

О ГЛОБАЛЬНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ГИСТЕРЕЗИСНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

В.А. Тешев, М.М. Шумахов

Адыгейский государственный университет, Майкоп

В статье даны достаточные условия глобальной асимптотической устойчивости решений уравнений второго порядка в классе гистерезисных нелинейностей, удовлетворяющих условию секториальности. В пространстве параметров рассматриваемых уравнений даны оценки снизу областей глобальной асимптотической устойчивости.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma} + \alpha \dot{\sigma} + \beta \sigma + \xi &= 0, \\ \xi &= \varphi[\sigma, \varphi_0], \end{aligned} \tag{1}$$

где σ - скалярная функция от t ; $\alpha > 0, \beta > 0$ - постоянные, а $\xi = \varphi[\sigma, \varphi_0]$, - любая непрерывная гистерезисная функция [1], удовлетворяющая условию секториальности

$$0 \leq \sigma(t)\varphi[\sigma, \varphi_0] \leq \mu_0 \sigma(t)^2 \quad (0 < \mu_0 < \infty) \tag{2}$$

Система (1) для случая, когда гистерезисная нелинейность

$$\xi = \varphi[\sigma, \varphi_0] + \beta \sigma$$

имеет специальный вид ("люфт"; реле с гистерезисом; реле с гистерезисом и зоной нечувствительности), изучалась в работах, уже ставших сейчас классическими, А. А. Андронова и Н. Н. Баутина [2], Н. А. Железцова [3], А. А. Фельдбаума [4]. В этих работах методом точечных отображений получены достаточные условия устойчивости в целом системы (1) и существования единственного предельного цикла, "охватывающего" стационарное множество.

В настоящей статье рассматривается система (1) в предположении, что гистерезисная функция $\xi = \varphi[\sigma, \varphi_0]$, сильно непрерывна, [5] удовлетворяет условию (2) и обладает свойством предельной непрерывности. Последнее свойство означает [1], что из соотношения $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = \sigma_*$ следует существование $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi[\sigma, \varphi_a] = \varphi_*$, $\varphi_* \in E[\sigma_*]$

($E[\sigma_*]$ - множество значений гистерезисной функции, соответствующее значению $\sigma = \sigma_*$) и $\varphi[\sigma_*, \varphi_*] = \varphi_*$. Обычные гистерезисные функции, встречающиеся на практике, обладают свойством предельной непрерывности. Для указанного класса гистерезисных нелинейностей даются условия абсолютной и глобальной асимптотической устойчивости системы (1).

Следует особо отметить, что рассматриваемые нами гистерезисные функции могут содержать несколько петель, которые обходятся независимо друг от друга в произвольном направлении.

Дадим основные определения.

Определение 1 [6]. Система (1) называется абсолютно устойчивой, если она асимптотически устойчива в целом равномерно относительно нелинейностей $\chi(iw)$ из

класса $\Phi_{[0, \mu_0]}$, определяемого соотношением (2), т.е. если имеет место устойчивость в целом независимо от выбора нелинейностей из класса $\Phi_{[0, \mu_0]}$.

Определение 2 [7]. Система (1) называется глобально асимптотически устойчивой, если любое ее решение стремится при $t \rightarrow +\infty$ к некоторому состоянию равновесия.

Итак, пусть дана система (1) с гистерезисом, удовлетворяющим соотношению

(2) и обладающая свойством предельной непрерывности. Направление обхода петель гистерезиса может быть произвольным.

На рис.1 изображен наиболее типичный случай, не рассматривавшийся в литературе.

