ЛОГИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ В КУРСЕ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ФИЗИКИ

И.Н. Жукова, В.С. Малых

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

В статье рассматривается построение геометрической оптики как теории, позволяющей рассчитать ход любого луча через любую оптическую систему на основе пяти постулатов: прямолинейности распространения света, независимости световых пучков, отражения, преломления, обратимости лучей. Обосновывается необходимость постулата обратимости. Данный подход в рамках курса физики средней школы имеет определенные дидактические преимущества перед построением геометрической оптики на основе принципа Ферма.

Существует два подхода к изучению геометрической оптики в средней школе:

1) геометрическая оптика рассматривается как предельный случай волновой,

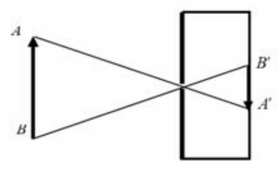
2) геометрическая оптика основывается на своих «началах»: законах распространения, отражения и преломления света.

Второй подход, начиная с 1985 г. в современной школе был признан неудовлетворительным: «изучение геометрической оптики перед волновой нарушает преемственность между рассмотрением электромагнитных и световых волн» [1, с. 170]. Вместе с тем в некоторых учебниках физики для средней школы, например [2, с. 95-112], осуществляется второй подход. В этом случае имеется возможность показать учащимся, как строится физическая теория, позволяющая с наименьшим количеством опытных данных, собранных в виде аксиом, решать самые разнообразные задачи уже логическим (математическим) путем.

Основные понятия геометрической оптики: источник излучения света, не имеющий размеров (точечный источник), луч-направление распространения света в прозрачной среде. Эти понятия чисто геометрические, но в отличие от геометрии, здесь рассматривается движение, например переход светового луча из одной среды в другую. *Основной задачей* геометрической оптики считаем нахождения траекторий световых лучей, что дает возможность объяснить образование оптических изображений и создать упрощённую теорию оптических систем (не только в параксиальном приближении).

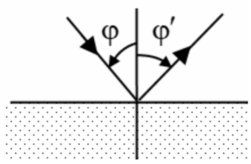
Упомянутые «оптические начала» принято называть законами. Как и законы Ньютона, их конечно доказывают, не прибегая к экспериментам (логическим путем), но с выходом за рамки геометрической оптики. Например, законы отражения и преломления света могут быть получены исходя из свойств волнового вектора световой волны [3, с 7-10]. Во втором подходе к изучению ограничиваются чисто формальным её построением. Это означает, что как и в математике, при решении задач геометрической оптики можно опираться только на установленные опытным путём законы геометрической оптики, на теоремы, из них следующие, и на сведения из курса геометрии.

Основные законы геометрической оптики.

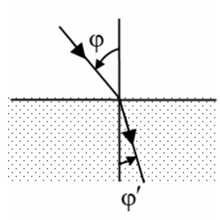


1. Закон прямолинейного распространения: свет в однородной среде распространяется по прямым линиям. Одним из опытных доказательств служит получение изображений светящихся предметов в камере с малым отверстием (камере-обскуре): луч, идущий по прямой из точки A (B) образует на экране светящееся пятнышко A′ (B′).

2. Закон независимости световых (пучков) лучей: распространение всякого светового пучка в среде совершенно не зависит от того, есть в ней другие пучки или нет. Так, узкие пучки AA′ и BB′, пересекаясь в малом отверстии камеры-обскуры, никаким образом не повлияли друг на друга.



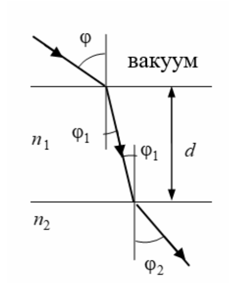
3. Закон отражения на границе раздела двух сред: падающий и отраженный лучи лежат в одной плоскости с нормалью к этой границе, причём угол отражения равен углу падения. Такой формулировкой закона обычно ограничиваются и в школьных, и в вузовских учебниках. Однако для однозначного решения задачи по построению отраженного луча приведенной формулировки недостаточно, так как допускается ход луча, противоположный падающему. Необходимо дополнение: отраженный и падающий лучи лежат по разные стороны от нормали, что может быть представлено формулой: $\varphi' = -\varphi$. Здесь и в дальнейшем углы отсчитывается от нормали к лучу.



