C\in\left[-\infty,+\infty\right]$.

Ответ: $y=\arcsin x-C$; $x=\pm1$.

Найдем теперь решение уравнения $dx-\sqrt{1-x^2}\,dy=0$ с начальными данными $x_0=1$, $y_0=\frac{\pi}{2}$.

В формулу общего решения, найденную в предыдущем примере, подставим 1 вместо x и $\frac{\pi}{2}$ вместо y:

$$\arcsin 1-\frac{\pi}{2}=C\to\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=C\to C=0.$$

Искомым решением является функция $y=\arcsin x$. Однако через точку $\left(x_0 = 1, y_0 = \dfrac{\pi}{2}\right)$ проходит также и прямая $x = 1$, являющаяся интегральной.

Ответ: $y = \arcsin x$; $x = 1$.

Уравнение $dx - \sqrt{1-x^2}dy = 0$ является примером уравнения, имеющего не одно решение с одними и теми же начальными данными.

Задания для работы в аудитории

1. Проинтегрировать дифференциальные уравнения, а также найти решения, удовлетворяющие начальному условию в тех задачах, где указано начальное условие.

Ответы:

а) $tgydx - ctgxdy = 0$ $\quad (\sin y \cos x = C)$;

б) $x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$ $\quad ((1+x^2)(1+y^2) = C)$;

в) $\dfrac{dy}{dx} = xy^2 + 2xy$ $\quad \left(\dfrac{y}{y+2} = Ce^{x^2},\ y = -2\right)$;

г) $\dfrac{dx}{\sqrt{x}} + \dfrac{dy}{\sqrt{y}} = 0$ $\quad (\sqrt{x} + \sqrt{y} = C)$;

д) $\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = 0$ $\quad (\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + \ln|y+\sqrt{1+y^2}| = C)$;

е) $(1-x)dy - ydx = 0$; $M(0,1)$ $\quad \left(y = \dfrac{C}{x-1};\ y = \dfrac{1}{1-x}\right)$;

ж) $y' = e^{x-y}$ $\quad (e^y - e^x = C)$.

Задания для работы вне аудитории. Обязательный минимум

1. Проинтегрировать дифференциальные уравнения, а также найти решения, удовлетворяющие начальному условию в тех задачах, где указано начальное условие.

а) (№ 51 [3]). $xydx+(x+1)dy=0$ $\left(y=C(1+x)e^{-x};\ x=-1\right)$;

б) (№ 52 [3]). $\sqrt{y^2+1}dx=xydy$ $\left(\ln|x|=\sqrt{y^2+1}+C;\ x=0\right)$;

в) (№ 53 [3]). $(x^2-1)y'+2xy^2=0$; $y(0)=1$

$\left(y\left(\ln\left|x^2-1\right|+C\right)=1;\ y=0;\ y\left(\ln\left|x^2-1\right|+1\right)=1\right)$;

г) $y'=(x^2-x)(1+y^2)$ $\left(arctgy-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}=C\right)$;

д) $yy'=x\sqrt{1+y^2}$ $\left(2\sqrt{1+y^2}-x^2=C\right)$;

е) $y'=4x\sqrt{y-1}$ $\left(y=(x^2+C)^2+1;\ y=1\right)$;

д) (№ 61 [3]). $\frac{xdx}{dt}+t=1$ $\left(x^2+t^2-2t=C\right)$.

Задачи повышенного уровня сложности

1 (№ 164 [4]). Найти алгебраический общий интеграл уравнения, воспользовавшись теоремой: если $\varphi_1(x,y)=C_1$ – общий интеграл уравнения $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, то $\hat{O}(\varphi_1)=C_2$ также является общим интегралом этого уравнения, где $\hat{O}$ – любая непрерывно дифференцируемая функция. $\sqrt{1-y^2}dx+\sqrt{1-x^2}dy=0$ Ответ: $\left(\hat{O}(\varphi_1)=\sin\varphi_1,\ x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=C\right)$.

2 (№ 152 [4]). Найти решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y'=y\cos x,\ y(0)=1$. Ответ: $\left(y=e^{\sin x}\right)$.

3. Воспользовавшись утверждением: уравнение вида $y'=f(ax+by)$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z=ax+by$ $(z=z(x))$, проинтегрировать уравнения:

а) (№ 62 [3]). $y'=\cos(y-x)$ $\left(ctg\frac{y-x}{2}=x+C\right)$;

б) (№ 63 [3]). $y'-y=2x-3$ $\left(2x+y-1=Ce^x\right)$;

в) $y'=e^{x-y}$ $\left(e^y-e^x=C\right)$.

4 (№ 177 [4]). Найти кривые, у которых отрезок касательной, заклю-

ченный между осями координат, делится пополам в точке касания. Выделить кривую, проходящую через точку $M(2,3)$. $(xy = C;\ xy = 6)$.

5 (1.21 [5]). Решите уравнение $\frac{dy}{dx} = xy(y+2)$. $\left(\frac{y}{y+2} = Ce^{x^2},\ y = -2\right)$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение дифференциального уравнения первого порядка с разделенными переменными. Имеет ли такое уравнение особые решения?

2. Запишите уравнение с разделяющимися переменными и его общий интеграл.

3. В каком случае однозначно можно сказать, что уравнение с разделяющимися переменными не имеет особых решений?

4. Имеют ли уравнения особые решения:

а) $(x^2+5)(\cos y + 2)dx + y(3 - \sin x)dy = 0$;

б) $(x-1)(y^4+5)dx + (y+7)(\sin x + \cos 2x + 3)dy = 0$?

5. Докажите, что уравнение $y' = f(ax+by)$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными посредством замены $z = ax + by$ $(z = z(x))$, и решите уравнение $y' + 4y = 8x + 3$.

6. Решите следующие уравнения путем приведения к уравнению с разделяющимися переменными:

а) $y' + y = 2x + 1$;

б) $y' = \cos(x - y - 1)$.

7. Найдите общее решение уравнения $x^2 y' - \cos 2y = 1$, а затем решение $y = y(x)$, удовлетворяющее условию $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \frac{9\pi}{4}$.

Ответ: $y = arctg\left(1 - \frac{2}{x}\right) + 2\pi$.

8. Дано уравнение с разделяющимися переменными

$y(x+1)dx = x(y-1)dy$. Проинтегрируйте его и убедитесь в том, что существует форма записи общего интеграла, позволяющая найти все без исключения решения данного уравнения.

Литература

1. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений: учеб. пособие / Н.М. Матвеев. - 5-е изд., доп. – СПб. : Лань, 2003. – 832 с. (§3).
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения: [учебник для физических и физико-математических факультетов университетов] / Л.Э. Эльсгольц. – Изд. 8-е. – М. : URSS, 2013. – 309 с. (§2).
3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: Учеб. пособие для вузов / А.Ф. Филиппов. – М. : ЛКИ, 2011. – 240 с.
4. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учеб. пособие / Н.М. Матвеев. - 7-е изд.,доп. – СПб. : Лань, 2002. – 431 с.
5. Самойленко А.А. Дифференциальные уравнения: Практ.курс: Учеб. пособие для вузов / А.А. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. 3-е изд., перераб. – М.: Высшая школа, 2006. – 382 с.

Практическое занятие № 3. Тема. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения, приводящиеся к однородному

Различные задачи геометрии, в особенности те задачи, в которых требуется найти кривые, обладающие набором свойств, приводят к так называемому однородному дифференциальному уравнению. Однородное дифференциальное уравнение тесно связано с понятием однородной функции.

Определение 2.3.1. Функция $F(x,y)$ называется однородной степени m, если при любом допустимом t выполняется тождество

$$F(tx,ty) \equiv t^m F(x,y). \qquad (2.3.1)$$

Пример 2.3.1 [3]. Функция $F(x,y) = x\dfrac{\sqrt{x^4+y^4}}{x-y}\ln\dfrac{x}{y}$ является однородной второй степени, так как

$$F(tx,ty) = tx\frac{\sqrt{t^4x^4+t^4y^4}}{tx-ty}\ln\frac{tx}{ty} = t^2x\frac{\sqrt{x^4+y^4}}{x-y}\ln\frac{x}{y} = t^2F(x,y).$$

Пример 2.3.2 [3]. Функция $F(x,y) = x^\pi \sin\dfrac{x}{y} + y^\pi \cos\dfrac{x}{y}$ является однородной степени π, так как

$$F(tx,ty) = t^\pi x^\pi \sin\frac{tx}{ty} + t^\pi y^\pi \cos\frac{tx}{ty} = t^\pi\left(x^\pi \sin\frac{x}{y} + y^\pi \cos\frac{x}{y}\right) = t^\pi F(x,y).$$

Определение 2.3.2 [1, 5]. Дифференциальное уравнение вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \qquad (2.3.2)$$

где $M(x,y)$ и $N(x,y$ – однородные функции одной и той же степени m, называется однородным.

Пусть $F(x,y)$ – однородная функция степени m, тогда, полагая в тождестве (2.3.1) $t = 1/x$, получаем:

$$F(x,y) = x^m F(1, y/x). \qquad (2.3.3)$$

Учитывая тождество (2.3.3), легко убедиться в том, что однородное уравнение приводится к уравнению вида

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (2.3.4)$$

Именно поэтому некоторые авторы определяют однородное уравнение как уравнение вида (2.3.4) (см., например, [1, 2]).

Чтобы проинтегрировать однородное уравнение, рассуждаем следующим образом: ввиду того, что однородное дифференциальное уравнение первого порядка можно привести к уравнению (2.3.4), то, не уменьшая общности, рассмотрим (2.3.4).

В уравнении (2.3.4) сделаем замену

$$y = zx\,, \tag{2.3.5}$$

где z – новая искомая функция аргумента x:

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z\,. \tag{2.3.6}$$

С учетом (2.3.5) и (2.3.6) уравнение (2.3.4) запишем в виде:

$$x\frac{dz}{dx} + z = \varphi(z)\,. \tag{2.3.7}$$

Уравнение (2.3.7) есть уравнение с разделяющимися переменными. Разделив переменные, из (2.3.7) получим уравнение

$$\frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x} \to \ln|x| = \int \frac{dz}{\varphi(z) - z} + C_1 \to x = Ce^{\psi(z)}\,, \tag{2.3.8}$$

где $C = \pm e^{C_1}$, $\psi(z) = \int \dfrac{dz}{\varphi(z) - z}$.

(2.3.8) – общее решение уравнения (2.3.7).

Заменяя в (2.3.8) z на $\dfrac{y}{x}$, получаем общий интеграл однородного уравнения (2.3.4) в виде $x = Ce^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}$, C – постоянная интегрирования.

Замечание 2.3.1. Разделяя переменные в уравнении (2.3.7), мы могли потерять решение вида $z = k$, где k – корень уравнения $\varphi(z) - z = 0$.

Замечание 2.3.2. Из вида правой части уравнения (2.3.4) следует, что в начале координат $(0{,}0)$ однородное уравнение не задает, вообще говоря, определенного направления поля, так что через начало координат не проходит ни одна интегральная кривая.

Интегральные кривые однородного уравнения могут лишь примыкать к началу координат [1, с. 61].

Изучение поведения интегральных кривых однородного уравнения в окрестности точки $(0{,}0)$ проводится специальными методами, разработанными в качественной теории дифференциальных уравнений (см., например, [8-10]).

Пример 2.3.3. Решить уравнение $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy+y^2e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}$.

Преобразуем уравнение, разделив числитель и знаменатель дроби на x^2:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}e^{-\frac{x}{y}}.$$

Правая часть полученного уравнения является функцией вида $\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

Следовательно, исходное уравнение является однородным.

Положив $y=zx$, получим:

$$x\frac{dz}{dx}+z=z+z^2e^{-\frac{1}{z}}\to x\frac{dz}{dx}=z^2e^{-\frac{1}{z}}. \tag{2.3.9}$$

В уравнении (2.3.9) разделим переменные: $\dfrac{e^{\frac{1}{z}}dz}{z^2}=\dfrac{dx}{x}$.

Заметив, что $\dfrac{dz}{z^2}=-d\left(\dfrac{1}{z}\right)$, перепишем последнее уравнение в виде:

$$-e^{\frac{1}{z}}d\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя полученное уравнение, получим общий интеграл уравнения (2.3.9) в виде $e^{\frac{1}{z}}+\ln|x|=C$. Заменив z на $\dfrac{y}{x}$, окончательно получим общий интеграл исходного уравнения $e^{\frac{x}{y}}+\ln|x|=C$.

Отметим некоторые замечательные свойства интегральных кривых однородного уравнения. Для этого рассмотрим уравнение (2.3.4).

Полупрямые $y=kx$ $(x\neq 0)$ являются изоклинами однородного уравнения. В самом деле, в любой точке полупрямой $y=kx$ $(x\neq 0)$ правая часть уравнения (2.3.4) принимает постоянное значение $\varphi(k)$, k – const.

Рассмотрим произвольную интегральную кривую L_1 уравнения (2.3.4), отличную от полупрямой, примыкающей к началу координат $(0,0)$.

Если увеличить или уменьшить радиусы-векторы всех точек L_1 в одно и то же число раз, то получится кривая L_2, у которой направление касательных во всех точках будет такое же, как и в соответствующих точках L_1. Следовательно, кривая L_2 будет также интегральной кривой уравнения (2.3.4). Преобразование, о котором идет речь, не что иное, как преобразование подобия

$$x_1 = kx, \quad y_1 = ky \tag{2.310}$$

с центром подобия в точке $(0,0)$.

Таким образом, всякая кривая, полученная из интегральной кривой однородного уравнения при помощи преобразования подобия с центром в точке $(0,0)$, является также интегральной кривой этого уравнения.

Все интегральные кривые, входящие в состав общего решения (общего интеграла) $x = Ce^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}$, могут быть получены посредством преобразования (2.3.10), если они не являются полупрямыми, выходящими из начала координат.

Пусть

$$x = C_1 e^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)} \tag{2.3.11}$$

и

$$x = C_2 e^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}. \tag{2.3.12}$$

Две интегральные кривые, входящие в состав общего интеграла, и не являются полупрямыми, примыкающими к началу координат.

Умножим обе части (2.3.11) на k:

$$kx = kC_1 e^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}. \tag{2.3.13}$$

В (2.3.13) введем новые переменные по формуле (2.3.10):

$$x_1 = C_1 k e^{\psi\left(\frac{y_1}{x_1}\right)}. \tag{2.3.14}$$

Подставив $k = \dfrac{C_2}{C_1}$ в (2.3.14), получим $x_1 = C_2 \exp\left[\psi\left(\dfrac{y_1}{x_1}\right)\right]$ или, что то же самое, $x = C_2 \exp\left[\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)\right]$.

Таким образом, мы показали, что существует преобразование подобия (2.3.10), переводящее интегральную кривую (2.3.11) в (2.3.12).

Из приведенных рассуждений делаем вывод [1]:

1. Если интегральная кривая однородного уравнения, отличная от полупрямой, примыкающей к точке $(0,0)$ и, следовательно, заключенная на некотором промежутке изменения x между двумя полупрямыми $y = z_i x$, примыкает к точке $(0,0)$, то и все остальные интегральные кривые, заключенные между этими полупрямыми, примыкают к точке $(0,0)$.

2. Если некоторая кривая является интегральной для однородного уравнения, то и симметричная ей относительно начала координат кривая тоже является интегральной кривой.

3. Если одна из интегральных кривых однородного уравнения замкнута, то и все остальные интегральные кривые замкнуты.

Пример 2.3.4 [1]. Найти кривые, у которых отрезок *MT* касательной от точки касания до точки пересечения с осью *Ox* равен отрезку *OT* оси *Ox* (см. рис. 8).

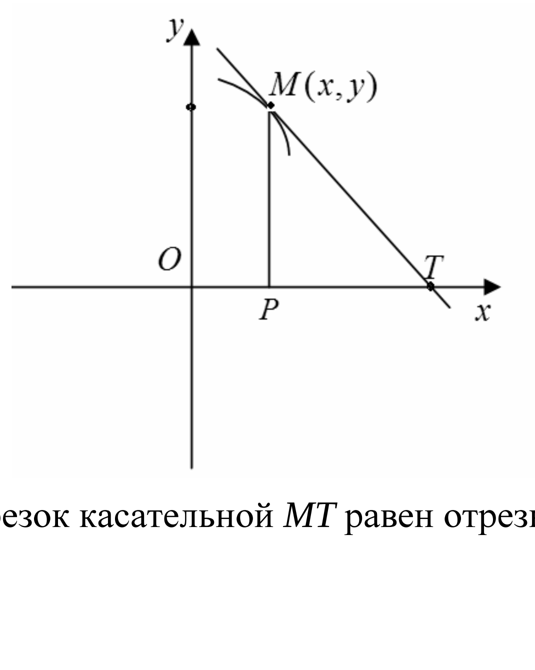

Рис. 8. Отрезок касательной *MT* равен отрезку *OT* оси *Ox*

Решение. Из ΔMTP имеем:

$$\text{ÌÒ} = \sqrt{y^2 + \left(\frac{y}{y'}\right)^2}, \quad \text{ÎÒ} = x - \frac{y}{y'}.$$

Условие MT=OT приводит к дифференциальному уравнению

$$\text{y}^2 + \left(\frac{y}{y'}\right)^2 = \left(x - \frac{y}{y'}\right)^2. \tag{2.3.15}$$

После несложных преобразований уравнение (2.3.15) преобразуется в уравнение

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}, \tag{2.3.16}$$

которое является однородным.

Введем замену переменной

$$y = zx, \tag{2.3.17}$$

$$y' = xz' + z. \tag{2.3.18}$$

Учитывая (2.3.17) и (2.3.18), из уравнения (2.3.16) получим уравнение $x\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z + z^3}{1 - z^2}$ – это уравнение с разделяющимися переменными. В результате разделения переменных получим уравнение:

$$\frac{1 - z^2}{z + z^3}dz = \frac{dx}{x}. \tag{2.3.19}$$

Разложим дробь $\dfrac{1 - z^2}{z + z^3}$ на элементарные дроби:

$$\frac{1 - z^2}{z(1 + z^2)} = \frac{A}{z} + \frac{Bz + C}{1 + z^2} \to \frac{1 - z^2}{z(1 + z^2)} = \frac{(A + B)z^2 + Cz + A}{z(1 + z^2)} \to \begin{cases} A = 1, \\ C = 0, \\ A + B = -1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = -2, \\ C = 0. \end{cases}$$

С учетом найденных значений коэффициентов A, B и C (2.3.19) запишем в виде:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dz}{z}-\frac{2zdz}{1+z^2}=\frac{dx}{x}\to\int\frac{dz}{z}-\int\frac{2zdz}{1+z^2}=\int\frac{dx}{x}\to\\
&\to\ln|z|-\ln\left(1+z^2\right)=\ln|x|+\ln|C|\to\frac{z}{1+z^2}=Cx.
\end{aligned}
\qquad (2.3.20)
$$

Заменив в формуле (2.3.20) z на $\frac{y}{x}$, получим:

$$
\frac{y}{x^2+y^2}=C\,, \qquad (2.3.21)
$$

где C –постоянная интегрирования.

Итак, формула (2.3.21) задает семейство интегральных кривых дифференциального уравнения (2.3.16), являющихся окружностями с центрами на оси Oy, касающимися оси Ox в начале координат $(0{,}0)$ (см. рис. 9).

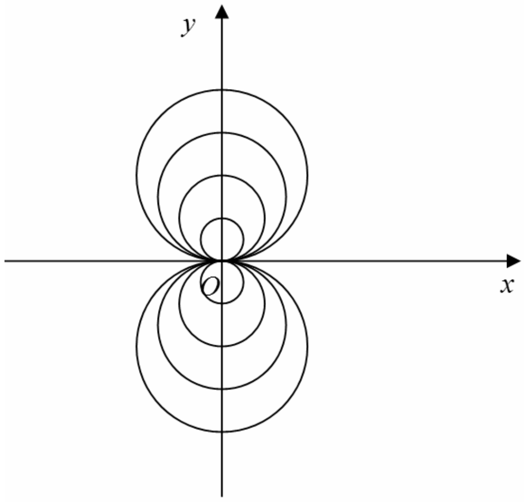

Рис. 9. Интегральные кривые – окружности с центрами на оси Oy, касающиеся оси Ox в точке $(0{,}0)$

Существуют дифференциальные уравнения первого порядка, не являющиеся однородными, но приводящиеся к однородному.

Так, уравнение

$$
\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \qquad (2.3.22)
$$

можно привести к однородному при соответствующих для этого ограничениях на коэффициенты a_i, b_i, c_i $(i=1,2)$.

Если $c_1 = c_2 = 0$, то уравнение (2.3.22) является однородным уравнением. Поэтому полагаем $|c_1| + |c_2| > 0$.

Пусть $\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0 \end{cases}$ – решение системы уравнений

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0, \end{cases} \tag{2.3.23}$$

разумеется, при условии

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0 . \tag{2.3.23}$$

В уравнении (2.3.22) сделаем замену переменных

$$\begin{cases} x = X + x_0, \\ y = Y + y_0. \end{cases} \tag{2.3.24}$$

В силу (2.3.24) уравнение (2.3.22) преобразуется в однородное уравнение

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y}\right). \tag{2.3.25}$$

Таким образом, если выполняется неравенство (2.3.23) при условии, что c_1 и c_2 одновременно не равны нулю, то дифференциальное уравнение (2.3.22) приводится к однородному заменой (2.3.24).

Пусть $c_1 \neq c_2$ и не выполняется условие (2.3.23), тогда

$$a_1 = k a_2, \quad b_1 = k b_2 . \tag{2.3.26}$$

В силу (2.3.26) уравнение (2.3.22) запишем в виде

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(a_2 x + b_2 y) + c_2}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right). \tag{2.3.27}$$

В уравнении (2.3.27) введем новую переменную по формуле

$$Z = a_2 x + b_2 y . \tag{2.3.28}$$

Из (2.3.28) следует

$$\frac{dz}{dx} = a_2 + b_2 f\left(\frac{kz + c_1}{z + c_2}\right). \tag{2.3.29}$$

Уравнение (2.3.29) можно переписать в виде

$$\frac{dz}{dx} = a_2 + b_2\varphi(z). \tag{2.3.30}$$

Полученное уравнение (2.3.30) является уравнением с разделяющимися переменными.

Итак, дифференциальное уравнение (2.3.22) интегрируется в квадратурах.

Пример 2.3.5. (№ 113 [6]). Проинтегрировать уравнение

$$(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0. \tag{2.3.31}$$

Перепишем (2.3.31) в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x + 4y - 6}{x + y - 3}. \tag{2.3.32}$$

Уравнение (2.3.32) имеет вид (2.3.22).

Так как $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, то уравнение (2.3.32) приводится к однородному.

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} -2x + 4y - 6 = 0, \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2 \end{cases}.$$

Преобразование $\begin{cases} x = X + 1, \\ y = Y + 2 \end{cases}$ приводит уравнение (2.3.32) к однородному

$$\frac{dY}{dX} = \frac{-2X + 4Y}{X + Y}. \tag{2.3.33}$$

В уравнении (2.3.33) сделаем замену $Y = zX$, где $z = z(X)$. Тогда $\frac{dY}{dX} = X\frac{dz}{dX} + z$, и уравнение (2.3.33) перейдет в уравнение

$$X\frac{dz}{dX} = \frac{-(z^2 - 3z + 2)}{1 + z}. \tag{2.3.34}$$

Уравнение (2.3.34) является уравнением с разделяющимися переменными. Разделив переменные, из (2.3.34) получим уравнение

$$\frac{(z+1)dz}{z^2-3z+2}=-\frac{dX}{X}. \tag{2.3.35}$$

Так как $z^2-3z+2=(z-1)(z-2)$, то

$$\frac{z+1}{z^2-3z+2}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2},$$

$$\frac{z+1}{z^2-3z+2}=\frac{(A+B)z-B-2A}{z^2-3z+2}\to\begin{cases}A+B=1,\\-B-2A=1\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}A=-2,\\B=3,\end{cases}$$

$$\int\frac{(z+1)dz}{z^2-3z+2}+\int\frac{dx}{x}=\ln|C|,$$

$$-2\int\frac{dz}{z-1}+3\int\frac{dz}{z-2}+\ln|x|=\ln|C|,$$

$$-2\ln|z-1|+3\ln|z-2|+\ln|x|=\ln|C|,$$

$$x(z-2)^3=C(z-1)^2. \tag{2.3.36}$$

В формуле (2.3.36) общего интеграла уравнения (2.3.34) заменим z на $\frac{Y}{X}$: $(Y-2X)^3=C(Y-X)^2$ – это общий интеграл уравнения (2.3.33). Заменив здесь X и Y по формулам $\begin{cases}X=x-1,\\Y=y-2,\end{cases}$ окончательно получаем общий интеграл $(y-2x)^3=C(y-x-1)^2$ уравнения (2.3.32).

В процессе разделения переменных в уравнении (2.3.34) мы считали, что $z\neq 1$, $z\neq 2$.

Легко проверить, что $\frac{Y}{X}=1$ – решение уравнения (2.3.33) или, что то же самое, $y=x+1$ – решение уравнения (2.3.32).

Решение $Y=2X$ не потеряно, так как оно находится из формулы общего интеграла уравнения (2.3.33).

Таким образом, решение уравнения (2.3.31) записывается в виде:

$$(y-2x)^3=C(y-x-1)^2;\quad y=x+1,$$

C – постоянная интегрирования.

Пример 2.3.6 (№ 115 [4]). Проинтегрировать уравнение

$$x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0\,. \qquad (2.3.37)$$

Выразим y' из уравнения (2.3.37):

$$y' = \frac{y - x + 1}{y - x + 2}\,. \qquad (2.3.38)$$

Легко видеть, что уравнение (2.3.38) приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой

$$z = y - x \to \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z+2}\,. \qquad (2.3.39)$$

Уравнение (2.3.39) является уравнением с разделяющимися переменными. После разделения переменных уравнение (2.3.39) приводится к уравнению $(z+2)dz + dx = 0$.

$$\int (z+2)dz + \int dx = C_1 \to \frac{(z+2)^2}{2} + x = C_1 \to (z+2)^2 + 2x = C\,, \qquad (2.3.40)$$

где $C = 2C_1$.

В формуле (2.3.40) заменим z на $(y - x)$. $(y - x + 2)^2 + 2x = C$ – общий интеграл уравнения (2.3.38).

Задания для работы в аудитории

1. Проинтегрировать уравнение.

Ответы:

а) $x(x+2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$ $\qquad (x^3 + 3x^2y - y^3 = C)$;

б) $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{x}$ $\qquad (x^2 - y^2 = C)$;

в) $\dfrac{dx}{2x^2 - 2xy + 2y^2} = \dfrac{dy}{y^2 - 4xy}$ $\qquad (2y^3 - 3xy^2 + 6x^2y = C)$;

г) $ydx + (y - x)dy = 0$ $\qquad (x = y(C - \ln|y|); y = 0)$;

д) $y^2 + x^2 y' = xyy'$ $\left(y = Ce^{\frac{y}{x}} \right)$;

е) $(x^2 + y^2)y' = 2xy$ $(y^2 - x^2 = Cy;\ y = 0)$;

ж) $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$ $(2x + y - 1 = Ce^{2y-x})$;

з) $(y + 2)dx = (2x + y - 4)dy$ $((y + 2)^2 = C(x + y - 1);\ y = 1 - x)$;

и) $y' = \dfrac{y}{x + y}$ $(x = y(C + \ln|y|);\ y = 0)$.

Задания для работы вне аудитории. Обязательный минимум

1. Найти общее решение уравнений:

Ответы:

а) (№ 3937 [7]). $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$ $(x^2 + y^2 = Cy)$;

б) (№ 3938 [7]). $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ $\left(y = \pm x\sqrt{2\ln|Cx|}\right)$;

в) (№ 3940 [7]). $y^2 + x^2 y' = xyy'$ $\left(e^{\frac{y}{x}} = Cy \right)$;

г) (№ 3942 [7]). $xy' = y \ln \dfrac{y}{x}$ $(y = xe^{1+Cx})$.

2. Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие данным начальным условиям:

Ответы:

а) (№ 3946 [7]). $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydy = 0;\ y(0) = 1$ $(y^3 = y^2 - x^2)$;

б) (№ 3947 [7]). $y' = \dfrac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2};\ y(1) = -1$ $(y = -x)$;

в) $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy};\ y(1) = 1$ $((x - 1)^2 + y^2 = 1)$.

3. Найти линию, у которой квадрат длины отрезка, отсекаемого касательной от оси ординат, равен произведению координат точки касания $\left(x = Ce^{\pm\sqrt{\frac{y}{x}}} \right)$.

Задания повышенного уровня сложности

1. Докажите, что уравнение $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $z = a_1x + b_1y + c_1$, если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$.

2. Составить дифференциальное уравнение кривых, каждая из которых обладает свойством: расстояние от начала координат до касательной к кривой равно абсциссе точки касания $\left(y' = \dfrac{-x^2 + y^2}{2xy}\right)$.

3. Пусть кривая L обладает свойством: отношение ординаты точки пересечения касательной к L в любой точке (x, y) с осью Oy к абсциссе точки пересечения нормали к L в той же точке (x, y) с осью Ox есть величина постоянная, равная k. Написать дифференциальное уравнение всех таких кривых $\left(\dfrac{y - xy'}{yy' + x} = k\right)$.

4. Является ли уравнение $\left(\dfrac{y - xy'}{yy' + x} = k\right)$, k – const, однородным?

5. Являются ли следующие уравнения однородными:

а) $(x^2 - 2xy + 5x)dx + (x^2 - 3y^2)dy = 0$;

б) $x^e \ln\dfrac{x}{y}dx + y^e \arcsin\dfrac{y}{x}dy = 0$;

в) $5x^\pi \sin\dfrac{y}{x}dx - 2y^\pi dy = 0$?

6. Определите степень однородности функций:

а) $f(x, y) = x^2 - y^2 - x\sqrt{x^2 + y^2}$;

б) $F(x,y)=\dfrac{x^5-4x^4y}{5x^5+8y^5}$.

7. Докажите, что любая прямая $y=kx$ $(x\neq 0)$ является изоклиной однородного дифференциального уравнения

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0.$$

8. Найдите общее решение уравнения $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}{\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)}$ $\left(Cx=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)$.

9 (№ 3949 [7]). Привести уравнение $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ к квадратуре (проинтегрировать). Какова должна быть функция $\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, чтобы общим решением данного уравнения было $y=\dfrac{x}{\ln|Cx|}$? $\left(\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)=-\dfrac{x^2}{y^2}\right)$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение однородной функции степени m.
2. Приведите примеры однородных функций степени m:

   a) $m=2$; b) $m=-3$; c) $m=\ln 2$; d) $m=\pi$; e) $m=e$.

3. Приведите однородное уравнение $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ к уравнению $\dfrac{dy}{dx}=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

4. Почему любой луч, исходящий из начала координат, является изоклиной однородного уравнения?

5. Объясните, почему однородное дифференциальное уравнение первого порядка интегрируется в квадратурах посредством подстановки $y=zx$.

6. Дифференциальное уравнение $y'=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ приводится к однородному уравнению при выполнении условий: $|c_1|+|c_2|>0$,

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Докажите это. Решите уравнение $(1+x)dx+(y-x)dy=0$.

Указание. Приведите к однородному уравнению заменой $x = X-1$, $y = Y-1$.

Ответ: $\ln\sqrt{y^2-xy+x^2}-\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2y-x}{x\sqrt{3}}=C$.

7. Приведите уравнение $y'=f\left(\frac{ax+by+c_1}{k(ax+by)+c_2}\right)$, $|c_1|+|c_2|>0$, к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $z=ax+by$.

Проинтегрируйте уравнение $(x+y)dx+(2x+2y+1)dy=0$.

Ответ: $x+y+1=Ce^{x+2y}$.

8. Решите уравнение $(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy=0$.

Ответ: $x+2y+3\ln|x+y-2|=C$.

9. Найдите решение вида $y=kx$ следующих уравнений:

	Ответы:
а) $y'=\frac{x+2y}{x}$	$(y=-x,\ x\neq 0)$;
б) $xdy-(y+x)dx=0$	(нет);
в) $y'=e^{\frac{x}{y}}-1$	$(y=0,\ x\neq 0)$.

Литература

1. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений: учеб. пособие / Н.М. Матвеев. - 5-е изд., доп. – СПб. : Лань, 2003. – 832 с.

2. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Классика и современность. Математика / И.Г. Петровский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 204 с.

3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального ис-

числения: Учебник. В 3-х тт. Том 1. 9-е, стер. издание. / Г.М. Фихтенгольц. – М. : Лань, 2009. – 608 с.

4. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: Учеб. пособие для вузов / А.Ф. Филиппов. – М. : ЛКИ, 2011. – 240 с.

5. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учеб. пособие / Н.М. Матвеев. - 7-е изд. доп. – СПб. : Лань, 2002. – 431 с.

6. Самойленко А.А. Дифференциальные уравнения: Практ.курс: Учеб. пособие для вузов / А.А. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. 3-е изд., перераб. – М.: Высшая школа, 2006. – 382 с.

7. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. / Г.Н. Берман. – СПб.: Лань, 2005. – 604 с.

8. Андронов А.А. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1966. – 568 с.

9. Андронов А.А. Теория колебаний (2-е издание) Учебное пособие, физика/ А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М.: ЁЁ Медиа, 2012. – 916 с.

10. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. / В.В. Немыцкий, В.В. Степанов. – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004. – 456 с.

Практическое занятие № 4. Тема: Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 2.4.1. Дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным, если оно может быть представлено в виде

$$y' + f(x)y = g(x). \qquad (2.4.1)$$

При этом функции $f(x)$ и $g(x)$ предполагаются непрерывными.

Уравнение (2.4.1) называется линейным, так как оно линейно относительно искомой функции и ее производной.

Если уравнение нельзя представить в виде (2.4.1), то оно называется нелинейным. Например, уравнение $x^3 y' = \cos xy - e^x \sin x$ является линейным, так как его можно представить в виде (2.4.1). Действительно, если разделить обе части его на x^3, получим $y' - \frac{\cos x}{x^3} y = -\frac{e^x \sin x}{x^3}$, где

$f(x) = -\frac{\cos x}{x^3}$ и $g(x) = -\frac{e^x \sin x}{x^3}$.

Уравнение $y' = y - y^2 + 5\sin x$ является нелинейным.

Если $g(x) \equiv 0$, то уравнение

$$y' + f(x)y = 0 \qquad (2.4.2)$$

называется однородным, соответствующим неоднородному уравнению (2.4.1) (левая часть уравнения (2.4.2) суть однородная линейная функция).

