1996 г. № 1

Труды ФОРА

ТЕТРАДНАЯ ФОРМУЛИРОВКА УСЛОВИЙ БРИНКМАНА

В. Г. Багров*, В. В. Обухов, К. Е. Осетрин****

* *Томский государственный университет, Томск*
** *Томский государственный педагогический университет, Томск*

Получены условия совместности для конформно-преобразованных вакуумных уравнений Эйнштейна с Λ -членом в компактной и удобной форме как в метрическом формализме, так и в тетрадном формализме Ньюмена-Пенроуза.

I Введение

Пусть заданы два n-мерных римановых пространства V_n и $\widetilde{V}_n$ с метрическими тензорами $g_{\alpha\beta}(x), \widetilde{g}_{\alpha\beta}(x)$ соответственно, причем

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(x)\exp 2\omega(x), \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta = 1,\ldots,n > 3. \tag{1}$$

Как известно, в этом случае пространства V_n и $\widetilde{V}_n$ называются конформными, соотношения (1) задают конформное отображение $V_n \to \widetilde{V}_n$, функция $\omega(x)$ называется конформным фактором.

Проблема конформного отображения возникает, например, при изучении вопросов, связанных с интегрированием безмассовых уравнений движения: уравнения эйконала, волнового уравнения, уравнения Вейля, конформно-инвариантного волнового уравнения Черникова-Пенроуза, и т.д. Кроме того известны попытки построения с помощью конформных отображений новых точных решений уравнений Эйнштейна [1]. В связи с этим особый интерес представляет проблема конформного отображения римановых пространств на пространства Эйнштейна. Впервые эта проблема была поднята в работах Бринкмана [2]. Основной результат этих работ можно сформулировать следующим образом. Пусть $\widetilde{V}_n$ является пространством Эйнштейна:

$$\widetilde{R}_{\alpha\beta} = \Lambda\widetilde{g}_{\alpha\beta}, \quad \Lambda = \mathrm{const}, \quad \widetilde{R} = n\Lambda, \tag{2}$$

(здесь $\widetilde{R}_{\alpha\beta}, \widetilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}, \widetilde{R}$ -компоненты тензора Риччи, Римана и скалярная кривизна в пространстве $\widetilde{V}_n$, а $R_{\alpha\beta}, R_{\alpha\beta\gamma\delta}, R$ -соответствующие величины в пространстве V_n). Обозначим:

$$\omega_{\alpha\beta} = \omega_{,\alpha;\beta} - \omega_{,\alpha}\omega_{,\beta} + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(\nabla\omega)^2, \qquad (\nabla\omega)^2 = g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha(\omega)\nabla_\beta(\omega) \tag{3a}$$

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{n-2}\left(R_{\alpha\beta} - \frac{Rg_{\alpha\beta}}{2(n-1)}\right), \qquad W = \frac{1}{2}(\nabla\omega)^2 - \frac{\Lambda}{2n(n-1)}\exp 2\omega \tag{3b}$$

(где $_{;\alpha} \equiv \nabla_\alpha$ - ковариантная производная).

Легко показать, что

$$\widetilde{R}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} + (n-2)\omega_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\omega_{\gamma\delta}, \qquad \widetilde{R} = \left(R + 2(n-1)g^{\gamma\delta}\omega_{\gamma\delta}\right)\exp(-2\omega).$$

Поэтому уравнение (2) можно представить в виде:

$$\omega_{,\alpha;\beta} - \omega_{,\alpha}\omega_{,\beta} + Wg_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta} = 0 \tag{4}$$

Бринкманом было показано, что условия совместности системы (4) имеют вид:

$$\omega_{,\delta} C^{\delta}_{\alpha\beta\gamma} = S_{\alpha\beta\gamma} \tag{5a}$$

$$S_{\alpha\beta\gamma} \equiv T_{\alpha\gamma;\beta} - T_{\alpha\beta;\gamma}. \tag{5b}$$

Условия совместности (5) играют важную роль при осуществлении конформного отображения. Вместе с тем отметим, что формула (5) представлена в неудовлетворительной форме. Во-первых, правая часть соотношения (5) выражена через производные от компонент тензора Риччи, тогда как в левую часть входят компоненты тензора Вейля. Во-вторых, (5) записано в метрическом формализме, и поэтому из него сложно выделить неэквивалентные уравнения. Целью настоящей работы является получение уравнений совместности для конформно-преобразованных уравнений Эйнштейна в компактной и удобной форме как в метрическом, так и в тетрадном формализме.

II Компактная форма условий Бринкмана.