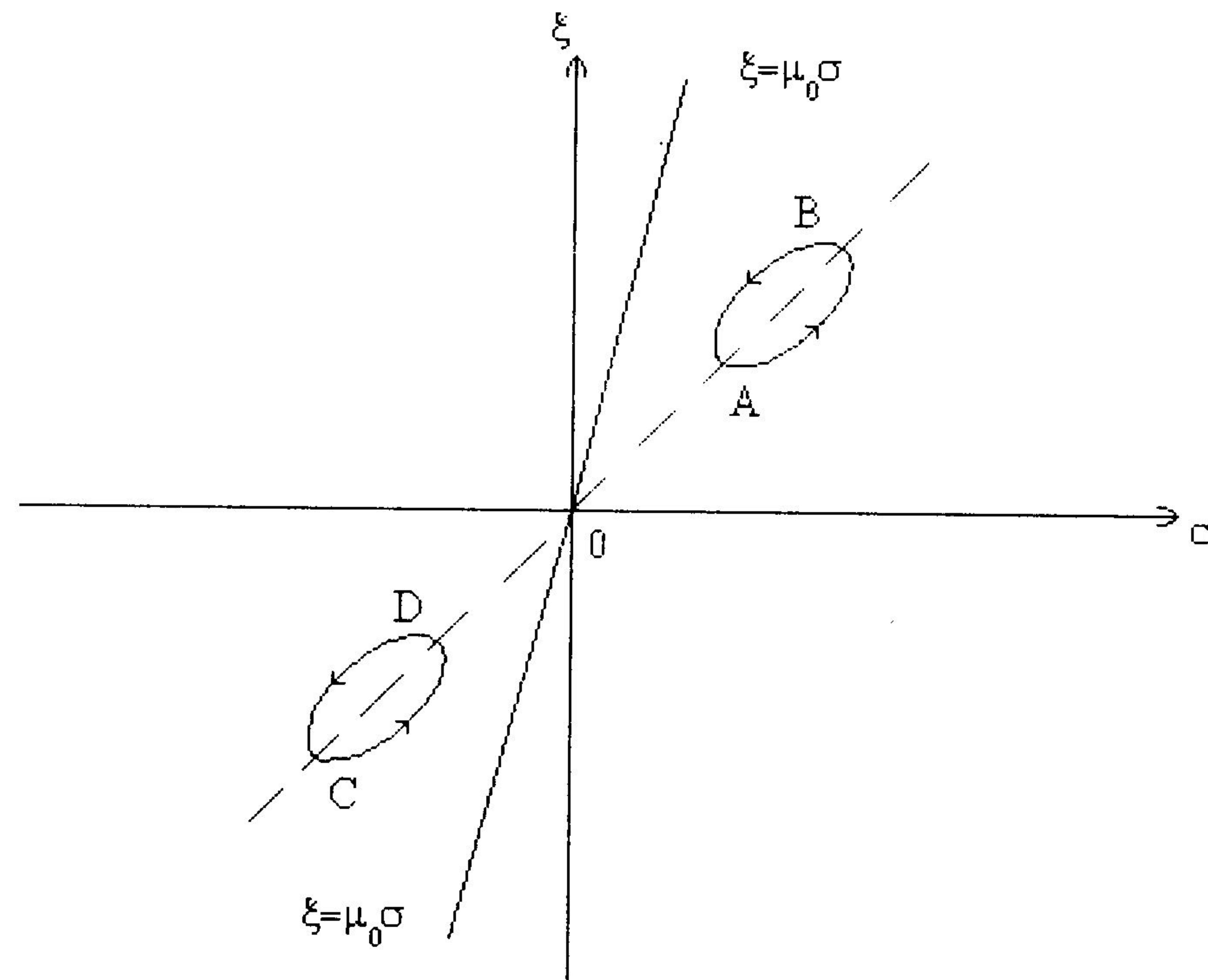


Рис.1

Найдем передаточную функцию от входа $(-\varphi)$ к выходу σ .

Имеем

$$\lambda^2 x + \alpha \lambda x + \beta x = -\xi$$

$$\sigma = \frac{1}{\lambda^2 + \alpha \lambda + \beta} (-\xi).$$

Поэтому

$$\chi(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2 + \alpha \lambda + \beta}.$$

Очевидно, что функция $\chi(\lambda)$ невырождена.

В работе [8] для систем вида

$$\dot{x} = Px + q\xi, \quad \sigma = r^*x, \quad \xi = \varphi[\sigma, \varphi_0], \quad (S)$$

где P - постоянная гурвицева $(n \times n)$ матрица; q, r - постоянные n - векторы, $\varphi[\sigma_*, \varphi_*]$ - сильно непрерывная гистерезисная функция, был получен следующий частотный критерий устойчивости:

Теорема [8] Пусть в системе (S) гистерезисная функция удовлетворяет соотношению (2), передаточная функция $\chi(\lambda) := r^*(P - \lambda I)^{-1}q$ невырождена. Пусть, далее, выполнены следующие условия:

1) система (S) диссипативна,

2) существуют числа $\delta > 0, \varepsilon > 0, \tau \geq 0$ и Θ , что выполнено неравенство

$$\frac{\tau}{\mu_0} + \operatorname{Re}[(1 + \Theta iw)\chi(iw)] \geq \delta + \varepsilon |iw\chi(iw)|^2 \quad \forall w \geq 0, \quad (\text{A})$$

3) существуют непрерывная функция $F(\sigma)$ и число v для которых выполнено неравенство:

$$|\varphi[\sigma, \varphi_0]_t - F(\sigma(t))| \leq v \cdot |\varphi[\sigma, \varphi_0]_t| \quad (\text{B})$$

4) $4\delta\varepsilon > (\Theta v)^2$

Тогда для любого решения $x(t)$ системы (S)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0.$$

Замечание При дополнительном предположении, что гистерезисная функция $\xi = \varphi[\sigma, \varphi_0]$ обладает свойством предельной непрерывности, можно доказать, что система (S) глобально асимптотически устойчива.

Действительно, так как $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$, то и $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = 0$.

В силу предельной непрерывности функции $\varphi[\sigma, \varphi_0]$, существует предел:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi[\sigma, \varphi_0]_t = \varphi_\infty, \quad \varphi[\sigma, \varphi_\infty]_t \equiv \varphi_\infty.$$

В [7] показано, что $\xi = \varphi[\sigma, \varphi_0] \in L_2(0, +\infty)$, т.е.

$$\int_0^{+\infty} \xi^2(t) dt < +\infty.$$

Отсюда следует, что $\varphi_\infty = 0$.

Поэтому $x(t) \equiv 0$ является стационарным решением системы (S). Последнее вместе с предельным соотношением $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ означает глобальную асимптотическую устойчивость системы (S).

Применим к системе (1) теорему [8] с учетом замечания к ней, приведенного выше.

Частотное условие (A) принимает вид

$$\frac{\tau}{\mu_0} + \operatorname{Re}\left[\left(\tau + \theta i\omega\right) \frac{(\beta - \omega^2) - i\alpha\omega}{(\beta - \omega^2)^2 + \alpha^2\omega^2}\right] - \varepsilon\omega^2 \left| \frac{(\beta - \omega^2) - i\alpha\omega}{(\beta - \omega^2)^2 + \alpha^2\omega^2} \right|^2 \geq \delta \quad (\forall \omega \geq 0).$$

$$\frac{\tau}{\mu_0} + \operatorname{Re}\frac{\tau(\beta - \omega^2) + \theta\alpha\omega^2 + i[\cdot]}{(\beta - \omega^2)^2 + \alpha^2\omega^2} - \varepsilon\omega^2 \frac{(\beta - \omega^2)^2 + \alpha^2\omega^2}{[(\beta - \omega^2)^2 + \alpha^2\omega^2]^2} \geq \delta \quad (\forall \omega \geq 0).$$

$$\frac{\tau}{\mu_0} + \frac{\tau(\beta - \omega^2) + \theta\alpha\omega^2}{(\beta - \omega^2)^2 + \alpha^2\omega^2} - \frac{\varepsilon\omega^2}{(\beta - \omega^2)^2 + \alpha^2\omega^2} - \delta \geq 0 \quad (\forall \omega \geq 0).$$

Обозначив $\omega^2 = \eta$ и проводя элементарные преобразования, приходим к условию

$$A_2\eta^2 + A_1\eta + A_0 \geq 0 \quad \forall \eta \geq 0, \quad (3)$$

где

$$A_2 = \frac{\tau}{\mu_0} - \delta, A_1 = \frac{\tau\alpha^2}{\mu_0} - \frac{2\tau\beta}{\mu_0} + \theta\alpha - (\alpha^2 - 2\beta)\delta - \tau - \varepsilon,$$

$$A_0 = \left(\frac{\tau}{\mu_0} - \delta \right) \beta^2 + \tau\beta.$$

Для справедливости неравенства (3) при всех $\eta \geq 0$, как легко видеть, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$A_2 \geq 0, A_1 \geq 0, A_0 \geq 0; \quad (4)$$

либо

$$A_2 > 0, A_1 > 0, -2\sqrt{A_2 A_0} < A_1 < 0. \quad (5)$$

Определяющими параметрами у нас являются α, β и μ_0 , а варьируемыми - $\tau, \theta, \delta, \varepsilon$.