Замечание 2.4.1. Следует различать понятия: однородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка и однородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка, соответствующее неоднородному линейному дифференциальному уравнению первого порядка.

Пример 2.4.1.

1) $y' = \frac{x^2 + 5xy - y^2}{x^2 + 3y^2}$ – однородное уравнение, но, очевидно, нелинейное.

2) $y' + (x^2 + 5x - 6)y = 0$ – линейное однородное уравнение, соответ-

ствующее неоднородному уравнению $y' + (x^2 + 5x - 6)y = x^2 e^x$.

Очевидно, уравнение $y' + (x^2 + 5x - 6)y = 0$ невозможно привести к уравнению $y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, где $\varphi(u)$ – однородная функция нулевой степени.

Однородное уравнение (2.4.2), соответствующее неоднородному уравнению (2.4.1), является уравнением с разделяющимися переменными.

Разделив переменные в уравнении (2.4.2), получим

$$\frac{dy}{y} = -f(x)dx . \tag{2.4.3}$$

Интегрируя (2.4.3), получим общее решение в виде:

$$y = Ce^{-\int f(x)dx} , \tag{2.4.4}$$

где C – постоянная интегрирования.

Разделяя переменные в уравнении (2.4.2), мы могли потерять лишь решение $y = 0$, но оно получается из формулы (2.4.4) при $C = 0$.

Следовательно, все решения уравнения (2.4.2) определяются формулой (2.4.4).

Пусть $y = y_1(x)$ – какое-нибудь нетривиальное* решение уравнения (2.4.2), тогда решением этого уравнения является функция $y = cy_1(x)$, где c – некоторая постоянная.

Следуя [2], отметим, что общее решение уравнения (2.4.2) задается формулой $y = cy_1(x)$, где $y_1(x)$ – любое нетривиальное решение уравнения (2.4.2), c – постоянная интегрирования.

Таким образом, **для построения общего решения однородного уравнения, соответствующего неоднородному дифференциальному уравнению первого порядка (2.4.2), достаточно знать какое-нибудь ненулевое частное решение (2.4.2).**

---

* не являющийся тривиальным, очевидным

В таком случае говорят, что дифференциальное уравнение интегрируется без квадратур (операции вычисления неопределенного интеграла).

Пример 2.4.2. Можно проверить, что функция $y = e^{-\frac{3x^2}{2}}$ – решение уравнения

$$y' + 3xy = 0. \qquad (2.4.5)$$

Поэтому общее решение уравнения (2.4.5) можно записать в виде $y = Ce^{-\frac{3x^2}{2}}$, где C – постоянная интегрирования.

Покажем, что линейное дифференциальное уравнение (2.4.1) всегда интегрируется в квадратурах. Для этого воспользуемся утверждением [4]: линейное дифференциальное уравнение (2.4.1) сохраняет свой вид при любой линейной замене искомой функции

$$y = \alpha(x)z + \beta(x), \qquad (2.4.6)$$

где z – новая искомая функция аргумента x, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

Пусть $y = y_1(x)$ – ненулевое решение уравнения (2.4.1), то есть имеет место тождество:

$$y_1' + f(x)y_1(x) \equiv g(x). \qquad (2.4.7)$$

Согласно приведенному выше утверждению введем новую функцию z по формуле

$$y = y_1 + z \qquad (2.4.8)$$

(здесь $\alpha(x) \equiv 1$, $\beta(x) \equiv y_1(x)$).

Из (2.4.8) получим

$$y' = y_1' + z'. \qquad (2.4.9)$$

Подставив (2.4.8) и (2.4.9) в уравнение (2.4.1), получим

$$y_1' + z' + f(x)y_1 + f(x)z = g(x). \qquad (2.4.10)$$

С учетом тождества (2.4.7) уравнение (2.4.10) запишем в виде:

$$z' + f(x)z = 0. \qquad (2.4.11)$$

Уравнение (2.4.11) – однородное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению (2.4.1). Найдем общее решение уравнения (2.4.11). Для этого его перепишем в виде

$$\frac{dz}{z} = -f(x)dx. \tag{2.4.12}$$

Интегрируя обе части (2.4.12) получим

$$\ln|z| = -\int f(x)dx + C. \tag{2.4.13}$$

Из (2.4.13) получаем общее решение уравнения (2.4.11):

$$z = Ce^{-\int f(x)dx}. \tag{2.4.14}$$

Учитывая (2.4.14), запишем уравнение (2.4.8) в виде:

$$y = y_1(x) + Ce^{-\int f(x)dx}. \tag{2.4.15}$$

Формула (2.4.15) содержит все без исключения решения уравнения (2.4.1).

Тем самым установлено важное свойство, присущее линейному дифференциальному уравнению общего вида: если известно одно нетривиальное частное решение неоднородного уравнения (2.4.1), то его общее решение можно получить посредством одной квадратуры.

Пример 2.4.3. Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция $y_1(x) = x + 6$ представляет собой частное решение уравнения

$$y' + 3y = 3x + 19. \tag{2.4.16}$$

Найдем общее решение однородного уравнения $y' + 3y = 0$, соответствующее неоднородному уравнению (2.4.16), по формуле (2.4.14):

$$z(x) = Ce^{-3\int dx}, \quad z(x) = Ce^{-3x}, \tag{2.4.17}$$

где C – постоянная интегрирования.

Общее решение уравнения (2.4.16) с учетом (2.4.17) запишем в виде:

$$y = x + 6 + Ce^{-3x}.$$

Рассмотрим три метода интегрирования уравнения (2.4.1).

1. Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа).

Воспользуемся формулой (2.4.4) общего решения однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению

$$y = Ce^{-\int f(x)dx}.$$

Существо метода вариации произвольной постоянной состоит в том, что общее решение уравнения (2.4.1) ищут в виде:

$$y = C(x)e^{-\int f(x)dx}, \tag{2.4.18}$$

то есть полагают в формуле (2.4.4) $C = C(x)$.

Из (2.4.18) получаем:

$$y' = C'(x)e^{-\int f(x)dx} - C(x)f(x)e^{-\int f(x)dx}. \tag{2.4.19}$$

Подставляя вместо y и y' выражения из (2.4.18) и (2.4.19) в уравнение (2.4.1), получим:

$$\begin{gathered} C'(x)e^{-\int f(x)dx} - C(x)f(x)e^{-\int f(x)dx} + C(x)f(x)e^{-\int f(x)dx} = g(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow C'(x) = g(x)e^{\int f(x)dx}. \end{gathered} \tag{2.4.20}$$

Решение уравнения (2.4.20) запишется в виде:

$$C(x) = \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx + C_1. \tag{2.4.21}$$

Возвращаясь к формуле (2.4.18), с учетом (2.4.21) получаем общее решение уравнения (2.4.1):

$$y = \left(C_1 + \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx\right)e^{-\int f(x)dx}, \tag{2.4.22}$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

2. Метод Бернулли

Решение уравнения (2.4.1) будем искать в виде:

$$y = u(x)v(x). \tag{2.4.23}$$

Найдем производную функции (2.4.23):

$$y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \tag{2.4.24}$$

С учетом (2.4.23) и (2.4.24) уравнение (2.4.1) перепишем в виде:

$$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)+f(x)u(x)v(x)=g(x). \qquad (2.4.25)$$

Подберем одну из функций $u(x)$ и $v(x)$, например, $u(x)$, так, чтобы она была решением однородного уравнения (2.4.2), соответствующего неоднородному уравнению (2.4.1). Переписав уравнение (2.4.25) в виде:

$$v(x)[u'(x)+f(x)u(x)]+u(x)v'(x)=g(x)$$

и учитывая, что выражение в квадратных скобках тождественно равно нулю $\left(u(x)=e^{-\int f(x)dx}\right)$, получим:

$$v'(x)=g(x)e^{\int f(x)dx}. \qquad (2.4.26)$$

Решение уравнения (2.4.26) имеет вид:

$$v(x)=\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx+C, \qquad (2.4.27)$$

Учитывая (2.4.27) и то, что $u(x)=e^{-\int f(x)dx}$, функцию (2.4.23) запишем окончательно в виде $y=(C+\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx)e^{-\int f(x)dx}$. Это и есть общее решение уравнения (2.4.1).

3. Метод интегрирующего множителя

Умножим обе части уравнения (2.4.1) на $e^{\int f(x)dx}$:

$$y'e^{\int f(x)dx}+f(x)ye^{\int f(x)dx}=g(x)e^{\int f(x)dx}. \qquad (2.4.28)$$

Левая часть уравнения (2.4.28) есть производная функция $ye^{\int f(x)dx}$, то есть

$$\frac{d\left(ye^{\int f(x)dx}\right)}{dx}=g(x)e^{\int f(x)dx}. \qquad (2.4.29)$$

Интегрируя (2.4.29), получаем:

$$ye^{\int f(x)dx}=\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx+C. \qquad (2.4.30)$$

Умножив обе части (2.4.30) на $e^{-\int f(x)dx}$, получим общее решение (2.4.1):

$$y=\left(C+\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx\right)e^{-\int f(x)dx},$$

где C – постоянная интегрирования.

Пример 2.4.4. Решим уравнение [4]

$$\frac{dy}{dx}+y\cos x=e^{-\sin x}. \qquad (2.4.31)$$

1-ый способ. Решение уравнения (2.4.31) методом вариации произвольной постоянной.

Решаем уравнение: $\frac{dy}{dx}+y\cos x=0.$

$$\begin{gathered}\frac{dy}{dx}+y\cos x=0\to\frac{dy}{y}=-\cos x dx\to\\ \to\ln|y|=-\sin x+\ln|C|\to y=Ce^{-\sin x}\end{gathered}. \qquad (2.4.32)$$

Полагаем в формуле (2.4.32) общего решения однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (2.4.31), $C=C(x)$, то есть будем искать решения уравнения (2.4.31) в виде

$$y=C(x)e^{-\sin x}. \qquad (2.4.33)$$

Из (2.4.33) следует

$$y'=C'(x)e^{-\sin x}-C(x)\cos xe^{-\sin x}. \qquad (2.4.34)$$

Подставив в уравнение (2.4.31) вместо y, y' их выражения из (2.4.33) и (2.4.33) соответственно, получим

$$C'(x)e^{-\sin x}-C(x)\cos xe^{-\sin x}+C(x)\cos xe^{-\sin x}=e^{-\sin x}. \qquad (2.4.35)$$

После простейших преобразований уравнение (2.4.35) запишется в виде

$$C'(x)=1,$$

тогда $C(x)=x+C_1$.

Функция (2.4.33) после замены $C(x)$ выражением $x+C_1$ примет вид:

$$y=(x+C_1)e^{-\sin x},$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

2-ой способ. Решим уравнение (2.4.31) методом Бернулли, то есть будем искать решение уравнения в виде (2.4.23). Подставим в уравнение (2.4.31) вместо y и y' их выражения из (2.4.23) и (2.4.24) соответственно, запишем полученное уравнение в виде:

$$v(x)[u'(x)+u(x)\cos x]+u(x)v'(x)=e^{-\sin x}. \qquad (2.4.36)$$

Подберем $u(x)$ таким образом, чтобы выполнялось равенство $u'(x)+u(x)\cos x=0$, то есть чтобы функция $u(x)$ была решением однородного уравнения $\dfrac{dy}{dx}+y\cos x=0$. Итак, полагаем, что

$$u(x)=e^{-\sin x}. \qquad (2.4.37)$$

Подставляя (2.4.37) в уравнение (2.4.36), получим:

$$v'(x)e^{-\cos x}=e^{-\cos x}\to v'(x)=1\to v(x)=x+C. \qquad (2.4.38)$$

Подставляя (2.4.38) в (2.4.23), получаем общее уравнение (2.4.31) в виде:

$$y=(x+C)e^{-\sin x},$$

где C – постоянная интегрирования.

3-ий способ. Умножим обе части уравнения (2.4.31) на $e^{\int\cos x dx}=e^{\sin x}$:

$$y'e^{\sin x}+ye^{\sin x}\cos x=1. \qquad (2.4.39)$$

Левая часть уравнения (2.4.39) есть производная функции $ye^{\sin x}$, то есть $\dfrac{d\left(ye^{\sin x}\right)}{dx}=1\to ye^{\sin x}=x+C\to y=(x+C)e^{-\sin x}$ – общее решение уравнения (2.4.31), где C – постоянная интегрирования.

Пример 2.4.5 [7]. Решить уравнение

$$y'=\frac{y}{3x-y^2}. \qquad (2.4.40)$$

Так как уравнение (2.4.40) не линейно относительно y, то оно не является линейным дифференциальным уравнением. Поэтому рассмотрим перевернутое уравнение

$$\frac{dx}{dy}=\frac{3x}{y}-y\,. \qquad (2.4.41)$$

Считая x искомой функцией, а y – аргументом, видим, что уравнение (2.4.41) уже является линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Решим его методом Бернулли, положив

$$x=u(y)v(y)\,. \qquad (2.4.42)$$

Тогда

$$x'=u'(y)v(y)+u(y)v'(y)\,. \qquad (2.4.43)$$

Согласно (2.4.42) и (2.4.43) уравнение (2.4.41) примет вид:

$$u'(y)v(y)+u(y)v'(y)-\frac{3u(y)}{y}v(y)=-y\,. \qquad (2.4.44)$$

Перепишем (2.4.44) в виде:

$$v(y)\left(u'(y)-\frac{3u(y)}{y}\right)+u(y)v'(y)=-y\,. \qquad (2.4.45)$$

Подберем функцию $u(y)$ так, чтобы она была решением уравнения

$$\frac{dx}{dy}-\frac{3x}{y}=0\,. \qquad (2.4.46)$$

После разделения переменных уравнение (2.4.46) преобразуется в уравнение

$$\frac{dx}{x}=3\frac{dy}{y}\to \ln|x|=\ln|y|^3+\ln|C_1|\to x=C_1y^3\,.$$

При $C_1=1$ получаем $x=y^3$. Поэтому примем

$$u(y)=y^3\,. \qquad (2.4.47)$$

Подставим функцию (2.4.47) в (2.4.45):

$$v'(y)y^3=-y\to v'(y)=-y^{-2}\to v\,(y)=\frac{1}{y}+C\,. \qquad (2.4.48)$$

В силу (2.4.47) и (2.4.48) функция (2.4.42) примет вид:

$$x = \left(C + \frac{1}{y} \right) y^3 \to x = Cy^3 + y^3.$$

Ответ: $x = Cy^3 + y^2$; $y = 0$.

Существуют дифференциальные уравнения первого порядка, которые могут быть сведены к линейным. Примером такого уравнения является уравнение Бернулли

$$y' + f(x)y = g(x)y^m, \tag{2.4.49}$$

где $m \in \boldsymbol{R}$.

Как и в уравнении (2.4.1), $f(x)$ и $g(x)$ считаются непрерывными в уравнении Бернулли.

Если $m = 0$ или $m = 1$, то уравнение (2.4.49) является линейным, поэтому априори полагаем, что $m \neq 0;1$.

Полагая $y \neq 0$, разделим обе части уравнения (2.4.49) на y^m:

$$y^{-m} y' + y^{1-m} f(x) = g(x). \tag{2.4.50}$$

Умножим обе части уравнения (2.4.50) на $(1-m)$:

$$(1-m) y^{-m} y' + (1-m) y^{1-m} f(x) = g(x)(1-m). \tag{2.4.51}$$

Заметим, что первое слагаемое в левой части (2.4.51) есть не что иное, как производная функции y^{1-m}. Поэтому разумно ввести новую переменную z по формуле:

$$z = y^{1-m}. \tag{2.4.52}$$

Дифференцируя по x функцию (2.4.52), получим

$$z' = (1-m) y^{-m} y'. \tag{2.4.53}$$

Учитывая (2.4.52) и (2.4.53), перепишем уравнение (2.4.51) в виде:

$$z' + (1-m) f(x) z = g(x)(1-m). \tag{2.4.54}$$

Уравнение (2.4.54) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка, где искомой функцией является $z = z(x)$.

Тем самым доказано, что уравнение Бернулли, которое имеет очевидное решение $y = 0$, интегрируется в квадратурах.

Пример 2.4.6. Привести уравнение Бернулли к линейному уравнению, а затем решить его:

$$y' + 2y = y^2 e^x .$$

Разделим обе части уравнения на y^2:

$$y^{-2} y' + 2y^{-1} = e^x .$$

В полученном уравнении введем новую искомую функцию z по формуле $z = y^{-1}$. Тогда $z' = -y^{-2} y'$ и уравнение примет вид:

$$-z' + 2z = e^x ,$$

или, что то же самое, $z' - 2z = -e^x$ – это линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Решим полученное уравнение методом вариации произвольной постоянной.

Решаем однородное уравнение, соответствующее неоднородному, $z' - 2z = 0$. Легко увидеть, что $z = e^{2x}$ – нетривиальное частное решение однородного уравнения, поэтому $z = Ce^{2x}$ – общее решение однородного уравнения. Полагаем $C = C(x)$, то есть

$$z = C(x)e^{2x} . \tag{2.4.55}$$

Тогда

$$z' = C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^x . \tag{2.4.56}$$

В силу (2.4.55) и (2.4.56) неоднородное уравнение $z' - 2z = -e^x$ примет вид:

$$C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x} - 2C(x)e^{2x} = -e^x . \tag{2.4.57}$$

Из (2.4.57) следует уравнение $C'(x) = -e^{-x}$, откуда

$$C(x) = \int e^{-x} d(-x) = e^{-x} + C_1 . \tag{2.4.58}$$

Подставим в формулу (2.4.55) вместо $C(x)$ выражение из (2.4.58):

$$z = \left(C_1 + e^{-x}\right)e^{2x} ,$$

то есть

$$z = C_1 e^{2x} + e^x . \qquad (2.4.59)$$

C_1 – постоянная интегрирования.

Учитывая, что $z = \frac{1}{y}$, получаем общий интеграл уравнения Бернулли:

$$\frac{1}{y} = C_1 e^{2x} + e^x .$$

Так как очевидное решение $y = 0$ уравнения Бернулли нельзя получить из формулы общего интеграла ни при каком вещественном значении C_1, то в ответе записываем:

$$\frac{1}{y} = C_1 e^{2x} + e^x ; \quad y = 0 .$$

Замечание 2.4.2. Уравнение

$$y' + f(x)y + g(x)y^2 = h(x), \qquad (2.4.60)$$

где $f(x), g(x), h(x)$ – непрерывные функции, называется уравнением Риккати.

В общем случае, как показал Лиувилль в 1841 г., уравнение Риккати не интегрируется в квадратурах [1, с. 37]. Однако в исключительных случаях это уравнение может быть сведено к тем уравнениям, которые интегрируются в квадратурах [2]. Например, если известно одно нетривиальное частное решение $y_1(x)$ уравнения (2.4.60), то заменой искомой функции $y = y_1 + z$, где $z = z(x)$ – новая искомая функция, уравнение Риккати можно привести к уравнению Бернулли, а оно, как нам уже известно, интегрируется в квадратурах.

Более подробные сведения об уравнении Риккати можно найти в книгах [2, 5].

Задания для работы в аудитории

1. Проинтегрировать уравнения.

Ответы:

а) (№ 138 [7]). $y' + ytgx = \sec x$ ($y = \sin x + C\cos x$);

б) (№ 139 [7]). $(xy + e^x)dx - xdy = 0$ ($y = e^x(\ln|x| + C)$; $x = 0$);

в) (№ 140 [7]). $x^2y' + xy + 1 = 0$ $(xy = C - \ln|x|)$;

г) (№ 145 [7]). $(x + y^2)dy = ydx$ $(x = y^2 + Cy;\ y = 0)$.

Указание. Рассмотрите данное уравнение как уравнение относительно искомой функции $x = x(y)$. Почему уравнение не является линейным относительно $y = y(x)$?

2. Найти общее решение уравнения с помощью интегрирующего множителя.

Ответы:

а) (№ 246 [3]). $y' - \frac{1}{x}y = x$ $(y = x(C + x))$;

б) (№ 247 [3]). $y' - \frac{2}{x}y = x^3$ $\left(y = x^2\left(C + \frac{x^2}{2}\right)\right)$.

3. Проинтегрировать уравнение, пользуясь формулой общего решения.

Ответы:

а) $y' + tgy = \frac{x}{\cos y}$ $(\sin y = Ce^{-x} + x - 1)$.

Указание. Умножить обе части уравнения на $\cos y$ и положить $z = \sin y$;

б) $y' - y\sin x = \sin x\cos x$ ($y = Ce^{-\cos x} - \cos x + 1$).

Задания для работы вне аудитории. Обязательный минимум

1. Найти общее решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Ответы:

а) (№ 1 [8]). $y' - 4y = e^{2x}$ $\left(y = Ce^{4x} - \frac{1}{2}e^{2x}\right)$;

б) (№ 2 [8]). $y' - \frac{xy}{x^2+1} = x$ $\left(y = 1 + x^2 + C\sqrt{1+x^2}\right)$;

в) (№ 3 [8]). $y' + \frac{xy}{1-x^2} = 1$ $\left(y = \sqrt{1+x^2}\,(\arcsin x + C)\right)$;

г) (№ 4 [8]). $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{2x}{\cos x}$ $\left(y = \frac{x^2 + C}{\cos x}\right)$.

2. Найти решение уравнений с начальными данными.

Ответы:

а) (№ 256 [3]). $xy' = x + 2y;\ x_0 = 0;\ y_0 = 0$. $(y = Cx^2 - x (x \neq 0); x = 0 (y \neq 0))$;

б) (№ 258 [3]). $xy' = x - y;\ x_0 = 0;\ y_0 = 0$. $(y = \frac{1}{2}x\ (x \neq 0);\ x = 0\ (y \neq 0))$.

3. Проинтегрировать уравнение Бернулли.

Ответы:

а) (№ 10 [8]). $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$ $\left(y = x^4\left(\ln\sqrt{x} + C\right)^2\right)$;

б) (№ 9 [8]). $yy' + y^2 + 4x(x+1) = 0$ $\left(4x^2 + y^2 = Ce^{-2x}\right)$.

Можно ли проинтегрировать в квадратурах следующие уравнения? Ответ обоснуйте.

а) $y' + \left(x^2 + 5x\right)y = xy^5$; б) $yy' + y^2 \sin x = \mathrm{tg}\,x$;

в) $y' = \frac{y^2+1}{2x}$; г) $y' \sin x + y \cos x = \sin x^2$.

4. Составьте (придумайте) нелинейные и линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Задания повышенного уровня сложности

1. Докажите, что уравнение $y' + ay = e^{mx}$ имеет частное решение вида $y = be^{mx}$, если $m \neq -a$ и $y = bxe^{mx}$, если $m = -a$ (№ 240 [3]).

2. (№ 249 [3]). Докажите, что уравнение $y' + ay = p(x)$, где $a \in R \setminus \{0\}$, $p(x)$ – многочлен степени m, имеет частное решение вида $y = Q(x)$, где $Q(x)$ – многочлен той же степени m.

3. Решите уравнение $y' + y = x + 1$, найдя предварительно частное решение.

Ответ: $y = x + Ce^{-x}$.

4. Пусть i, U, R – соответственно сила тока, напряжение и сопротивление электрической цепи в момент времени t, а L – коэффициент самоиндукции. Тогда, как известно из курса физики, $U = iR + L\frac{di}{dt}$ ([8], с. 61).

Считая в данном уравнении U, R, L постоянными, найти зависимость силы тока от времени t.

Ответ: $i = \frac{U}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$

5. Пусть $y = y(x)$ – нетривиальное решение однородного уравнения (2.4.2), соответствующего неоднородному уравнению (2.4.1). Докажите, что $y = Cy(x)$ – общее решение уравнения (2.4.2).

6. Пусть $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ – два частных решения уравнения (2.4.1). Тогда общее решение этого уравнения можно получить без квадратур. Докажите это.

7 (№ 268 [3]). Найдите y из уравнения $x\int\limits_0^x y dx = (x+1)\int\limits_0^x xy dx$.

Ответ: $y = \frac{Ce^{-\frac{1}{x}}}{x^3}$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение линейного дифференциального уравнения первого порядка.

2. Укажите, какие из следующих уравнений являются линейными:

а) $xy' + \left(x^2 - \sin x\right)y = x^5$;

б) $y' + (\sin y - \cos y)xy = \operatorname{tg} x$;

в) $y' = \dfrac{y}{x - y^3}$;

г) $xdy - (y+1)dx$.

Обоснуйте ответ.

3. Запишите уравнение Бернулли. Докажите, что оно интегрируется в квадратурах. Проинтегрируйте уравнение: $y - xy' = y^2$.

Ответ: $y = \dfrac{x}{x+c}$; $y = 0$.

4. Пусть в уравнении (2.4.1) $g(x) = \alpha f(x)$, где $\alpha - \mathrm{const}$. Найдите общее решение уравнения (2.4.1).

5. Какие методы решения уравнения (2.4.1) вам известны? Охарактеризуйте каждый из них.

6 (№ 180 [4]). Решить уравнение Бернулли $xy' + y = y^2 \ln x$ двумя способами:

а) с помощью замены $z = y^{-1}$;

б) найдя его в виде произведения $y = u(x)v(x)$.

Ответ: $\dfrac{1}{y} = Cx + \ln x + 1$; $y = 0$.

Литература

1. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Классика и современность. Математика / И.Г. Петров-

ский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 204 с.

2. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений: учеб. пособие / Н.М. Матвеев. - 5-е изд., доп. – СПб. : Лань, 2003. – 832 с.

3. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учеб. пособие / Н.М. Матвеев. - 7-е изд.,доп. – СПб. : Лань, 2002. – 431 с.

4. Самойленко А.А. Дифференциальные уравнения: Практ. курс: Учеб. пособие для вузов / А.А. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. 3-е изд., перераб. – М.: Высшая школа, 2006. – 382 с.

5. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н.П. Еругин. – Минск: Наука и техника, 1979. – 744 с.

6. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Оникс (Медиа), 2012. – 424 с.

7. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: Учеб. пособие для вузов / А.Ф. Филиппов. – М. : ЛКИ, 2011. – 240 с.

8. Гусак А.А. Математический анализ и дифференциальные уравнения. Примеры и задачи / А.А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2003. – 416 с.

Практическое занятие № 5. Тема. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель дифференциального уравнения первого порядка

Многие дифференциальные уравнения, в том числе некоторые из ранее рассмотренных нами, сводятся к дифференциальному уравнению вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0\,, \tag{2.5.1}$$

левая часть которого представляет собой полный дифференциал некоторой функции $F(x,y)$. Такое уравнение называется уравнением в полных дифференциалах.

Функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ будем считать непрерывными вместе с частными производными $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ в некоторой односвязной области $G \subset R^2$[1].

Пусть уравнение (2.5.1) является уравнением в полных дифференциалах. Тогда по определению существует функция $F(x,y)$ такая, что

$$dF(x,y) \equiv M(x,y)dx + N(x,y)dy \,. \qquad (2.5.2)$$

В силу равенства (2.5.2) уравнение (2.5.1) примет вид:

$$dF(x,y) = 0 \,. \qquad (2.5.3)$$

Если $y = y(x)$ – решение уравнения (2.5.1), то $dF(x, y(x)) \equiv 0$, следовательно,

$$F(x,y) = C \,, \qquad (2.5.4)$$

где C – произвольная постоянная.

Обратно, если некоторая функция $y = y(x)$ обращает в тождество уравнение (2.5.4) при некотором значении $C = C_0$, то, дифференцируя это равенство, получим:

$$dF(x, y(x)) \equiv 0 \,.$$

Следовательно, соотношение (2.5.4) есть общий интеграл уравнения (2.5.1).

Пример 2.5.1. Уравнение

$$xdx + ydy = 0 \qquad (2.5.5)$$

есть уравнение в полных дифференциалах, так как его левая часть является полным дифференциалом функции:

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \,.$$

В самом деле,

$$dF(x,y) = F'_x(x,y)dx + F'_y(x,y)dy \,. \qquad (2.5.6)$$

---

[1] Область $G \subset R^2$ называется односвязной, если каков бы ни был простой контур $\tilde{A} \subset G$ ограниченная область D, границей которой является $\tilde{A}$, содержится в G. Образно говоря, односвязность области G означает, что G не имеет «дыр» [1].

Подставляя в правую часть (2.5.6) вместо $F'_x(x,y)$ и $F'_y(x,y)$ x и y соответственно, получаем:

$$dF(x,y) = xdx + ydy\ .$$

Итак, общий интеграл уравнения (2.5.5) имеет вид:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$$

или, что то же самое, $x^2 + y^2 = C$ $(C = 2C_1)$.

Справедливо утверждение [7]: для того, чтобы уравнение (2.5.1) было уравнением в полных дифференциалах необходимо и достаточно выполнения тождества

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\ . \tag{2.5.7}$$

Изложим процедуру нахождения функции $F(x,y)$, удовлетворяющей равенству (2.5.2), или, что то же самое, равенствам

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)\ , \tag{2.5.8}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)\ . \tag{2.5.9}$$

Будем исходить из равенства (2.5.8).

Интегрируем обе части (2.5.8):

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \varphi(y)\ , \tag{2.5.10}$$

где $\varphi(y)$ – некоторая функция, причем дифференцируемая.

Замечание 2.5.1. При вычислении интеграла в правой части (2.5.10) y считается постоянной.

Выберем функцию $\varphi(y)$ так, чтобы функция (2.5.10) удовлетворяла равенству (2.5.9).

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx + \varphi'(y) = N(x,y)..\qquad (2.5.11).$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\frac{\partial\left(\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx\right)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx. \text{ [2].}$$

В силу условия (2.5.7) перепишем равенство (2.5.11) в виде:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dx + \varphi'(y) = N(x,y), \tag{2.5.12}$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dx = N(x,y) - N(x_0,y). \tag{2.5.13}$$

С учетом (2.5.13) перепишем (2.5.12) в виде:

$$N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y) = N(x,y). \tag{2.5.14}$$

Из (2.5.14) получаем дифференциальное уравнение $\varphi'(y) = N(x_0 y)$, из которого следует, что

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + C_1, \tag{2.5.15}$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

Подставляя в правую часть равенства (2.5.10) вместо $\varphi(y)$ выражение из (2.5.15), окончательно получим:

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + C_1. \tag{2.5.16}$$

Из (2.5.16) получаем общий интеграл уравнения (2.5.1) в полных дифференциалах:

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = C, \tag{2.5.17}$$

где C – произвольная постоянная.

Если за исходное взять равенство (2.5.9), то получим общий интеграл уравнения (2.5.1) в виде:

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy = C, \tag{2.5.18}$$

где C – постоянная интегрирования.

Замечание 2.5.2. При вычислении интеграла $\int\limits_{y_0}^{y} N(x,y)dy$ в левой части (2.5.18) x считается постоянной.

Замечание 2.5.3. В формулах общего интеграла (2.5.17) и (2.5.18) нижние пределы интегрирования x_0, y_0 можно выбрать произвольно в пределах рассматриваемой односвязной области, но при условии, что получающиеся интегралы имеют смысл [7].

Замечание 2.5.4. Формулы (2.5.17) и (2.5.18) дают возможность получить решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0, если точка (x_0, y_0) лежит в области, удовлетворяющей условию замечания 2.5.3. Для этого достаточно в формулах (2.5.17) и (2.5.18) взять в качестве нижних пределов начальные данные и приравнять C к нулю.

Интегрирование уравнения (2.5.1) в полных дифференциалах можно производить:

а) непосредственно с использованием одной из готовых формул (2.5.17) и (2.5.18);

б) воспроизведением изложенной выше процедуры получения функции $F(x,y)$, удовлетворяющей тождеству (2.5.2), или аналогичной процедуры, если взять за исходное равенство (2.5.9).

Пример 2.5.2. Проинтегрировать уравнение

$$\left(x^3 + y\right)dx + (x - y)dy = 0 . \tag{2.5.19}$$

$$M(x,y) = x^3 + y, \quad N(x,y) = x - y,$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 1 .$$

Условие (2.5.7) выполнено, следовательно, уравнение (2.5.19) является уравнением в полных дифференциалах.

1-ый способ. Воспользуемся формулой (2.5.17):

$$\int\limits_0^x \left(x^3 + y\right)dx + \int\limits_0^y (-y)dy = C ,$$

$$\left(\frac{x^4}{4}+xy\right)\Bigg|_0^x-\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^y=C,\quad \frac{x^4}{4}+xy-\frac{y^2}{2}=C$$

или $x^4+4xy-2y^2=C_1$ $(C_1=4C)$ – общий интеграл уравнения (2.5.19).

Самостоятельно убедитесь, что по формуле (2.5.18) получается тот же результат.

2-ой способ. Будем исходить из равенства (2.5.9):

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=x-y.$$

Проинтегрируем обе части по y, считая при этом x постоянной:

$$F(x,y)=\int_0^y(x-y)dy=\left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^y+\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ – некоторая произвольно выфбранная функция.

Потребуем, чтобы функция

$$F(x,y)=xy-\frac{y^2}{2}+\varphi(x) \tag{2.5.20}$$

удовлетворяла равенству (2.5.8):

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=x^3+y\Rightarrow y+\varphi'(x)=x^3+y\Rightarrow\varphi'(x)=x^3\Rightarrow\varphi(x)=\frac{x^4}{4}+C_1,$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

Подставив полученное выражение для $\varphi(x)$ в равенство (2.5.20), получаем:

$$F(x,y)=xy-\frac{y^2}{2}+\frac{x^4}{4}+C_1. \tag{2.5.21}$$

Полагая $C_1=0$ в (2.5.21), приравняем $F(x,y)$ к C_2, то есть $xy-\frac{y^2}{2}+\frac{x^4}{4}=C_2$, следовательно, $x^4+4xy-2y^2=C$ – общий интеграл, где $C=4C_2$.

Пример 2.5.3 [7]. Докажите, что заданное уравнение является уравнением в полных дифференциалах и проинтегрируйте его:

$$\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy=0\,. \qquad (2.5.22)$$

$$M(x,y)=3x^2+6xy^2, \quad N(x,y)=6x^2y+4y^3,$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\equiv\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=12xy,$$

то есть условие (2.5.7) выполнено. Интегрируем (2.5.22) по формуле (2.5.17) (можно по формуле (2.5.18)):

$$\int_0^x(3x^2+6xy^2)dx+\int_0^y 4y^3dy=C. \qquad (2.5.23)$$

Вычисляем первый интеграл в левой части (2.5.23), считая y постоянной:

$$\int_0^x\left(3x^2+6xy^2\right)dx=(x^3+3x^2y^2)\Big|_0^x=x^3+3x^2y^2\,.$$

Итак, общий интеграл (2.5.23) имеет вид:

$$x^3+3x^2y^2+y^4=C\,.$$

Покажем, что уравнение (2.5.22) можно привести к уравнению $dF(x,y)=0$ группировкой членов в левой части (2.5.22).

$$3x^2dx+4y^3dy+6xy(ydx+xdx)=0\,,$$

$$d\left(x^3+y^4\right)+3\cdot 2xyd(xy)=0\,,$$

$$d\left(x^3+y^4\right)+3d\left(x^2y^2\right)=0\,,$$

$$d(x^3+y^4)+d(3x^2y^2)=0\,,$$

$$d\left(x^3+y^4+3x^2y^2\right)=0\,,$$

следовательно, $x^3+3x^2y^2+y^4=C$ – общий интеграл уравнения.