4. Закон преломления на границе раздела двух сред: падающий и преломленный лучи лежат в одной плоскости с нормалью к этой границе, причём отношения синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для данных двух сред и называется относительным показателем преломления второй среды относительно первой. В математическом представлении:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = n_{21}.$$

Считаем, что перечисленных четырёх законов достаточно для решения основной задачи геометрической оптики: расчёта и построения луча, исходящего от точечного источника и проходящего через различные среды с различными границами раздела, но тогда необходимо иметь обширный банк величин n_{ik}, i=1,2,..; k=1,2,… (например, для 10 сред 100 (!) значений n_{ik}).



Затруднение преодолевается введением абсолютного показателя преломления для каждого вещества n_i, n_k. Но при этом необходимо доказать, что $n_{ik} = \frac{n_i}{n_k}$. Для доказательства [4, с. 278-279; 5, с. 15] рассматривают ход луча из вакуума в плоскопараллельную пластинку с абсолютным показателем преломления n_1, а затем в среду с показателем преломления n_2. Тогда:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1} = n_1, \quad \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = n_{21} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_2} = n_{21}\cdot n_1,$$

что верно при любой толщине d пластинки. Затем устремляют толщину пластинки к нулю ($d \to 0$), что соответствует переходу света из вакуума сразу во вторую среду: $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_2} = n_2$, следовательно,

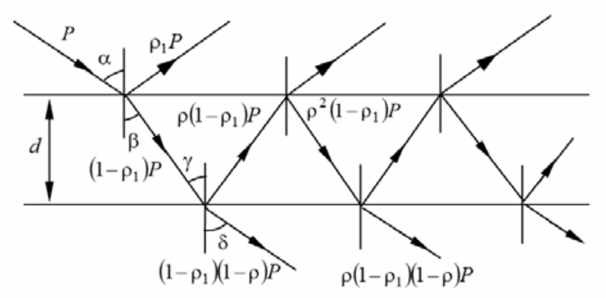
$$n_2 = n_{21}\cdot n_1 \;\Leftrightarrow\; n_{21} = \frac{n_2}{n_1},$$

что требовалось доказать. Сивухин Д.В. отмечает однако, что доказательство не является строгим, так как при толщине d порядка атомных размеров пластинку «нельзя рассматривать как непрерывную среду, так что понятие показателя преломления теряет смысл» [5, с. 15]. Строгое доказательство основывается на принципе Ферма, то есть выходит за пределы геометрической оптики. Следовательно, в рамках геометрической оптики соотношение $n_{ik} = \frac{n_i}{n_k}$ нужно считать дополнительным, пятым законом (постулатом). Ландсберг Г.С. показывает, что из формулы $n_{ik} = \frac{n_i}{n_k}$ следует обратимость световых лучей [4, с. 279].

5. Закон обратимости световых лучей: если по лучу, прошедшему через любую оптическую систему пустить такой же луч в противоположном направлении, то траектория этого луча полностью повторит траекторию прошедшего луча.

Рассмотрим применение законов геометрической оптики на примере решения типовой задачи.

Задача. Плоскопараллельная пластинка толщиной d с показателем преломления n находится в воздухе. Что произойдёт, если на неё направить под углом α узкий пучок света?



Кроме словесного описания учащимся предлагают построить математическую модель явлений, то есть вычертить ход луча, найти углы β, γ и δ, вычислить смещение луча. Решение обязательно должно быть обоснованным: угол β находится из закона преломления: $\left\langle \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right)\right\rangle$, угол γ=β - по теореме о двух параллельных и третьей секущей, угол δ - из закона обратимости (проще всего в форме $\frac{\sin\gamma}{\sin\delta}=\frac{1}{n}$). Для нахождения смещения луча требуется дополнительное геометрическое построение и применение тригонометрических формул.

