НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОТСУТСТВИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ КВАДРАТИЧНОЙ СИСТЕМЫ, ИМЕЮЩЕЙ ОСЬ СИММЕТРИИ *S*–ТИПА

А.Д. Ушхо

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Дано новое доказательство теоремы о том, что если квадратичная дифференциальная система на плоскости имеет ось симметрии *S*-типа и два состояния равновесия второй группы в ограниченной части фазовой плоскости, то эти состояния равновесия – центры.

В работе [1] доказано, что система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{2} a_{ij}x^i y^j \equiv P_2(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{2} a_{ij}x^i y^j \equiv Q_2(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R$, $(P_2, Q_2) = 1$, не имеет предельных циклов, если векторное поле этой системы обладает осью симметрии (безразлично *N*–типа или *S*–типа).

Следуя статье [2] напомним некоторые сведения об осях симметрии *N* –типа и *S*–типа.

Определение 1. Пусть линейное преобразование вида

$$\begin{cases} \bar{x} = x + ky, \\ \bar{y} = -kx + y, \end{cases} \quad k \in R \tag{2}$$

переводит систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{n} a_{ij}x^i y^j \equiv P_n(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{n} a_{ij}x^i y^j \equiv Q_n(x,y), \end{cases} \tag{3}$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R$, $(P_n, Q_n) = 1$, в систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{dt} = \overline{P}_n(\bar{x},\bar{y}), \\ \dfrac{d\bar{y}}{dt} = \overline{Q}_n(\bar{x},\bar{y}). \end{cases} \tag{4}$$

Прямую $y = kx$ назовём осью симметрии *N* –типа поля направлений системы (3), если выполняются следующие тождества:

$$\overline{P}_n(\bar{x},\bar{y}) \equiv \bar{y}\overline{P}_{n-1}(\bar{x},\bar{y}),\ Q_n(\bar{x},-\bar{y}) \equiv \overline{Q}_n(\bar{x},\bar{y}), \overline{P}_{n-1}(\bar{x},-\bar{y}) \equiv \overline{P}_{n-1}(\bar{x},\bar{y}),$$

где $\overline{P}_i(\bar{x},\bar{y})$ – многочлен степени $i\ (i = n, n-1)$, $Q_n(\bar{x},\bar{y})$ – многочлен степени n.

Замечательным свойством оси симметрии *N* –типа представляется тот факт, что она является изоклиной системы (3), которую пересекают траектории под прямым углом [2].

Определение 2. Пусть преобразование (2) переводит систему (3) в систему (4). Прямую $y = kx$ назовём осью симметрии *S*–типа поля направлений системы (3), если

$$\overline{P}_n(\overline{x},-\overline{y}) \equiv \overline{P}_n(\overline{x},\overline{y}),\ Q_n(\overline{x},\overline{y}) \equiv \overline{y}\overline{Q}_{n-1}(\overline{x},\overline{y}), \overline{Q}_{n-1}(\overline{x},-\overline{y}) \equiv \overline{Q}_{n-1}(\overline{x},\overline{y}),$$

где $\overline{Q}_i(\overline{x},\overline{y})$ – многочлен степени $i\ (i = n, n-1)$, $\overline{P}_n(\overline{x},\overline{y})$ – многочлен степени n.

Ось симметрии *S*–типа системы (3) является её инвариантной прямой [2].

Доказательство отсутствия предельных циклов у системы (1), имеющей ось симметрии *S*-типа проводится в статье [1] в три этапа. Это связано с рассмотрением случаев: а) система имеет четыре состояния равновесия; б) система имеет три состояния равновесия; в) система имеет два состояния равновесия. Авторы при доказательстве [1] в основном опираются на признак Дюлака для односвязной области [3], а также на признак отсутствия предельных циклов из работы [4].

Теорема. *Пусть система* (1) *имеет ось симметрии S – типа и два состояния равновесия Ф1 и Ф2 второй группы в ограниченной части фазовой плоскости. Тогда Ф1 и Ф2 – центры.*

Доказательство. Состояние равновесия второй группы здесь понимается в смысле терминологии [5]. Согласно [6] прямая, проходящая через два состояния равновесия системы (1), является ее изоклиной.

Пусть на прямой $l : P'_{2x}(x,y) + Q'_{2y}(x,y) = 0$, на которой расположены состояния равновесия *Ф1* и *Ф2*, системой (1) индуцировано направление m. Тогда с помощью преобразования [7]

$$\begin{cases} x = \overline{x} + \overline{y}, \\ y = m\overline{y} \end{cases} \tag{5}$$

систему (1) можно перевести в систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = (a_1\overline{x} + b_1\overline{y} + c_1)(a_2\overline{x} + b_2\overline{y} + c_2), \\ \dfrac{d\overline{y}}{dt} = \overline{Q}_2(\overline{x},\overline{y}) \end{cases} \tag{6}$$

Пусть в результате преобразования (5) прямая l трансформировалась в прямую $\overline{l}$. Согласно [7] $\overline{l}$ – изоклина бесконечности, следовательно, не уменьшая общности, полагаем, что $\overline{l}$ задается уравнением $a_2\overline{x} + b_2\overline{y} + c_2 = 0$. Согласно теореме 36 [8] прямую $\overline{l}$ пересекает прямая $\overline{l}_1 : a_1\overline{x} + b_1\overline{y} + c_1 = 0$. Прямая $\overline{l}_1$ и есть ось симметрии системы (6), ибо в противном случае на прямой $\overline{l}$ эта система имеет наряду с двумя состояниями равновесия и третье состояние равновесия. Это противоречит свойству квадратичной системы иметь на прямой не более двух состояний равновесия.