Пример 2.5.4 [7, № 188]. Проверить, что уравнение является уравнением в полных дифференциалах и решить его.

$$e^{-y}dx-\left(2y+xe^{-y}\right)dy=0\,, \qquad (2.5.24)$$

$$M(x,y)=e^{-y}, \quad N(x,y)=-2y-xe^{-y},$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=-e^{-y},\ \ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=-e^{-y},$$

следовательно, уравнение (2.5.24) есть уравнение в полных дифференциалах.

Проинтегрируем уравнение (2.5.24) по формуле (2.5.17):

$\int\limits_0^x e^{-y}dx - \int\limits_0^y 2ydy = C \to xe^{-y} - y^2 = C$ – общий интеграл уравнения (2.5.24).

При решении некоторых уравнений применяется метод выделения полного дифференциала. Для этого используются известные формулы:

$$d(xy) = ydx + xdy, \quad d(y^2) = 2ydy, \quad d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}, \quad d(\ln y) = \frac{dy}{y} \text{ и т.д.}$$

Указанным методом мы проинтегрировали уравнение (2.5.22).

Приведем еще один пример [5].

$$ydx - (4x^2y + x)dy = 0. \qquad (2.5.25)$$

Перепишем уравнение (2.5.25) в виде:

$$-(xdy - ydx) - 4x^2ydy = 0. \qquad (2.5.26)$$

Умножим обе части уравнения (2.5.26) на (-1), получим:

$$xdy - ydx + 4x^2ydy = 0. \qquad (2.5.27)$$

Заметив, что $xdy - ydx = x^2 d\left(\frac{y}{x}\right)$, перепишем (2.5.27) в виде

$$x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) + 4x^2ydy = 0. \qquad (2.5.28).$$

Разделим обе части уравнения (2.5.28) на x^2:

$$d\left(\frac{y}{x}\right) + 2d(y^2) = 0 \to d\left(\frac{y}{x}\right) + d(2y^2) = 0.$$

Воспользовавшись тем, что сумма дифференциалов равна дифференциалу суммы, последнее уравнение запишем в виде:

$d\left(\frac{y}{x} + 2y^2\right) = 0 \to \frac{y}{x} + 2y^2 = C$ – общий интеграл уравнения (2.5.25).

При делении обеих частей (2.5.25) на x^2 потеряно решение $x = 0$ уравнения (2.5.25).

Ответ: $\frac{y}{x}+2y^2=C;\; x=0$.

Замечание 2.5.5. Уравнение (2.5.25), как нетрудно видеть, не является уравнением в неполных дифференциалах.

Так как уравнение в полных дифференциалах интегрируется в квадратурах, то естественно возникает вопрос: нельзя ли уравнение (2.5.1), не являющееся уравнением в полных дифференциалах, привести к уравнению в полных дифференциалах?

Если удается найти функцию $\mu=\mu(x,y)$, после умножения на которую уравнение (2.5.1) превращается в уравнение в полных дифференциалах, то эту функцию называют **интегрирующим множителем уравнения (2.5.1).**

Так, для уравнения (2.5.15) интегрирующим множителем является функция

$$\mu(x,y)=-\frac{1}{x^2}.$$

Пусть $\mu=\mu(x,y)$ – интегрирующий множитель уравнения (2.5.1), то есть уравнение

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0 \tag{2.5.29}$$

есть уравнение в полных дифференциалах.

Тогда имеет место тождество $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\equiv\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$, то есть μ удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}. \tag{2.5.30}$$

Перепишем уравнение (2.5.30) в виде:

$$M(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}-N(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}=-\mu(x,y)\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right). \tag{2.5.31}$$

Пользуясь уравнением (2.5.31), выясним при каких условиях можно найти интегрирующий множитель уравнения (2.5.1) как функцию, зависящую только от x или только от y.

Допустим, что уравнение (2.5.1) имеет интегрирующий множитель $\mu = \mu(x)$. Тогда $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ и уравнение (2.5.31) имеет вид:

$$N(x,y)\mu'(x) = \mu(x)\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right). \qquad (2.5.32)$$

Полагая $N(x,y) \neq 0$, перепишем уравнение (2.5.32) в виде:

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}. \qquad (2.5.33)$$

В левой части (2.5.33) записана функция одной переменной x, следовательно, и правая часть по необходимости есть функция переменной x, то есть

$$\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)} \equiv r(x). \qquad (2.5.34)$$

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = r(x) \Rightarrow (\ln|\mu(x)|)' = r(x) \Rightarrow \ln|\mu(x)| = \int r(x)dx + \ln|C| \Rightarrow \mu(x) = Ce^{\int r(x)dx},$$

полагая, что $C = 1$, окончательно получаем:

$$\mu(x) = e^{\int r(x)dx}. \qquad (2.5.35)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что (2.5.35) является интегрирующим множителем уравнения (2.5.1).

Таким образом, получаем правило:

Если дробь $\dfrac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}$ есть функция $r(x)$ одной переменной x, то интегрирующий множитель уравнения (2.5.1) вычисляется по формуле (2.5.35).

В качестве примера покажем, что для линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$y' + f(x)y = g(x) \qquad (2.5.36)$$

интегрирующим множителем является функция $\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$.

Напомним, что одним из методов интегрирования линейного дифференциального уравнения первого порядка является метод интегрирующего множителя.

Перепишем уравнение (2.5.36) в виде:

$$(f(x)y - g(x))dx + dy = 0. \qquad (2.5.37)$$

Умножим обе части уравнения (2.5.37) на $\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$:

$$e^{\int f(x)dx}(f(x)y - g(x))dx + e^{\int f(x)dx}dy = 0, \qquad (2.5.38)$$

$$M(x,y) = e^{\int f(x)dx}(f(x)y - g(x)), \quad N(x,y) = e^{\int f(x)dx},$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = f(x)e^{\int f(x)dx}, \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = f(x)e^{\int f(x)dx}.$$

То есть условие (2.5.7) полного дифференциала выполнено, и уравнение (2.5.38) является уравнением в полных дифференциалах. Левую часть уравнения (2.5.38) перепишем в виде:

$$yf(x)e^{\int f(x)dx}dx + e^{\int f(x)dx}dy = g(x)e^{\int f(x)dx}dx. \qquad (2.5.39)$$

Левая часть уравнения (2.5.39) есть не что иное, как дифференциал произведения: $ye^{\int f(x)dx}$. Поэтому уравнение (2.5.39) перепишем в виде:

$$d\left(ye^{\int f(x)dx}\right) = g(x)e^{\int f(x)dx}dx. \qquad (2.5.40)$$

Интегрируя обе части (2.5.40), получим

$$ye^{\int f(x)dx} = \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx + C. \qquad (2.5.41).$$

Умножим обе части (2.5.41) на $e^{-\int f(x)dx}$. $y = (C + \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx)e^{-\int f(x)dx}$ – общее решение уравнения (2.5.36).

Далее рассмотрим случай интегрирующего множителя $\mu = \mu(y)$.

Полагая, что $\mu = \mu(y)$ – интегрирующий множитель уравнения

(2.5.1), и учитывая, что $\frac{\partial \mu}{\partial x}=0$, из (2.5.31) получаем уравнение:

$$M(x,y)\cdot \mu'(y)=-\mu(y)\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right). \qquad (2.5.42)$$

Пусть $M(x,y)\neq 0$, тогда из (2.5.42) получим:

$$\frac{\mu'(x,y)}{\mu(x,y)}=\frac{-\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)}{M(x,y)}. \qquad (2.5.43)$$

Так как левая часть тождества (2.5.43) есть функция только одной переменной y, то и правая часть по необходимости является функцией только переменной y, то есть

$$\frac{-\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)}{M(x,y)}\equiv h(y). \qquad (2.5.44)$$

С учетом (2.5.44) равенство (2.5.43) перепишем в виде:

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)}\equiv h(y)\to \left(\ln|\mu(y)|\right)'\equiv h(y)\to \ln|\mu(y)|=\int h(y)dy+\ln|C|\to \mu(y)=Ce^{\int h(y)dy}$$

При $C=1$ получаем, что

$$\mu(y)=e^{\int h(y)dy}. \qquad (2.5.45)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что при выполнении (2.5.44) функция (2.5.45) является интегрирующим множителем уравнения (2.5.1).

Итак, получаем правило обнаружения интегрирующего множителя уравнения (2.5.1) в виде функции $\mu=\mu(y)$:

Если дробь $\frac{-\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)}{M(x,y)}$ есть функция $h(y)$ только аргумента y, то интегрирующий множитель уравнения (2.5.1) вычисляем по формуле (2.5.45).

Пример 2.5.5 [7, №№ 354, 355]. Проинтегрировать уравнение с помощью интегрирующего множителя $\mu=\mu(x)$ или $\mu=\mu(y)$.

$$\left(\frac{x}{y}+1\right)dx+\left(\frac{x}{y}-1\right)dy=0, \qquad (2.5.46)$$

$$M(x,y)=\frac{x}{y}+1,\quad N(x,y)=\frac{x}{y}-1,$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=-\frac{x}{y^2},\quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{y},$$

$$\frac{-\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)}{M(x,y)}=\frac{\frac{x}{y^2}+\frac{1}{y}}{\frac{x}{y}+1}=\frac{\frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}+1\right)}{\frac{x}{y}+1}=\frac{1}{y}\equiv h(y).$$

Интегрирующий множитель имеет вид $\mu(y)$.

$$\mu(y)=e^{\int\frac{dy}{y}}=e^{\ln|y|+\ln|c|}\to\mu(y)=Cy.$$

Полагая $C=1$, получаем:

$$\mu(y)=y. \qquad (2.5.47)$$

Умножим обе части уравнения (2.5.46) согласно (2.5.47) на y:

$$(x+y)dx+(x-y)dy. \qquad (2.5.48)$$

Интегрируем уравнение (2.5.48) как уравнение в полных дифференциалах, например, по формуле (2.5.17):

$$\int_0^x(x+y)dx+\int_0^y(-y)dy=C_1,$$

$$\left.\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\right|_0^x-\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^y=C_1,$$

$$\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}=C_1. \qquad (2.5.49)$$

Умножим обе части (2.5.49) на 2: $x^2+2xy-y^2=C$ – общий интеграл уравнения (2.5.46).

$$(x^2+y)dx-xdy=0, \qquad (2.5.50)$$

$$M(x,y)=x^2+y,\quad N(x,y)=-x,$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial y}=-1,$$

$$\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}=-\frac{2}{x}=r(x).$$

Находим интегрирующий множитель вида $\mu(x)=e^{-2\int\frac{dx}{x}}=e^{\ln|x|^{-2}+\ln|C|}=\dfrac{C}{x^2}$. При $C=1$ получаем $M(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

Умножим обе части уравнения (2.5.50) на $\dfrac{1}{x^2}$:

$$\left(1+\frac{y}{x^2}\right)dx-\frac{1}{x}dy=0. \qquad (2.5.51)$$

Так как уравнение (2.5.51) является уравнением в полных дифференциалах, то проинтегрируем его, например, по формуле (2.5.18):

$$\int_1^x dx-\int_0^y \frac{1}{x}dy=C_1 \to x\Big|_1^x-\frac{y}{x}\Big|_0^y=C_1 \to x-\frac{y}{x}=C_2,$$

где $C_2=C_1+1$.

При делении обеих частей уравнения (2.5.50) на x^2 потеряно решение $x=0$.

Ответ: $x-\dfrac{y}{x}=C_2;\quad x=0$.

Замечание 2.5.6. Интересные и очень полезные сведения об интегрирующем множителе можно найти в книгах [4, 5, 10].

Задания для работы в аудитории

1. Доказать, что уравнение удовлетворяет условию полного дифференциала (2.5.7) и проинтегрировать его, не пользуясь формулами общего интеграла (2.5.17) и (2.5.18).

Ответы:

а) (№ 340 [7]). $\frac{1}{x}dy-\frac{y}{x^2}dx=0$ $\left(\frac{y}{x}=C\right)$;

б) (№ 341 [7]). $\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy=0$ $\left(\frac{x}{y}=C\right)$;

в) (№ 343 [7]). $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$ $\left(x^2+y^2-xy+x-y=C\right)$.

2. Проинтегрировать уравнение.

Ответы:

а) (№ 347 [7]). $\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx+\frac{e^y}{1+x^2}dy=0$ $\left(\frac{e^y-1}{1+x^2}=C\right)$;

б) (№ 348 [7]). $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$ $\left(\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C\right)$;

в) (№ 339 [7]). $xdx+ydy=0$ $\left(x^2+y^2=C\right)$.

3. Найти решение с начальными данными.

Ответы:

а) (№ 351 [7]). $(x+y)dx+(x-y)dy=0;\ x_0=0;\ y_0=0$

($x^2-y^2+2xy=0(x^2+y^2\neq 0)$);

б) (№ 352 [7]). $(x-y)dx+(2y-x)dy=0;\ x_0=0;\ y_0=0$ (не существует);

в) $\frac{y}{x}dx+\left(y^3+\ln x\right)dy=0;\ x_0=1;\ y_0=2$ $\left(4y\ln x+y^4=16\right)$;

г) $\frac{3x^2+y^2}{y^2}dx-\frac{2x^3+5y}{y^3}dy=0;\ x_0=0;\ y_0=1$ $\left(x+\frac{x^3}{y^2}+\frac{5}{y}=5\right)$.

Задания для работы вне аудитории. Обязательный минимум

1. Проинтегрировать уравнение.

Ответы:

а) (№ 5 [9]). $(x^2+2xy+a^2)dx+(y^2+2xy-a^2)dy=0,\quad a-\text{const}$

$$(x^3+y^3+3x^2y+3a^2x-3a^2y=C);$$

б) (№ 2 [9]). $y^2dx+2xydy=0$ $\qquad\left(y^2x=C\right);$

в) (№ 6 [9]). $\left(\cos x+x\cos y+e^y\right)dy+(\sin y-y\sin x)dx=0$

$$\left(x\sin y+y\cos x+e^y=C\right).$$

2. Решить уравнения, допускающие интегрирующий множитель $\mu(x)$ или $\mu(y)$.

Ответы:

а) (№ 9 [9]). $(y^2-2x-2)dx+2ydy=0$ $\qquad(\mu(x)=e^x,\ y^2e^x-2xe^x=C);$

б) (№ 10 [9]). $y^2dx+(xy-1)dy=0$ $\qquad\left(\mu(y)=\dfrac{1}{y}, xy-\ln|y|=C, y=0\right);$

в) (№ 11 [9]). $\left(2y+xy^3\right)dx+\left(x+x^2y^2\right)dy=0$ $\quad\left(\mu(x)=x,\ 3x^2y+x^3y^3)=C\right).$

3. Доказать, что данные уравнения являются уравнениями в полных дифференциалах.

а) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx+\left(\dfrac{x^2}{(x-y)^2}-\dfrac{1}{y}\right)dy=0;$

б) $x(x+2y)dx+\left(x^2-y^2\right)dy=0;$

в) $xe^{x^2+y^2}dx+ye^{x^2+y^2}dy=0.$

Задания повышенного уровня сложности

1. Решить уравнения.

Ответы:

а) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx+\left(\dfrac{x^2}{(x-y)^2}-\dfrac{1}{y}\right)dy=0$ $\qquad\left(\ln\dfrac{x}{y}+\dfrac{xy}{x-y}=C\right);$

б) $\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dx+\left(2xy+\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}\right)dy=0$ $\qquad\left(\ln|x|+\ln|y|+y^2-\dfrac{x}{y}=C\right).$

Указание. Найдите интегрирующий множитель $\mu=\mu(x)$ и приведите уравнение к уравнению в полных дифференциалах;

в) $\dfrac{xdy}{dx}=\left(3x^2\cos y-\sin y\right)\cos y$ $\left(x^3-x\operatorname{tg}y=C;\ y=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z\right)$

Указание. Найдите интегрирующий множитель $\mu=\mu(y)$ и приведите уравнение к уравнению в полных дифференциалах.

2. Дифференциальное уравнение, описывающее форму сечения зеркала, отражающего все лучи, выходящие из заданной точки параллельно данному направлению, плоскостью xoy, имеет вид [1]:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Решить уравнение, зная, что $\mu(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ – интегрирующий множитель уравнения.

Указание. Предварительно избавиться от иррациональности в правой части.

Ответ: $y^2=2Cx+C^2$.

3. Решить уравнение, найдя каким-либо способом интегрирующий множитель.

Ответы:

а) $\left(y-\dfrac{1}{x}\right)dx+\dfrac{dy}{y}=0$ $\left(\left(x^2-C\right)y=2x\right)$;

б) $y^2dx-\left(xy+x^3\right)dy=0$ $\left(y^2=x^2(C-2y);\ x=0\right)$.

4. Найдите условие, при котором уравнение (2.5.1) имеет интегрирующий множитель:

а) $\mu=\mu(x)$; б) $\mu=\mu(y)$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение уравнения в полных дифференциалах.

2. При каком условии уравнение $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ является

уравнением в полных дифференциалах?

3. Докажите, что функция $\mu(x)=e^{\int f(x)dx}$ является интегрирующим множителем линейного дифференциального уравнения первого порядка $y'+f(x)y=g(x)$.

4. Объясните, почему функция $\mu(x,y)=\dfrac{1}{M_2(x)N_1(y)}$ является интегрирующим множителем дифференциального уравнения с разделяющими переменными

$$M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0.$$

5. Пусть $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ – однородное уравнение. Убедитесь в том, что функция $\mu(x,y)=\dfrac{1}{xM(x,y)+yN(x,y)}$ является интегрирующим множителем этого уравнения.

Проинтегрируйте уравнение $(x-y)dx+(x+y)dy=0$.

Ответ: $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)-\operatorname{arctg}\left(x^2+y^2\right)=C$.

6. Решите уравнение $(x+y)dx+(x-y)dy=0$:

а) как однородное; б) как уравнение в полных дифференциалах.

Ответ: $\left(x^2-y^2+2xy=C\right)$.

Сравните, какой из методов более предпочтителен.

Литература

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: Учеб. пособие для студентов физико-математических и инженерно-физических специальностей вузов. Том 2. / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Дрофа, 2004. - 720 с.

2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Учебник. В 3-х тт. Том 2. 9-е, стер. издание. / Г.М. Фихтенгольц. – М. : Лань, 2009. – 800 с.

3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степа-

нов. – М.: ЛКИ, 2008. – 472 с.

4. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н.П. Еругин. Минск: Наука и техника, 1979. – 744 с.

5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: Учеб. пособие для вузов / А.Ф. Филиппов. – М.: ЛКИ, 2011. – 240 с.

7. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учеб. пособие / Н.М. Матвеев. - 7-е изд., доп. – СПб.: Лань, 2002. – 431 с.

8. Самойленко А.А. Дифференциальные уравнения: Практ.курс: Учеб. пособие для вузов / А.А. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. 3-е изд., перераб. – М.: Высшая школа, 2006. – 382 с.

9. Гусак А.А. Математический анализ и дифференциальные уравнения. Примеры и задачи / А.А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2003. – 416 с.

10. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Оникс (Медиа), 2012. – 424 с.

Практическое занятие № 6. Тема. Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной

Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной, записывается в виде

$$F(x, y, y') = 0 . \qquad (2.6.1)$$

Частным случаем уравнения (2.6.1) является уравнение, левая часть которого есть многочлен относительно y' с коэффициентами, зависящими от x и y:

$$(y')^n + A_1(x, y)(y')^{n-1} + A_2(x, y)(y')^{n-2} + \ldots + A_{n-1}(x, y)y' + A_n(x, y) = 0 .$$

Пример 2.6.1. Уравнение

$$y'^2 - (x + y)y' + xy = 0 \qquad (2.6.2)$$

имеет, очевидно, два корня:

$$y' = x \tag{2.6.3}$$

и

$$y' = y\,. \tag{2.6.4}$$

Интегрируя (2.6.3) и (2.6.4), получаем два семейства решений $y = \frac{x^2}{2} + C$ и $y = Ce^x$, удовлетворяющие уравнению (2.6.2).

Определение 2.6.1 [3]. Любая функция $y = y(x)$, определенная и непрерывно дифференцируемая на некотором промежутке $< a, b >$, называется решением уравнения (2.6.1), если имеет место тождество $F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0$.

Определение 2.6.2 [3]. Будем говорить, что уравнение

$$\Phi(x, y) = 0 \tag{2.6.3}$$

определяет решение уравнения (2.6.1) в неявной форме, если оно определяет y как неявную функцию аргумента x, и эта функция является решением уравнения (2.6.1).

Определение 2.6.3 [3, 4]. Говорят, что уравнения

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{2.6.4}$$

определяют решение уравнения (2.6.1) в параметрической форме на интервале (t_0, t_1), если имеет место тождество $F\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \equiv 0$.

Определение 2.6.4 [3]. Кривая на плоскости (x, y), соответствующая решению уравнения (2.6.1), называется интегральной кривой этого уравнения.

Пусть уравнение (2.6.1) определяет в каждой точке (x, y) некоторой области одно или несколько действительных значений y'. Построив в каждой такой точке единичные отрезки, середины которых совпадают с точкой (x, y) и образуют с положительным направлением оси Ox угол, тангенс которого равен значению y' в этой точке, мы получим **поле направлений**, определяемое уравнением (2.6.1) [1]. Уравнение

$$y'^2-1=0 \tag{2.6.5}$$

равносильно совокупности уравнений

$$y'=1 \tag{2.6.6}$$

или

$$y'=-1, \tag{2.6.7}$$

$y=x+C$ – общее решение уравнения (2.6.6.), $y=-x+C$ – общее решение уравнения (2.6.7).

Уравнение (2.6.6) определяет в каждой точке плоскости $\boldsymbol{R}^2$ поле направлений, наклоненных к положительному направлению оси Ox под углом 45°, а уравнение (2.6.7) – под углом 135°. Уравнению (2.6.5) соответствует поле направлений, полученное наложением полей направлений уравнений (2.6.6) и (2.6.7).

Задача интегрирования уравнения (2.6.1) состоит в том, чтобы найти все гладкие кривые, в каждой точке которых направление касательной совпадало бы с одним из направлений поля в этой точке [3].

Как и в случае уравнения $y'=f(x,y)$, одной из важнейших задач интегрирования уравнения (2.6.1) является задача Коши – задача нахождения решений $y=y(x)$, удовлетворяющих начальному условию $y(x_0)=y_0$, или что то же самое, задача нахождения интегральных кривых, проходящих через точку (x_0,y_0).

Говорят, что решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 единственно относительно уравнения (2.6.1), если через точку (x_0,y_0) в достаточно малой ее окрестности проходит столько интегральных кривых, сколько направлений поля определяет уравнение (2.6.1) в этой точке [3].

Задача Коши с начальными данными x_0, y_0 для уравнения, рассмотренного в примере 2.6.2, где x_0, y_0 – произвольные действительные числа, имеет единственное решение.

Предположим, что уравнение (2.6.1) имеет m действительных корней относительно y':

$$y' = f_k(x,y) \quad \left(k = \overline{1,m}\right), \tag{2.6.8}$$

где функции $f_k(x,y)$ определены в некоторой области D.

Пусть направления поля, определяемые каждым из уравнений (2.6.8) в любой точке $(x,y) \in D$, различны. Это означает, что интегральные кривые различных уравнений (2.6.8) не могут касаться друг друга ни в одной точке области D.

Предположим, что для каждого из уравнений (2.6.8) задача Коши в области D имеет единственное решение и каждое уравнение (2.6.8) имеет в области D общий интеграл.

$$\psi_k(x,y) = C \quad \left(k = \overline{1,m}\right). \qquad (2.6.9).$$

Совокупность общих интегралов (2.6.9) называют общим интегралом уравнения (2.6.1) и записывают:

$$(\psi_1(x,y) - C)(\psi_2(x,y) - C) \ldots (\psi_m(x,y) - C) = 0\,. \tag{2.6.10}$$

Так, общий интеграл уравнения, рассмотренного в примере 2.6.2, согласно (2.6.10) имеет вид:

$$(y - x - c)(y + x - C) = 0\,.$$

Определение 2.6.5 [3]. Решение $y = y(x)$ уравнения (2.6.1) называют **частным решением**, если в каждой его точке задача Коши имеет единственное решение.

Определение 2.6.6 [3]. Решение $y = y(x)$ уравнения (2.6.1) называют **особым решением**, если в каждой его точке нарушается единственность решения задачи Коши.

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения (2.6.1) и методы интегрирования, соответствующие им.

1. Уравнение, содержащее только производную y', то есть

$$F(y') = 0\,. \tag{2.6.11}$$

Предположим, что уравнение имеет конечное число действительных корней

$$y' = k_i \,, \tag{2.6.12}$$

то есть имеют место тождества $F(k_i) \equiv 0$.

Уравнения (2.6.12) имеют общие решения

$$y = k_i x + C \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{2.6.13}$$

Из (2.6.13) следует, что

$$k_i = \frac{y - C}{x} \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{2.6.14}$$

Подставляя выражение k_i из (2.6.14) в (2.6.11), получаем общий интеграл в виде

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0 \,. \tag{2.6.15}$$

Замечание 2.6.1 [3]. В формулу (2.6.15) могут входить и решения комплексных дифференциальных уравнений.

Пример 2.6.3 [3]. Уравнение

$$y'^3 - 1 = 0 \,. \tag{2.6.16}$$

Имеет единственный действительный корень $y' = 1$, которому соответствует общее решение

$$y = x + C \,. \tag{2.6.17}$$

И согласно (2.6.15) общий интеграл уравнения (2.6.16) записывается в виде:

$$\left(\frac{y - C}{x}\right)^3 - 1 = 0 \,. \tag{2.6.18}$$

В формулу (2.6.18), кроме вещественно решения (2.6.17), входят решения комплексных дифференциальных уравнений

$$y' = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{и} \quad y' = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \,.$$

Здесь i – мнимая единица.

Замечание 2.6.2 [3]. Если корни уравнения (2.6.11) не являются изолированными, то есть заполняют сплошь некоторый промежуток, то дифференциальное уравнение (2.6.11) может иметь решение, отличное от решения вида $y = kx + C$.

Пример 2.6.4 [3]. Решим уравнение

$$y' + |y'| = 0 \tag{2.6.19}$$

для $y' \in (-\infty, 0]$.

Решения $y' = k$ уравнения (2.6.19) заполняют сплошь луч $(-\infty, 0]$. Интегральными кривыми уравнения (2.6.19) будут прямые

$$y = kx + C \quad (-\infty < k \le 0). \tag{2.6.20}$$

Вместе с тем решением уравнения (2.6.19) будет и функция $y = -x^2 \quad (0 \le x < +\infty)$, не входящая в семейство (2.6.20).

2. Уравнение, не содержащее искомой функции, то есть

$$F(x, y') = 0. \tag{2.6.21}$$

Если уравнение (2.6.21) разрешимо относительно y', то есть равносильно совокупности уравнений

$$y' = f_k(x) \quad \left(k = \overline{1, m}\right), \tag{2.6.22}$$

то, решая каждое из уравнений (2.6.22), получаем общее решение

$$y = \int f_k(x) dx + C. \tag{2.6.23}$$

С учетом (2.6.23) общий интеграл уравнения (2.6.21) записываем в виде:

$$\left(y - \int f_1(x) dx - C\right)\left(y - \int f_2(x) dx - C\right) \cdot \ldots \cdot \left(y - \int f_m(x) dx - C\right) = 0.$$

Пример 2.6.5. Уравнение $y'^2 - (\sin x + \cos x) y' + \sin x \cos x = 0$ равносильно совокупности уравнений

$$y' = \sin x \tag{2.6.24}$$

или

$$y' = \cos x. \tag{2.6.25}$$

Интегрируя (2.6.24) и (2.6.25), получаем общие решения $y = -\cos x + C$ и $y = \sin x + C$ соответственно.

Общий интеграл данного уравнения записываем в виде:

$$(y + \cos x - C)(y - \sin x + C) = 0 .$$

Если уравнение (2.6.21) нельзя разрешить относительно y' или трудно разрешимо, но можно найти такие элементарные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, что $F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$, то уравнение (2.6.21) можно заменить системой

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y' = \psi(t). \end{cases} \tag{2.6.26}$$

При этом будем говорить, что уравнение (2.6.21) допускает параметрическое представление (2.6.26). Интегрируя уравнение (2.6.21), следует помнить, что вдоль всякой интегральной кривой любого дифференциального уравнения первого порядка выполняется **основное соотношение [3]:**

$$dy = y'dx . \tag{2.6.27}$$

С учетом (2.6.26) соотношение (2.6.27) запишем в виде:

$$dy = \psi(t)\varphi'(t)dt . \tag{2.6.28}$$

Интегрируя уравнение (2.6.28), получим:

$$y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C . \tag{2.6.29}$$

Таким образом, получаем общее решение уравнения (2.6.21) в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C. \end{cases} \tag{2.6.30}$$

Если удается исключить параметр t из уравнений (2.6.30), то получается общее решение (общий интеграл) уравнения (2.6.21) в обычной форме.

Пример 2.6.6. Уравнение

$$y'^2 + x^2 - 1 = 0 . \tag{2.6.31}$$

допускает параметрическое представление

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y' = \cos t. \end{cases}$$

Воспользуемся основным соотношением (2.6.27):

$$dy = \cos^2 t dt\,. \qquad (2.6.32)$$

Интегрируя (2.6.32), получаем:

$$y = \int \cos^2 t dt + C\,,$$

$$y = \frac{1}{2}\int 2\cos^2 t dt + C\,,$$

$$y = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2t) dt + C\,,$$

$$y = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C\,. \qquad (2.6.33)$$

Общее решение уравнения (2.6.31) в параметрической форме запишем в виде:

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{4}\sin 2t + C. \end{cases}$$

Замечание 2.6.3 [3]. Если уравнение (2.6.21) разрешимо относительно x, то оно равносильно уравнению

$$x = \varphi(y')\,. \qquad (2.6.34)$$

И полагая $y' = t$, получаем параметрическое представление уравнения (2.6.21):

$$\begin{cases} y' = t, \\ x = \varphi(t). \end{cases} \qquad (2.6.35)$$

Пример 2.6.7. Решить уравнение

$$x - \cos y' - \sin y' - 1 = 0\,. \qquad (2.6.36)$$

Уравнение (2.6.36) равносильно уравнению

$$x = \cos y' + \sin y' + 1\,. \qquad (2.6.37)$$

Полагая $y' = t$ в уравнении (2.6.37), получаем параметрическое представление уравнения (2.6.36) в виде (2.6.35), а именно,

$$\begin{cases} y' = t, \\ x = \cos t + \sin t + 1. \end{cases} \qquad (2.6.38)$$

Основное соотношение (2.6.27) с учетом (2.6.38) запишем в виде

$$dy = t(\cos t - \sin t)dt\,. \qquad (2.6.39)$$

Интегрируя (2.6.39), получаем

$$y = \int t\cos t dt - \int t\sin t dt + C\,. \qquad (2.6.40)$$

Интегралы в правой части (2.6.40) вычислим по частям:

$$\int t\cos t dt = \begin{Bmatrix} t = u \to du = dt, \\ dv = \cos t dt \to v = \sin t \end{Bmatrix} = t\sin t - \int \sin t dt = t\sin t + \cos t \quad , \quad (2.6.41)$$

$$\int t\sin t dt = \begin{Bmatrix} t = u \to du = dt, \\ dv = \sin t dt \to v = -\cos t \end{Bmatrix} = -t\cos t + \int \cos t dt = t\cos t + \sin t \quad (2.6.42)$$

В формулах (2.6.41) и (2.6.42) мы сознательно опускаем произвольную постоянную, так как нам нужно знать любую первообразную подынтегральной функции.

В силу (2.6.41) и (2.6.42) функция (2.6.40) примет вид

$$y = t(\cos t + \sin t) + \cos t - \sin t + C\,.$$

Таким образом, общее решение уравнения (2.6.36) в параметрической форме записывается в виде:

$$\begin{cases} x = \cos t + \sin t + 1, \\ y = t(\cos t + \sin t) + \cos t - \sin t + C, \end{cases}$$

где C – постоянная интегрирования.

3. Уравнение, не содержащее независимой переменной, то есть

$$F(y, y') = 0\,. \qquad (2.6.43)$$

Если уравнение (2.6.43) разрешимо относительно y', то есть оно равносильно уравнению

$$y' = f_k(y) \quad \left(k = \overline{1,m}\right), \qquad (2.6.44)$$

то общий интеграл уравнения (2.6.43) записывается в виде:

$$\left(x-\int\frac{dy}{f_1(y)}-C\right)\left(x-\int\frac{dy}{f_2(y)}-C\right)\cdot\ldots\cdot\left(x-\int\frac{dy}{f_m(y)}-C\right)=0. \quad (2.6.45)$$

Из (2.6.45) видно, что особыми решениями уравнения (2.6.43) могут быть прямые $y=b_i$, где b_i – решение совокупности уравнений

$$f_1(y)=0\vee f_2(y)=0\vee\ldots\vee f_m(y)=0$$

или, что то же самое, корни уравнения $F(b,0)=0$.