Для развития этой задачи можно спросить учащихся: получен ли *полный* ответ на вопрос задачи: «что произойдёт, если на плоскопараллельную пластинку направить под углом α узкий пучок света …»? Если учащиеся не увидели сразу отражения и преломления вторичных лучей, на которые «рассыпался» падающий луч, то теперь они на это укажут. Возникает постановка *новой задачи:* на сколько вторичные лучи слабее падающего? Проблему уточняем выводом её в математическую плоскость: какие физические величины понадобятся, чтобы количественно оценить ослабление? Так как в геометрической оптике среды считаются абсолютно прозрачными, поглощение света пока в расчёт не принимаем. Остаётся учесть, как распределится энергия падающего луча на отраженный и преломленный лучи. Естественным образом вводится коэффициент отражения $\rho=\frac{P_{отр}}{P_{пад}}$, (P - мощность). Учащиеся понимают, что коэффициент ρ зависит от угла падения, который внутри пластинки один и тот же. Для границы воздух-стекло (при угле падения α) коэффициент отражения обозначаем ρ_1. Новая задача приобретает реальные очертания: сколько световой энергии первичного луча остается в пластинке? сколько уходит в воздух выше пластинки? ниже пластинки? Размеры пластинки считаем во много раз большими, чем толщина. Задача доступна для решения учащимся средней школы. Например, ниже пластинки мощность светового луча по сравнению с мощностью P падающего луча ослабляется по схеме:

$$P \to (1-\rho_1)(1-\rho)P \to \rho^2(1-\rho_1)(1-\rho)P \to \rho^4(1-\rho_1)(1-\rho)P \to \cdots,$$

сумма этих величин, начиная со второй, представляет собой мощность света, распространяющегося ниже пластинки и находится по формуле убывающей геометрической прогрессии:

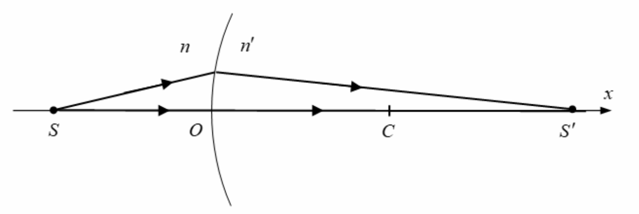
$$P_{внутр} = P\cdot\frac{1-\rho_1}{1+\rho}.$$

В учебной практике часто приходится рассматривать прохождение лучей через центрированные оптические системы, простейшим элементом которых является сферическая граница двух сред[1]. Формула одной сферической границы для изображения в преломленных лучах имеет вид [5, с. 71]:

$$\frac{n'}{x'}-\frac{n}{x}=\frac{n'-n}{R}, \qquad (1)$$

[1] В центрированных системах центры всех поверхностей лежат на одной прямой.

где x- абсцисса светящейся точки S, находящейся на оптической оси OC, (ось OX проходит через OC), x′- абсцисса изображения S′ этой точки, R- абсцисса центра кривизны сферической поверхности. При выводе формулы лучи считались параксиальными… В общем случае изображение точки не точка.

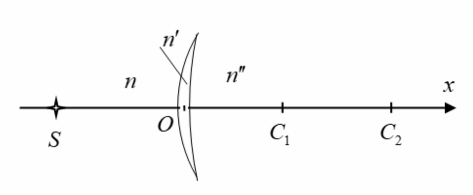


Чтобы найти изображение точки S в отраженных лучах, учитывают, что закон отражения $\varphi' = -\varphi$ следует из закона преломления $\dfrac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = n_{21}$, если положить $n_{21} = -1$, то есть $n' = -n$. Так получают формулу сферического зеркала [5, с. 72]:

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x} = \frac{2}{R}.$$

Вывод формулы тонкой линзы можно предложить учащимся в виде следующей задачи.