Положим $\tau = \mu_0, \varepsilon = 1$. Тогда условия (4) принимают вид

$$0 < \delta \leq 1, A_1 \geq 0, A_1 = (1-\delta)(\alpha^2 - 2\beta) + \theta\alpha - \mu_0 - 1.$$

Положим сначала $\delta = 1$. Имеем:

$$\theta\alpha - \mu_0 - 1 \geq 0.$$

Считая $\theta > 0$, получим

$$\alpha \geq \frac{1+\mu_0}{\theta} \quad (\beta > 0). \quad (6)$$

Изобразим область, определяемую условием (6) на плоскости α, β

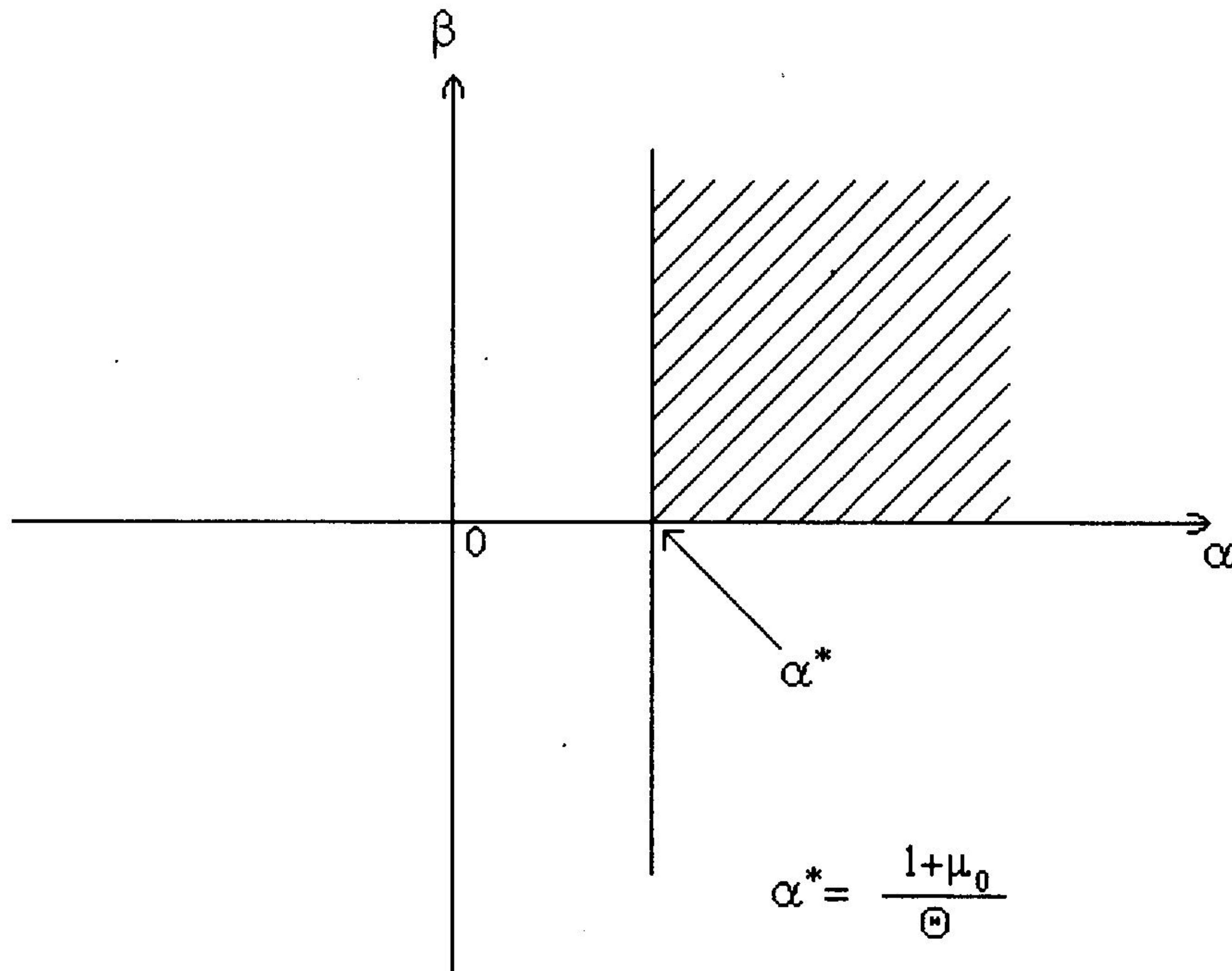


рис.2

Пусть теперь $0 < \delta < 1$, например, $\delta = \frac{1}{2}$.