Пусть уравнение (2.6.43) неразрешимо относительно y', но допускает параметрическое представление

$$\begin{cases} y=\varphi(t), \\ y'=\psi(t). \end{cases} \quad (2.6.46)$$

С учетом (2.6.46) запишем основное соотношение (2.6.27)

$$\varphi'(t)dt=\psi(t)dx. \quad (2.6.47)$$

Из (2.6.47) выражаем dx:

$$dx=\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt \quad (2.6.48)$$

Интегрируя (2.6.48), получим $x=\int\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}+C$. Тем самым имеем возможность записать общее решение уравнения (2.6.43) в параметрической форме

$$\begin{cases} x=\int\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}+C, \\ y=\varphi(t). \end{cases}$$

Пример 2.6.8. Проинтегрировать уравнение

$$y'^2+4y'-(y+1)(y-3)=0. \quad (2.6.49)$$

Уравнение (2.6.49) равносильно совокупности уравнений $y'=-(y+1)\vee y'=y-3$. Интегрируя эти уравнения, получим соответственно:

$$x=-\ln|y+1|+C \quad (2.6.50)$$

и

$$x=\ln|y-3|+C. \quad (2.6.51)$$

С учетом (2.6.50) и (2.6.51) запишем общий интеграл уравнения (2.6.49) в виде:

$$(x+\ln|y+1|-C)(x-\ln|y-3|-C)=0\,.$$

Пример 2.6.9. Решить уравнение

$$y=\frac{1}{3}y'^3+\ln(y'). \tag{2.6.52}$$

Полагая в (2.6.52) $y'=t$, имеем параметрическое представление уравнения (2.6.52)

$$\begin{cases} y'=t, \\ y=\dfrac{1}{3}t^3+\ln t \end{cases} \tag{2.6.53}$$

Основное соотношение (2.6.27) с учетом (2.6.53) запишем в виде

$$(t^2+1/t)dt=tdx. \tag{2.6.54}$$

Из (2.6.54), разделяя переменные, получим уравнение

$$dx=(t+1/t^2)dt. \tag{2.6.55}$$

Общее решение уравнения (2.6.55) имеет вид

$$x=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{t}+C, \tag{2.6.56}$$

поэтому общее решение уравнения (2.6.52) можно записать в параметрической форме

$$\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{1}{t}+C, \\ y=\dfrac{1}{3}t^3+\ln t, \end{cases}$$

где C – постоянная интегрирования.

Замечательным случаем уравнения (2.6.1) является уравнение

$$y=\varphi(y')x+\psi(y'), \qquad (2.6.57).$$

где

$$\varphi(y')\not\equiv y'. \qquad (2.6.58).$$

Уравнение (2.6.57) при условии (2.6.58) называется **уравнением Лагранжа.**

Особенностью уравнения Лагранжа является то, что в нем искомая функция y является линейной относительно аргумента x с коэффициентами, зависящими от y', причем коэффициент при x отличен от y'.

Решается уравнение (2.6.57) методом введения параметра.

Положив $y'=t$ уравнение (2.6.57) запишем в виде

$$y = x\varphi(t)+\psi(t)\cdot \qquad (2.6.59)$$

Основное соотношение (2.6.27) с учетом (2.6.59) имеет вид:

$$\varphi(t)dx+(x\varphi'(t)+\psi'(t))dt = tdx\cdot \qquad (2.6.60)$$

Разделив обе части уравнения (2.6.60) на dt и $\varphi(t)-t$, получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка с искомой функцией x:

$$\frac{dx}{dt}+\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)-t}x=\frac{\psi'(t)}{t-\varphi(t)}. \qquad (2.6.61)$$

Общее решение уравнения (2.6.61) можно записать в виде (см.формулу (2.4.22) темы «Линейные дифференциальные уравнения первого порядка»):

$$x = A_1(t)C+B_1(t). \qquad (2.6.62)$$

Подставляя выражение для x из (2.6.62) в уравнение (2.6.57), получаем: $y = A_2(t)C+B_2(t)$.

Таким образом, общее решение уравнения Лагранжа в параметрической форме запишется в виде:

$$\begin{cases} x = A_1(t)C+B_1(t), \\ y = A_2(t)C+B_2(t), \end{cases}$$

где C – некоторая постоянная, $A_2(t)=A_1(t)\varphi(t)$, $B_2(t)=B_1(t)\varphi(t)+\psi(t)$.

В процессе перехода от уравнения (2.6.60) к уравнению (2.6.61) мы делили обе части (2.6.60) на $\varphi(t)-t$. Поэтому могли быть потеряны решения уравнения (2.6.60), имеющие вид $t=t_i$, где $\varphi(t_i)-t_i=0$.

Подставляя эти значения t в уравнение (2.6.57), получим решения $y = t_i x + \psi(t_i)$ уравнения Лагранжа, которые могут быть как частными, так и особыми.

Пример 2.6.10. Решить уравнение Лагранжа

$$y = (y' + 1)x + y'^2. \qquad (2.6.63)$$

Пусть $y' = t$, тогда

$$y = (t+1)x + t^2. \qquad (2.6.64)$$

Из (2.6.64) получаем выражение для dy

$$dy = (t+1)dx + xdt + 2tdt. \qquad (2.6.65)$$

Основное соотношение (2.6.27) с учетом (2.6.65) имеет вид:

$$(t+1)dx + (x+2t)dt = tdx. \qquad (2.6.66)$$

Уравнение (2.6.66) приводим к линейному неоднородному уравнению

$$\frac{dx}{dt} + x = -2t. \qquad (2.6.67)$$

Решим однородное уравнение, соответствующее уравнению (2.6.67)

$$\frac{dx}{dt} + x = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} = -dt \Rightarrow \ln|x| = -t + \ln|C| \Rightarrow x = Ce^{-t}. \qquad (2.6.68)$$

Варьируем произвольную постоянную, то есть в (2.6.68) считаем, что $C = C(t)$. Тогда

$$\frac{dx}{dt} = C'(t)e^{-t} - C(t)e^{-t}. \qquad (2.6.69)$$

Подставим в уравнение (2.6.67) вместо x и $\dfrac{dx}{dt}$ их выражения из (2.6.68) и (2.6.69):

$$C'(t)e^{-t} - C(t)e^{-t} + C(t)e^{-t} = -2t \Rightarrow C'(t)e^{-t} = -2t \Rightarrow C'(t) = -2te^{t}\cdot \qquad (2.6.70)$$

Из уравнения (2.6.70) находим $C(t)$:

$$C(t) = -2\int te^{t}dt + C_1. \qquad (2.6.71)$$

Интеграл в правой части (2.6.71) вычислим методом интегрирования по частям.

$$\int te^t dt = \left\langle \begin{matrix} t = u \Rightarrow dt = du \\ dV = e^t dt \Rightarrow V = e^t \end{matrix} \right\rangle = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t$$, то есть

$$C(t) = -2te^t + 2e^t + C_1. \qquad (2.6.72)$$

С учетом (2.6.72) перепишем функцию (2.6.68)

$$x = -2(t-1) + C_1 e^{-t}. \qquad (2.6.73)$$

Подставим вместо x в уравнение (2.6.64) выражение из (2.6.73)

$$y = C_1(t+1)e^{-t} - t^2 + 2.$$

Таким образом, общее решение уравнения (2.6.63) может быть записано в параметрической форме

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} - 2(t-1), \\ y = C_1(t+1)e^{-t} - t^2 + 2, \end{cases}$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

Определение. Уравнение вида

$$y = xy' + \psi(y') \qquad (2.6.74)$$

называется **уравнением Клеро**.

Уравнение Клеро отличается от уравнения Лагранжа тем, что в первом коэффициент при x равен y'.

Будем интегрировать уравнение Клеро тем же методом, что и уравнение Лагранжа.

Пусть $y' = t$, тогда (2.6.74) запишется в виде

$$y = tx + \psi(t). \qquad (2.6.75)$$

Из (2.6.75) получаем

$$dy = tdx + xdt + \psi'(t)dt. \qquad (2.6.76)$$

Основное соотношение (2.6.27) с учетом (2.6.76) запишем в виде

$$tdx + (x + \psi'(t))dt = tdx. \qquad (2.6.77)$$

Уравнение (2.6.77) равносильно совокупности уравнений

$$dt = 0 \ \ (2.6.78) \vee \ x + \psi'(t) = 0. \qquad (2.6.79)$$

Из (2.6.78) имеем $t = C$. Подставляя в (2.6.75) C вместо t получаем

$$y = Cx + \varphi(C). \tag{2.6.80}$$

Семейство прямых (2.6.80) и есть общее решение уравнения Клеро. Итак, для получения общего решения уравнения Клеро достаточно для этого в этом уравнении формально заменить y' на C.

Уравнение (2.6.79) вместе с уравнением (2.6.75) образуют решение уравнения Клеро в параметрической форме

$$\begin{cases} x = -\psi'(t), \\ y = -\psi'(t)t + \psi(t). \end{cases} \tag{2.6.81}$$

Решение (2.6.81) является особым, если $\psi''(t)$ непрерывна и $\psi''(t) \neq 0$ [4].

Замечание 2.6.4. [3] Любая задача, в которой ищется кривая по свойству её касательной, не зависящему от точки касания, приводит к уравнению Клеро. При этом наибольший интерес представляет кривая, соответствующая особому решению уравнения Клеро.

Пример 2.6.11. [4] Найти кривую, отрезок касательной к которой, заключённый между осями координат, имеет постоянную длину a.

Решение. Уравнение касательной, проведенной к кривой L в точке (x_0, y_0) (см. рис. 10), запишем в виде

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0). \tag{2.6.81}$$

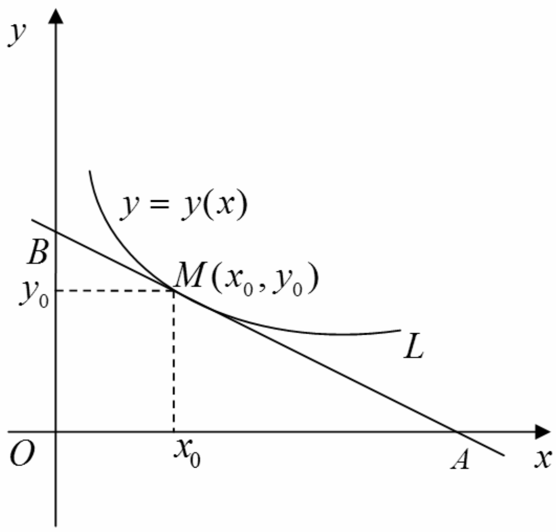

Рис. 10. Касательная, проведённая к кривой L в точке (x_0, y_0)

С помощью уравнения (2.6.81) найдем AO и OB:

$$AO = x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)}, \tag{2.6.82}$$

$$OB = y_0 - x_0 y'(x_0). \tag{2.6.83}$$

По условию $AB = a$, поэтому с учетом (2.6.82) и (2.6.83) получаем уравнение

$$\left(x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)}\right)^2 + \left(y_0 - x_0 y'(x_0)\right)^2 = a^2. \tag{2.6.84}$$

Так как равенство (2.6.84) выполняется в произвольной точке $(x, y) \in L$, то приходим к дифференциальному уравнению

$$\left(x - \frac{y}{y'}\right)^2 + (y - xy')^2 = a^2. \tag{2.6.85}$$

Запишем уравнение (2.6.85) в равносильном виде:

$$\left(y - xy'\right)^2 \left(1 + \frac{1}{y'^2}\right) = a^2. \tag{2.6.86}$$

Уравнение (2.6.86) равносильно совокупности уравнений Клеро:

$$y = xy' + a\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \tag{2.6.87}$$

$$\vee$$

$$y = xy' - a\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \tag{2.6.88}$$

Общие решения этих уравнений имеют вид $y = Cx + \dfrac{aC}{\sqrt{1 + C^2}}$ и $y = Cx - \dfrac{aC}{\sqrt{1 + C^2}}$ соответственно.

Найдем решение уравнения (2.6.87), не входящее в семейство $y = Cx + \dfrac{aC}{\sqrt{1 + C^2}}$.

Положив $y' = t$, из (2.6.87) получим

$$y = xt + \frac{at}{\sqrt{1 + t^2}} \Rightarrow dy = tdx + \left(x + \frac{a}{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)dt. \tag{2.6.89}$$

Из соотношения (2.6.27) с учетом (2.6.89) получим уравнение

$$\left(x+\frac{a}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dt = 0 . \qquad (2.6.90)$$

Из (2.6.90) следует, что

$$x = -\frac{a}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} . \qquad (2.6.91)$$

Учитывая (2.6.91), из уравнения $y = xt + at/\sqrt{1+t^2}$ получим выражение для y:

$$y = \frac{at^3}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} . \qquad (2.6.92)$$

Исключив параметр t из (2.6.91) и (2.6.92), получаем уравнение

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} . \qquad (2.6.93)$$

Как, известно, (2.6.93) – это уравнение астроиды, изображенной на рис. 11.

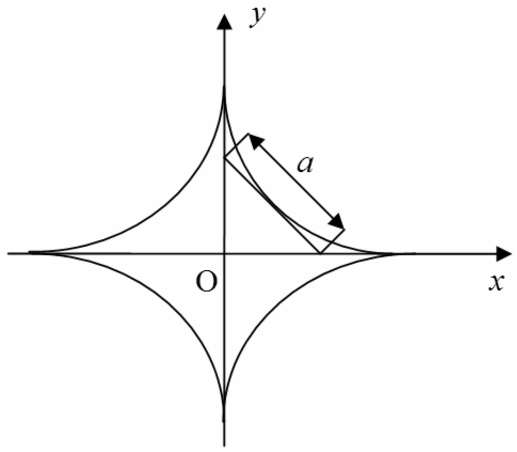

Рис. 11. График астроиды, построенный по уравнению (2.6.93)

Задания для работы в аудитории

1. Решить уравнения.

a) (№ 1.118[2]) Ответы:

$y'^2 + y(y-x)y' - xy^3 = 0$; $\left(\left(y - \frac{1}{x+C} \right) \left(y - Ce^{\frac{x^2}{2}} \right) = 0 \right)$

b) (№ 1.119[2])

$y'^2 + (\sin x - 2xy)y' - 2xy \sin x = 0$ $\left((y - \cos x - C)\left(ye^{-x^2} - C\right) = 0 \right)$

c) (№ 1.121[2])

$y'^2 - (y + x^2)y' + x^2 y = 0$ $\left(\left(y - Ce^x\right) \left(y - \frac{x^3}{3} - C \right) = 0 \right)$

2. Решить уравнения методом введения параметра

a) (№ 267[7]) Ответы:

$x = y'^3 + y'$

$$\begin{cases} x = t^3 + t, \\ y = \frac{3}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + C \end{cases}$$

b) (№ 271[7]) Ответы:

$y = y'^2 + 2y'^3$

$$\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + C \\ y = 2t^3 + t^2, y = 0 \end{cases}$$

3. Решить уравнения Лагранжа и Клеро.

Ответы:

a) (№ 287[7]). $y = xy' - y'^2$ $\left(y = Cx - C^2; y = \frac{x^2}{4} \right)$

b) (№ 290[7]). $y = xy' - (2 + y')$ $\left(y = Cx - C - 2 \right)$

c) (№ 567[7]). $x = \frac{1}{y'} y + \frac{1}{y'^2}$ $\left(y = Cx - \frac{1}{C}; y^2 = -4x \right)$

d) (№ 562[7]). $2y(y' + 2) = xy'^2$ $\left(y = \frac{1}{C}(x - C)^2; y = 0 \right)$

Задания для работы вне аудитории. Обязательный минимум

1. Решить уравнения.

Ответы:

a) (№ 15[6]). $y = xy' + \frac{1}{y'}$ $\left(y = Cx + \frac{1}{C}; y^2 = 4x \right)$

b) (№ 12[6]). $y'^2 = 9y^4$ $\left(y^2 = \frac{1}{(3x + C)^2} \right)$

c) (№ 16 [6]). $x = y'^3 - y' + 2$ $\left(\begin{cases} x = t^3 - t + 2, \\ y = \frac{3}{4}t^4 - \frac{t^2}{2} + C \end{cases} \right)$

d) (№ 76[2]). $yy'^2 - 2xy' + y = 0$ $\left(y^2 = 2Cx - C^2; y = \pm x \right)$

e) (№ 74[2]). $x^2 y'^2 - 2xyy' - x^2 = 0$ $\left(2Cy + x^2 = C^2 \right)$

f) (№ 555[4]). $y = y'^2 + 2y'^3$ $\left(\begin{cases} x = 2t + 3t^2 + C \\ y = t^2 + 2t^3; y = 0 \end{cases}\right)$

Задания повышенного уровня сложности

1 (№ 568 [4]). Составить дифференциальное уравнение кривой, касательные к которой отсекают на осях координат отрезки, составляющие в сумме $2a$.

Ответ: $y = xy' + 2a\dfrac{y'}{(y'-1)}$.

2 (№ 569 [4]). Составить дифференциальное уравнение кривой, касательная к которой образует с осями координат треугольник площадью $2a^2$.

Ответ: $y = xy' + 2a\sqrt{-y'}$.

3.Решить уравнения.

Ответы:

a) (№ 565 [4]). $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$. $\left(y = Cx + \sqrt{1 - C^2}; y^2 - x^2 = 1\right)$.

b) (№ 564 [4]). $y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}$. $\left(y = Cx - a\sqrt{1 + C^2}; x^2 + y^2 = a^2; ay < 0\right)$.

c) (№ 270 [7]). $y'(x - \ln y') = 1$. $\left(\begin{cases} x = \ln t + \dfrac{1}{t}, \\ y = t - \ln t + C \end{cases}\right)$.

d) (№ 278 [7]). $y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y$. $\left(y = \dfrac{C^2}{4} - \dfrac{(x-C)^2}{2}; y = \dfrac{x^2}{2}\right)$.

4. Решить уравнения.

Ответы:

a) (№ 364 [7]). $2xy' - y = \sin y'$. $y\left(\begin{cases} x = \dfrac{\sin t}{t} + \dfrac{\cos t}{t^2} + \dfrac{C}{t^2}, \\ y = \sin t + \dfrac{2\cos t}{t} + \dfrac{2C}{t}; y = 0. \end{cases}\right)$.

b) (№ 376 [7]). $y = y'\sqrt{1 + y^2}$. $\left(\begin{matrix} x = 2\sqrt{t^2+1} - \ln(1 + \sqrt{t^2+1}) + \ln Ct, \\ y = t\sqrt{t^2+1}; y = 0 \end{matrix}\right)$.

Контрольные вопросы

1. Как ставится задача Коши для уравнения первого порядка, не разрешённого относительно y'?

2. В чем состоит различие между полем направлений, определяемым уравнением первого порядка, не разрешенным относительно производной и полем направлений уравнения $y' = f(x, y)$?

3. Как интегрируется уравнение вида $F(y') = 0$?

4. Как интегрируется уравнение вида $F(x, y') = 0$?

5. Как интегрируется уравнение вида $F(y, y') = 0$?

6. Дайте определение уравнения Лагранжа и поясните метод его интегрирования.

7. Дайте определение уравнения Клеро и поясните метод его решения.

8. Какие вы знаете геометрические задачи на плоскости, приводящие к уравнению Клеро?

9. Какие кривые могут быть особыми решениями уравнения Лагранжа?

10. Может ли иметь особые решения уравнение Клеро?

11. Чем отличается уравнение Клеро от уравнения Лагранжа?

12. Пусть уравнение $F(x, y, y') = 0$ разрешено относительно искомой функции, то есть оно равносильно уравнению $y = \varphi(x, y')$ (2.6.94) . Как интегрируется уравнение (2.6.94) методом введения параметра?

13. Пусть уравнение $F(x, y, y') = 0$ разрешено относительно независимой переменной, то есть оно равносильно уравнению $x = \varphi(y, y')$ (2.6.95) . Как интегрируется уравнение (2.6.95) методом введения параметра?

14. Поясните, что означает утверждение: задача Коши с начальными данными x_0, y_0 имеет единственное решение относительно уравнения $F(x, y, y') = 0$?

15. Изобразите поле направлений дифференциального уравнения $y'^2 - 4y' - 5 = 0$. Есть ли точка (x_0, y_0), такая, что задача Коши с начальными данными x_0, y_0 имеет неединственное решение?

Литература

1. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Классика и современность. Математика / И.Г. Петровский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 204 с.
2. Самойленко А.А. Дифференциальные уравнения: Практ.курс: Учеб. пособие для вузов / А.А. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. 3-е изд., перераб. – М.: Высшая школа, 2006. – 382 с.
3. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений: учеб. пособие / Н.М. Матвеев. - 5-е изд., доп. – СПб. : Лань, 2003. – 832 с.
4. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учеб. пособие / Н.М. Матвеев. - 7-е изд.,доп. – СПб. : Лань, 2002. – 431 с.
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: ЛКИ, 2008. – 472 с.
6. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Оникс (Медиа), 2012. – 424 с.
7. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: Учеб. пособие для вузов / А.Ф. Филиппов. – М.: ЛКИ, 2011. – 240 с.
8. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н.П. Еругин. – Минск: Наука и техника, 1979. – 744 с.

Практическое занятие № 7. Тема. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения. Метод Пикара приближённого решения задачи Коши

Одной из важнейших задач в теории дифференциальных уравнений и в многочисленных ее приложениях является так называемая **задача Коши** или **начальная задача**.

Сформулируем ее для дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y). \tag{2.7.1}$$

Для уравнения (2.7.1) задача Коши ставится так: среди всех решений уравнения (2.7.1.) найти такое решение $y = y(x)$, что функция $y(x)$ принимает заданное значение y_0 при заданном значении аргумента x_0, то есть $y(x_0) = y_0$. Числа x_0, y_0 называются начальными данными, а условие $y = y_0$ при $x = x_0$ – начальным условием решения задачи Коши. Важно помнить, что x_0 и y_0 – наперед заданные числа.

Задача Коши геометрически формулируется следующим образом: среди всех интегральных кривых уравнения (2.7.1.) найти ту, которая проходит через точку (x_0, y_0).

Определение 2.7.1. Говорят, что задача Коши

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0 \tag{2.7.2}$$

имеет единственное решение, если существует такое $h > 0$, что на отрезке $[x_0-h, x_0+h]$ определено решение $y = y(x)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, и не существует решения, определенного на этом же отрезке и не совпадающего с решением $y = y(x)$ хотя бы в одной точке отрезка $[x_0-h, x_0+h]$, отличной от точки x_0. В противном случае задача Коши имеет неединственное решение.

Вопрос о единственности решения задачи Коши представляет исключительный интерес не только для теории дифференциальных уравнений, но и для разнообразных ее применений.

Теорема Пикара [4]. Пусть функция $f(x,y)$ удовлетворяет условиям:

1) $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике Ï $=\{(x,y)/|x-x_0|\le a, |y-y_0|\le b\}$, то есть $\exists M>0$ такое, что $\forall(x,y)\in$ Ï $/|f(x,y)|\le M$;

2) $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица в прямоугольнике Ï , то есть $\exists L>0$ такое, что для любых двух точек (x,y_1) и (x,y_2), принадлежащих прямоугольнику Ï , выполняется неравенство $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$. Тогда уравнение (2.7.2) имеет единственное решение $y=y(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$. Это решение определено и непрерывно дифференцируемо на отрезке $[x_0-h, x_0+h]$, где $h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$ и не выходит из прямоугольника Ï , то есть при $x\in[x_0-h, x_0+h]$ выполняется неравенство $|y(x)-y_0|\le b$.

Замечание 2.7.1 [2, 4]. Условие Липшица может быть заменено более грубым, но легко проверяемым условием существования ограниченной частной производной $f'_y(x,y)$ в прямоугольнике Ï .

В самом деле, если $|f'_y(x,y)|\le K$, то по теореме Лагранжа о конечном приращении $f(x,y_1)-f(x,y_2)=f'_y(x,\xi)(y_1-y_2)$, где ξ – значение переменной y, промежуточное между y_1 и y_2.

Следовательно, точка $(x,\xi)\in$ Ï , поэтому выполняется неравенство $|f(x,\xi)|\le K$ и верна оценка

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le K|y_1-y_2| \,. \tag{2.7.3}$$

Из неравенства (2.7.3) следует, что в качестве константы Липшица можно принять K. Итак, если выполняется неравенство $|f'_y(x,y)|\le K$ в прямоугольнике Ï , то по необходимости выполняется условие Липшица. Обратное неверно.

Так, например, функция $f(x,y)=|y|$ удовлетворяет условию Липшица на всей плоскости $\boldsymbol{R}^2$.

В самом деле,

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=\big||y_1|-|y_2|\big|\le|y_1-y_2|. \qquad (2.7.4)$$

Из неравенства (2.7.4) следует, что постоянная Липшица $L=1$. Вместе с тем в точках $(x,0)$ частная производная $f'_y(x,y)$ не существует.

Определение 2.7.2. Решение уравнения (2.7.1), в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи (2.7.2), называется **особым решением** уравнения (2.7.1).

Из определения общего решения уравнения (2.7.1) и определения особого решения следует, что особое решение не содержится в формуле общего решения (общего интеграла) ни при каком значении произвольной постоянной C, включая $\pm\infty$.

Приведем алгоритм нахождения особых решений уравнения (2.7.1) , он вытекает из теоремы Пикара. Действительно, из теоремы Пикара можно вывести только необходимое условие для особого решения.

Как правило, рассматривают уравнение (2.7.1) там, где правая часть $f(x,y)$ или $\dfrac{1}{f(x,y)}$ непрерывна.

Поэтому в точках особого решения нарушается условие ограниченности $f'_y(x,y)$.

Чтобы найти особые решения уравнения (2.7.1) в предположении, что $f(x,y)$ непрерывна, нужно:

1) найти кривые, подозрительные на особое решение, то есть кривые, вдоль которых $f'_y(x,y)$ не ограничена;
2) если таких кривых несколько, то проверить, являются ли они решениями (интегральными кривыми) уравнения (2.7.1);

3) если кривая L, подозрительная на особое решение, является решением (2.7.1), то убедиться, что в каждой ее точке нарушается единственность решения.

Если выполняются все эти условия, то L – особое решение уравнения (2.7.1).

Пример 2.7.1. Решение $y = 0$ уравнения

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}} \equiv f(x, y) \qquad (2.7.5)$$

является особым.

Действительно, правая часть уравнения (2.7.5) непрерывна всюду в $\boldsymbol{R}^2$. Но $f'_y(x, y) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{y}}$ обращается в бесконечность в точках оси Ox.

Общее решение уравнения (2.7.5) запишем в виде:

$$y = (x + C)^3. \qquad (2.7.6)$$

Формула (2.7.6) задаёт семейство кубических парабол, точки перегиба которых расположены на прямой $y = 0$. Кроме этого, $y = 0$ – очевидное решение уравнения (2.7.5), которое нельзя получить из формулы (2.7.6) ни при каком значении $C \in [-\infty, +\infty]$. Так как через каждую точку прямой $y = 0$ проходит и кубическая парабола и сама прямая $y = 0$, то в каждой точке интегральной прямой $y = 0$ нарушается единственность решения. Вывод: $y = 0$ – особое решение уравнения (2.7.5).

Пример 2.7.2. Найти особые решения уравнения

$$y' = \sqrt{1 - y^2} \qquad (2.7.7)$$

$f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$. Функция $f(x, y)$ определена и непрерывна всюду в полосе плоскости $-\infty < x < +\infty, -1 \le y \le 1$. Но $f'_y(x, y) = -\dfrac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$ обращается в бесконечность в точках прямых $y = 1$ и $y = -1$. При этом $y = 1$ и $y = -1$ – очевидные решения уравнения (2.7.7).

Найдём общее решение уравнения (2.7.7).

$$dy/\sqrt{1-y^2}=dx \Rightarrow \arcsin y = x+C, |x+C| \le \pi/2,$$

$$y=\sin(x+C), |x+C| \le \frac{\pi}{2}. \qquad (2.7.8)$$

Итак, общее решение уравнения (2.7.7) задаётся формулой (2.7.8). Интегральные кривые семейства (2.7.8) изображены на рис. 12.

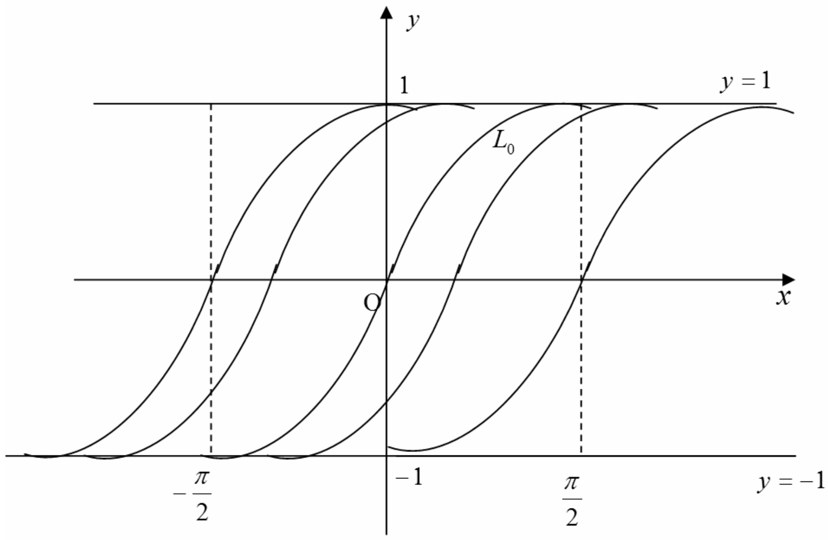

Рис. 12. Интегральные кривые семейства (2.7.8)

Все интегральные кривые семейства (2.7.8) можно получить из интегральной кривой L_0 смещением вправо и влево. Из рис.9 видно, что все интегральные кривые семейства (2.7.8) касаются прямых $y=1$ и $y=-1$. таким образом, через каждую точку прямой $y=1(y=-1)$ проходит и дуга синусоиды и сама прямая $y=1(y=-1)$, то есть в каждой точке прямых $y=\pm 1$ нарушается единственность решения. Вывод: прямые $y=1$ и $y=-1$, и только они являются особыми решениями уравнения (2.7.7).

Отметим, что решение задачи Коши напрямую связано с так называемым интегральным уравнением, которое эффективно используется для приближённого решения задачи Коши (2.7.2). Покажем, что решение задачи Коши равносильно решению некоторого интегрального уравнения, то есть уравнения, в котором искомая функция находится под знаком интеграла.

Пусть $y = y(x)$ – решение уравнения (2.7.1), заданное в некоторой окрестности $(x_0 - h_0, x_0 + h_0)$ точки x_0 и удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Тогда при $x \in (x_0 - h_0, x_0 + h_0)$ выполняется тождество $y' \equiv f(x,(y(x))$. Интегрируя это тождество по x и учитывая начальное условие $y(x_0) = y_0$, получим

$$y(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, x \in (x_0 - h_0, x_0 + h_0). \qquad (2.7.9)$$

Тождество (2.7.9) свидетельствует о том, что решение задачи Коши удовлетворяет интегральному уравнению

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \qquad (2.7.10)$$

Обратно, если непрерывная функция $y = y(x)$, $x \in (x_0 - h_0, x_0 + h_0)$ удовлетворяет интегральному уравнению (2.7.10), то можно проверить, что $y(x)$ является решением задачи Коши.

Решение $y = y(x)$ интегрального уравнения (2.7.10) для всех x, близких к x_0, можно построить методом последовательных приближений по формуле

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt, \ n = 1, 2... \qquad (2.7.11)$$

Здесь $y_0(x) \equiv y_0$, хотя в качестве y_0 можно взять любую другую непрерывную на отрезке $[x_0 - h_0, x_0 + h_0]$ функцию [8].

Пусть $y_n(x)$ – приближённое решение задачи Коши (2.7.2). Возникает вопрос, какова погрешность приближенного решения? Ответ на этот вопрос даёт следующая формула оценки погрешности

$$|y(x) - y_n(x)| \le \frac{ML^{n-1}h^n}{n!}, \qquad (2.7.12)$$

где $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$.

Точное решение $y(x)$ задачи Коши является пределом последовательности

$$y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x), \ldots, \qquad (2.7.13)$$

общий член которой вычисляется по формуле (2.7.11).

Доказательство этого факта представляет собой один из этапов доказательства теоремы Пикара [6].

Пример 2.7.3. Доказать, что уравнение

$$y' = x^2 + y^2 \qquad (2.7.14)$$

удовлетворяет всем условиям теоремы Пикара и построить четыре первых приближения к решению задачи Коши с начальным условием $y(0) = 0$. Оценить погрешность третьего приближения.

Решение. Так как правая часть уравнения (2.7.14) является многочленом относительно x и y, то существует решение уравнения с любыми начальными данными x_0, y_0, и это решение единственно. Для оценки области определения решения построим прямоугольник $\ddot{I} = \{(x,y)/|x| \le a, |y| \le b\}$, взяв в качестве a и b любые положительные числа, например, $a = b = 2$. Тогда $M = 2^2 + 2^2 = 8; h = \min\left(2, \frac{2}{8}\right) = \frac{1}{4}$.

Таким образом, уравнение (2.7.14) имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее условию $y(0) = 0$, которое определено и непрерывно дифференцируемо, по крайней мере, на отрезке $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \Big/ \ |y(x)| \le 2.$$

Примем в качестве нулевого приближения функцию $y_0(x) = 0$. Остальные приближения вычислим по формуле (2.7.11)

$$y_1 = \int_0^x t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^x = \frac{x^3}{3};$$

$$y_2 = \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9} \right) dt = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63} \right) \Bigg|_0^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63};$$

$$y_3 = \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9} + \frac{2t^{10}}{189} + \frac{t^{14}}{63^2} \right) dt =$$

$$= \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63} + \frac{2t^{11}}{189 \times 11} + \frac{t^{15}}{63^2 \times 15} \right) \Bigg|_0^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{1979} + \frac{x^{15}}{10395}.$$

Согласно неравенству (2.7.12) имеем оценку погрешности $y = y_3(x)$:

$$\left| y(x) - y_3(x) \right| \le \frac{8L^2 \left(\frac{1}{4} \right)^3}{6}. \qquad (2.7.15)$$

В неравенстве (2.7.15) $L = \max \left| f'_y(x, y) \right|$ в прямоугольнике Ï . $f'_y(x, y) = 2y$, следовательно, $L = 4$.

$$\left| y(x) - y_3(x) \right| \le \frac{8 \cdot 4^2 \cdot \frac{1}{4^3}}{6} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33..$$

Ответ: $y_0(x) = 0$, $y_1(x) = \frac{x^3}{3}$, $y_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$,

$y_3(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{1979} + \frac{x^{15}}{10395}$; $\left| y(x) - y_3(x) \right| \le 0{,}33$.

Замечание 2.7.2. Уравнение (2.7.14) является частным случаем специального уравнения Риккати

$$\frac{dy}{dx} + Ay^2 = Bx^m, \qquad (2.7.16)$$

где A, B, m – постоянные числа.

При $m = 0$ или $m = -2$ уравнение (2.7.16) интегрируется в квадратурах, а также при любом значении m, для которого выражение

$$\frac{m}{2m + 4}, \qquad (2.7.17)$$

где $m \ne 0; -2$, является целым числом.

При всех других значениях показателя m уравнение (2.7.16) не интегрируется в квадратурах [4]. Для уравнения (2.7.14) $\frac{m}{2m+4}=\frac{1}{4}$ – не целое число. Поэтому уравнение (2.7.14) не интегрируется в квадратурах.

Рассмотренный нами пример 2.7.3 и замечание 2.7.2 являются подтверждением того, что в теории дифференциальных уравнений и в её многочисленных приложениях особое значение приобретают приближённые (численные) методы интегрирования дифференциальных уравнений.