Задача. Линза с показателем преломления n′ и радиусами кривизны передней (R_1) и задней (R_2) поверхностей разделяет две среды с показателями преломления n и n″. Зная абсциссу x точечного источника S, определить абсциссу x′ его изображения.



Решение задачи основано на последовательном применении формулы (1) сферической границы для передней и задней поверхностей линзы

$$\left.\begin{aligned} \frac{n'}{x'} - \frac{n}{x} = \frac{n'-n}{x_{c_1}} \\ \frac{n''}{x''} - \frac{n'}{x'} = \frac{n''-n'}{x_{c_2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{n''}{x''} - \frac{n}{x} = \frac{n'-n}{R_1} + \frac{n''-n'}{R_2}, \tag{2}$$

где $R_1 = x_{c1}$, $R_2 = x_{c2}$.

Необходимость в применении данной формулы встречается редко, но из неё легко получить наиболее часто встречающийся случай: стеклянная линза находится в воздухе. Тогда $n=n''=1$, $n'=n_{ст}$, и формула (2) принимает известный вид:

$$\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = (n_{\text{ст}} - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

(см., например, [5, с. 74]).

В общем случае фокусами центрированной системы сферических поверхностей являются изображения бесконечно удалённых светящихся точек, лежащих на оптической оси системы. Для тонкой линзы по формуле (2) получаем, что при $x = -\infty$ координата фокуса равна:

$$x'' = \frac{R_1 R_2 n''}{R_1(n''-n') + R_2(n'-n)}.$$

Сам этот фокус называют задним фокусом, а величина x″ задним фокусным расстоянием f.

Аналогично, переднее фокусное расстояние (при $x'' = +\infty$) равно

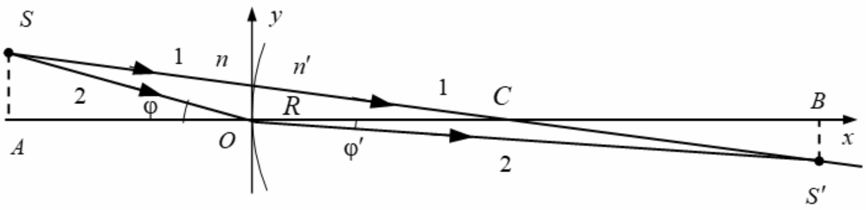
$$f'' = \frac{R_1 R_2 n}{R_1(n'-n'') + R_2(n-n')},$$

а фокус называют передним фокусом.

Если стеклянная линза находится в воздухе, то заднее фокусное расстояние $f' = \dfrac{R_1 R_2}{(n_{\text{ст}} - 1) + (R_2 - R_1)}$, переднее $f = \dfrac{R_1 R_2}{(n_{\text{ст}} - 1) + (R_1 - R_2)}$. Противоположные знаки для f и f′ здесь получились из-за использования «вузовского» правила знаков для центрированных сферических поверхностей, когда длины отрезков заменяются координатами их концов (см., например [5, с. 70]). Достоинство этого правила заключается в его универсальности: оно применимо и при отражении, и при преломлении, для любых сред и поверхностей раздела (плоских, выпуклых, вогнутых). Однако, если в учебной практике по этому разделу оптики рассматривается только линза в воздухе, предпочитают более простое «школьное» правило: *всё мнимое (и вогнутое) отрицательно, всё действительное (и выпуклое) положительно.*

Во многих задачах геометрической оптики точечный источник S находится вне оптической оси, ее положение определяется уже двумя координатами x и y, соответственно, требуется вычислить координаты x' и y' изображения S′ источника S. Применение формулы (1) для вычисления x здесь не считаем вполне бесспорным. Поэтому приводим отдельное решение задачи о нахождении S′.