Тогда условие $A_1 \geq 0$ можно переписать так (варируемый параметр θ считаем положительным):

$$\beta \leq \frac{1}{2} \alpha^2 + \theta \alpha - (1 + \mu_0), \quad (\alpha > 0, \quad \beta > 0).$$

Пусть α_* - положительный корень уравнения

$$\frac{1}{2} \alpha^2 + \theta \alpha - (1 + \mu_0) = 0$$

Тогда область, определяемая частотным условием (3) имеет вид (см.рис.3):

$$\alpha > \alpha_* > 0, \beta > 0, \beta \leq \frac{1}{2} \alpha^2 + \theta \alpha - (1 + \mu_0) \quad (6')$$

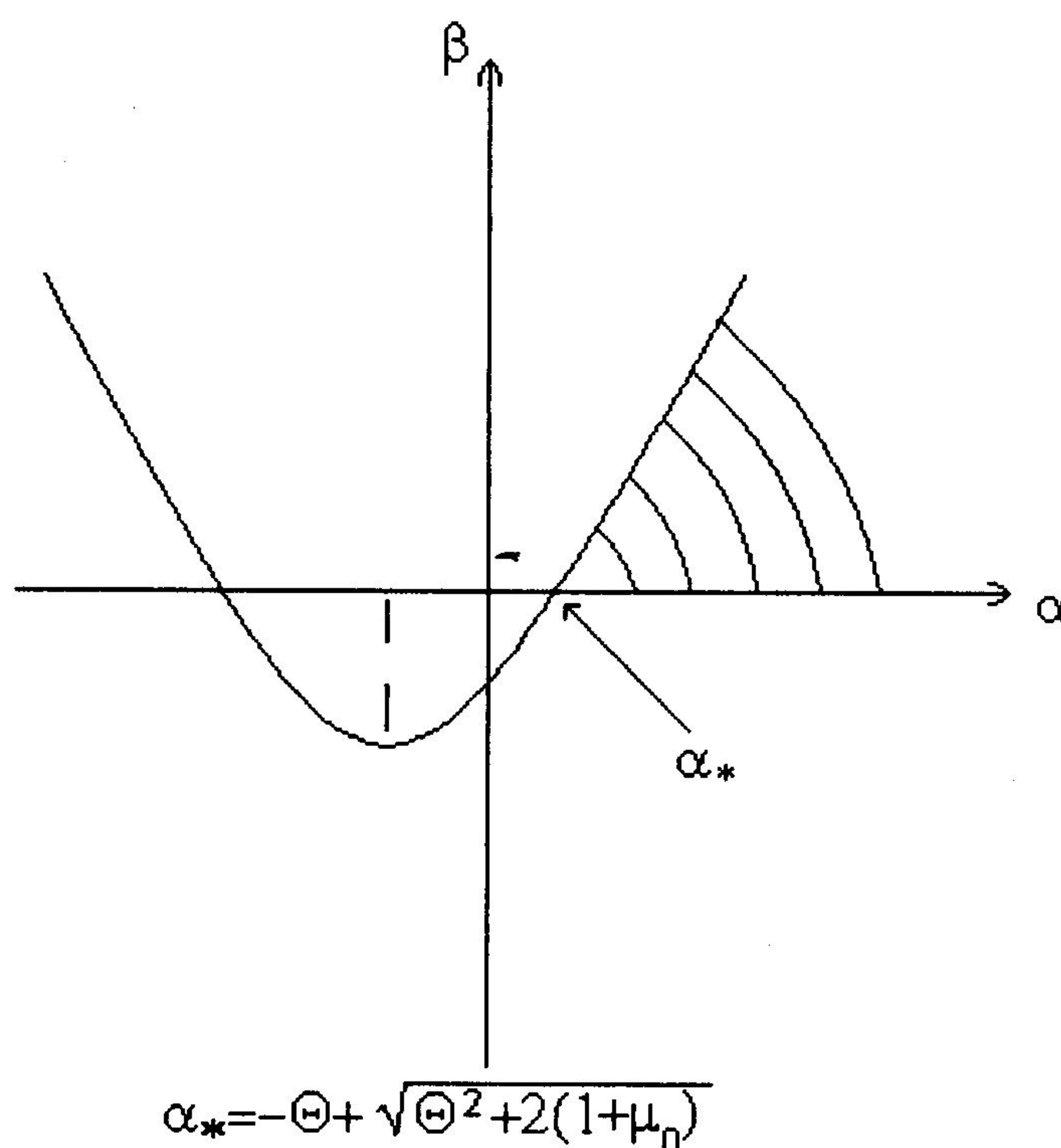


Рис.3

Заметим, что область (6) не покрывает (6'), т.к. $\alpha^* > \alpha_*$.

Рассмотрим теперь неравенства (5).

Положим: $\tau = \mu_0, \varepsilon = 1, \delta = \frac{1}{2}$. Тогда условия $A_2 > 0, A_0 > 0$ выполнены, а третье из неравенств (5) примет вид:

$$-2\sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\mu_0}{2}\beta} < \frac{\alpha^2 - 2\beta}{2} + \theta\alpha - 1 - \mu_0 < 0.$$

Полагая $\Theta := \frac{1}{2}$, после элементарных выкладок получим:

$$\begin{cases} \alpha^4 + 2\alpha^3 - (3 + 4\mu_0)\alpha^2 - 4(1 + \mu_0)\alpha + 4(1 + \mu_0)^3 < 4(\alpha^2 + \alpha - 2)\beta \\ \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha - (1 + \mu_0) < \beta \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \beta > \frac{1}{4} \frac{\alpha^4 + 2\alpha^3 - (3 + 4\mu_0)\alpha^2 - 4(1 + \mu_0)\alpha + 4(1 + \mu_0)^3}{\alpha^2 + \alpha - 2} \\ \beta > \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha - (1 + \mu_0) = \varphi_2(\alpha), \quad \beta > 0 \end{cases} \quad (7)$$