Замечание 2.7.3. Если в процессе интегрирования дифференциального уравнения (2.7.1) мы делим обе его части на некоторую функцию $M(x,y)$, то мы получаем, вообще говоря, уравнение, не равносильное данному, так как могут быть потеряны решения вида $y=y(x)$ или $x=x(y)$, для которых $M(x,y)$ обращается в нуль. Если эти решения не содержатся в формуле общего решения (общего интеграла), то, очевидно, они являются особыми.

Пример 2.7.4. ([5, №141]) Общее решение дифференциального уравнения

$$2x\sqrt{1-y^2}dx+ydy=0 \tag{2.7.18}$$

задаётся формулой

$$x^2-\sqrt{1-y^2}=C. \qquad (2.7.19).$$

В процессе интегрирования уравнения (2.7.18) обе его части делятся на $\sqrt{1-y^2}$.Очевидными решениями уравнения (2.7.18) являются прямые $y=1$ и $y=-1$, в точках которых $\sqrt{1-y^2}$ обращается в нуль. Эти решения нельзя найти из формулы (2.7.19) ни при каком числовом значении $C\in[-\infty;+\infty]$. Согласно замечанию 2.7.3 $y=1$ и $y=-1$ – особые решения уравнения (2.7.18).

Обратимся теперь к вопросу об особых решениях дифференциального уравнения

$$F(x, y, y') = 0\,, \qquad (2.7.20)$$

не разрешенного относительно производной y'.

Задача нахождения решения $y = y(x)$ уравнения (2.7.20), удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$, где x_0, y_0 – наперёд заданные числа, называется задачей Коши, как и в случае уравнения (2.7.1). Решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 называется единственным для уравнения (2.7.20), если через точку (x_0, y_0) в достаточно малой её окрестности проходит столько интегральных кривых, сколько направлений поля определяет уравнение (2.7.1) в этой точке. В противном случае задача Коши имеет неединственное решение.

Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши $F(x, y, y') = 0$, $y(x_0) = y_0$ сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2.7.1 [4]. Пусть функция $F(x, y, y')$ удовлетворяет условиям:

1). $F(x, y, y')$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными в некоторой замкнутой окрестности точки (x_0, y_0, y'_0);

2). $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$;

3). $F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0$.

Тогда уравнение (2.7.20) имеет единственное решение $y = y(x)$, определенное и непрерывно дифференцируемое в некоторой окрестности точки x_0, удовлетворяющее начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$ и такое, что $y'(x_0) = y'_0$.

Пример 2.7.5 [4]. Общий интеграл уравнения

$$y'^3 - 4yy' = 0 \qquad (2.7.21)$$

имеет вид:

$$(y - C)(\sqrt{y} - x - C)(\sqrt{y} + x - C) = 0. \qquad (2.7.22)$$

Прямая $y = 0$ является особым решением уравнения (2.7.21). Заметим, что в точках этой прямой не выполняется условие 3 сформулированной выше теоремы.

Замечание 2.7.4. Особое решение уравнения (2.7.1) нельзя найти из семейства интегральных кривых, образующих общее решение (2.7.1) ни при каком значении произвольной постоянной $\tilde{N}\in[-\infty;+\infty]$. В случае уравнения (2.7.20) дело обстоит иначе. Так, например, особое решение $y=0$ уравнения (2.7.21) получается из формулы (2.7.22) при $C=0$.

Очевидно, что в точках особого решения должно быть нарушено хотя бы одно из трёх условий теоремы 2.7.1. В дифференциальных уравнениях, встречающихся в приложениях, выполняются обычно условия 1 и 2, но условие 3 часто нарушается.

Если считать выполненным условие 1 теоремы 2.7.1, то кривые, подозрительные на особое решение уравнения (2.7.20), могут быть найдены исключением y' из системы

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0, \\ F'_{y'}(x,y,y')=0. \end{cases} \tag{2.7.23}$$

Кривая $D(x,y)=0$, полученная из системы (2.7.23) исключением y', называется **дискриминантной кривой** дифференциального уравнения (2.7.20). Дискриминантная кривая будет особым решением уравнения (2.7.20), если она является решением этого уравнения и в каждой её точке нарушается единственность решения задачи Коши.

Пример 2.7.6 [4]. Дискриминантной кривой дифференциального уравнения

$$xy'^2-2yy'+4x=0 \tag{2.7.24}$$

является кривая второго порядка $y^2-4x^2=0$, распадающаяся на две прямые $y=2x$ и $y=-2x$.

В самом деле, система (2.7.23) в нашем случае имеет вид:

$$\begin{cases} xy'^2-2yy'+4x=0, \\ 2xy'-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'=\dfrac{y}{x}(x\neq 0), \\ \dfrac{y^2}{x}-\dfrac{2y^2}{x}+4x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'=\dfrac{y}{x}(x\neq 0), \\ y^2-4x^2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y^2-4x^2=0$ – дискриминантная кривая дифференциального уравнения (2.7.24).

Полупрямые $y = \pm 2x (x \neq 0)$ являются особыми решениями уравнения (2.7.24), так как в каждой точке этих полупрямых нарушается единственность решения задачи Коши [4].

Понятие **огибающей семейства кривых** существенно используется в процессе поиска особых решений дифференциального уравнения.

Определение 2.7.3 [7] Огибающей однопараметрического семейства кривых

$$\Phi(x, y, p) = 0 \tag{2.7.25}$$

называется кривая, которая касается каждой кривой семейства (2.7.25) в одной или нескольких точках и притом вся состоит из этих точек касания.

Пример 2.7.7. Найти огибающую семейства окружностей

$$(x-a)^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{2.7.26}$$

Продифференцируем по параметру a левую часть уравнения (2.7.26) и исключим a из системы

$$\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 - 1 = 0, \\ -2(x-a) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a, \\ y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Прямые $y = \pm 1$ касаются каждой окружности семейства (2.7.26), поэтому являются огибающими семейства окружностей (2.7.26) (см. рис.13).

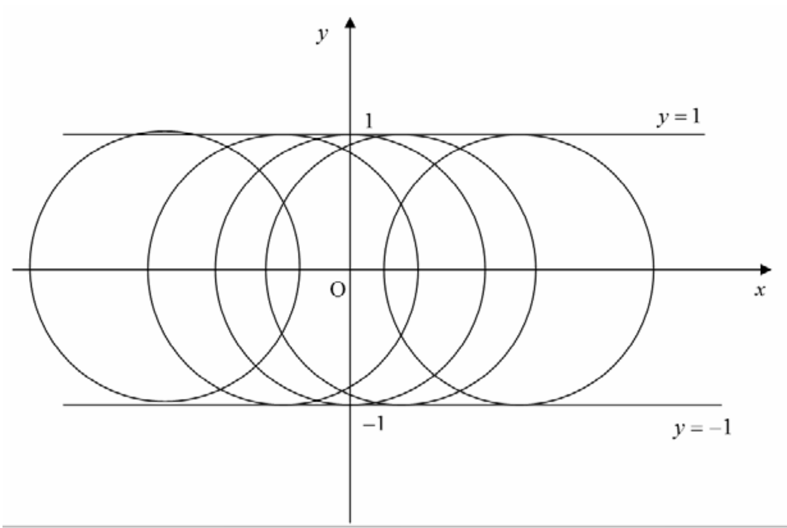

Рис. 13. Прямые $y = \pm 1$ касаются семейства окружностей (2.7.26)

Из курса математического анализа (см. [7]) известно, что огибающая входит в состав дискриминантной кривой.

Предположим, что общий интеграл уравнения (2.7.20) записан в виде:

$$\Phi(x,y,C)=0. \qquad (2.7.27)$$

Если есть огибающая семейства (2.7.27), то согласно определению 2.7.3 она является особым решением уравнения (2.7.20), ибо в каждой своей точке огибающая имеет общую касательную с некоторой кривой семейства (2.7.27). Это же означает, что число интегральных кривых, проходящих через каждую точку огибающей, больше, чем число направлений поля, определяемых уравнением (2.7.20) в этой точке.

Таким образом, особые решения уравнения (2.7.20) можно определить с помощью огибающей.

Пусть L – некоторая ветвь C – дискриминантной кривой семейства (2.7.27), то есть кривой $\varphi(x,y)=0$, получающейся исключением C из системы

$$\begin{cases} \Phi(x,y,C)=0, \\ \Phi'_C(x,y,C)=0. \end{cases} \qquad (2.7.28)$$

Для того, чтобы L была огибающей семейства (2.7.27), достаточно выполнения условий, приведённых в следующей теореме.

Теорема 2.7.2 [2]. Кривая L, удовлетворяющая системе (2.7.28), является огибающей семейства (2.7.27), если на ней выполнены условия:

1) существуют ограниченные по модулю частные производные, то есть $\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right| \le N_1, \left|\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right| \le N_2, N_1>0, N_2>0$;
2) $\frac{\partial\Phi}{\partial x} \ne 0$ или $\frac{\partial\Phi}{\partial y} \ne 0$.

Замечание 2.7.5. а) Условие 2 теоремы 2.7.2 может быть записано в виде $\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right| > 0$; б) условия 1 и 2 теоремы 2.7.2, являясь достаточными, отнюдь не являются необходимыми. Это означает, что кривые, на которых нарушено хотя бы одно из условий 1 или 2, могут быть огибающими.

Пример 2.7.8 [2]. Известно, что уравнением

$$(y-C)^2-(x-C)^3=0 \tag{2.7.29}$$

задано семейство интегральных кривых дифференциального уравнения Лагранжа

$$x-y=\frac{9}{4}y'^2-\frac{8}{27}y'^3. \tag{2.7.30}$$

Найти особое решение уравнения (2.7.30).

С учётом (2.7.29) запишем систему вида (2.7.28)

$$\begin{cases}(y-C)^2-(x-C)^3=0,\\ -2(y-C)+3(x-C)^2=0.\end{cases} \tag{2.7.31}$$

Система (2.7.31) равносильна совокупности систем:

$$\begin{cases}C=x,\\ y=x\end{cases} \tag{2.7.32}$$

или

$$\begin{cases}C=x-\dfrac{4}{9},\\ y=x-\dfrac{4}{27}.\end{cases} \tag{2.7.33}$$

Таким образом, C – дискриминантная кривая дифференциального уравнения (2.7.30) согласно (2.7.32) и (2.7.33) распадается на две прямые: $y=x$ и $y=x-\dfrac{4}{27}$.

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что функция $y=x$ не является решением уравнения (2.7.30). Прямая $y=x-\dfrac{4}{27}$ является особым решением, так как на ней выполнены оба условия теоремы 2.7.2.

Пример 2.7.9 [2]. Дано семейство интегральных кривых

$$y^2-(x-C)^3=0 \tag{2.7.34}$$

некоторого дифференциального уравнения. Найти особое решение этого же уравнения.

Решение. Определим C – дискриминантную кривую из системы вида (2.7.28): $\begin{cases} y^2-(x-C)^3=0, \\ x-C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=x, \\ y=0. \end{cases}$

Итак, $y=0$ – дискриминантная кривая дифференциального уравнения, общее решение которого записано в виде семейства (2.7.34).

На прямой $y=0$ обе частные производные $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}$ обращаются в нуль, то есть не выполняется условие 2 теоремы 2.7.2.

Ввиду условия $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=0$ при $y=0$ делаем вывод: прямая $y=0$ – геометрическое место точек кривых семейства (2.7.34). Эти точки называются точками возврата.

Прямая $y=0$ касается каждой кривой семейства полукубических парабол (2.7.34) в точке возврата и вся состоит из таких точек. Согласно определению 2.7.3 прямая $y=0$ – огибающая семейства (2.7.34), следовательно, $y=0$ – особое решение дифференциального уравнения, общим интегралом которого является семейство интегральных кривых (2.7.34) (см. рис. 14).

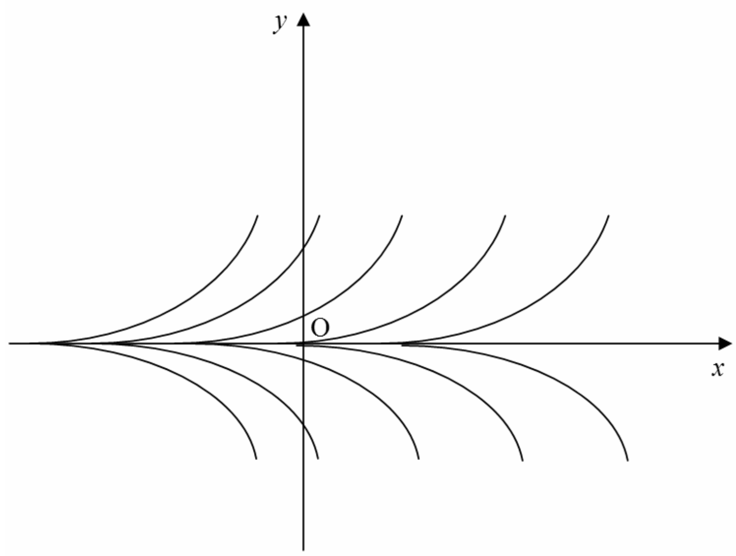

Рис. 14. Прямая $y=0$ – огибающая семейства интегральных кривых $y^2-(x-C)^3=0$

Правило А отыскания особых решений уравнения (2.7.20)

1. Найти кривые, подозрительные на особое решение, они являются ветвями дискриминантной кривой $D(x,y)$, полученной из системы (2.7.23) исключением y'.
2. Для каждой ветви дискриминантной кривой проверить, является ли эта ветвь решением уравнения (2.7.20).
3. Если ветвь дискриминантной кривой является решением уравнения (2.7.20) и вся состоит из точек неединственности решения задачи Коши, то она является особым решением уравнения (2.7.20).

Замечание 2.7.6. Если не существует действительных ветвей дискриминантной кривой уравнения (2.7.20) или существуют ветви дискриминантной кривой, ни одна из которых не является решением уравнения (2.7.20), то нет особых решений этого уравнения. Дискриминантная кривая также не является особым решением уравнения (2.7.20), если она является решением уравнения (2.7.20), но не представляет собой геометрическое место точек неединственности решения задачи Коши.

Правило Б отыскания особых решений уравнения (2.7.20).

1. Найти C – дискриминантную кривую $D_C(x,y)=0$ уравнения (2.7.20) исключением C из системы (2.7.28).

2. Для каждой действительной ветви кривой $D_C(x,y)=0$ проверить, является ли она огибающей семейства (2.7.27). Если некоторая ветвь $y=\varphi(x)$ кривой $D_C(x,y)=0$ является огибающей семейства (2.7.27), то $y=\varphi(x)$ – особое решение уравнения (2.7.20).

Замечание 2.7.7. В общем случае, чтобы узнать, является ли ветвь $y=\varphi(x)$ дискриминантной кривой огибающей семейства (2.7.27), следует выяснить, касаются ли её в каждой точке кривые семейства (2.7.27).

Пример 2.7.10 [1]. Найти особые решения дифференциального уравнения

$$y'^2 - yy' + 4e^x = 0. \qquad (2.7.35)$$

Решение. Воспользуемся правилом А. Найдем дискриминантную кривую исключением y' из системы вида (2.7.23):

$$\begin{cases} y'^2 - yy' + 4e^x = 0, \\ 2y' - y = 0. \end{cases} \qquad (2.7.36)$$

Система (2.7.36) равносильна совокупности систем:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{2}, \\ y = 4e^{\frac{x}{2}} \end{cases} \qquad (2.7.37)$$

или

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{2}, \\ y = -4e^{\frac{x}{2}}. \end{cases} \qquad (2.7.38)$$

Из (2.7.37) и (2.7.38) следует, что кривые $y = 4e^{\frac{x}{2}}$ и $y = -4e^{\frac{x}{2}}$ – ветви дискриминантной кривой $D(x, y) = y^2 - 16e^x = 0$.

Кроме того, $y = 4e^{\frac{x}{2}}$ и $y = -4e^{\frac{x}{2}}$ – интегральные кривые уравнения (2.7.35), нетрудно в этом убедиться.

Найдем общее решение уравнения (2.7.35) методом введения параметра:

$$\begin{cases} y' = p, \\ y = p + \dfrac{4}{p}e^x. \end{cases} \qquad (2.7.39)$$

Основное соотношение $dy = y'dx$ с учётом (2.7.39) запишем в виде:

$$\left(1 - \frac{4e^x}{p^2}\right)dp + \frac{4e^x}{p}dx = pdx \Rightarrow (p^2 - 4e^x)dp = p(p^2 - 4e^x)dx. \qquad (2.7.40)$$

Уравнение (2.7.40) равносильно совокупности уравнений

$$p^2 - 4e^x = 0 \qquad (2.7.41)$$

или

$$dp - pdx = 0. \qquad (2.7.42).$$

Из (2.7.41) следует, что $p = 2e^{\frac{x}{2}}$ или $p = -2e^{\frac{x}{2}}$.

Решив уравнение (2.7.42) как уравнение с разделяющимися переменными, получим

$$p = Ce^{x} \qquad (2.7.43).$$

Заменяя во втором уравнении системы (2.7.39) p согласно (2.7.43), получим общее решение уравнения (2.7.35)

$$y = Ce^{x} + 4/C. \qquad (2.7.44)$$

Очевидно, значениям $p = \pm 2e^{\frac{x}{2}}$ соответствуют ветви дискриминантной кривой, найденной из системы (2.7.36).

Покажем, что в каждой своей точке интегральная кривая $y = 4e^{\frac{x}{2}}$ касается одной из кривых семейства (2.7.44).

Условие касания кривой $y = 4e^{\frac{x}{2}}$ с кривой семейства (2.7.44) запишем в виде системы:

$$\begin{cases} 4e^{\frac{x}{2}} = Ce^{x} + 4/C, \\ 2e^{\frac{x}{2}} = Ce^{x}. \end{cases} \qquad (2.7.45)$$

Выразив C из второго уравнения системы (2.7.45), подставим в первое уравнение:

$$\begin{cases} C = 2e^{-\frac{x}{2}}, \\ 4e^{\frac{x}{2}} = 2e^{-\frac{x}{2}}e^{x} + \dfrac{4}{2e^{-\frac{x}{2}}}, \end{cases} \begin{cases} C = 2e^{-\frac{x}{2}}, \\ 4e^{\frac{x}{2}} = 4e^{\frac{x}{2}}. \end{cases} \qquad (2.7.46)$$

Второе уравнение системы (2.7.46) выполняется тождественно. Это означает, что какую бы точку мы ни взяли на интегральной кривой $\ell : y = 4e^{\frac{x}{2}}$, найдётся соответствующая ей кривая семейства (2.7.44), касающаяся ℓ в этой точке. Аналогично доказывается, что вторая ветвь $y = -4e^{\frac{x}{2}}$ дискриминантной кривой является интегральной кривой уравнения (2.7.35), сплошь состоящей из точек неединственности решения задачи Коши. Тем самым установлено, что кривые $y = \pm 4e^{\frac{x}{2}}$, и только они, являются особыми решениями уравнения (2.7.35).

Далее воспользуемся правилом Б.

Найдем C – дискриминантную кривую уравнения (2.7.35), исключив C из системы вида (2.7.28)

$$\begin{cases} y - Ce^x - \dfrac{4}{C} = 0, \\ \dfrac{4}{C^2} - e^x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 2e^{-\frac{x}{2}}, \\ y = 4e^{\frac{x}{2}}, \end{cases} \tag{2.7.47}$$

или

$$\begin{cases} C = -2e^{\frac{x}{2}}, \\ y = -4e^{\frac{x}{2}}. \end{cases} \tag{2.7.48}$$

Из (2.7.47) и (2.7.48) видно, что кривые $\ell_1 : y = 4e^{\frac{x}{2}}$ и $\ell_2 : y = -4e^{\frac{x}{2}}$ являются C – дискриминантной кривой.

В точках кривой ℓ_1 выполнены условия теоремы 2.7.2 , так функция $\Phi(x, y, C) = -y - Ce^x - \dfrac{4}{C}$ непрерывно дифференцируема как по переменной x, так и по переменной y, и кроме того, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = -1 \neq 0$. Следовательно, ℓ_1 – огибающая семейства (2.7.44), а значит, особое решение уравнения (2.7.35). Аналогичными рассуждениями устанавливается, что кривая ℓ_2 является тоже особым решением уравнения (2.7.35).

Задания для работы в аудитории

1. Построить последовательные приближения $y_0(x), y_1(x), y_2(x)$ к решению данного уравнения с начальными данными.

а) (№221[6]). $y' = x - y^2, y(0) = 0$.

$$\text{Ответ:} \quad y_0(x) = 0, y_1(x) = \frac{x^2}{2}, \; y_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20}.$$

2. Указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями.

а) (№223[3]). $y' = x + y^3, \; y(0) = 0$.

Ответ: $[-0{,}5;0{,}5]$.

3. Для уравнения $y' = x - y^2$ с начальным условием $y(0) = 0$ построить третье приближение $y_3(x)$ к решению и оценить его погрешность при $x \in [0;0{,}5]$.

Ответ: $y_3(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^5}{20} + \dfrac{x^8}{160} - \dfrac{x^{11}}{4400}; \; |y(x) - y_3(x)| < 0{,}00003.$.

4. Могут ли пересекаться графики двух решений уравнения на плоскости xOy в некоторой точке (x_0, y_0)

	Ответы:
а) $y' = x^2 + xy^3$	(нет);
б) $y'^2 - (x + y)y' + xy = 0$	(да).

5. Найти особые решения дифференциальных уравнений

	Ответы:
а) $y' = \sqrt{1 - y^2}$	$(y = 1, y = -1)$;
б) $y = x + y' - \ln y'$	$(y = x + 1)$.

Задания для работы вне аудитории. Обязательный минимум

1. Построить последовательные приближения $y_0(x), y_1(x), y_2(x)$ к решению данного уравнения с начальным условием:

а) (№221[3]) $y' = y^2 + 3x - 1, y(1) = 1$.

Ответ: $y_0(x) = 1, y_1(x) = x^3, y_2(x) = 1 + x^3 - x + \dfrac{x^7 - 1}{7}$.

2. Указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данным начальным условием.

а) (№223[3]). $\dfrac{dx}{dt} = t + e^x, x(1) = 0$

Ответ: $[0{,}8;1{,}2]$.

3. Для уравнения $y' = x + y$ с начальным условием $y(0) = 0$ построить второе приближение $y_2(x)$ к решению и оценить его погрешность при $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$

Ответ: $y_2(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}; |y(x) - y_2(x)| \le 0{,}75.$

4. Могут ли пересекаться графики двух решений уравнения на плоскости xOy в некоторой точке (x_0, y_0):

Ответы:

а) $y' = \sin x - \cos x$ (нет);

б) $y'^2 + (x^2 + y)y' + x^2 y = 0$ (да).

5. Найти особые решения дифференциальных уравнений.

Ответы:

а) $2y\sqrt{y - y^2}dx - (x^2 + 1)dy = 0$ $(y = 1)$

б) $y^2 y'^2 + y^2 - 1 = 0$ $(y = 1, y = -1)$

Задания повышенного уровня сложности

1. Найти особое решение дифференциального уравнения, если известно семейство решений этого уравнения.

Ответы:

а) (№ 297[3]) $y = Cx^2 - C^2$ $\left(y = \dfrac{x^4}{4}\right)$

б) (№ 297[3]) $y = C(x - C)^2$ $\left(y = 0, y = \dfrac{4}{27}x^3\right)$

2. Доказать, что дискриминантная кривая уравнения Клеро совпадает с дискриминантной кривой семейства интегральных кривых, образующих общее решение этого уравнения (№571[5]).

3. Составить дифференциальное уравнение кривой, касательная к которой образует с осями координат треугольник площадью $2a^2$. Найти эту кривую (№569[5]).

Ответ: $y = xy' + 2a\sqrt{-y'}; xy = a^2$

4. Докажите, что дифференциальное уравнение $y' = \dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}$, где Q, P – некоторые многочлены с действительными коэффициентами, не имеет особых решений.

5. Найдите особые решения дифференциальных уравнений.

Ответы:

а) (№80[1]). $y'^2 - yy' + e^x = 0$. $\left(y = 2e^{\frac{x}{2}}, y = -2e^{\frac{x}{2}}\right)$

б) (№80[1]). $4(1 - y) = (3y - 2)^2 y'^2$ $(y = 1)$

6. По виду уравнения найти кривые, подозрительные на особое решение, и проверить, будут ли они особыми решениями.

Ответы:

а) (№532[5]). $(xy'+y)^2+3x^5(xy'-2y)=0$ $\left(y=-\frac{x^5}{4}\right)$

б) (№532[5]). $y'^2-2yy'+x^2=0$ (особых решений нет).

7. По виду общего интеграла найти кривые, подозрительные на особое решение, и проверить, будут ли они особыми решениями.

а) (№537[5]). $y^2(1+y'^2)=a^2; (x+C)^2+y^2=a^2$

Ответ: $y=\pm a$ – особые решения;

б) (№538[5]). $y'-4y=0; (\sqrt{y}-x-C)(\sqrt{y}+x-C)=0$.

Ответ: $y=0$ – особое решение.

Указание. Сначала разрешить уравнение семейства интегральных кривых относительно y.

8. Построить интегральные кривые уравнения, предварительно проинтегрировав его.

Ответы:

а) $y'^2(1-x^2)-x^2=0$. $((y-C)^2+x^2-1=0$ – общий интеграл);

б) $y'^2-x^2=0$ $\left(y-\frac{x^2}{2}-C\right)\left(y+\frac{x^2}{2}-C\right)=0$ – общий интеграл.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему Пикара о существовании и единственности решения задачи Коши $y'=f(x,y), y(x_0)=y_0$.
2. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения задачи Коши $F(x,y,y')=0, y(x_0)=y_0$.
3. Как следует понимать, что решение уравнения $y'=f(x,y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0)=y_0$, единственно?
4. Как следует понимать, что решение уравнения $F(x,y,y')=0$ с начальными данными x_0 и y_0 единственно?

5. Приведите правило определения особых решений уравнения $y' = f(x, y)$. Как определяются кривые, подозрительные на особое решение этого уравнения?
6. Приведите правило определения особых решений уравнения $F(x, y, y') = 0$.
7. Дайте определение дискриминантной кривой дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$.
8. Как определить C – дискриминантную кривую семейства кривых $\Phi(x, y, C) = 0$, зависящих от параметра C ?
9. Дайте определение огибающей семейства кривых $\Phi(x, y, C) = 0$. Докажите, что семейство интегральных кривых $y = (x + C)^2, (x \geq -C)$ дифференциального уравнения $y' = 2\sqrt{y}$ имеет огибающую $y = 0$.
10. Докажите, что огибающая семейства интегральных кривых дифференциального уравнения первого порядка является особым решением.
11. Дайте определение особого решения дифференциального уравнения первого порядка. С помощью огибающей доказать, что прямая $y = x$ – особое решение уравнения $3xy'^2 - 6yy' + x + 2y = 0$.

Указание. Воспользоваться общим интегралом этого уравнения: $x^2 + C(x - 3y) + C^2 = 0$.

Литература

1. Самойленко А.А. Дифференциальные уравнения: Практ.курс: Учеб. пособие для вузов / А.А. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. 3-е изд., перераб. – М.: Высшая школа, 2006. – 382 с.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Оникс (Медиа), 2012. – 424 с.
3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: Учеб. пособие для вузов / А.Ф. Филиппов. – М. : ЛКИ, 2011. – 240 с.

4. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений: учеб. пособие / Н.М. Матвеев. - 5-е изд., доп. – СПб. : Лань, 2003. – 832 с.
5. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учеб. пособие / Н.М. Матвеев. - 7-е изд.,доп. – СПб. : Лань, 2002. – 431 с.
6. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: ЛКИ, 2008. – 472 с.
7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Учебник. В 3-х тт. Том 1. 9-е, стер. издание. / Г.М. Фихтенгольц. – М. : Лань, 2009. – 608 с.
8. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями / М.Л. Краснов, А. Киселев, Г. Макаренко. – М.: Либроком, 2013. – 256 с.

2. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ФИЗИКЕ

Как правило, все простые модели физических систем описываются дифференциальными уравнениями первого порядка.

Для решения прикладных физических задач рекомендуем использовать схему, состоящую из следующих этапов [1]:

1) составление дифференциального уравнения;

2) решение дифференциального уравнения;

3) интерпретация результатов.

На первом этапе определяют физический закон, описывающий процесс, заданный в условии задачи. Если он существует, то необходимо:

– записать формулу, соответствующую физическому закону;

– определить, какая из величин представленных в формуле является независимой переменной;

– выразить из формулы необходимые изменяющиеся величины через независимую переменную и данные задачи;

– выразить изменяющиеся величины в получаемой формуле, используя физический смысл производной.

Если физический закон выявить не удается, то можно следовать указаниям:

– выбрать физические величины, одна из которых будет независимой переменной, а другая искомой функцией, и ввести для них обозначения;

– записать изменение искомой функции, которое будет соответствовать приращению независимой переменной и составить дифференциальное уравнение.

После математической процедуры нахождения решения дифференциального уравнения требуется проверить, как найденное решение моделирует конкретную физическую ситуацию. При этом нужно исходить из реальности некоторых физических соображений, рассмотрения графика решения, крайних (предельных) случаев и размерностей единиц.

Механика

При решении задач всегда необходимо выбирать и строить систему отсчета, относительно которой рассматривается движение. Система отсчета – это тело отсчета, связанная с ним система координат и приборы для измерения времени (часы). Как правило, выбирают прямоугольную декартову систему координат (ПДСК).

Основные кинематические формулы:

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ – радиус вектор материальной точки,

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты ПДСК;

$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \text{ – скорость;}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \text{ – ускорение;}$$

Перемещение тела (материальной точки) – это вектор, соединяющий начальное и конечное положение тела. Для равноускоренного движения перемещение и скорость тела определяются по формулам:

$$\vec{S} = \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}, \ \vec{\upsilon}_0 \text{ – начальная скорость, } t \text{ – время,}$$

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t .$$

Формула, выражающая второй закон Ньютона: $\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i / m$ – ускорение с которым движется материальная точка прямо-пропорционально геометрической (векторной) сумме всех *n* сил, действующих на нее и обратно пропорционально массе.

Задание 1.

Тело начинает прямолинейное движение из точки с координатой $x_0 = x(t = 0) = 2{,}5$ м и затем движется со скоростью, изменяющейся по закону $\upsilon(t) = 2 - t$. Определить формулу, по которому меняется координата тела и ускорение.

Решение

Так как ускорение представляет собой вторую производную от скорости по времени, то имеем $a = \dfrac{d\upsilon}{dt} = (2-t)' = 2$ (м/с^2).

Так как скорость $\vec{\upsilon}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy}{dt}\vec{j} + \dfrac{dz}{dt}\vec{k}$, то для прямолинейного движения вдоль оси OX $\upsilon(t) = \dfrac{dx}{dt} = 2 - t$. Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = 2 - t. \tag{2.1}$$

Дифференциальное уравнение (2.1) решаем методом разделения переменных: $dx = (2-t)dt \Rightarrow \int dx = \int (2-t)dt + C, \Rightarrow x = 2t - \dfrac{t^2}{2} + C$, где C – некоторая постоянная, которую найдем из начального условия $x_0 =$ $= x(t=0) = 2{,}5$ м. $x_0 = 2 \cdot 0 - \dfrac{0^2}{2} + C, \Rightarrow C = x_0 = 2{,}5$ м. Тогда формула, по которой определяется координата тела будет иметь вид $x = 2t - \dfrac{t^2}{2} + 2{,}5$.

Ответ: $x = 2t - \dfrac{t^2}{2} + 2{,}5$ (м); $a = 2$ м/с^2.

Задание 2.

Тело движется по плоскости со скоростью $\vec{\upsilon}(t) = \sin(2t)\vec{i} + 5\cos(2t)\vec{j}$. Определить траекторию, вдоль которой движется тело и формулу, по которой определяется радиус-вектор $\vec{r}(t)$, если в начальный момент времени $t_0 = 0$ $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0) = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.

Решение

Так как для движения по плоскости скорость тела будет определяться формулой $\vec{v}(t)=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\dfrac{dx}{dt}\vec{i}+\dfrac{dy}{dt}\vec{j}$, то учитывая условие задачи $\vec{v}(t)=\sin(2t)\vec{i}+5\cos(2t)\vec{j}$, получаем $\dfrac{dx}{dt}=\sin(2t)$, $\dfrac{dy}{dt}=5\cos(2t)$. Применяя метод разделения переменных находим:

$$\int dx=\int\sin(2t)dt+C_1,\ \int dy=\int 5\cos(2t)dt+C_2,$$

$$x=-\frac{1}{2}\cos(2t)+C_1,\ y=\frac{5}{2}\sin(2t)+C_2. \qquad (2.2)$$

Учитывая начальное условие $\vec{r}_0=\vec{r}(t_0)=3\vec{i}+4\vec{j}$ находим, что $x(t_0)=3$ и $y(t_0)=4$. Из выражений (2.2) для $x(t)$ и $y(t)$ при начальном значении времени $t_0=0$ имеем: $x(t_0)=-\dfrac{1}{2}+C_1$, $y(t_0)=C_2$. Тогда $3=-\dfrac{1}{2}+C_1$, $4=C_2$, то есть $C_1=3{,}5$ и $C_2=4$. Уравнения (2.2) с учетом начального условия примут вид

$$x(t)=-\frac{1}{2}\cos(2t)+3{,}5,\ y(t)=\frac{5}{2}\sin(2t)+4. \qquad (2.3)$$

Подставляя найденные выражения в формулу для радиуса-вектора $\vec{r}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$ получаем

$$\vec{r}(t)=\left[-\frac{1}{2}\cos(2t)+3{,}5\right]\vec{i}+\left[\frac{5}{2}\sin(2t)+4\right]\vec{j}.$$

Траектория – это линия вдоль которой движется тело, что математически для плоского движения представляет собой функциональную зависимость $F(x,y)=0$. Тогда выражения (2.3) представляют собой параметрическое задание линии на плоскости. Избавимся от параметра t выразив из (2.3) $\cos(2t)$ и $\sin(2t)$:

$$\cos(2t)=7-2x(t),\ \sin(2t)=0{,}4y(t)-1{,}6. \qquad (2.4)$$

Возводя в квадрат обе части выражений в (2.4) и складывая их почленно находим:

$$[\cos(2t)]^2 = [7 - 2x(t)]^2,\ [\sin(2t)]^2 = [0{,}4y(t) - 1{,}6]^2;$$

$$[\cos(2t)]^2 + [\sin(2t)]^2 = [7 - 2x(t)]^2 + [0{,}4y(t) - 1{,}6]^2.$$

Или $(7-2x)^2 + (0{,}4y - 1{,}6)^2 = 1$. Последнее выражение представляет собой уравнение эллипса. Таким образом, траектория движения тела – эллипс.