Задача. Дано: $x_S = -OA$, $y_S = AS$, $OC = R$, n и n′. Найти: $x_{S'} = OB$, $y_{S'} = -BS'$.



Решение. Из точки S проводим луч 1, идущий без преломления по прямой SC и луч 2, который преломляется в точке O: $\dfrac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \dfrac{n'}{n}$. Лучи пересекаются в точке S′. Любой другой параксиальный луч, исходящий из S, также пройдет через точку S′. Это следует из того, что прямая SC также является оптической осью сферической границы двух сред как и ось x, установленная в условии задачи. Но для оси справедлива формула (1), при доказательстве которой было получено, что изображение точки S стигматическое, то есть является точкой. Учитывая параксиальность лучей, перейдем к математическим (геометрическим) выкладкам:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\Delta\, OSA: AS = \varphi\cdot AO \\ \Delta\, OS'B: BS' = \varphi'\cdot OB\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{AS}{BS'} = \dfrac{\varphi}{\varphi'}\cdot\dfrac{AO}{OB} \\ \Delta CAS \sim CBS' \Rightarrow \dfrac{AS}{BS'} = \dfrac{AO+R}{OB-R} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{n'}{n}\cdot\frac{AO}{OB} = \frac{AO+R}{OB-R}, \text{ или } \frac{n'}{n}\cdot\frac{(-x)}{x'} = \frac{R-x}{x'-R}.$$

После элементарных преобразований имеем:

$$\frac{n'}{x_{S'}} - \frac{n}{x_S} = \frac{n'-n}{R}.$$

Таким образом, формула (1) и здесь справедлива. Из неё находим:

$$x_{S'} = \frac{n' R x_S}{nR + (n'-n)x_S}. \tag{3}$$

Чтобы найти $y_{S'}$, перепишем с учётом принятых нами ранее обозначений «геометрическое» уравнение, следующее из подобия треугольников CAS и CBS′:

$$\frac{y_S}{-y_{S'}} = \frac{-x_S + R}{x_{S'} - R} \Rightarrow y_{S'} = \frac{y_S(R - x_{S'})}{R - x_S} = y_S\frac{nR}{nR + (n'-n)x_S}. \tag{4}$$

Заметим, что в [5, с. 72] вычисление $x_{S'}$ и $y_{S'}$ целиком основано на формуле (1).

Теперь можно утверждать, что одной формулы (1) для основного элемента центрированных систем сферических (или плоских) поверхностей вполне достаточно, чтобы *обоснованно* построить или рассчитать ход любого луча в параксиальной области таких центрированных оптических систем. Поясним это конкретным примером.

Пример. Пусть на сферическую границу двух сред под маленьким углом φ к оптической оси падает параллельный пучок лучей. Что произойдёт с этими лучами: а) после преломления?; б) после отражения?

В предельном случае (φ=0) решение сразу получается из формулы (1). Действительно, при φ=0 можно считать, что лучи, падающие на сферическую поверхность исходят из бесконечно удаленной точки, лежащей на оптической оси: $x_S = -\infty$, $y_S = 0$. Тогда:

а) после преломления $x_{S'} = R\dfrac{n'}{n'-n}$, $y_{S'} = 0$, то есть лучи (или их продолжения) пересекаются в одной точке (в фокусе);

б) после отражения $x_{S'} = \dfrac{R}{2}$, $y_{S'} = 0$ (фокус для выпуклой поверхности мнимый, для вогнутой- действительный).