если $\alpha > 1$,

и

$$\begin{cases} \beta < \frac{1}{4} \frac{\alpha^4 + 2\alpha^3 - (3 + 4\mu_0)\alpha^2 - 4(1 + \mu_0)\alpha + 4(1 + \mu_0)^3}{\alpha^2 + \alpha - 2} \\ \beta > \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha - (1 + \mu_0) = \varphi_2(\alpha), \quad \beta > 0 \end{cases} \quad (8)$$

если $\alpha < 1$ ($\alpha = 1$ -положительный корень уравнения $\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$).

Обозначив через $\varphi_1(\alpha)$ и $\varphi_2(\alpha)$ правые части соответственно первого и второго неравенств системы (7), выясним существуют ли точки пересечения кривых $\beta = \varphi_1(\alpha)$ и $\beta = \varphi_2(\alpha)$. Соотношение приводит к следующему алгебраическому уравнению:

$$\psi(\alpha) = \alpha^4 + 2\alpha^3 - 3\alpha^2 - 4\alpha + 8(1 + \mu_0) - 4(1 + \mu_0)^3 = 0, \alpha > 0.$$

Непосредственно вычисляя,

$$\begin{aligned} \psi(0) &= 4(1 + \mu_0) \{2 - (1 + \mu_0)^2\}, \\ \psi(1) &= 4 \{(1 + \mu_0) [2 - (1 + \mu_0)^2] - 1\}, \end{aligned}$$

имеем, что $\psi(0) < 0$ при $\mu_0 > \sqrt{2} - 1$ и $\psi(0) > 0$ при $0 \leq \mu_0 < \sqrt{2} - 1$; $\psi(1) < 1$ при любом $\mu_0 \geq 0$.

Производная

$$\psi'(\alpha) = 4\alpha^3 + 6\alpha^2 - 6\alpha - 4 = 2(\alpha - 1)(2\alpha^2 + 5\alpha + 2)$$

обращается в нуль только при $\alpha = 1$ в промежутке $(0, +\infty)$, отрицательна при $\alpha \in (0, 1)$ и положительна при $\alpha > 1$.