Для преобразования соотношения (5) воспользуемся тождествами Бианки:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta;\sigma} + R_{\alpha\beta\delta\sigma;\gamma} + R_{\alpha\beta\sigma\gamma;\delta} = 0. \tag{6}$$

Свернем по индексам α, σ:

$$R^{\sigma}_{\alpha\beta\gamma;\sigma} = R_{\alpha\beta;\gamma} - R_{\alpha\gamma;\beta}. \tag{7}$$

Правую часть уравнений (7) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta;\gamma} - R_{\alpha\gamma;\beta} &= (n-2)\left[\left(T_{\alpha\beta} - \frac{Rg_{\alpha\beta}}{2(n-1)}\right)_{;\gamma} - \left(T_{\alpha\gamma} - \frac{Rg_{\alpha\gamma}}{2(n-1)}\right)_{;\beta}\right] = \\ &= (n-2)\left(T_{\alpha\beta;\gamma} - T_{\alpha\gamma;\beta} - \frac{g_{\alpha\beta}R_{,\gamma} - g_{\alpha\gamma}R_{,\beta}}{2(n-1)}\right) = \\ &= (n-2)\left(-S_{\alpha\beta\gamma} - \frac{g_{\alpha\beta}R_{,\gamma} - g_{\alpha\gamma}R_{,\beta}}{2(n-1)}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Отсюда

$$R^{\sigma}_{\alpha\beta\gamma;\sigma} = -(n-2)S_{\alpha\beta\gamma} - \frac{n-2}{2(n-1)}\left(R_{,\gamma}g_{\alpha\beta} - R_{,\beta}g_{\alpha\gamma}\right). \tag{9}$$

Еще одна свертка тождеств (7) дает:

$$\left(R^{\alpha}_{\beta} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\beta}R\right)_{;\alpha} = 0$$

Следовательно

$$T^{\alpha}_{\beta;\alpha} = \frac{1}{2(n-1)}R_{,\beta}. \tag{10}$$

Выразим теперь $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ через $T_{\alpha\beta}$:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} - g_{\alpha\gamma}T_{\beta\delta} + g_{\alpha\delta}T_{\beta\gamma} - g_{\beta\delta}T_{\alpha\gamma} + g_{\beta\gamma}T_{\alpha\delta}. \tag{11}$$

Возьмем ковариантную производную от выражения (11) и свернем получившиеся выражения:

$$C^{\alpha}_{\beta\gamma\delta;\alpha} = R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta;\alpha} - T_{\beta\delta;\gamma} + T_{\beta\gamma;\delta} - g_{\beta\delta}T^{\alpha}_{\gamma;\alpha} + g_{\beta\gamma}T^{\alpha}_{\delta;\alpha}. \tag{12}$$

С учетом (5), (10) отсюда следует:

$$C^{\alpha}_{\beta\gamma\delta;\alpha} = R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta;\alpha} + S_{\beta\gamma\delta} - \frac{1}{2(n-1)}\left(g_{\beta\gamma}R_{,\gamma} - g_{\beta\gamma}R_{,\beta}\right). \tag{13}$$

Применим выражение (9). В результате уравнение (13) предстанет в виде:

$$C^{\delta}_{\alpha\beta\gamma;\delta} = -(n-3)S_{\alpha\beta\gamma}. \tag{14}$$

Таким образом условия Бринкмана (5) можно представить в форме

$$\omega_{,\delta}C^{\delta}_{\alpha\beta\gamma} = -\frac{1}{(n-3)}C^{\delta}_{\alpha\beta\gamma;\delta},$$

или окончательно:

$$\nabla_{\delta}\left(C^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}\exp(n-3)\omega\right) = 0. \tag{15}$$

Из (15) следует, что в условия совместности помимо конформного фактора входят только компоненты тензора Вейля и его ковариантные производные. В четырехмерном пространстве-времени условия (15) имеют вид:

$$\nabla_{\delta}\left(C^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}\exp\omega\right) = 0. \tag{16}$$

III Тетрадная форма условий совместности.

Из общих соображений ясно, что наиболее простой вид условия (16) должны иметь в тетрадном формализме Ньюмена–Пенроуза (в настоящей работе мы следуем обозначениям книги [3]). Зададим комплексную изотропную тетраду:

$$e_{A_\alpha} = \left(l_\alpha, n_\alpha, m_\alpha, \overline{m}_\alpha\right), \qquad e^{\alpha}_{A} = \left(l^{\alpha}, n^{\alpha}, m^{\alpha}, \overline{m}^{\alpha}\right),$$

$$e_{A_\alpha}e^{\alpha}_{B} = \eta_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A, B, C, D = 1,2,3,4. \tag{17}$$

(здесь большие латинские буквы обозначают тетрадные индексы).