Таким образом, система (6) имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = (a_1\overline{x} + c_1)(b_2\overline{y} + c_2), \\ \dfrac{d\overline{y}}{dt} = \overline{Q}_2(\overline{x},\overline{y}) \end{cases} \tag{7}$$

Если $c_1 = 0$, то $\overline{Q}_2(-\overline{x},\overline{y}) = \overline{Q}_2(\overline{x},\overline{y})$ [2]. В противном случае с помощью преобразования

$\begin{cases} \overline{x} = \tilde{x} - \dfrac{c_1}{a_1}, \\ \overline{y} = \tilde{y} \end{cases}$ придадим системе (7) вид

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}}{dt} = a_1\tilde{x}(b_2\tilde{y} + c_2), \\ \dfrac{d\tilde{y}}{dt} = \alpha + \beta\tilde{y} + \gamma\tilde{x}^2 + \delta\tilde{y}^2 \end{cases} \tag{8}$$

Пусть $\tilde{\Phi}_1(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ и $\tilde{\Phi}_2(-\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ – состояние равновесия второй группы системы (8), тогда эти две точки являются решениями системы

$\begin{cases} b_2\tilde{y} + c_2 = 0, \\ \alpha + \beta\tilde{y} + \gamma\tilde{x}^2 + \delta\tilde{y}^2 = 0, \end{cases}$ причем $\tilde{y}_0 = -\dfrac{c_2}{b_2}$.

С помощью преобразования $\begin{cases} \tilde{x} = \nu, \\ \tilde{y} = \omega + y_0 \end{cases}$ система (8) приводится к виду

$$\begin{cases} \dfrac{d\nu}{dt} = a_1 b_2 \nu\omega, \\ \dfrac{d\omega}{dt} = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\omega + \tilde{\gamma}\nu^2 + \bar{\delta}\omega^2 \end{cases} \tag{9}$$

Из (9) в силу [2] следует, что данная система имеет наряду с осью симметрии S – типа $\nu = 0$ и ось симметрии N – типа $\omega = 0$. А так как состояния равновесия второй группы расположены на прямой $\omega = 0$, то они могут быть только центрами. Теорема доказана.

Следствие. Если квадратичная система имеет два негрубых фокуса в ограниченной части фазовой плоскости, то эта система не имеет оси симметрии S – типа.

Замечание. Если система (8) имеет два состояния равновесия второй группы, то

$\left[a_1\tilde{x}(b_2\tilde{y} + c_2)\right]'_{\tilde{x}} + \left(\alpha + \beta\tilde{y} + \gamma\tilde{x}^2 + \delta\tilde{y}^2\right)'_y \equiv \mu(b_2\tilde{y} + c_2)$, где $\mu \neq 0$.

Пример. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(-1 + y), \\ \dfrac{dy}{dt} = 5 - 8y - x^2 + 4y^2 \end{cases}$$

имеет ось симметрии S – типа $x = 0$ и два состояния равновесия $W_1(1;1), W_2(-1;1)$, для которых возникает проблема различения центра и фокуса. По доказанной теореме W_1 и W_2 - центры.

Впрочем, $\left[x(-1 + y)\right]'_x + \left[5 - 8y + x^2 + 4y^2\right]'_y \equiv 9(-1 + y)$ (см. замечание).

Литература

1. *Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С.* Об отсутствии изолированных периодических решений у квадратичной системы, имеющей ось симметрии // Вестник АГУ. Серия «Естественно-математические и технические науки». – 2012. – № 3(106). – С. 32-42.
2. *Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С.* Оси симметрии полиномиальных дифференциальных систем на плоскости // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия "Математика. Механика. Информатика". – 2010. – № 1. – С. 41-49..
3. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Изд. 2, доп. – М.: URSS, 1990. – 488 с.
4. *Авдонин Н.И.* Некоторые признаки существования и отсутствия замкнутых траекторий одной системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1968. – № 4. – С. 639–645.
5. *Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П.* Нелинейные колебания в системах второго порядка. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1982. – 208 с.

6. *Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С.* Состояния равновесия и смежные вопросы теории плоских полиномиальных векторных полей // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2020. – № 1. – С. 30–54.
7. *Ушхо Д.С.* Прямые изоклины и канонические формы полиномиальных дифференциальных систем на плоскости. – Майкоп: АГУ, 2007. – 93 с.
8. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон М.И., Майер А.Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967. 488 с.

NEW PROOF OF THE ABSENCE OF LIMIT CYCLES FOR A QUADRATIC SYSTEM WITH AN *S*–TYPE SYMMETRY AXIS

A.D. Ushkho

A new proof of the theorem is given that if a quadratic differential system on a plane has an S-type symmetry axis and two equilibrium states of the second group in a bounded part of the phase plane, then these equilibrium states are centers.