Ответ: $(7-2x)^2 + (0{,}4y-1{,}6)^2 = 1,\ \vec{r} = \left[-\frac{1}{2}\cos(2t) + 3{,}5\right]\vec{i} + \left[\frac{5}{2}\sin(2t) + 4\right]\vec{j}$.

Решите следующие задания самостоятельно.

Задание 3.

Тело начинает прямолинейное движение в момент времени 1 сек из точки с координатой $x_0 = x(t=1) = 1{,}4$ м и затем движется со скоростью, изменяющейся по закону $\upsilon(t) = t + 2\sin(4t)$. Определить формулы, по которым определяются координата тела и ускорение.

Задание 4.

Тело движется по плоскости со скоростью $\vec{\upsilon}(t) = A\cos(\omega t)\vec{i} + B\cos(\omega t)\vec{j}$. Определить траекторию, вдоль которой движется тело и формулу, по которой определяется радиус-вектор $\vec{r}(t)$, если в начальный момент времени $t_0 = 0$ $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0) = a\vec{i} + b\vec{j}$.

Задание 5.

Мяч брошен вертикально вверх с уровня земли и достигает наибольшей высоты через 5 секунд. Найти начальную скорость мяча и ее значение на максимальной высоте над уровнем земли.

Задание 6.

На рисунке 2.1. представлена зависимость скорости от времени при движении тела вдоль оси Ox, соответствующая частному решению начальной задачи (Коши) $\upsilon(1) = k + 1$, $\upsilon(0) = \upsilon_0$. По рисунку определить постоянные k и υ_0, а затем найти формулу для $x(t)$, учитывая, что скорость

$\upsilon(t) = \dfrac{dx}{dt}$. Построить график зависимости $x(t)$, считая, что в начальный момент времени $x(0) = 3$.

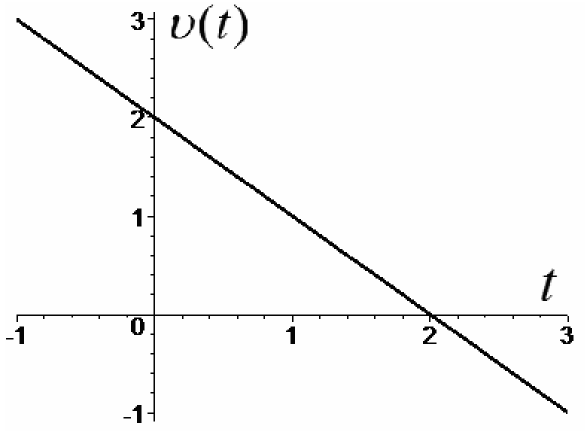

Рис. 2.1. График зависимости скорости движения тела от времени

Задание 7.

На рисунке представлен график зависимости скорости движения тела вдоль оси Ox от времени $\upsilon(t) = kt^2 - 1{,}5$ (м/с), $\upsilon(t_0) = -1$ (м/с). Определить постоянную k и начальный момент времени t_0. Найти формулу для $x(t)$ и построить по ней соответствующий график.

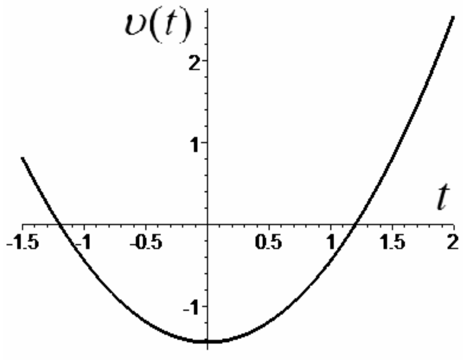

Рис. 2.2. График зависимости скорости движения тела от времени

Сила сопротивления среды

Если тело движется в среде, то на него действует сила сопротивления (трения) среды, которую можно представить в виде зависимости силы от скорости

$$F_{TP} = -\lambda \upsilon^n, \tag{2.5}$$

где при малых скоростях показатель $n = 1$. λ – некоторая постоянная, называемая коэффициентом трения и имеющая размерность $Н/(м/с)$, υ – скорость тела.

Задание 8.

Моторная лодка движется в стоячей воде со скоростью 6 м/с. Мотор заглох, выключился и через 40 с скорость лодки стала 2 м/с. Считая, что сила сопротивления воды прямо пропорциональна скорости движения лодки, определите скорость лодки и ее местонахождение через две минуты после выключения мотора и зависимость координаты лодки от времени.

Решение

Примем за тело отсчета стоячую воду. Начало координат поместим у точке воды, в момент времени, когда двигатель лодки выключают и свяжем с ней ось координат Ox (см. рис. 2.3). На этом же рисунке изобразим скорость лодки относительно воды в соответствии с условием задания. Тогда $\upsilon(t_0 = 0) = \upsilon_0 = 6$ м/с, $\upsilon(t_1 = 40) = \upsilon_1 = 2$ м/с и по второму закону Ньютона ускорение лодки будет равно $\vec{a} = \vec{F}/m$. Учитывая, что сила сопротивления воды направлена против движения лодки (то есть против оси Ox) и равна $F_{TP} = \lambda\upsilon$, то в проекции на ось Ox получим

$$a = -\frac{\lambda}{m}\upsilon. \qquad (2.6)$$

Но ускорение $a = \dfrac{d\upsilon}{dt}$, поэтому из (2.6) получаем дифференциальное уравнение (ДУ)

$$\frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{\lambda}{m}\upsilon. \qquad (2.7)$$

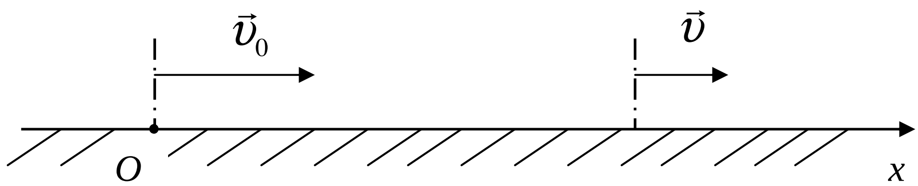

Рис. 2.3. Движение лодки относительно воды

ДУ (2.7) решаем по методу разделения переменных

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{\lambda}{m}dt, \Rightarrow \int\frac{d\upsilon}{\upsilon} = \int -\frac{\lambda}{m}dt + C_0, \Rightarrow \ln(\upsilon) = -\frac{\lambda}{m}t + C_0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon = \exp\left(-\frac{\lambda}{m}t + C_0\right), \Rightarrow \upsilon(t) = C_1\exp\left(-\frac{\lambda}{m}t\right). \qquad (2.8)$$

В формуле (2.8) $C_1 = \exp(C_0)$ некоторая постоянная, которую определим из начального условия $\upsilon(t_0 = 0) = \upsilon_0 = C_1\exp\left(-\frac{\lambda}{m}0\right) = C_1 = 6$. Таким образом, зависимость скорости лодки от времени будет иметь вид

$$\upsilon(t) = 6\exp\left(-\frac{\lambda}{m}t\right). \qquad (2.9)$$

Обозначим значение $\frac{\lambda}{m} = k$ и найдем его из условия $\upsilon(t_1 = 40) = \upsilon_1 = 2$:

$\upsilon_1 = 6\exp(-kt_1)$; $2 = 6\exp(-40k)$. Откуда $\exp(-40k) = \frac{1}{3}, \Rightarrow -40k = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$,

$$k = \frac{\lambda}{m} = -\frac{1}{40}\ln\left(\frac{1}{3}\right). \qquad (2.10)$$

Подставляя полученное значение $\frac{\lambda}{m}$ из (2.10) в формулу (2.9) окончательно получаем зависимость скорости лодки от времени с учетом всех условий задания:

$$\upsilon(t) = 6\exp\left(-\frac{\ln 3}{40}t\right). \qquad (2.11)$$

Пользуясь формулой (2.11) найдем скорость лодки через две минуты, то есть при $t_2 = 2$ мин или $t_2 = 120$ с:

$$\upsilon(t_2 = 120) = 6\exp\left(-\frac{\ln 3}{40}120\right) = 6\exp(-3\ln 3) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9} \approx 0{,}04\,(\text{м/с}).$$

Из формулы (2.11) следует странный результат: скорость приближается к нулю при $t \to \infty$, что не соответствует действительности. Ибо благодаря действию силы сопротивления наступит конечный момент времени, когда лодка остановится, а не бесконечный.

Так как $\upsilon(t) = dx/dt$, то из выражения для скорости (2.11) получим дифференциальное уравнение, решение которого даст зависимость координаты лодки от времени:

$$\frac{dx}{dt} = 6\exp\left(-\frac{\ln 3}{40}t\right). \qquad (2.12)$$

Разделяя переменные в уравнении (2.12) имеем:

$$dx = 6\exp\left(-\frac{\ln 3}{40}t\right)dt, \Rightarrow \int dx = \int 6\exp\left(-\frac{\ln 3}{40}t\right)dt + C_2, \Rightarrow x = 6\left(-\frac{40}{\ln 3}\right)\exp\left(-\frac{\ln 3}{40}t\right) + C_2.$$

Таким образом, $x = -\frac{240}{\ln 3}\exp\left(-\frac{\ln 3}{40}t\right) + C_2$. Постоянную C_2 найдем из начального условия $x(t_0 = 0) = 0$ м: $x(t_0 = 0) = -\frac{240}{\ln 3}\exp\left(-\frac{\ln 3}{40}t_0\right) + C_2$.

$0 = -\frac{240}{\ln 3}\exp\left(-\frac{\ln 3}{40}0\right) + C_2$, $\Rightarrow C_2 = \frac{240}{\ln 3}$. Окончательно получаем зависимость координаты лодки от времени

$$x = -\frac{240}{\ln 3}\exp\left(-\frac{\ln 3}{40}t\right) + \frac{240}{\ln 3} = \frac{240}{\ln 3}\left[1 - \exp\left(-\frac{\ln 3}{40}t\right)\right]. \qquad (2.13)$$

Снова получили «странный» результат: при $t \to \infty$ координата лодки стремится к конечному положению остановки $x_{ост} = \frac{240}{\ln 3}$ (м).

По формулам (2.12) и (2.13) построим соответствующие графики, изображенные на рисунках 2.4 и 2.5.

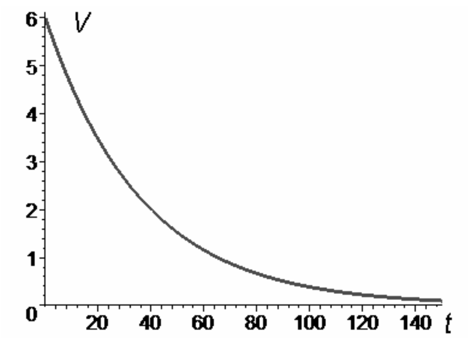

Рис. 2.4. График зависимости скорости лодки от времени

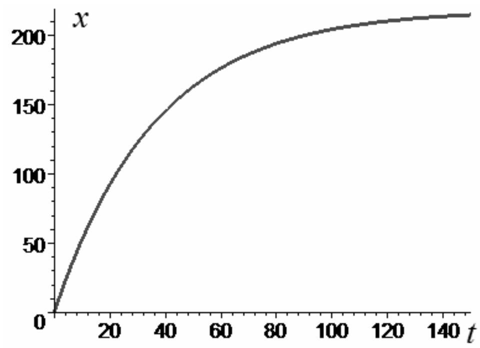

Рис. 2.5. График зависимости координаты лодки от времени

Если мы будем считать движение лодки равнозамедленным, то при решении данного задания получим другие результаты. В этом случае ускорение лодки можно найти из формулы

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 + at\,, \tag{2.14}$$

$$a = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_0}{t_1} = \frac{2-6}{40} = -\frac{1}{10} = -0{,}1 \text{ (м/с}^2\text{).}$$

В соответствии с условиями задания имеем $\upsilon(t) = 6 - 0{,}1t$, то есть скорость меняется по линейному закону. Зависимость координаты от времени получим из дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = 6 - 0{,}1t$.

$x = 6t - 0{,}1\frac{t^2}{2} + C$. Из начального условия находим, что постоянная $C = 0$.

Таким образом, зависимость координаты от времени имеет вид $x = 6t - 0{,}05t^2$. Но при таком решении, мы не учли, что сила сопротивления прямо пропорциональна скорости.

Задание 9 решите самостоятельно.

Задание 9.

Моторная лодка движется в стоячей воде со скоростью 6 м/с. Мотор заглох, выключился и через 40 с скорость лодки стала 2 м/с. Считая, что сила сопротивления воды зависит от скорости движения лодки по квадратичному закону, определите скорость лодки и ее местонахождение через две минуты после выключения мотора и зависимость координаты лодки от времени.

Движение тела вблизи поверхности Земли. Падение тела по вертикали.

Рассмотрим падение тела с некоторой высоты h в среде (например, в воздухе). Изобразим все силы, действующие на тело: $\vec{F}_{grav} = m\vec{g}$ – сила тяготения (тяжести), $\vec{F}_{TP}$ – сила сопротивления воздуха, направленная против направления движения тела. По второму закону Ньютона ускорение, с которым движется тело прямо пропорционально геометрической (векторной) сумме всех сил, действующих на тело и обратно пропорционально ассе этого тела. Это можно записать в виде формулы:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{grav} + \vec{F}_{TP}}{m}. \qquad (2.15)$$

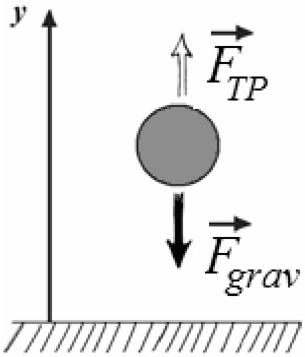

Рис. 2.6. Падение тела под действием силы тяжести и сопротивления воздуха

Переходя в уравнении (2.15) к проекции на ось Oy (см. рис. 2.6), получим, что свободное падение тела вблизи поверхности Земли будет описываться уравнением

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -mg + \lambda\upsilon, \qquad (2.16)$$

где $a = \dfrac{d\upsilon}{dt}$ – ускорение тела, υ – скорость тела, g – ускорение свободного падения (вблизи поверхности Земли оно постоянно и равно $g \approx 9{,}8$ м/с^2), m – масса тела, $F_{TP} = \lambda\upsilon$ – сила сопротивления воздуха, $F_{grav} = -mg$ берется со знаком минус, так как направлена против оси Oy.

Уравнение (2.16) можно записать в другом виде, взяв в качестве переменной путь s. А именно, так как скорость тела $\upsilon = \frac{ds}{dt}$, то можно записать, что $\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{ds}\frac{ds}{dt} = \upsilon\frac{d\upsilon}{ds}$ и тогда из (2.16) следует уравнение

$$\upsilon\frac{d\upsilon}{ds} - \frac{\lambda}{m}\upsilon = -g. \tag{2.17}$$

Уравнение (2.17) уже является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Задание 10.

Найти общее решение дифференциального уравнения (2.17) и построить приблизительные (качественные) графики зависимости скорости от времени при различных значениях постоянной интегрирования. Найти выражение для предельной скорости, то есть скорости при $t \to \infty$.

Задание 11.

Найти общее решение дифференциального уравнения (2.17) и построить графики зависимости скорости от пути при различных значениях постоянной интегрирования. Сравнить полученные графики с графиками из задания 10.

Задание 12.

На основе полученного в задании 10 решения найти уравнение для координаты $y(t)$ как функции времени. Учесть, что скорость $\upsilon = -dy/dt$.

Задание 13.

На основе полученного решения в задании 10 найти уравнение для высоты как функции времени. Определить выражение для максимальной высоты.

Задание 14.

Пусть тело падает свободно с высоты h без начальной скорости. Считая показатель $n = 2$, в выражении для силы сопротивления воздуха, определить функциональную зависимость скорости тела от времени. Найти выражение для предельной скорости.

Задание 15.

Решить дифференциальное уравнение $m\dfrac{d\upsilon}{dt} = -\lambda\upsilon(t) - mg$ с начальным условием $\upsilon(0) = 0$ при $\lambda = 0{,}1$ и $m = 1$ кг.

Задание 16.

Парашютист прыгает из самолета с высоты 2,5 км над землей и свободно падает на Землю под действием силы тяжести. Сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна скорости парашютиста с коэффициентом пропорциональности $\lambda = 30N$, когда парашют не раскрыт и $\lambda = 85N$, когда парашют открыт. Определить, через сколько секунд парашютист достигнет Земли, если парашют не открывать до момента, когда скорость парашютиста не достигнет 20 м/с. Принять массу парашютиста с парашютом равной 95 кг. (Здесь в условии N – некоторая постоянная величина).

Задание 17.

Парашютист, масса которого 70 кг, прыгает с высоты 1,5 км. Считая, что парашют раскрывается мгновенно и сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна скорости, определить зависимость скорости парашютиста от времени. Найти время приземления.

Задание 18.

Парашютист весом в 1 кН вместе с парашютом совершает прыжок из самолета. Парашют открывается через 35 секунд после прыжка с высоты 2,5 км. Сила сопротивления воздуха равна $F_{TP} = -\lambda\upsilon$, где $\lambda = 12$ когда парашют закрыт и $\lambda = 110$ когда парашют открыт. Определить:

a) высоту и скорость, которые будет иметь парашютист в конце 35 секунды падения;

b) время приземления;

c) скорость в момент приземления.

Задание 19.

Масса парашютиста вместе с парашютом составляет 80 кг. После его прыжка из самолета и свободном падении сопротивление воздуха прямо пропорционально квадрату скорости парашютиста с коэффициентом пропорциональности, равном 300. Определить: *a*) скорость спуска в зависимости от времени, *b*) максимальную скорость падения с парашютом.

Задание 20.

Тело массой m движется в некоторой среде. Известно, что сила сопротивления среды, действующая на тело, прямо пропорциональна корню квадратному из его скорости. Найти зависимость скорости тела от времени, если в начальный момент времени скорость была $\upsilon(0)=\upsilon_0$. Остановится ли тело когда-нибудь? Если остановится, то определить момент времени, когда это произойдет. Заметим, что дифференциальное уравнение движения будет иметь вид $m\dfrac{d\upsilon}{dt}=-k\sqrt{\upsilon}$.

Задание 21.

В модели, описываемой формулами $m\dfrac{d\upsilon}{dt}=-mg-\lambda\upsilon,\ \upsilon(0)=\upsilon_0$, мы имеем четыре параметра: $m, g, \lambda, \upsilon_0$. Введением новых переменных $s=t/t_1$ и $\omega=\upsilon/\upsilon_1$, где $t_1>0$ и $\upsilon_1>0$, попробуйте уменьшить число параметров в этой модели до одного $\omega(0)=\omega_0=\sqrt{\dfrac{\lambda}{mg}}\upsilon_0$. Напишите подробный вывод. В результате модель должна принять вид $\dfrac{d\omega}{ds}=-1-\omega,\ \omega(0)=\omega_0=\sqrt{\dfrac{\lambda}{mg}}\upsilon_0$.

Найдите решение полученного ДУ и исследуйте его.

Такая задача по уменьшению числа параметров важна для физических приложений, так как на практике часто можно измерить не отдельные значения величин, а только значение одного параметра, представляющего их комбинацию.

Рассмотрим теперь движение тела, брошенного вертикально вверх (рис. 2.7). Переходя в уравнении закона Ньютона (2.15) к проекции на ось Oy, получим, что движение тела будет описываться уравнением

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -mg + \lambda\upsilon. \qquad (2.18)$$

В начальный момент времени (момент броска) скорость была $\upsilon(0) = \upsilon_0$. Теперь вся задача сводится к математическим действиям по решению задачи Коши для уравнения (2.18). Это предлагается сделать самостоятельно.

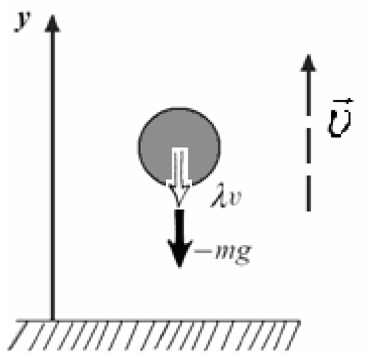

Рис. 2.7. Движение тела, брошенного вверх под действием силы тяжести и сопротивления среды (воздуха)

Задание 22.

Мальчик бросил вертикально вверх камень массой 300 грамм с начальной скоростью 2000 см/с. Считая ускорение свободного падения равным 980 см/с^2 и пренебрегая сопротивлением воздуха, определить:

a) наивысшую высоту, на которую поднимется камень, и время, за которое он достигнет этой высоты;

b) высоту, на которой будет находиться камень, и скорость через 3 сек после бросания.

Задание 23.

Снаряд массой m вылетел из пушки вертикально вверх с начальной скоростью 300 м/с. Считая, что сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна квадрату скорости с коэффициентом пропорциональности $\lambda = m/2050$, найти:

a) функциональную зависимость скорости снаряда и его координаты от времени;

b) время, в течение которого будет достигнута максимальная высота;

c) время, когда снаряд упадет на землю;

d) максимальную высоту и скорость удара снаряда о землю (точнее, скорость прямо перед ударом о землю).

Построить графики зависимости скорости и координаты снаряда от времени.

Задание 24.

Ракета запущена вертикально вверх с начальной скоростью 120 м/с. Сопротивление воздуха замедляет ее движение, сообщая ракете отрицательное ускорение, пропорциональное квадрату её скорости. Определить время достижения ракетой наивысшего положения.

Задание 25.

Ракета взлетает вертикально вверх в момент времени $t_0 = 0$, и ее двигатель обеспечивает постоянный тягу в течение 10 секунд. За это время сжигание ракетного топлива постоянно уменьшает массу ракеты.

Задача состоит в том, чтобы определить скорость $\upsilon(t)$ ракеты в течение этого начального 10-секундного интервала.

Обозначим через F_{tg} постоянную силу тяги двигателя, которая обеспечивает движение ракеты вверх. Силу сопротивления воздуха будем считать прямо пропорциональной скорости, то есть $F_{TP} = -\lambda\upsilon$.

Из второго закона Ньютона (2.15) получим следующее дифференциальное уравнение, описывающее движение ракеты

$$\frac{d(m(t)\upsilon(t))}{dt} = F_{tg} - m(t)g - \lambda\upsilon(t). \qquad (2.19)$$

Необходимо самостоятельно решить данное уравнение с учетом указанных выше условий.

Подсказка. Если обозначить через $P(t) = m(t)\upsilon(t)$ – импульс ракеты, то уравнение примет вид $\dfrac{dP}{dt} = F_{tg} - m(t)g - \lambda\dfrac{P(t)}{m(t)}$, которое последующим переобозначением $x = t$, $y' = \dfrac{dP}{dt}$, $y = P(t)$, $f_1(x) = \dfrac{\lambda}{m(x)}$, $f_2(x) = F_{tg} - m(x)g$, приводится к более простому по виду уравнению.

Задание 26.

Если в условиях предыдущей задачи принять $F_{tg} = 2000$ кН, $m(t) = 15 - t$ и $\lambda = 3$, то дифференциальное уравнение, описывающее движение ракеты, будет иметь вид $\dfrac{d((15-t)\upsilon(t))}{dt} = 2000 - 9{,}8(15-t) - 3\upsilon(t)$. Найти скорость ракеты в промежутке времени $0 \le t \le 15$ и построить график скорости как функции времени для $t \in [0;15]$. Считать, что начальная скорость $\upsilon(0) = 0$.

Закон Гука

Если взять струну или пружину, либо тонкий стержень, то при малых отклонениях от положения равновесия сила упругости $F_{óïð}$ прямо пропорциональна удлинению (растяжению)

$$F_{упр} = -kx\,, \tag{2.20}$$

где k – некоторая постоянная, называемая коэффициентом упругости и имеющая размерность *Н/м*. Коэффициент упругости зависит как от свойств материала, так и от размеров стержня. Чем больше k, тем жестче струна и тем тяжелее она поддается растяжению или сжатию. Знак минус в формуле указывает на то, что струна противодействует деформации: при растяжении стремится укоротиться, а при сжатии — распрямиться.

Подчеркнем, что закон Гука выполняется только при малых деформациях. При превышении предела пропорциональности связь между напряжениями и деформациями становится нелинейной. Для многих сред закон Гука неприменим даже при малых деформациях.

Закон Гука лежит в основе раздела механики, который называется теорией упругости.

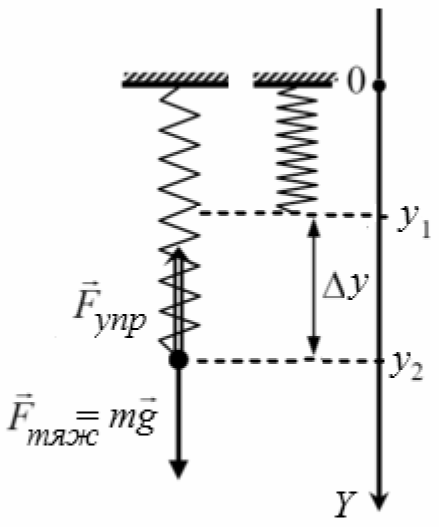

Рис. 2.8. Силы, действующие на тело массой m, подвешенное на пружине

Закон Гука для пружины, изображенной на рисунке 2.8, имеет вид

$$F_{упр} = -k(y_2 - y_1) = -k\Delta y . \qquad (2.21)$$

Если пружину заменить стержнем, то можно выделить зависимость от размеров стержня (площади поперечного сечения S и длины L) явно, записав коэффициент упругости как $k = \dfrac{ES}{\ell}$. Величину E называют модулем упругости первого рода или модулем Юнга. Она является механической характеристикой материала.

Если ввести относительное удлинение $\varepsilon = \Delta\ell / \ell$ и нормальное напряжение в поперечном сечении $\sigma = F / S$, то закон Гука для относительных величин запишется как $\sigma = E|\varepsilon|$. В такой форме он справедлив для любых малых объёмов материала.

При расчёте прямых стержней также применяют запись закона Гука в относительной форме $\Delta\ell = \dfrac{F\ell}{ES}$ или $\dfrac{d\ell}{\ell} = \dfrac{F}{ES}$. Задавая (или зная) зависимость силы от ℓ можно получить дифференциальное уравнение первого порядка $\dfrac{d\ell}{\ell} = \dfrac{F(l)}{ES}$.

Задание 27.

Рассмотрим движение шарика, прикрепленного к пружине с жестко закрепленным концом по горизонтальной поверхности. Проведем горизонтальную ось Ox так, как это изображено на рис. 2.9. Обозначим через x координату центра тяжести шарика. Будем полагать, что первоначальное направление движения шарика совпадает с направлением оси Ox. Обозначим через m – массу шарика, а через ℓ – длину пружины в ненапряженном состоянии. Требуется определить зависимость координаты x от времени t. То есть найти вид функции $x(t)$. Считать, что плоскость является идеально гладкой (нет трения). Сопротивлением воздуха пренебречь.

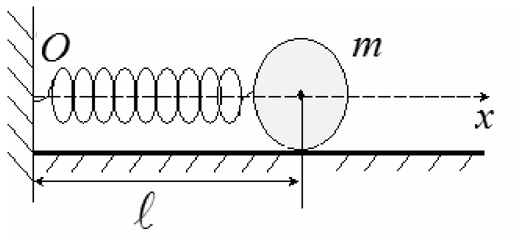

Рис. 2.9. Металлический шар массой m на пружине (к заданию 27)

Решение

На шарик действуют четыре силы: сила тяжести $\vec{F}_{тяж} = m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$, сила упругости пружины $\vec{F}_{упр}$ и сила сопротивления среды $\vec{F}_{сопр}$. По условию $\vec{F}_{сопр} = 0$.

Так как движение шарика осуществляется только вдоль оси Ox, то единственная сила, действующая на шарик в направлении этой оси, только сила упругости пружины. Выразим ее, используя закон Гука, согласно которому для небольшого растяжения (сжатия) пружины необходимо приложить силу $F_{\text{óïð}} = -kx$, где k характеризует упругие свойства пружины, а x – величину ее растяжения или сжатия относительно нейтрального, ненагруженного состояния. Тогда в соответствии со вторым законом Ньютона (2.15) имеем, что

$$a_x = \frac{F_{упр}}{m}, \tag{2.22}$$

где a_x – ускорение шарика вдоль оси Ox.

Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$, отклонение шарика было $x(0) = x_0$, а его скорость вдоль оси Ox – $\upsilon_x(0) = \upsilon_0$.

Так как ускорение $a_x = \dfrac{d\upsilon_x}{dt}$ и $F_{\text{óïð}} = -kx$, то из выражения (2.22) имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{2.23}$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка и оно определяет так называемые свободные колебания груза. Его именуют уравнением гармонического осциллятора. Так как в данной книге не рассматривались методы решения дифференциального уравнения второго порядка, то мы покажем, как можно понизить порядок уравнения (2.23). Для этого используем выражение для скорости $\dfrac{dx}{dt} = \upsilon_x$

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = -\frac{k}{m}x. \tag{2.24}$$

Левую часть выражения (2.24) можно записать как $\dfrac{d\upsilon_x}{dt} = \dfrac{d\upsilon_x}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt}$, тогда из (2.24) следует

$$\frac{d\upsilon_x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{k}{m}x. \tag{2.25}$$

Учитывая, что $\dfrac{dx}{dt} = \upsilon_x$ из (2.25) получаем дифференциальное уравнение первого порядка, описывающее движение шарика

$$\frac{d\upsilon_x}{dx}\cdot\upsilon_x=-\frac{k}{m}x. \qquad (2.26)$$

ДУ (2.26) является уравнением с разделяющимися переменными. Поэтому уравнение (2.26) представим в виде

$$\upsilon_x d\upsilon_x=-\frac{k}{m}xdx. \qquad (2.27)$$

Интегрируя обе части (2.27), получим

$$\int\upsilon_x d\upsilon_x=-\int\frac{k}{m}xdx+C, \qquad (2.28)$$

где C – постоянная, значение которой найдем из начальных условий.

Находим значения интегралов в выражении (2.28):

$$\frac{m\upsilon_x^2}{2}=-\frac{kx^2}{2}+C. \qquad (2.29)$$

Выражение (2.29) можно записать в виде

$$\frac{m\upsilon_x^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=C, \qquad (2.30)$$

представляющем собой закон сохранения механической энергии шарика. Действительно, первое слагаемое в (2.30) – это кинетическая энергия шарика $E_{кин}=\frac{m\upsilon_x^2}{2}$, а второе – потенциальная энергия упруго сжатой (растянутой) пружины $E_{пот}=\frac{kx^2}{2}$.

Учитывая начальные условия, $x(0)=x_0$ и $\upsilon_x(0)=\upsilon_0$ из выражения (2.30) получаем значение постоянной C:

$$C=\frac{m\upsilon_0^2}{2}+\frac{kx_0^2}{2}.$$

Тогда уравнение движения (2.30) примет вид:

$$\frac{m\upsilon_x^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=\frac{m\upsilon_0^2}{2}+\frac{kx_0^2}{2}.$$

Найдем теперь выражение для $x(t)$. Так как $\frac{dx}{dt}=\upsilon_x$ из (2.30) получаем

$$\upsilon_x^2 = -\frac{k}{m}x^2 + 2C, \Rightarrow \upsilon_x = \sqrt{-\frac{k}{m}x^2 + 2C}, \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{2C - \frac{k}{m}x^2}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{2C} \cdot \sqrt{1 - \frac{k}{2Cm}x^2}.$$

Так как все величины m, k и C положительны, то обозначим $\frac{k}{2Cm} = \omega^2 \geq 0$. Тогда дифференциальное уравнение, описывающее движение шарика, будет иметь вид

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2C} \cdot \sqrt{1 - \omega^2 x^2}. \quad (2.31)$$

Дифференциальное уравнение (2.31) является уравнением с разделяющимися переменными. Поэтому из (2.31) следует

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - \omega^2 x^2}} = \sqrt{2C} \cdot dt. \quad (2.31)$$

Из (2.31) имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \omega^2 x^2}} = \int \sqrt{2C} \cdot dt + C_1, \quad (2.32)$$

где C_1 – постоянная, значение которой определяется из начальных условий.

Вычисляя интегралы в выражении (2.32), получим:

$$\frac{1}{\omega}\arcsin \omega x = \sqrt{2C}t + C_1, \Rightarrow x = \frac{1}{\omega}\sin\left(\sqrt{2C}\omega t + C_1\right), \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\omega}\sin\left(\sqrt{2C}\omega t\right)\cos C_1 + \frac{1}{\omega}\cos\left(\sqrt{2C}\omega t\right)\sin C_1.$$

Учитывая, что $\frac{k}{2Cm} = \omega^2$, из последнего уравнения имеем

$$x = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t), \quad (2.33)$$

$A = \frac{1}{\omega}\cos C_1$, $B = \frac{1}{\omega}\sin C_1$ – новые постоянные, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Величина ω_0 называется собственной частотой колебаний, а $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ – период колебаний. Как видим, период T и частота ω_0 зависят только от жесткости пружины и от массы системы.

Таким образом, уравнение (2.33) описывает гармонические колебания с собственной частотой ω_0.

Обратим внимание на тот факт, что хотя задачу мы решали, используя второй закон Ньютона, но в ходе решения получили выражение (2.30), представляющее собой закон сохранения энергии. То есть, подход с точки зрения закона Ньютона не противоречит фундаментальному закону природы – закону сохранения энергии. Поэтому задачу мы могли бы решить и исходя из закона сохранения энергии.

Подумайте над тем, как решить данное задание на основе закона сохранения энергии.

Задание 28.

Приведите выражение (2.33) $x = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)$ к виду $x = a\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$. Величину a называют амплитудой колебания, аргумент $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ – фазой колебания (угловая мера времени, выраженная в долях периода). Значение фазы в начальный момент времени при $t = 0$, то есть величина φ_0, называется начальной фазой колебания.

Для определения амплитуды и начальной фазы необходимо задать начальные условия. Пусть, например, в начальный момент $t = 0$ положение груза $x(0) = x_0$ и скорость $\upsilon(0) = \upsilon_0$. Тогда $x_0 = a\sin\varphi_0$, $\upsilon_0 = a\omega_0\cos\varphi_0$, откуда $\varphi_0 = arctg\left(\frac{x_0\omega_0}{\upsilon_0}\right)$, $a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\upsilon_0}{\omega_0}\right)^2}$. Из этих формул следует, что в отличие от частоты и периода собственных колебаний, начальная фаза и амплитуда зависят от начального состояния системы.

Задание 29.

Сформулируйте задачу Коши к заданию 27 о шарике на пружине.

Задание 30.

В задании 29 учесть силу сопротивления среды. Считать, что она прямо пропорциональна скорости.