Обозначим

$$C_{ABCD} = e^{\alpha}_{A}e^{\beta}_{B}e^{\gamma}_{C}e^{\delta}_{D}C_{\alpha\beta\gamma\delta}, \qquad {}_{,A} \equiv e^{\alpha}_{A}\nabla_{\alpha}.$$

Тогда соотношения (16) примут вид:

$$\left(e^{\alpha}_{A}e^{\beta}_{B}e^{\gamma}_{C}e^{\delta}_{D}C^{ABCD}\exp\omega\right)_{;\alpha} = 0.$$

Отсюда

$$e^{\beta}_{B}e^{\gamma}_{C}e^{\delta}_{D}\left(C^{ABCD}\exp\omega\right)_{,A} + \left(e^{\alpha}_{A_{,\alpha}}e^{\beta}_{B}e^{\gamma}_{C}e^{\delta}_{D} + e^{\alpha}_{A}e^{\beta}_{B_{,\alpha}}e^{\gamma}_{C}e^{\delta}_{D} + \right.$$
$$\left. + e^{\alpha}_{A}e^{\beta}_{B}e^{\gamma}_{C_{,\alpha}}e^{\delta}_{D} + e^{\alpha}_{A}e^{\beta}_{B}e^{\gamma}_{C}e^{\delta}_{D_{,\alpha}}\right)C^{ABCD} = 0.$$

Или

$$\left(C^{A}_{BCD}\exp\omega\right)_{,A} - \left(\gamma^{N}_{A}{}^{A}C_{NBCD} + \gamma^{N}_{B}{}^{A}C_{ANCD} + \right.$$
$$\left. + \gamma^{N}_{C}{}^{A}C_{ABND} + \gamma^{N}_{D}{}^{A}C_{ABCN}\right) = 0, \tag{18}$$
$$\gamma^{A}_{B}{}^{C} = e^{A}_{\alpha}e^{\alpha;\beta}_{B}e^{C}_{\beta}.$$

Выражая коэффициенты вращения Риччи через спиновые коэффициенты:

$$\kappa=\gamma_{311},\quad \rho=\gamma_{314},\quad \varepsilon=\frac{\gamma_{211}+\gamma_{341}}{2},\quad \sigma=\gamma_{313},\quad \mu=\gamma_{243},\quad \gamma=\frac{\gamma_{212}+\gamma_{342}}{2},$$
$$\lambda=\gamma_{244},\quad \tau=\gamma_{312},\quad \alpha=\frac{\gamma_{214}+\gamma_{344}}{2},\quad \nu=\gamma_{242},\quad \pi=\gamma_{241},\quad \beta=\frac{\gamma_{213}+\gamma_{343}}{2},$$

и вводя стандартные обозначения для производных по направлениям векторов $\mathbf{e}_A$:

$$D=l^{\alpha}\nabla_{\alpha},\quad \Delta=n^{\alpha}\nabla_{\alpha},\quad \delta=m^{\alpha}\nabla_{\alpha},\quad \bar{\delta}=\bar{m}^{\alpha}\nabla_{\alpha},$$

представим условия (18) в виде:

$$\begin{gathered}
-\Psi_0\Delta\omega+\Psi_1\delta\omega+\delta\Psi_1-\Delta\Psi_0+\Psi_0(4\gamma-\mu)-2\Psi_1(\beta+2\tau)+3\Psi_2\sigma=0,\\
-\Psi_0\bar{\delta}\omega+\Psi_1 D\omega+D\Psi_1-\bar{\delta}\Psi_0+\Psi_0(4\alpha-\pi)-2\Psi_1(\varepsilon+2\rho)+3\Psi_2\kappa=0,\\
-\Psi_1\Delta\omega+\Psi_2\delta\omega+\delta\Psi_2-\Delta\Psi_1+\Psi_0\nu+2\Psi_1(\gamma-\mu)-3\Psi_2\tau+2\Psi_3\sigma=0,\\
-\Psi_1\bar{\delta}\omega+\Psi_2 D\omega-\bar{\delta}\Psi_1+D\Psi_2+\Psi_0\lambda+2\Psi_1(\alpha-\pi)-3\Psi_2\rho+2\Psi_3\kappa=0,\\
\Psi_2\Delta\omega-\Psi_3\delta\omega-\delta\Psi_3+\Delta\Psi_2-2\Psi_1\nu+3\Psi_2\mu+2\Psi_3(\tau-\beta)-\Psi_4\sigma=0,\\
\Psi_2\bar{\delta}\omega-\Psi_3 D\omega-D\Psi_3+\bar{\delta}\Psi_2-2\Psi_1\lambda+3\Psi_2\pi+2\Psi_3(\rho-\varepsilon)-\Psi_4\kappa=0,\\
\Psi_3\Delta\omega-\Psi_4\delta\omega-\delta\Psi_4+\Delta\Psi_3-3\Psi_2\nu+2\Psi_3(2\mu+\gamma)+\Psi_4(\tau-4\beta)=0,\\
\Psi_3\bar{\delta}\omega-\Psi_4 D\omega+\bar{\delta}\Psi_3-D\Psi_4-3\Psi_2\lambda+2\Psi_3(2\pi+\alpha)+\Psi_4(\rho-4\varepsilon)=0.
\end{gathered}\tag{19}$$