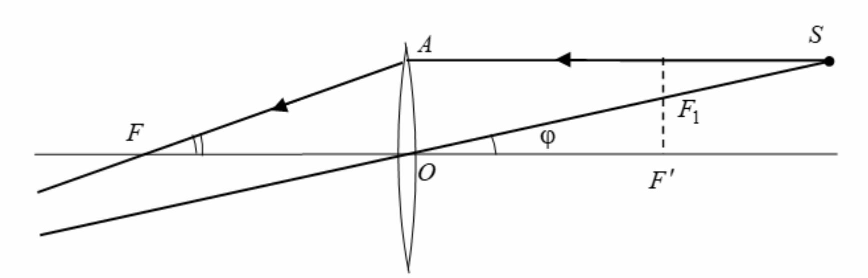
В общем случае координаты любой точки произвольного луча удовлетворяют условию $\dfrac{y}{x} = \varphi$, и из формул (3), (4) следует:

а) для преломления: $x_{S'} = \dfrac{n'R}{\dfrac{nR}{x_S} + n' - n} \approx R\dfrac{n'}{n'-n}$; $y_{S'} = \dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{nR}{\dfrac{nR}{x_S} + n' - n} = \theta R\dfrac{n}{n'-n}$;

б) для отражения: $x_{S'} = \dfrac{R}{2}$; $y_{S'} = y_S\dfrac{R}{R + 2x_S} = \theta R\dfrac{n}{n'-n}$.

Таким образом, лучи, падающие на сферическую границу параллельным пучком, собираются (сами или их продолжения) в одной точке фокальной плоскости этой границы. То же самое произойдет и при падении параллельного пучка на линзу под малым углом φ к её оптической оси. Об этом свойстве линзы фокусировать в фокальной плоскости любой параллельный пучок параксиальных лучей в учебниках сообщается без доказательства [3, с. 46; 4, с. 290].

Приведем здесь элементарное геометрическое обоснование данного явления (это можно сделать и аналитически). Для доказательства предположим противное: лучи, падающие слева на линзу параллельно её побочной оси OF_1, после прохождения через линзу пересекаются не в побочном фокусе F_1, а в точке S.



Поместим в S точечный источник света. Луч SA, идущий из S параллельно главной оптической оси линзы после выхода из неё пойдёт через фокус F по пути AF, не параллельному побочной оптической оси OF_1 ($\angle AFO \neq \angle F_1OF'$), что противоречит условию задачи. Действительно, согласно закону обратимости световых лучей, луч AF, выйдя из линзы, пойдёт справа налево по тому же пути, что и луч, упавший на линзу слева направо, то есть параллельно побочной оптической оси. Это означает, что наше предположение неправильное, противоречие разрешается, если точка пересечения S совпадает с побочным фокусом F_1. Утверждение о фокусировке параллельных лучей в фокальной плоскости доказано.

Таким образом, для решения основной задачи геометрической оптики, а именно для построения хода лучей через любую оптическую систему, достаточно пяти постулатов: прямолинейности распространения света, независимости световых пучков, отражения, преломления, обратимости лучей. Школьникам вполне доступны *строгие* решения задач для параксиальных лучей, проходящих через центрированные оптические системы.

Литература

1. Научные основы школьного курса физики /Под ред. С.Я. Шамаша, Э.Ю. Эвенчик. - М.: Педагогика, 1985. – 240 с.

2. *Генденштейн Л.Э.*, *Дик Ю.И.* Физика 11 класс. В 2 ч. Ч.1 Учебник для общеобразовательных учреждений (базовый уровень). – М.: Мнемозина, 2009. – 272 с.
3. *Громов С.В.* Физика: Учеб. для 11кл. общеобразоват. учреждений.- М.: Просвещение, 2003. – 287 с.
4. *Ландсберг Г.С.* Оптика. – М.: Наука, 1976. – 928 с.
5. *Сивухин Д.В.* Оптика: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1985. – 752 с.

LOGICAL CONSTRUCTION OF GEOMETRIC OPTICS IN THE ELEMENTARY PHYSICS COURSE

I.N. Zhukova, V.S. Malykh

The article discusses the construction of geometric optics as a theory that allows you to calculate the path of any ray through an optical system on the basis of five postulates: straightness of light propagation, independence of light beams, reflection, refraction, and reversibility of rays. The necessity of the postulate of reversibility is substantiated. This approach within the framework of a high school physics course has certain didactic advantages over the construction of geometric optics based on Fermat's principle.