Задание 31.

Груз весом P подвешен на вертикальной пружине, длина которой в естественном состоянии равна ℓ. (см. рис. 2.10). В положении равновесия сила натяжения пружины уравновешивается весом тела, то есть $P = k\ell_{cm}$. Обозначим через $\Delta\ell = \ell - \ell_{cm}$, $x = \lambda - \lambda_{cm}$, где $\Delta\ell$ означает удлинение пружины, а ℓ_{cm} – статическое удлинение, то есть расстояние от конца нерастянутой пружины до положения равновесия. По закону Гука сила натяжения пружины пропорциональна её удлинению, то есть

$$F_{упр} = -k\Delta\ell\ , F_{упр} = -k\lambda.$$

Найти уравнение движения груза $x = x(t)$, пренебрегая массой пружины и сопротивлением воздуха.

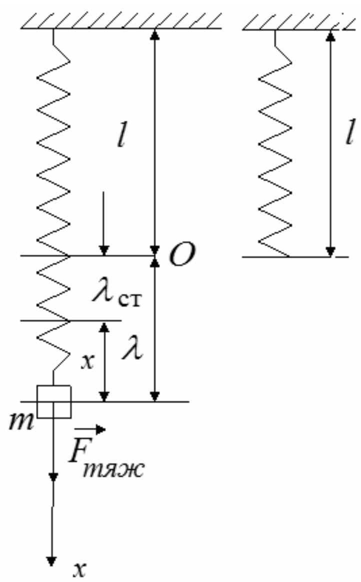

Рис. 2.10. Тело массой m на пружине (к заданию 31)

Решение

Начало системы координат O выберем в положении равновесия груза, то есть в той точке, где вес груза уравновешивается силой натяжения пружины.

Дифференциальное уравнение, описывающее движение груза получим из второго закона Ньютона (2.15) $a=F/m$, где масса груза $m=F_{тяж}/g=P/g$, a – ускорение груза и F – равнодействующая всех сил приложенных к грузу. В соответствии с условием задания равнодействующая всех сил будет равна сумме силы натяжения пружины и силы тяжести.

По закону Гука сила натяжения пружины пропорциональна её удлинению: $F_{упр}= - k\lambda$, где k –жесткость пружины.

Учитывая, что ускорение $a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ и сила тяжести равна весу груза из второго закона Ньютона имеем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_{упр} + F_{тяж}}{m}, \text{ или } \frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{\lambda}{m} + g. \qquad (2.34)$$

Таким образом, получили дифференциальное уравнение второго порядка. Требуется самостоятельно решить это уравнение, предварительно понизив его порядок, так, как это сделано в задании 27.

Задание 32.

Пуля, летевшая со скоростью 180 м/с, пробивает доску толщиной 49 см и вылетает с другой стороны доски со скоростью 70 м/с. Найти промежуток времени в течение которого пуля пролетала сквозь доску, если сопротивление доски движению пули прямо пропорционально скорости пули.

Закон всемирного тяготения

Сила гравитационного притяжения между двумя материальными точками массами m_1 и m_2, находящимися на расстоянии R друг от друга, прямо пропорциональна обеим массам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = F_{12} = F_{21} = G\frac{m_1 m_2}{R^2}, \qquad (2.35)$$

где G – гравитационная постоянная, равная $6{,}67384(80)\cdot 10^{-11}$ м³/(кг с²).

Сила гравитационного притяжения направлена вдоль прямой линии, соединяющей массы (см. рис. 2.11)

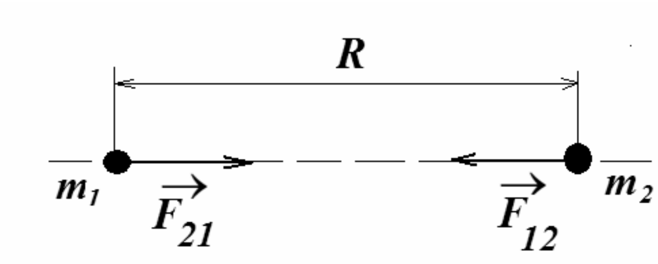

Рис. 2.11. Сила гравитационного притяжения между двумя материальными точками массами m_1 и m_2, находящимися на расстоянии R.

Для тела, находящегося вблизи поверхности Земли, сила тяготения будет равна $F = G\dfrac{M_З m}{R_З^2}$, где $M_З \approx 6 \cdot 10^{24}\,кг$ – масса Земли, $R_З = 6{,}4 \cdot 10^6$ м – радиус Земли. Если тело свободно падает на Землю, то вблизи Земли по второму закону Ньютона имеем, что $mg = G\dfrac{M_З m}{R_З^2}$, где g – ускорение свободного падения. Из последнего равенства можно вычислить значение $g = 9{,}8$ м/с^2.

Рассмотрим пример использования закона всемирного тяготения. Пусть тело массой m=100 кг начинает свободно падать без начальной скорости с высоты h=200 км над поверхностью Земли. Найти скорость тела прямо перед ударом о землю. В расчет принять только силу гравитационного притяжения, пренебрегая всеми остальными (например, сопротивлением воздуха).

На падающее тело действует сила гравитационного притяжения, которая сообщает телу ускорение. Выберем систему отсчета, связанную с поверхностью Земли. Начало системы координат поместим в точку падения (см. рис. 2.12). В силу второго закона Ньютона для свободно падающего тела можем записать, что

$$m\vec{a} = \vec{F}, \Rightarrow m\frac{d\upsilon}{dt} = -G\frac{M_З m}{r^2}. \qquad (2.36)$$

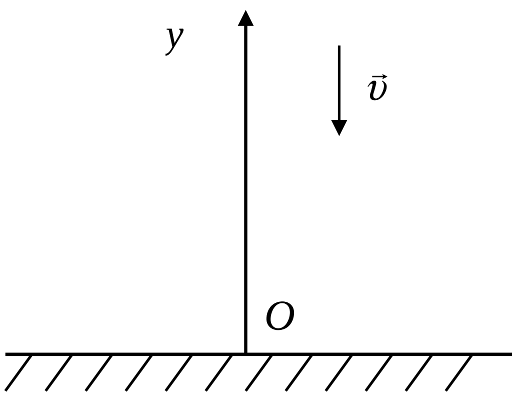

Рис. 2.12. Падение тела массой m на поверхность Земли.

Учитывая, что скорость тела $\upsilon = \frac{dr}{dt} = \frac{dy}{dt}$ из (2.36) получаем

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -G\frac{M_З m}{y^2} \qquad (2.37)$$

Уравнение (2.37) решить «в лоб» не удается. Так как $\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dr}\frac{dy}{dt} = \frac{d\upsilon}{dy}\upsilon$, то уравнение (2.37) можно записать в виде

$$\frac{d\upsilon}{dy}\upsilon = -G\frac{M_З}{y^2}. \qquad (2.38)$$

Уравнение (2.38) является ДУ с разделяющимися переменными, разделяя в нем переменные имеем

$$\upsilon d\upsilon = -G\frac{M_З}{y^2}dy. \qquad (2.39)$$

Очевидно, $R_З < y < R_З + 200$. Интегрируя уравнение (2.39) получим

$$\frac{\upsilon^2}{2} = G\frac{M_З}{y} + C, \qquad (2.40)$$

где C – некоторая постоянная, которую найдем из начальных условий. Учитывая, что на высоте $R_З + 200$ скорость равна нулю, то из (2.40) имеем $\frac{0^2}{2} = G\frac{M_З}{R_з + 200} + C$, откуда $C = -G\frac{M_З}{R_з + 200}$. Подставляя полученное значение постоянной C в выражение (2.40) найдем, что

$$\frac{\upsilon^2}{2} = G\frac{M_з}{y} - G\frac{M_з}{R_з + 200} = GM_з\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R_з + 200}\right). \tag{2.41}$$

Так как тело падает и в выбранной системе отсчета функция $y(t)$ является убывающей функцией, то $\frac{d\upsilon}{dy} < 0$ и тогда из (2.41) получаем

$$\upsilon = -\sqrt{2GM_з\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R_з + 200}\right)}. \tag{2.42}$$

Таким образом, скорость удара о Землю будет равна

$$\upsilon(R_з) = -\sqrt{2GM_з\left(\frac{1}{R_з} - \frac{1}{R_з + 200}\right)} = -1952 \text{ м/с.}$$

Знак минус указывает на то, что вектор скорости направлен против оси Oy.

Задание 33.

Воспользовавшись формулой (2.42) найдите зависимость высоты падающего тела от времени $y = y(t)$.

Истечение жидкости из сосудов. Водяные часы

Задача о смешивании

Условия:

Пусть имеется некоторый резервуар (бассейн, озеро, и т.п.) содержащий жидкость (воду), в котором растворено некоторое вещество.

В некоторый начальный момент времени жидкость в резервуаре занимает объем V_0 и количество вещества y_0 г. Обозначим через $\text{In}(t)$ количество жидкости, которое поступает в резервуар с заданной концентрацией $k(t)$ вещества, и через $\text{Out}(t)$ – количество жидкости, которое выходит из резервуара.

Мы предполагаем, что вещество равномерно и идеально смешивается в резервуаре, и хотят знать количество $y(t)$ вещества, находящегося в резервуаре после времени t.

Заметим, что это общая постановка задачи. В конкретных случаях количество жидкости, втекающей в резервуар, может быть постоянной величиной (то есть не зависеть от времени), постоянной может быть также концентрация.

Построим математическую модель, то есть составим уравнения, описывающие данный процесс. Пусть в некоторый момент времени $V(t)$ будет общий объем резервуара. Тогда, если обозначить через $y(t)$ общее количество вещества в резервуаре, то концентрация вещества в резервуаре будет $y(t)$ $V(t)$. Общее количество вещества на входе будет k In(t), и общее количество вещества, движущегося на выход, будет иметь концентрацию, равную $y(t)/V(t)$ Out(t).

Таким образом, скорость изменения объема будет $V'(\mathrm{t}) = \mathrm{In}(t)\text{-}\mathrm{Out}(t)$ и $y'(t) = k(t)\,\mathrm{In}(t) - \mathrm{y}(t)/\mathrm{V}(t)\,\mathrm{Out}(t)$. Для наглядности изобразим этот процесс в виде рисунка

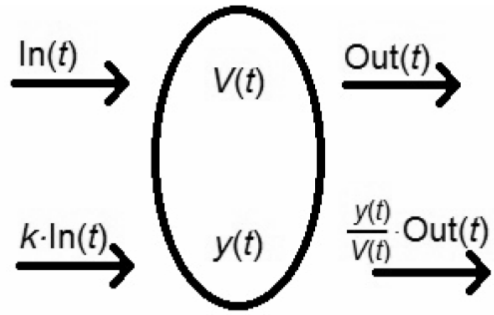

Рис. 2.13. Модель процесса протекания и смешивания жидкости.

Теперь нам необходимо решить полученную систему. Полученные уравнения мы можем представить в виде одного уравнения $y'(t) + \mathrm{Out}(t)/V(t)\,y(t)=k(t)\,\mathrm{In}(t)$, которое является линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Задание 34.

Бак (емкость) имеет два отверстия, в одно поступает вода, а в другое вытекает. В некоторый начальный момент времени в баке находится 100 литров раствора, содержащего 10 кг поваренной соли. В бак со скоростью 5 литров в минуту непрерывно поступает вода, которая перемешивается с раствором. Смесь вытекает из бака с той же скоростью. Найти, сколько соли в граммах останется в баке через час.

Приводимые ниже две задачи иллюстрируют связь между их физическим содержанием и геометрией [2].

Предварительно остановимся на некоторых общих теоретических выводах. Итак, рассмотрим сосуд (рис. 2.14), площадь горизонтального сечения которого является произвольной функцией расстояния сечения от дна сосуда. Пусть высота уровня жидкости в сосуде в начальный момент времени $t=0$ равна h метров. Пусть, далее, площадь сечения на высоте x равна $S(x)$, а площадь отверстия на дне сосуда есть s.

Известно, что *скорость истечения жидкости* v *в тот момент, когда высота ее уровня равна* x, *определяется равенством* $v=k\sqrt{2gx}$, *где* $g=9{,}8\,\text{м/с}^2$, k *– коэффициент скорости истечения жидкости из отверстия.*

На бесконечно малом промежутке времени dt истечение жидкости можно считать равномерным, а потому за время dt вытечет столбик жидкости, высота которого vdt и площадь сечения s, что в свою очередь вызовет понижение уровня жидкости в сосуде на $-dx$.

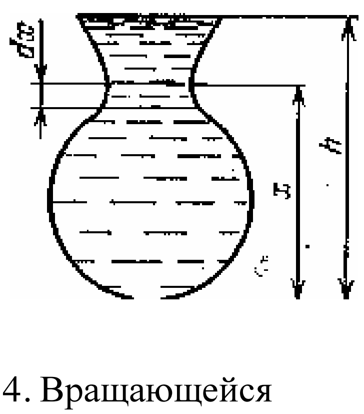

Рис. 2.14. Вращающейся резервуар с жидкостью.

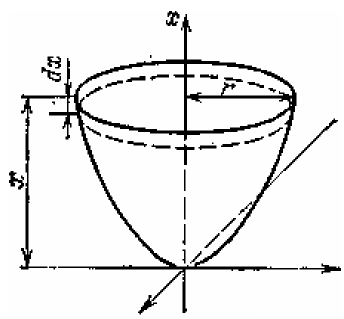

Рис. 2.15. Водяные часы в форме чаши с водой.

В результате этих рассуждений приходим к дифференциальному уравнению

$$ks\sqrt{2gx}dt = -S(x)dx\,, \tag{2.43}$$

которое можно переписать в виде

$$dt = -\frac{S(x)}{ks\sqrt{2gx}}dx\,. \tag{2.44}$$

Решим теперь следующую задачу. Цилиндрический резервуар с вертикальной осью высотой 6 м и диаметром 4 м имеет на дне круглое отверстие радиусом 1/12 м. Требуется установить зависимость уровня воды в резервуаре от времени t, а также определить время, в течение которого вытечет вся вода.

По условиям задачи $S(x) = 4\pi$, $s = 1/144$. Так как для воды $k = 0{,}6$, то уравнение (2.44) примет вид

$$dt = -\frac{217{,}152}{\sqrt{x}}dx\,.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, приходим к соотношению $t = 434{,}304\sqrt{x}$, которое и дает искомую зависимость уровня воды от времени t. Если теперь в последнем равенстве положить $x = 6$, то получим, что вся вода вытечет из резервуара приблизительно через 18 минут.

Вторая задача состоит в следующем. Известно, что древние водяные часы представляли собой чашу (рис. 2.15), из которой через небольшое отверстие на дне вытекала вода. Такие часы использовались в греческих и римских судах для хронометрирования речей адвокатов, чтобы не допускать слишком долгих выступлений. Требуется найти форму водяных часов, при которой уровень воды убывал бы в чаше с постоянной скоростью.

Задача решается с помощью выведенного выше уравнения (2.44), которое мы только перепишем в виде

$$\sqrt{x} = -\frac{S(x)}{ks\sqrt{2g}}\frac{dx}{dt}\,. \tag{2.45}$$

Именно, учитывая, что чашу можно рассматривать как поверхность вращения, в соответствии с обозначениями на рисунке 2.15 из уравнения (2.45) получаем, что

$$\sqrt{x} = -\frac{\pi r^2 ks}{\sqrt{2g}} a \, , \tag{2.46}$$

где $a = v_x = \dfrac{dx}{dt}$ – проекция скорости свободной поверхности жидкости на ось x, которая по условию задачи есть величина постоянная. Возведя обе части уравнения (2.46) в квадрат, приходим к уравнению

$$x = cr^2 \, , \tag{2.47}$$

где $c = a^2\pi^2 / \left(2gk^2s^2\right)$. Последнее означает, что форма поверхности водяных часов получается вращением кривой (2.47) вокруг оси x.

Задание 35.

Стакан с тяжелой жидкостью, вращающейся вокруг вертикальной оси. Определить, какую форму примет свободная поверхность.

Задание 36.

Определить время, за которое вытечет вся вода из наполненного водой цилиндрического бака через круглое отверстие в его дне диаметром 5 см. Диаметр основания бака 2 м, высота 3 м.

Задание 37.

Определить время, в течение которого вся вода, заполняющая полусферическую чашу диметра 2 м, вытечет через круглое отверстие диметром 15 см в дне чаши.

Молекулярная физика и термодинамика

Закон охлаждения Ньютона

В конце 17 века известный британский ученый Исаак Ньютон изучал охлаждение тел. Эксперименты показали, что скорость охлаждения примерно пропорциональна разнице температур между нагретым телом и окружающей средой. Этот факт можно записать в виде дифференциального уравнения:

$$\frac{dQ}{dt} = \lambda S(T_{sred} - T), \qquad (2.48)$$

где dQ – количество теплоты, S – площадь поверхности тела, через которую передается тепло, T – температура тела, T_{sred} – температура окружающей среды, λ – коэффициент теплопередачи, зависящий от геометрии тела, состояния поверхности, режима теплопередачи и других факторов. С другой стороны

$$dQ = CdT, \qquad (2.49)$$

где C – теплоемкость тела. Подставляя dQ из (2.49) в (2.48) получим дифференциальное уравнение для скорости изменения температуры

$$C\frac{dT}{dt} = \lambda S(T_{sred} - T). \qquad (2.50)$$

Разделив обе части уравнения (2.50) на C и обозначив $\frac{\lambda S}{\mathrm{C}} = k$, получим

$$\frac{dT}{dt} = k(T_{sred} - T). \qquad (2.51)$$

Закон охлаждения Ньютона служит одним из видов граничных условий (синоним — «условия третьего рода»), которые ставятся в задачах теплопроводности.

Данный закон описывает ситуацию только на границе тела, внутри же его температура определяется температуропроводностью тела. Тепловой поток внутри тела определяется по закону Фурье, что позволяет найти распределение, решив уравнение теплопроводности.

Большой вклад в экспериментальную проверку закона охлаждения Ньютона внес русский физик Г.В. Рихман. В современной трактовке закон охлаждения Ньютона-Рихмана утверждает, что поверхностная плотность потока тепла q от нагретого тела пропорциональна разности температур поверхности тела T_{tela} и окружающей среды T_{sred}. Его записывают в форме

$$q = \beta(T_{tela} - T_{sred}),$$

где коэффициент пропорциональности β называют коэффициентом теплообмена.

Уравнение (2.50) решаем методом разделения переменных

$$\frac{dT}{T_{sred} - T} = kdt, \tag{2.51}$$

$$\int \frac{dT}{T_{sred} - T} = \int kdt + C_0, \tag{2.52}$$

$$-\ln(T_{sred} - T) = kt + C_0, \tag{2.53}$$

$$T_{sred} - T = \exp(-kt - C_0), \tag{2.54}$$

$$T = T_{sred} - e^{-kt} \cdot e^{-C_0}, \tag{2.55}$$

где C_0 – постоянная интегрирования. Введем новую постоянную $C_1 = e^{-C_0}$, тогда уравнение (2.55) примет вид

$$T = T_{sred} - C_1 e^{-kt}. \tag{2.60}$$

Учитывая, что в начальный момент времени $t = t_0 = 0$ температура тела $T = T_0$, то из уравнения (2.60) имеем $T_0 = T_{sred} - C_1 e^0$, откуда $C_1 = T_{sred} - T_0$. Подставляя это значение постоянной в уравнение (10) получим закон изменения температуры тела со временем:

$$T = T_{sred} - (T_{sred} - T_0)e^{-kt}. \tag{2.61}$$

Задание 2.38.

Построить по формуле (2.55) график зависимости температуры от времени $T = T(t)$ при различных значениях $k = 1/6$ и $k = 1/2$. Считать, что значения начальной температуры тела $T_0 = 283K$ и температуры среды $T_{sred} = 305K$ не меняются.

Задание 2.39.

Тело с начальной температурой T_0 помещено в комнату с температурой T^0_{sred} и начинает охлаждаться в соответствии с законом Ньютона с постоянной величиной k. При этом температура комнаты медленно растет по линейному закону

$$T_{sred} = T^0_{sred} + \alpha t\,, \tag{2.62}$$

где α – известный параметр. Определить момент времени τ, когда температуры тела и окружающей среды сравняются.

Указание. Полученное линейное дифференциальное уравнение решить с помощью интегрирующего множителя $\omega(t) = \exp\left(\int k dt\right) = e^{kt}$.

Задание 2.40. [3]

Тело, температура которого $25^o C$, погружается в термостат (его температура поддерживается при $0^o C$). За какое время тело охладится до $10^o C$, если за 20 минут оно охлаждается до $20^o C$?

Задание 2.41. [3]

Тело, температура которого $30^o C$, за 30 минут пребывания в термостате, температура которого $0^o C$, охладилось до $22{,}5^o C$. Какова будет температура тела через 3 часа после начала опыта?

Задание 2.42. [3]

Для области между двумя концентрическими сферами радиусами $r = a$ и $r = b$, $a < b$ задано дифференциальное уравнение изменения температуры в зависимости от расстояния до центра сферы $T = T(r)$

$$r\frac{d^2T}{dr^2} + k\frac{dT}{dr} = 0$$

с постоянными граничными условиями $T(a) = T_a$ и $T(b) = T_b$. Коэффициент k характеризует тепловые свойства вещества области между сферами.

Решить дифференциальное уравнение с заданными граничными условиями. Построить и сравнить графики зависимости $T = T(r)$ для $k = 2$ и $k = 3$ при $T_a = 283K$ и $T_b = 300K$.

Хорошей демонстрацией применения законов теплообмена является следующая задача из книги [2]: Чей кофе более горячий?

Анатолий и Владимир заказали в кафе кофе и сливки. Когда им одновременно подали по чашке одинаково горячего кофе и сливки, они поступили следующим образом. Анатолий добавил в кофе немного сливок, накрыл чашку бумажной салфеткой и вышел позвонить по телефону. Владимир сразу же накрыл чашку бумажной салфеткой, а добавил то же количество сливок только через 10 мин, когда вернулся Анатолий, и они начали пить кофе вместе. Кто же пил более горячий кофе?

Задачу будем решать с учетом естественных предположений, которые отражают физическое содержание происходящих процессов и заключаются в следующем. Считаем, что теплообмен через поверхность стола и салфетки намного меньше теплообмена через боковые стенки чашек; температура пара в чашке над поверхностью жидкости равна температуре жидкости.

Выведем сначала соотношение, показывающее, как с течением времени изменялась температура кофе в чашке Владимира до смешивания кофе со сливками.

В соответствии с принятыми допущениями на основе ранее указанного закона физики количество теплоты, полученное воздухом от чашки Владимира, определяется соотношением

$$dQ = \eta \frac{T - \theta}{l} s dt, \tag{2.63}$$

где T – температура кофе в момент времени t, θ – температура воздуха в кафе, η – теплопроводность материала чашки, l – толщина стенок чашки,

s – площадь боковой поверхности стенок чашки. С другой стороны, количество теплоты, отданное кофе, находим из равенства

$$dQ = cmdT \ , \tag{2.64}$$

где c – удельная теплоемкость кофе, m – масса кофе в чашке. Рассматривая теперь вместе уравнения (2.63) и (2.64), приходим к уравнению

$$\eta \frac{T-\theta}{l} sdt = -cmdT \ ,$$

Которое после разделения переменных можно переписать в виде

$$\frac{dT}{T-\theta} = -\frac{\eta s}{lcm} dt \, . \tag{2.65}$$

Обозначая начальную температуру кофе через T_0 и интегрируя дифференциальное уравнение (2.65), находим, что

$$T = \theta + \left(T_0 - \theta\right) e^{-\frac{\eta s}{lcm} t} \, . \tag{2.66}$$

Формула (2.66) и есть аналитическое описание закона, по которому изменялась температура кофе в чашке Владимира до смешивания кофе со сливками.

Посмотрим теперь, какой будет закон изменения температуры кофе после того, как Владимир добавил в чашку сливки. Для этого воспользуемся уравнением теплового баланса, которое в нашем случае запишется в виде

$$cm\left(T - \theta_B\right) = c_1 m_1 \left(\theta_B - T_1\right), \tag{2.67}$$

где θ_B – температура смеси в момент времени t, T_1 – температура сливок, c_1 – удельная теплоемкость сливок, m_1 – масса сливок, добавленная в кофе.

Из уравнения (2.67) находим, что

$$\theta_{\hat{A}} = \frac{c_1 m_1}{cm + c_1 m_1} T_1 + \frac{cm}{cm + c_1 m_1} T \, . \tag{2.68}$$

Принимая во внимание равенство (2.66), формулу (2.68) можно переписать в виде

$$\theta_B = \frac{c_1 m_1}{cm + c_1 m_1} T_1 + \frac{cm}{cm + c_1 m_1}\left[\theta + (T_0 - \theta) e^{-\frac{\eta s}{lcm} t}\right]. \qquad (2.69)$$

Равенство (2.69) и задает закон изменения температуры кофе после добавления в чашку Владимира сливок.

Для вывода закона изменения температуры кофе в чашке Анатолия снова воспользуемся уравнением теплового баланса, которое в данном случае принимает вид

$$cm(T_0 - \theta_0) = c_1 m_1 (\theta_0 - T_1), \qquad (2.70)$$

где θ_0 – температура смеси. Из равенства (2.70) получаем, что

$$\theta_0 = \frac{c_1 m_1}{cm + c_1 m_1} T_1 + \frac{cm}{cm + c_1 m_1} T_0 .$$

А тогда, воспользовавшись уравнением (2.66), где роль начальной температуры играет уже θ_0, а произведение cm заменяется суммой $cm + c_1 m_1$, окончательно получаем, что закон изменения температуры θ_A кофе в чашке Анатолия аналитически задается формулой

$$\theta_A = \theta + \left[\frac{c_1 m_1}{cm + c_1 m_1} T_1 + \frac{cm}{cm + c_1 m_1} T_0 - \theta\right] \cdot e^{-\frac{\eta s}{l(cm + c_1 m_1)} t}. \qquad (2.71)$$

Таким образом, для ответа на поставленный в задаче вопрос остается лишь обратиться к формулам (2.69) и (2.71) и провести численные расчеты, имея в виду, что $c_1 \approx 3{,}9 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), $c \approx 4{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), $\eta = 0{,}6$ В/(м · К), и полагая для определенности $m_1 = 2 \cdot 10^{-2}$ кг, $m = 8 \cdot 10^{-2}$ кг, $T_1 = 20^\circ$C, $\theta = 20^\circ$C, $T_0 = 80^\circ$C, $s = 11 \cdot 10^{-3}$ м^2, $l = 2 \cdot 10^{-3}$ м. Вычисления показывают, что более горячий кофе пил Анатолий. Предлагается этот проверить.

Задача о стационарном тепловом потоке [2].

О стационарном тепловом потоке говорят в том случае, когда температура тела в каждой точке со временем не меняется.

При решении задач, физическое содержание которых связано с влиянием тепловых потоков, существенную роль играют так называемые изотермические поверхности.

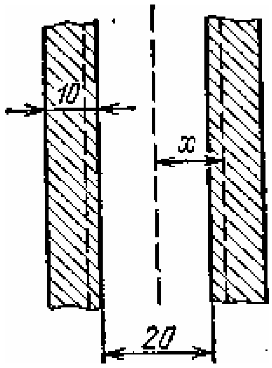

Рис. 2.16.

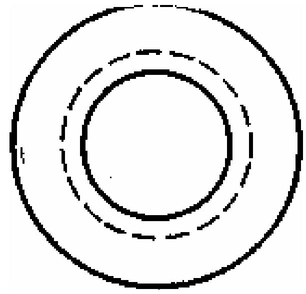

Рис. 2.17.

Для пояснения рассмотрим, например, теплопроводную трубу (рис. 2.16) диаметром 20 см, сделанную из однородного материала и защищенную покрытием из магнезии толщиной 10 см. Предположим, что температура трубы равна 160°С, а внешнее покрытие имеет температуру, равную 30°С. Тогда интуитивно ясно, что существует поверхность, сечение которой на рисунке 2.17 показано пунктиром, в каждой точке которой температура будет одной и той же, например, равной 95°С. Пунктирная кривая на рисунке 2.17 называется изотермической кривой, соответствующая же ей поверхность называется изотермической поверхностью.

В общем случае изотермические кривые могут иметь самый разнообразный вид, что, в частности, связано с нестационарностью теплового потока и неоднородностью материала. В рассматриваемом случае изотермическими кривыми (поверхностями) будут концентрические окружности (цилиндры).

Выведем закон распределения температуры внутри покрытия и найдем количество теплоты, выделенное трубой на участке длиной 1 м в течение суток, если коэффициент теплопроводности $k = 1{,}7 \cdot 10^{-4}$.

Для этого воспользуемся законом теплопроводности Фурье, согласно которому количество теплоты, излучаемое в единицу времени телом, находящимся в неизменном тепловом состоянии, температура T которого в каждой точке есть функция только одной координаты x, находится по формуле

$$Q = -kF(x)\frac{dT}{dx} = \text{const}, \tag{2.72}$$

где $F(x)$ – площадь сечения, перпендикулярного направлению распространения тепла, k – коэффициент теплопроводности.

Из условий задачи следует, что в рассматриваемом случае $F(x) = 2\pi xl$, где l – длина трубы, см, x – радиус основания цилиндрической поверхности, расположенной внутри внешнего цилиндра. Тогда на основании формулы (2.72) приходим к равенствам

$$\int_{160}^{30} dT = -\frac{Q}{0{,}00017\cdot 2\pi l}\int_{10}^{20}\frac{dx}{x}, \tag{2.73}$$

$$\int_{160}^{T} d\tau = -\frac{Q}{0{,}00017\cdot 2\pi l}\int_{10}^{x}\frac{d\xi}{\xi}. \tag{2.74}$$

Интегрируя соотношения (2.73) и (2.74), получаем, что

$$\frac{160-T}{130} = \frac{\ln 0{,}1x}{\ln 2} = \frac{\lg 0{,}1x}{\lg 2}.$$

Отсюда $T = 591{,}8 - 431{,}8\lg x$.

Последней формулой и задается закон распределения температуры внутри покрытия. Как видим, длина трубы здесь никакой роли не играет.

Чтобы ответить на второй вопрос, обратимся к уравнению (2.73). Тогда при $l = 100\,\text{см}$ получаем, что

$$Q = \frac{130\cdot 0{,}00017\cdot 2\pi\cdot 100}{\ln 2} = \frac{200\pi\cdot 130\cdot 0{,}00017}{0{,}69315},$$

а поэтому количество теплоты, выделенное в течение суток, равно $24\cdot 60\cdot 60Q = 726852$ Дж. Предлагается оценить это количество теплоты, исходя из других соображений.

Задание 2.43.

Найдите общее решение уравнения закона охлаждения Ньютона и постройте графики зависимости температуры от времени при $k = 0{,}02$ и $T_{рез} = 64^o C$ (температура пастеризации молока) для различных значений постоянной интегрирования, которые выбрать самостоятельно.

Задание 2.44.

Для нагрева металлической кружки с молоком при температуре $T_0 = 25^o C$ на электрической плите была установлена температура $T_{рез} = 250^o C$. Молоко закипело через 12 минут. Определить значение постоянной k в законе охлаждения (нагревания) Ньютона и выписать закон изменения температуры молока с течением времени.

Задание 2.45.

Определить время, в течение которого необходимо пастеризовать молоко в кружке на электрической плите, если начальная температура $T_0 = 25^o C$, а конечная $T_{рез} = 250^o C$. (Замечание. При решении использовать значение постоянной k, полученное в задании 2.44)

Закон охлаждения Ньютона можно записать в более общем виде [ ], считая температуру зависящей от времени $T_{рез} = T_{рез}(t)$:

$$\frac{dT}{dt} = k[T_{рез}(t) - T].$$

Задание 2.46.

Деревянный дом находится высоко в горах, где температура в течение летних суток может меняться от $T_{день} = +25^o C$ до $T_{ночь} = +5^o C$ по закону

$$T_{рез}(t) = 5 + 10\sin(\pi\, t).$$

Найти закон, по которому будет изменяться температура внутри дома, если он не отапливается. Построить графики зависимости температуры от времени.

Задание 2.47.

Зимой в доме из-за аварии на газопроводе произошло отключение отопительной системы. Температура воздуха вне дома (на улице) уменьшалась равномерно от $+10^o C$ в $t_0 = 18$ часов вечера до $-3^o C$ к $t_1 = 6$ часам утра. Температура внутри дома в момент аварии была $T_0 = +23^o C$.

Найти закон изменения температуры внутри дома от 18 часов вечера до 6 часов утра, если снаружи температура изменялась по закону $T_{рез}(t) = 8 - \frac{3}{2}(t - t_0)$, $t_0 \le t \le t_1$. Определить температуру внутри дома в 6 часов утра. Считать коэффициент k в законе охлаждения Ньютона равным 1/6. (Указание. При решении дифференциального уравнения используйте метод вариации произвольной постоянной).

Задание 2.48.

Летним вечером хозяйка для гостей приготовила большую кастрюлю горячего борща. Однако гости задержались в дороге. Они позвонили хозяйке и пообещали приехать на следующий день. Для сохранения борща хозяйке необходимо поместить борщ в холодильник, чтобы накормить гостей на следующий день. Борщ слишком горяч, чтобы быть установленным в холодильник. Его температура была вблизи температуры кипения воды. А в холодильник можно ставить большую кастрюлю с борщом только если температура будет порядка 20°C. Поэтому хозяйка для охлаждения борща поместила его в раковину с холодной водой, температура которой была примерно на одном уровне по 5°C. Хозяйка, помешивая борщ, довела его температуру до 60°C в течение десяти минут. Вопрос: как долго еще должна хозяйка помешивать борщ, чтобы он был готов для установки в холодильник?

Задание 2.49.

Предположим, что вы сделали чашку чая с кипятком в комнате, где температура составляет 23°С. Пусть через $T(t)$ обозначена температура чая (в градусах Цельсия) в некоторый момент времени t (в минутах).

a) Написать дифференциальное уравнение, выражающее закон охлаждения Ньютона в данной конкретной ситуации. Каким дифференциальным уравнением оно является?

b) Каковы начальные условия в данной задаче?

c) Сделайте в полученном ДУ замену $u(t) = T(t) - 23$. Каким начальным условиям будет удовлетворять новая функция $u(t)$? Какое будет решение в этом случае?

d) Предположим, что чай остывает со скоростью на 2°С в минуту, начиная с температуры в 70°С. Напишите формулу, определяющую закон изменения температуры чая $T(t)$.

e) Какая будет температура чая через полчаса?

f) Через какой промежуток времени чай остынет до 37°С?

Задание 2.50.