Здесь $\Psi_0\ldots\Psi_4-$ обозначения следующих тетрадных компонент тензора Вейля в формализме Ньюмена–Пенроуза:

$$\Psi_0=-C_{1313},\quad \Psi_1=-C_{1213},\quad \Psi_2=-C_{1342},\quad \Psi_3=-C_{1242},\quad \Psi_4=-C_{2424}.$$

Проанализируем условия (19) для различных типов по Петрову.

A. Тип I. Выбором тетрады обратим в нуль функции Ψ_0,Ψ_4 $(\Psi_1\Psi_3\neq 0)$. Из системы (19) сразу же следует:

$$\begin{gathered}
D\omega=-D\ln\Psi_1+2(\varepsilon+2\rho)-3\kappa\frac{\Psi_2}{\Psi_1},\\
\delta\omega=-\delta\ln\Psi_1+2(\beta+2\tau)-3\sigma\frac{\Psi_2}{\Psi_1},\\
\Delta\omega=-\Delta\ln\Psi_1+\frac{\delta\Psi_2}{\Psi_1}+\left(-\delta\ln\Psi_1-3\sigma\frac{\Psi_2}{\Psi_1}+2\beta+\tau\right)\frac{\Psi_2}{\Psi_1}+2\sigma\frac{\Psi_3}{\Psi_1}+2(\gamma-\mu).
\end{gathered}\tag{20}$$

Подставляя выражения (20) в оставшиеся уравнения из системы (19) и в уравнения Эйнштейна, получим систему уравнений только на метрику $g_{\alpha\beta}$. Эта система должна быть дополнена условиями совместности системы (20).

B. Тип II. Выберем тетраду таким образом, чтобы $\Psi_0=\Psi_1=0,\ \Psi_2\neq 0$. Из системы (19) следует $\kappa=\sigma=0$ и

$$\begin{gathered}
D\omega=-D\ln\Psi_2+3\rho,\\
\delta\omega=-\delta\ln\Psi_2+3\tau,\\
\Delta\omega=(-\delta\ln\Psi_2+2\beta+\tau)\frac{\Psi_3}{\Psi_2}+\frac{\delta\Psi_3}{\Psi_2}-\Delta\ln\Psi_2-3\mu.
\end{gathered}$$

Ситуация аналогична предыдущей.

C. Тип III. Выбором тетрады обратим в нуль функции $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_4$ $(\Psi_3 \neq 0)$. Из системы (19) следует $\kappa = \sigma = 0$ и

$$D\omega = -D\ln\Psi_3 + 2(\rho - \varepsilon),$$
$$\Delta\omega = -\Delta\ln\Psi_3 - 2(2\mu + \gamma),$$
$$\delta\omega = -\delta\ln\Psi_3 + 2(\tau - \beta).$$

Получим ту же ситуацию, что и выше.

D. Тип N. Выбором тетрады обратим в нуль функции $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$ $(\Psi_4 \neq 0)$. Из системы (19) следует $\kappa = \sigma = 0$ и

$$\begin{aligned} D\omega &= -D\ln\Psi_4 + \rho - 4\varepsilon, \\ \delta\omega &= -\delta\ln\Psi_4 + \tau - 4\beta. \end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом, в этом случае из системы (19) не удается выразить $\Delta\omega$ через компоненты тетрады и их производные. Можно привлечь условия совместности системы (21). С помощью соотношения

$$\bar{\delta}\delta - \delta\bar{\delta} = (\bar{\mu} - \mu)D + (\bar{\rho} - \rho)\Delta + (\alpha - \bar{\beta})\delta + (\beta - \bar{\alpha})\bar{\delta}$$

можно найти $\Delta\omega$, если $\bar{\rho} \neq \rho$.

Полученные результаты в дальнейшем предполагается использовать для осуществления классификации конформно-штеккелевых пространств Эйнштейна.

Литература

1. *Петров А.З.* Новые методы в общей теории относительности.-М.:Наука,-1966,-495 с.
2. *Brinkman H.W.* Ann. Match. **91**, 1924.
3. *Чандрасекар С.* Математическая теория черных дыр. Часть 1.-М.:Мир,-1986,-276 с.

Tetradic statement of the Brinkman conditions

V.G. Bagrov, V.V. Obukhov, K.E. Osetrin.

Combined conditions for conformaly transformed Einstein vacuum equations with a Λ-member are formulated in a compact and convenient form in metric formalism as well as in Newman-Penrose tetradic formalism.