Следовательно, при $\mu_0 > \sqrt{2} - 1$ функция $\psi(\alpha)$ имеет только один положительный корень $\bar{\alpha} > 1$. Стало быть, в случае $\mu_0 > \sqrt{2} - 1$ кривые $\beta = \varphi_1(\alpha)$ и $\beta = \varphi_2(\alpha)$ пересекаются в единственной точке $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, $\bar{\beta} = \varphi_1(\bar{\alpha}) = \varphi_2(\bar{\alpha})$, причём $\bar{\alpha} > 1$.

В случае же $0 \leq \mu_0 < \sqrt{2} - 1$ пересечение указанных выше кривых происходит двух точках с абсциссами $0 < \alpha_1 < 1$ и $\alpha_2 > 1$.

Далее очевидно, что

$$\varphi_1(\alpha) = -\frac{(1 + \mu_0)^3}{2}, \quad \varphi_2(0) = -(1 + \mu_0),$$

$$\varphi_1(\alpha) \rightarrow -\infty \text{ при } \alpha \rightarrow 1^- 0, \quad \varphi_1(\alpha) \rightarrow +\infty \text{ при } \alpha \rightarrow 1^+ 0.$$

Из проведенных выше элементарных рассуждений следует, что в случае $\mu_0 > \sqrt{2} - 1$ (тогда, очевидно $\varphi_1(0) < \varphi_2(0)$) система (8) не имеет решения, а система (7) - имеет.

Решение системы (7) можно записать так:

$$\begin{aligned} \beta &> \varphi_1(\alpha), \text{ при } 1 < \alpha < \bar{\alpha} \\ \beta &> \varphi_2(\alpha), \text{ при } \alpha > \bar{\alpha} \end{aligned} \quad (7')$$

Область, задаваемая неравенством (7'), изображена на рис.4.

Заметим, что при выбранном нами $\theta := \frac{1}{2}$, очевидно, $\alpha_* > 1$.

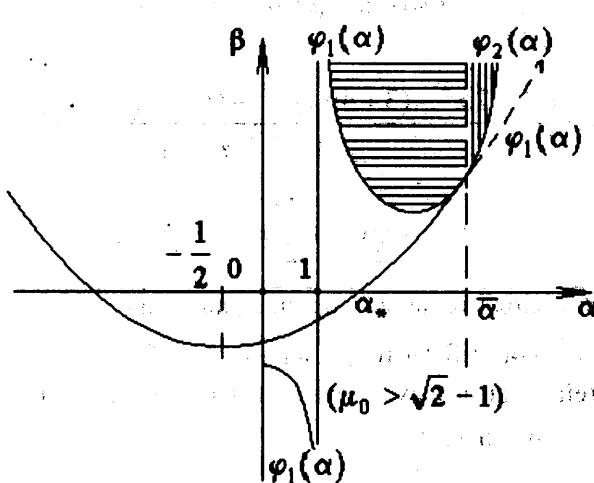


Рис.4

Таким образом, области, определяемые неравенствами (6),(6'),(7') (см. рис.2,3,4) дают аппроксимацию (снизу) области выделяемой частотным условием (A), в пространстве параметров α, β (при каждом фиксированном $\mu_0 > 0$).

Проверим остальные условия теоремы [8]. Так как $\alpha > 0, \beta > 0$, то линейная часть уравнения (1) асимптотически устойчива. Условие диссипативности будет выполнено, если предположить ограниченность функции $\Phi[\sigma, \varphi_0]$.

Условие (C) теоремы [8] принимает вид:

$$\frac{v^2}{4} < 4 \text{ при } \delta := 1, \epsilon := 1, \theta := \frac{1}{2} \text{ и}$$

$$\frac{v^2}{4} < 2 \text{ при } \delta := \frac{1}{2}, \epsilon := 1, \theta := \frac{1}{2}$$

За функцию $F(\sigma)$, фигурирующую в условии (B) теоремы [8] можно взять функцию, совпадающую с $\Phi[\sigma, \varphi_0]$, вне петель гистерезиса, а на участках, где петли, любую непрерывную функцию, график которой проходит внутри петель и соединяет нижние и верхние точки петель.

На рис.1 график $F(\sigma)$ изображен пунктирной линией.