Предположим, что температура чашки с кофе подчиняется закону охлаждения Ньютона. Когда кофе налили в чашку, его температура была 93°С, через минуту он остыл до 88°С. Определить время, в течение которого кофе достигнет температуры 66°С, если температура воздуха в комнате 22°С.

Задание 2.51.

Предположим, что в один из зимних дней в 13 часов дня произошло аварийное отключение электричества в вашем доме. А ваш дом отапливается только электрическими тепловыми батареями. В момент отключения электричества температура в доме была 20°С. К десяти часам вечера температура в доме снизилась до 14°С и вы заметили, что на улице (за окном) температура стала –12°C. Считая, что температура $T(t)$ в вашем доме подчиняется закону охлаждения Ньютона, написать дифференциальное уравнение для $T(t)$ и затем решить задачу Коши для него. Оцените температуру в вашем доме на следующее утро в 7 часов, если батареи не будут включены.

Задание 2.52.

Из холодильника достали курицу при температуре 4°C, поместили её в духовку печи и выдержали там при постоянной температуре 180°C. Через 10 минут температура курицы стала 21°C. Курица считается приготовленной, когда ее температура достигнет 83°C. Как долго нужно держать курицу в духовке до полного приготовления?

Задание 2.56.

Скорость уменьшения концентрации лекарственного вещества в организме пропорциональна концентрации вещества в данный момент. Определить зависимость концентрации данного вещества в крови от времени C(t), если в начальный момент времени она была равна C_0 мг/л, а через t_1 часов уменьшилась N раз. Значения параметров C_0, t и N заданы.

Задание 2.57.

Найти закон изменения давления с высотой, который выражался дифференциальным уравнением первого порядка. (Распределение Больцмана).

Влияние высоты над уровнем моря на давление воздуха в тропосфере

Зона авиации – это тропосфера (рис. 2.18). Современные атмосферные летательные аппараты могут летать и в нижних слоях стратосферы. Например, практический потолок МИГ-25РБ – 23000 м. Именно физические свойства воздуха тропосферы определяют каким будет полет, насколько будет эффективна система управления самолета, как будет влиять на него турбулентность в атмосфере, как будут работать двигатели.

Для тропосферы (то есть области линейного убывания температуры — это единственное свойство тропосферы, используемое здесь) температура T на высоте h над уровнем моря может быть задана формулой:

$$T = T_0 - Lh,$$

где температуры T, T_0 задаются в Кельвинах, T_0 – температура воздуха у поверхности Земли. (Обычно принимают $L = 6{,}5$ K/м)

Для вычисления плотности воздуха на определенной высоте в тропосфере могут использоваться следующие параметры (в параметрах атмосферы указано значение для стандартной атмосферы):

- атмосферное давление на уровне моря — p_0=101325 Па;
- температура на уровне моря — T_0=288,15 K;
- плотность воздуха – ρ_0=1,225 кг/м^3;
- ускорение свободного падения над поверхностью Земли — g = 9,80665 м⁄с2 (вблизи поверхности Земли считается независимой от высоты величиной);
- скорость падения температуры с высотой, в пределах тропосферы — L = 0,0065 K/м;
- универсальная газовая постоянная — R = 8,31447 Дж⁄(Моль•K).

Давление на высоте h: $p = p_0\left(1 - \frac{Lh}{T_0}\right)^{\frac{gM}{RL}}$. Тогда плотность может быть вычислена подстановкой соответствующих данной высоте h температуры T и давления P в формулу: $\rho = \frac{pM}{RT}$.

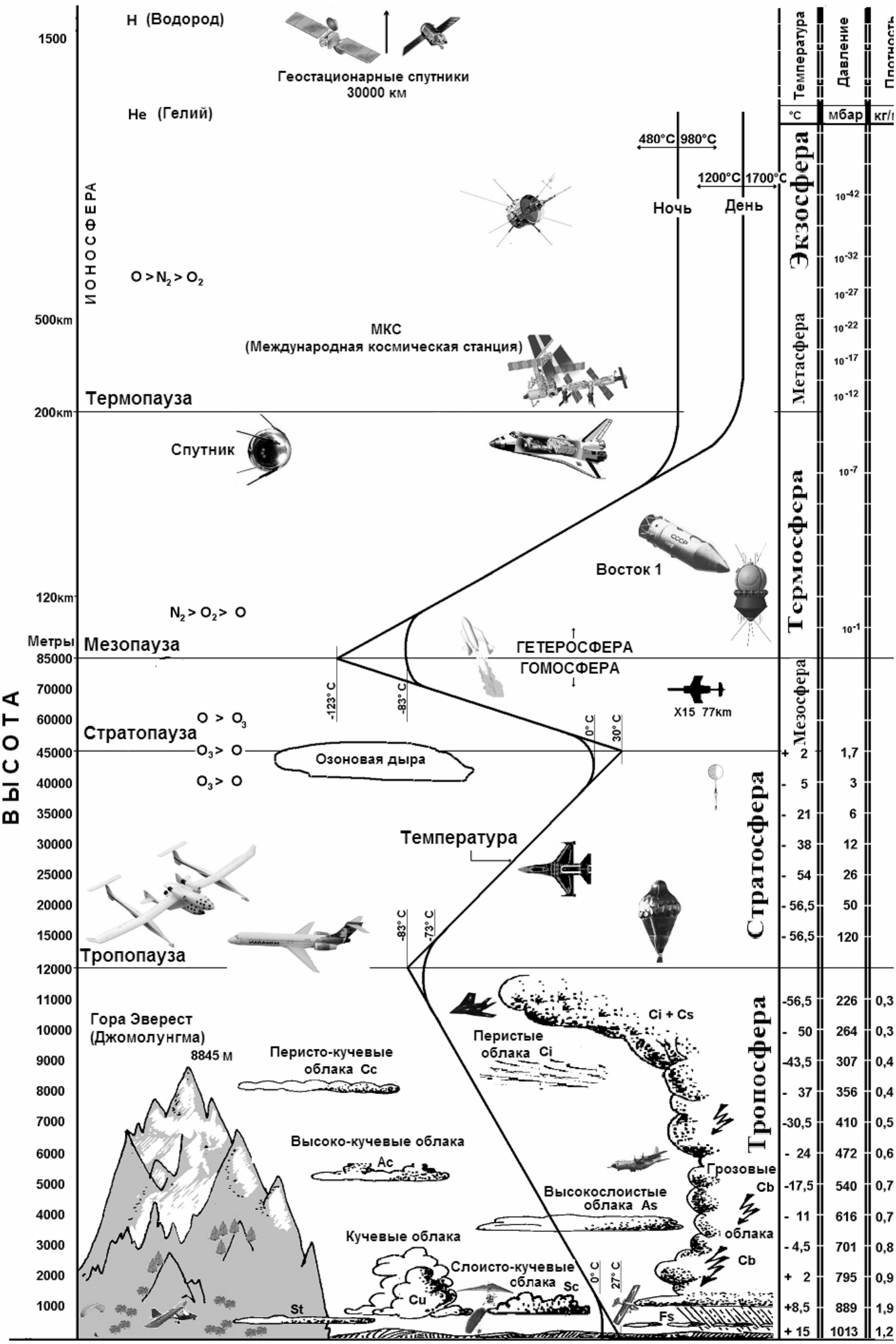

Рис. 2.18. Атмосфера Земли

При подключении источника тока к последовательно соединенным конденсатору (емкости), индуктивности и активному сопротивлению справедлив дифференциальный закон протекания тока в данной цепи (см. рис. 2.19) имеет вид

$$L\frac{di}{dt}+iR+\frac{q}{C}=U(t)\,. \qquad (2.75)$$

В уравнении (2.75) L – индуктивность (измеряется в Генри Гн), R – активное сопротивление, измеряется в Омах (Ом), i – сила тока в цепи, измеряется в Амперах (А), $U(t)$ – напряжение на источнике тока, измеряется в Вольтах (В), q – электрический заряд на обкладке конденсатора, измеряется в Кулонах, (Кл), C – электроемкость, измеряется в Фарадах (Ф).

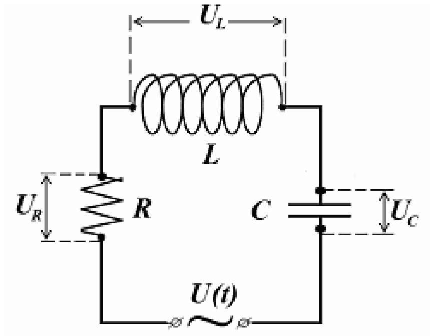

Рис. 2.19. Модель LRC – цепи (колебательного контура)

Задание 2.58.

Источник постоянного тока (аккумуляторная батарея), ЭДС которого равна 12 вольт, подключен последовательно к цепи, в которой находится индуктивность (катушка индуктивности) в 0,5 Гн (Генри) и активное сопротивление в 10 Ом. Определить изменение тока в цепи с течением времени, если в начальный момент времени он был равен нулю.

Задание 2.59.

Электрическая цепь состоит из параллельно соединенных конденсатора и активного сопротивления. В начальный момент времени $t_0=0$ напряжение на обкладках конденсатора равно U_0. Найти зависимость силы тока, проходящего через сопротивление, от времени.

Указание. Учесть, что сила тока $i = -\dfrac{dq}{dt}$ и напряжение на параллельно соединенных конденсаторе и активном сопротивлении одинаково, то есть $iR = \dfrac{q}{C}$.

Провести численный расчет для следующих значений величин: $C = 50\,nФ$, $R = 2{,}2$ кОм, $U_0 = 12$ В. Определить силу тока через 0,015 мс.

Задание 2.60.

Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных конденсатора и активного сопротивления. Эту цепь подключили к источнику переменного напряжения $U(t) = U_0 \cos \omega t$, где амплитуда $U_0 = 220В$ и частота $\omega = 50Гц$. Какова сила тока, проходящего через резистор (активное сопротивление), если $C = 50\,nФ$ и $R = 2{,}2$ кОм? Построить график зависимости силы тока от времени.

Указание. В уравнении (2.75) принять L=0. Представить переменное напряжение в экспоненциальной комплексной форме и найти частное решение дифференциального уравнения в экспоненциальной форме.

Электрические сигналы, вход и выход

В инженерных науках, таких, как электроника и схемотехника, рассматривают прохождение сигналов по электрическим цепям. При этом удобным является представление электрических схем и сигналов в виде некоторого устройства, имеющего вход, выход, обратную связь и воздействие (см. рис. 2.20).

Рис. 2.20. Модель устройства электрической цепи в виде блок-схемы

Математической моделью такого устройства, в простейшем случае при отсутствии обратной связи, является дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + ay = b(x),$$

где a – некоторая постоянная величина.

Для этого ДУ можно принять, что левая часть представляет собой некоторую физическую систему и то, что происходит в ней, а правая – внешнее влияние на систему. Мы назовем левую часть входным сигналом или просто вход. В общем случае, входной сигнал является функцией переменной x. Заметим, что правая часть не зависит от y. Система реагирует на входной сигнал и дает функцию $y(x)$, которую будем называть выходным сигналом или откликом системы.

Решение ОДУ означает нахождение неизвестной функции $y(x)$ или в новых терминах – определение реакции системы на входной сигнал $b(x)$. Важно понимать, что система и вход – это не математические термины. Они удобны с точки зрения физического смысла при описании различных частей указанного ДУ. Что представляют собой входные и выходные сигналы является вопросом интерпретации физической обстановки, а не свойством самого уравнения. Поясним это на примерах, из которых будет видно понятия системы, входа и выхода.

Блок-схемы являются полезным инструментом, который часто используют инженеры для представления систем. На рис. 2.21 представлена простая блок-схема, которая показывает вход сигнала в систему и получение в результате действия системы (прямоугольник) выходного сигнала.

Рис. 2.21. Простая блок-схема, состоящая из входного сигнала, системы и выходного сигнала

Представленная блок-схема усложняется, если мы будем учитывать начальные условия. Такой пример с начальным условием приведен на рис. 2.22.

Рис. 2.22. Блок-схема показывает входной сигнал $b(x)$, начальное условие $y(0)$, входящее в систему и выходной сигнал $y(x)$.

Покажем теперь использование некоторых блок-схемовых диаграмм для ДУ, получающихся в курсе электромагнетизма. Более точно – рассмотрим прохождение электрического сигнала (тока) через систему (электрическую схему), состоящую из конденсатора (емкости) C, активного сопротивления R и индуктивности L.

Пусть для простоты у нас имеется электрическую цепь, состоящая из источника электрического тока, активного сопротивления R и конденсатора C (рис. 2.23).

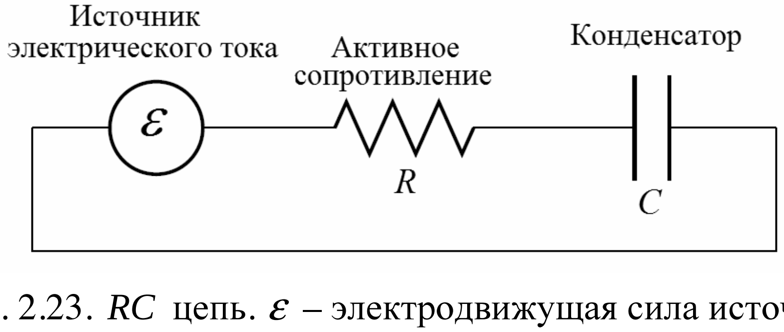

Рис. 2.23. RC цепь. $\mathcal{E}$ – электродвижущая сила источника тока.

Величину электрического тока обозначают буквой I и говорят просто – сила тока. Сила тока может быть постоянной величиной или изменяться со временем. Говорят, что положительное направление в цепи выбрано, если ток протекает по часовой стрелке (на рис. 2.23 – вправо), тогда значение силы тока считается положительным. Если ток течет против хода часовой стрелки, то сила тока имеет отрицательное значение.

В соответствии с законом Кирхгофа по напряжению, общее изменение напряжения в электрической цепи равно сумме напряжений на каждом из участков этой цепи, например, для *RC* цепи:

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t)\,. \qquad (2.76)$$

При этом напряжение на каждом участке определяется через силу тока, протекающего через участок цепи, по формулам:

– для постоянного по величине активного сопротивления: $U_R = I(t)R$,

– для переменного тока и постоянной по величине емкости конденсатора: $\frac{dU_C}{dt} = I(t)\frac{1}{X_C}$, здесь $X_C = \omega C = 2\pi\nu C$ – ёмкостное сопротивление, ν – частота переменного тока.

Дифференцируя по времени t обе части равенства (2.76), получим дифференциальное уравнение первого порядка для $I(t)$:

$$R\frac{dI(t)}{dt} + I(t)\frac{1}{X_C} = \frac{dU(t)}{dt}\,. \qquad (2.77)$$

С точки зрения блоковой диаграммы для *RC* цепи (рис. 2.23) мы считаем напряжение $U(t)$ входным сигналом (вход), выходным сигналом – силу тока $I(t)$, а ток в начальный момент времени $I(0)$ – воздействием.

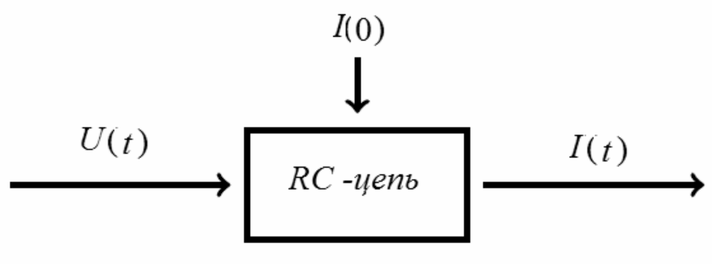

Рис. 2.24. Блоковая диаграмма для *RC* цепи

Если на входе напряжение изменяется по гармоническому закону $\varepsilon = U(t) = a\sin(\omega t)$, то из (2.77) получим дифференциальное уравнение

$$R\frac{dI(t)}{dt} + I(t)\frac{1}{X_C} = a\omega\cos(\omega t). \qquad (2.78)$$

ДУ (2.78) можно решить с помощью комплексных чисел, а именно представив напряжения и токи в тригонометрической форме. Для комплексных чисел $\cos(\omega t) + i\sin(\omega t) = e^{i\omega t} = \exp(i\omega t)$, здесь i – мнимая единица, то есть $i^2 = -1$. Тогда для *RC*-цепи имеем $IR + \frac{q}{C} = U_0 e^{i\omega t}$, откуда после дифференцирования получаем дифференциальное уравнение для электрического тока

$$\frac{dI(t)}{dt} + I(t)\frac{1}{RX_C} = \frac{iU_0\omega}{R}e^{i\omega t}. \qquad (2.79)$$

Будем искать частный интеграл ДУ (2.79) в виде

$$I_{частн}(t) = Ae^{i\omega t},$$

где A – некоторая постоянная. Подставляя его в уравнение (2.79), найдем вид этой постоянной:

$$A = \frac{i\omega U_0}{R} \cdot \frac{1}{i\omega + \frac{1}{RC}} = \frac{i\omega CU_0}{i\omega RC + 1}.$$

Тогда в комплексной форме $I_{частн}(t) = \frac{i\omega CU_0}{i\omega RC + 1}e^{i\omega t}$. Отделяя действительную часть, получим

$$I_{частн}(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{i\omega CU_0}{i\omega RC + 1}e^{i\omega t}\right) = \frac{\omega CU_0}{1 + (\omega RC)^2}[\omega RC\cos(\omega t) - \sin(\omega t)].$$

Это формула описывающая изменение тока в *RC* цепи.

Задание 2.61.

Определить закон изменения силы тока $I(t)$ в *RC* цепи с переменным гармоническим источником электрического тока, решив дифференциальное уравнение (2.78) в действительной области.

Задание 2.62.

Определить закон изменения силы тока $I(t)$ в *RC* цепи с переменным постоянным источником электрического тока $U(t) = U_0$, решив дифференциальное уравнение (2.78), если в начальный момент времени сила тока в цепи равна $I_0 = I(0)$. Постройте приблизительный график зависимости $I(t)$.

Если в электрическую схему добавить индуктивность *L* (катушку с проводом), то мы получим *LCR*-цепь (рис. 2.25) (см. аналог рис. 2.19).

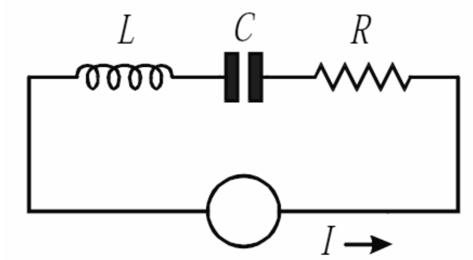

Рис. 2.25. LCR-цепь

В этой цепи добавится еще напряжение на участке с индуктивностью $U_L = L\frac{dI}{dt}$. Если напряжение на конденсаторе представить в виде $U_C = \frac{1}{X_C}\int I(t)dt$, то для LCR-цепи по закону Кирхгофа имеем уравнение

$$U(t) = U_L + U_R(t) + U_C(t) \tag{2.80}$$

или

$$U(t) = L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{1}{X_C}\int I(t)dt \tag{2.81}$$

Если продифференцировать обе части уравнения (2.81), то получим ДУ второго порядка

$$\frac{dU(t)}{dt} = L\frac{d^2I(t)}{dt^2} + \frac{dI(t)}{dt}R + \frac{1}{X_C}I(t). \qquad (2.82)$$

Нахождение решения уравнения (2.82) зависит от вида функции $U(t)$.

Из уравнения (2.80) при $C = 0$ получим ДУ первого порядка, описывающее *LR*-цепь:

$$U(t) = L\frac{dI}{dt} + IR. \qquad (2.83)$$

Таким образом, для *RC* и *LR* электрических цепей мы имеем дифференциальные уравнения первого порядка, а для *LCR*-цепи – ДУ второго порядка.

Задание 2.63.

Изобразите блоковые диаграммы для *CL, LCR* и *LR* электрических цепей.

Атомная физика

Все тела состоят из атомов. Некоторые атомы неустойчивы и поэтому они могут распадаться на другие атомы. Такие неустойчивые атомы называют радиоактивными. Все радиоактивные атомы распадаются. После распада атомы становятся стабильными и уже не радиоактивны.

Для того чтобы понять процесс распада, начнем с описания атома. Атомы состоят из трех субатомных частиц – протонов, нейтронов и электронов. Протоны и нейтроны как бы упакованы вместе в ядре, находящегося в центре атома. Все атомные ядра можно разделить на две группы – стабильные и радиоактивные (нестабильные). Электроны движутся вокруг ядра. Число протонов в ядре определяет, атом какого химического элемента мы имеем. Например, в атоме кислорода ядро содержит 8 протонов, а в атоме хлора ядро содержит 17 протонов. Это записывают в виде формулы ${}^{16}_{8}O$, ${}_{17}Cl$.

Как правило, все атомы одного и того же химического элемента имеют одинаковое число протонов. Однако существуют атомы одного и того же химического элемента, которые имеют различное число нейтронов. Атомы одного и того же химического элемента с разным количеством нейтронов называются изотопами. Например, все атомы углерода имеют по 6 протонов в ядре. Тем не менее, в то время как большинство атомов углерода имеют 6 нейтронов, у некоторых из них может быть 7 или 8 нейтронов. Название изотопа такое же, как и у элемента, но с добавкой – последующей суммы нейтронов и протонов в изотопных ядрах. Так атом углерода с 6 протонов и 6 нейтронами в ядре именуется Углерод-12. Атом углерода с 6 протонами и 8 нейтронами называется Углерод-14.

Под радиоактивным распадом понимается процесс, при котором ядро атома может превратиться в другое ядро с испусканием частицы. Например, ядро ^{137}Cs может превратиться в ядро атома бария ^{137}Ba с излучением частицы – электрона

$$^{137}Cs \to {}^{137}Ba + e^{-}.$$

Такой процесс превращения ядер с излучением электрона называется бета-распадом.

При распаде атомов скорость изменения массы радиоактивного изотопа пропорциональна представленной массе. Если обозначить через $m(t)$ массу радиоактивного изотопа в некоторый момент времени t, будем иметь линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dm}{dt} = -\gamma m,\ \gamma > 0.$$

Эта формула выражает закон радиоактивного распада.

Закон радиоактивного распада – это физический закон, описывающий зависимость интенсивности радиоактивного распада от времени и количества радиоактивных атомов в образце. Его можно сформулировать также следующим образом: число распадов атомов dN_A, произошедшее за интервал времени dt, прямо пропорционально числу атомов N_A в образце и записать в виде дифференциального уравнения

$$\frac{dN_A}{dt} = -\gamma_A N_A, \tag{2.84}$$

где γ_A – некоторая постоянная, называемая постоянной распада. Она характеризует вероятность радиоактивного распада за единицу времени и имеет размерность с$^{-1}$. Знак минус в уравнении (2.84) указывает на убыль числа радиоактивных ядер со временем.

Задание 2.64.

Найти решение уравнения (2.84) с начальными условиями (задача Коши): N_0 – количество атомов в начальный момент времени $t_0 = 0$. Построить график зависимости $N_A = N_A(t)$.

Найти время, за которое количество атомов уменьшается вдвое (это время называется периодом полураспада).

Задание 2.65.

Скорость распада радия прямо пропорциональна наличной его массе. Определить, какой процент массы m_0 радия распадется через 200 лет, если известно, что период полураспада радия (период времени, по истечении которого распадается половина наличной массы) равен 1590 лет.

Двойной радиоактивный распад

Когда радиоактивное ядро распадается, оно превращается в новое ядро, которое само по себе может также быть радиоактивными. Например, ^{224}Ra распадается на ^{220}Rn с испусканием альфа-частицы, а в свою очередь, ядра ^{220}Rn будут распадаться с испусканием второй альфа-частицы и превращением в ядра полония ^{216}Po.

Предположим, что у нас имеется некоторое количество ядер некоторого изотопа A, который распадается с постоянной распада γ для создания ядер B. Пусть распад ядер B с постоянной распада γ приводит к образованию ядер C. Пусть начальное число ядер изотопа A равно N_0 а первоначальное число ядер B равно нулю. Задача состоит в том, чтобы найти закон зависимости от времени числа ядер B.

С одной стороны, из-за радиоактивного распада ядер A с течением времени количество ядер B возрастает, с другой – уменьшается от радиоактивного распада ядер B. Поэтому можно записать, что скорость радиоактивного распада ядер B будет пропорциональной разности между количеством распадающихся ядер A и количеством распадающихся ядер B. Математически это выражается формулой

$$\frac{dN_B}{dt} = \gamma_A N_A - \gamma_B N_B. \tag{2.85}$$

Учитывая решение уравнения (2.84) $N_A = N_0 e^{-\gamma_A t}$, уравнение (2.85) можно записать в виде

$$\frac{dN_B}{dt} + \gamma_B N_B = \gamma_A N_0 e^{-\gamma_A t}. \tag{2.86}$$

Уравнение (2.86) имеет дополнительную функцию $N_0 e^{-\gamma_A t}$, где постоянная N_0 находится из начальных условий. Задача состоит в нахождении зависимости N_B от времени t. Необходимо самостоятельно решить эту задачу. (Подсказка: считать вид зависимости от времени экспоненциальным.)

Ответ: $N_B(t) = Ce^{-\gamma_B t} + \dfrac{\gamma_A N_0}{\gamma_B - \gamma_A} e^{-\gamma_A t}$, где C – произвольная постоянная.

Задание 2.66.

Для задания 2.64 найти значение произвольной постоянной C, учитывая, что в начальный момент времени $t = 0$ число $N_B = 0$. Записать с учетом этого зависимость N_B от времени t и построить график этой зависимости.

Оптика

Задание 2.67.

Количество света, поглощаемое слоем воды, пропорционально количеству падающего на него света. Слой воды толщиной 3 м поглощает половину первоначального количества света. Определить, какая часть первоначального количества света дойдет до глубины 60 м?

Задание 2.68.

Стекло определенного сорта толщиной в один метр поглощает $n\%$ света, проходящего через него. Какой толщины надо взять стекло, чтобы оно поглощало только 1% проходящего света?

Указание. Использовать закон поглощения света слоем воды. (см. задачу **2.67**.)

Задание 2.69.

Известно, что слой воды толщиной в 10 метров поглощает 40% дневного света, падающего на ее поверхность. Определить на какой глубине дневной солнечный свет будет равен лунному, яркость которого составляет $\frac{1}{3}10^{-5}$ яркости света на поверхности воды?

Задание 2.70.

Скорость увеличения площади молодого листа растения, имеющего форму круга, пропорциональна радиусу листа и количеству солнечного света, падающего на него. Количество солнечного света пропорционально площади листа и косинусу угла между направлением лучей и вертикалью к листу. Найти зависимость между площадью листа S и временем t.

Задание 2.71.

Растение увеличивает свою массу благодаря процессу фотосинтеза. Считая, что количество образующейся массы Δm пропорционально интенсивности светового потока I, изменению времени Δt и начальной массе m_0, определить закон изменения массы растения с течением времени.

Литература

1. Полюхович Н.В. Методические основы обучения студентов решению прикладных задач по теме «Дифференциальные уравнения» // Ярославский педагогический вестник. – 2010. – № 2. – С. 131-136.
2. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. М.: Либроком, 2012. – 208 с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие / Г. Н. Берман. – 22-е изд., перераб. – СПб.: Профессия, 2004. – 432 с.
4. Marcel B. Finan A First Course in Elementary Differential Equations Arkansas Tech University, 2012. 225 p. URL: https://www.math.umass.edu/~gardner/m331/diffq1book.pdf
5. Hsu T.R. Applied Engineering Analysis for internal distribution for San Jose State University students, Spring. 2013. 218 p. URL: http://www.engr.sjsu.edu/trhsu/Chapter%203%20First%20order%20DEs.pdf
6. Borrelli R.L., Coleman C.S. Differential Equations: A Modeling Perspective. 2nd Edition. – New York: Wiley, 2004. – 736 p. http://www.wiley.com/college/borrelli/pdf/bctext1.pdf
7. Ибрагимов Н.Х. Практический курс по дифференциальным уравнениям и математического моделирования Нижний Новгород: Издательство ННГУ, 2007. – 421 с.

Общие методические рекомендации по изучению курса

Программа курса «Дифференциальные уравнения» предусматривает три вида самостоятельной работы:

– изучение теоретического материала по разделам дисциплины с использованием рекомендованной литературы;

– выполнение заданий в аудитории и дома;

– подготовку к экзамену.

Основные принципы изучения курса:

1. Студент изучает теоретический материал курса, используя конспект лекций и при необходимости список рекомендуемой литературы. Для лучшего усвоения курса составляется совместно с преподавателем календарный график изучения курса на семестр, которого необходимо придерживаться.

2. Освоение теоретического курса сопровождается выполнением студентами заданий на практических (семинарских) занятиях, для которых в рамках настоящей дисциплины задания подобраны по каждой теме. Для каждой темы практического занятия приведены контрольные вопросы, по которым проводится опрос и обсуждение заданной темы.

3. В ходе освоения теоретического материала на каждом занятии проводится входной контроль виде тестового опроса, что позволяет оценить степень усвоения теоретического материала студентами.

Семестр завершается экзаменом по дисциплине.

Для получения допуска к экзамену студенты должны освоить материал лекционного курса и дополнительные теоретические темы дисциплины, предназначенные для самостоятельного изучения. Выполнить на положительную оценку промежуточные контрольные мероприятия, предусмотренные учебно-методическим комплексом для каждого направления обучения.

Студенты, получившие допуск к экзамену, готовятся к нему, используя список контрольных вопросов, и сдают экзамен по экзаменационным билетам. Самостоятельно изучаемые вопросы курса также включаются в экзаменационные билеты.

Рекомендации по работе с литературой*

Содержание книги можно понять и усвоить, если будет уяснена схема ее построения и выделены узловые идеи. Для этого рекомендуется провести анализ текста, следует все изображать на бумаге в текстовой форме, выписывая главные положения или в форме графической схемы, на которой наиболее наглядно представить всю картину логических связей. Усвоению основных положений книги содействует система подчеркиваний и выделений (карандашом) в тексте книги, а также нумерация отдельных утверждений.

При чтении книги могут встречаться малопонятные слова, термины, которые используются в различных контекстах неоднозначно, не всегда ясны различного рода сокращения. Поэтому, желательно приучить себя к обязательному уточнению всех тех терминов и понятий, по поводу которых возникают хоть какие-либо сомнения. Весьма важно для этого всегда иметь необходимые справочники и словари или ресурсы сети Интернет.

Во время чтения книги, как правило, следует вести записи. Это непременное условие. Не случайно всегда говорится о необходимости чтения «с карандашом в руке». Ведение записей способствует лучшему усвоению прочитанного, дает возможность сохранить нужные материалы в удобном для использования виде, помогает закрепить их в памяти, позволяет сократить время на поиск при повторном обращении к книге.

Рациональными записями можно считать записи, удовлетворяющие некоторым требованиям к их ведению и правильно выбранной их форме. **Нужно взять за правило вести записи при чтении любой специальной литературы.** Ведение записей — обязательный элемент работы над книгой, неотделимый от процесса чтения. Следует вырабатывать в себе умение читать и вести записи при любых условиях. При этом важно быть дис-

* Кузнецов И.Н. Методика работы с текстовой информацией URL: www.elitarium.ru - Элитариум: Центр дистанционного образования.

циплинированным в отношении немедленной и обязательной записи оригинальных мыслей, появляющихся в процессе чтения. Помните о том, что они являются результатом ассоциаций, которые в других условиях не возникнут.

Записи должны быть по возможности наиболее полными и лаконичными, в результате этого вы потратите гораздо меньше времени на повторение, чем повторное обращение к книге. Прежде всего, нужно стремиться к краткому изложению и к использованию всякого рода сокращений.

Важными требованиями являются наглядность и обозримость записей и такое их расположение, которое бы помогало уяснить логические связи и иерархию понятий. Сделать это возможно с помощью системы заголовков, подзаголовков и ключевых слов, а также путем расчленения текста за счет абзацных отступов, подчеркиваний, нумерации отдельных понятий.

К общим моментам техники записей относится вопрос о форме. Выбор здесь идет между так называемой «книжной» формой (использованием материалов в сброшюрованном виде) и «карточной» формой.

Практическая рекомендация — вести записи только на одной стороне листа. При этом ускоряется их поиск и систематизация, становится возможным производить любые вставки в текст, использовать записи при работе над собственными текстами (докладами, рукописями научно-литературных произведений).

Наиболее часто практикуемым видом записей является конспект, то есть краткое изложение прочитанного текста. В буквальном смысле слово «конспект» означает «обзор». Поэтому и составлять его надо как обзор, содержащий основные мысли произведения, без подробностей и второстепенных деталей. Слишком подробный конспект — уже не конспект. По своей структуре он чаще всего соответствует плану книги. Помимо обычного текстового конспекта, в ряде случаев целесообразно использовать такой конспект, где все записи вносятся в заранее подготовленные таблицы (формализованный конспект). Это удобно при конспектировании материалов, когда перечень характеристик описываемых предметов или явлений более или менее постоянен.

Разновидностью формализованного конспекта является запись, составленная в форме ответов на заранее подготовленные вопросы, обеспечивающие исчерпывающие характеристики однотипных предметов или явлений. Конспект этого типа удобен, когда предполагается сопоставление тех или иных характеристик.

Еще одна форма конспекта — графическая. Суть ее в том, что элементы конспектируемой работы располагаются в таком виде, при котором видна иерархия понятий и взаимосвязь между ними. На первой горизонтали находится формулировка темы, на второй показано, какие основные положения в нее входят. Эти положения имеют свои подразделения и т. д. По каждой работе может быть не один, а несколько графических конспектов, отображающих книгу в целом и отдельные ее части. Считается, что ведение графического конспекта – это наиболее совершенный способ изображения внутренней структуры книги. При этом процесс составления графического конспекта книги помогает усвоению ее содержания.

Рекомендуем также составлять словарь терминов и понятий. Он относится к группе записей, связанных с необходимостью аналитической переработки текста. Следует составить для себя такой словарь и дать точное толкование всем специальным терминам и понятиям.

Учебное издание

Авторы-составители
ТЛЯЧЕВ *Вячеслав Бесланович*
УШХО *Адам Дамирович*
УШХО *Дамир Салихович*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ФИЗИКЕ. РУКОВОДСТВО К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Дизайн обложки и компьютерная верстка авторов

Подписано к печати 02.12.2014. Гарнитура Таймс. Формат бумаги 60х84/16.
Усл. печ. л. 11,55. Заказ № 089. Тираж 100 экз.

Отпечатано на участке оперативной полиграфии «ИП Магарин О.Г.» в полном соответствии с качеством предоставленного оригинал-макета.
385008, г. Майкоп, ул. 12 Марта, 146. Тел. 8-909-438-28-47. E-mail: olemag@rambler.ru

Для примечаний