Итак, если в системе (1) гистерезисная функция $\Phi[\sigma, \varphi_0]$, сильно непрерывна, удовлетворяет соотношению

$$0 \leq \sigma(t)\Phi[\sigma, \varphi_0] \leq \mu_0\sigma(t)^2 \quad (0 < \mu_0 < \infty)$$

и обладает свойством предельной непрерывности, то условия глобальной асимптотической устойчивости даются неравенствами:

$$\alpha > 2(1 + \mu_0), \beta > 0; \quad (9)$$

либо

$$\alpha > \sqrt{\frac{1}{4} + 2(1 + \mu_0)} - \frac{1}{2}, \quad \beta > 0, \quad \beta \leq \varphi_2(\alpha); \quad (10)$$

либо (в случае $\mu_0 > \sqrt{2} - 1$)

$$\begin{aligned} \beta &> \varphi_1(\alpha), \text{ при } 1 < \alpha < \bar{\alpha} \\ \beta &> \varphi_2(\alpha), \text{ при } \alpha > \bar{\alpha} \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\varphi_1(\alpha) = \frac{\alpha^4 + 2\alpha^3 - (3 + 4\mu_0)\alpha^2 - 4(1 + \mu_0)\alpha + 4(1 + \mu_0)^3}{4(\alpha^2 + \alpha - 2)}$$

$$\varphi_2(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha - (1 + \mu_0),$$

а $\bar{\alpha}$ - единственный положительный корень уравнения

$$\psi(\alpha) \equiv \alpha^4 + 2\alpha^3 - 3\alpha^2 - 4\alpha + 8(1 + \mu_0) - 4(1 + \mu_0)^3 = 0.$$

Объединение областей задаваемых неравенствами (4), (10), (11) изображено на рис.5 (случай $\bar{\alpha} > \alpha^*$) и рис.6 (случай $\bar{\alpha} < \alpha^*$).

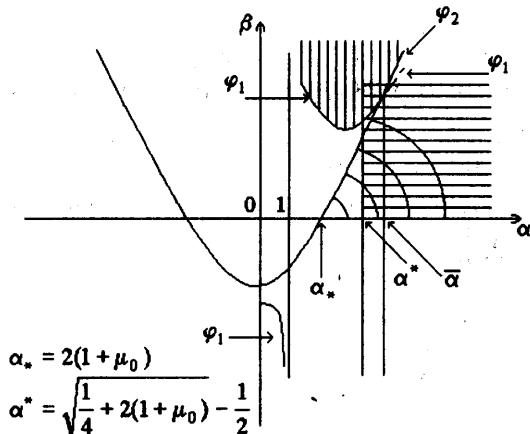


Рис.5

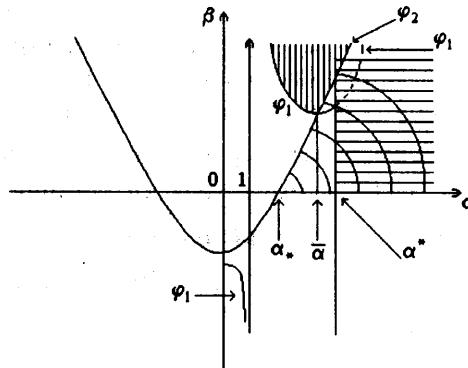


Рис.6

Литература

1. Якубович В.А. // Автоматика и телемеханика. 1965. Т.26, № 5.
2. Андронов А.А., Баутин Н.Н. // Доклады АН СССР. 1945. Т. 46, № 7.
3. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: физматсиз,-1959.
4. Фельдбаум А.А. // Автоматика и телемеханика. 1949, № 10.
5. Якубович В.А. // Докл. АН СССР, 1963. Т.149. №2.
6. Левшец С. Устойчивость нелинейных систем автоматического управления. -М.: Мир, -1967.
7. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным положением равновесия. -М.: Наука, -1978.
8. Леонов Г.А., Тешев В.А. // Дифф. уравнения. 1987. Т.23, № 4.

On global asymptotic stability of solutions of equations of second order with hysteresis nonlinearities

V.A.Teshev, M.M.Shumafov

The author describe sufficient conditions for global asymptotic stability of solution of equations of second order in class of hysteresis nonlinearities , satisfying the condition of sectoriality. In the space of the parameters of these equations the evaluations from below of the regions of global asymptotic stability are given.