

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЭМДЕНА-ФАУЛЕРА

Дж. Д. Мирзов

Адыгейский государственный университет, Майкоп

Устанавливаются асимптотические формулы как для колеблющихся, так и неколеблющихся решений одного нелинейного уравнения.

В работе даются асимптотические формулы для решений уравнения

$$U'' + t^{-\frac{n+3}{2}} \cdot |U|^{n} \operatorname{sign} U = 0, \quad (1)$$

где $t, n > 0$. Задача получения таких формул поставлена в книге [1, стр.387].

Теорема 1. Пусть $0 < n < 1$. Тогда решение $U(t)$ уравнения (1), начальные значения которого удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} \left[t_0^{\frac{1}{2}} U'(t_0) \right]^2 - U(t_0) \cdot U'(t_0) + \frac{2}{1+n} \left| t_0^{-\frac{1}{2}} U(t_0) \right|^{1+n} &< \frac{1-n}{1+n} 2^{\frac{2(1+n)}{1-n}}, \\ t_0^{\frac{1}{2}} |U'(t_0)| &\leq 2^{\frac{1+n}{1-n}} \quad \left(t_0^{-\frac{1}{2}} |U(t_0)| \leq 2^{\frac{2}{1-n}} \right), \end{aligned}$$

где $t_0 > 0$, является колеблющимся. В противном случае решение $U(t)$ является неколеблющимся.

Для неколеблющегося решения $U(t)$ уравнения (1) справедливо одно из следующих утверждений:

$$a) |U(t)| = 2^{\frac{2}{1-n}} t^{\frac{1}{2}};$$

$$b) |U(t)| = \left(2^{\frac{2}{1-n}} + o(1) \right) t^{\frac{1}{2}}, \quad |U'(t)| = \left(2^{\frac{1+n}{1-n}} + o(1) \right) t^{-\frac{1}{2}}, \quad t \rightarrow +\infty;$$

$$c) U(t) = (c + o(1)) \cdot t, \quad U'(t) = c + o(1), \quad c \neq 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Для любого нетривиального колеблющегося решения $U(t)$ уравнения (1) справедливы равенства

$$U(t) = t^{\frac{1}{2}} f^{-1} \left[w_1 \left((c_0 + o(1)) \ln t \right) \right], \quad t \rightarrow +\infty,$$

$$U'(t) = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} f^{-1} \left[w_1 \left((c_0 + o(1)) \ln t \right) \right] + t^{-\frac{1}{2}} w_2 \left((c_0 + o(1)) \ln t \right), \quad t \rightarrow +\infty,$$

где $c_0 > 0$, f^{-1} -функция обратная для

$$f(z) = \operatorname{sign} z \cdot \sqrt[1+n]{\frac{2}{1+n} |z|^{1+n} - \frac{z^2}{4}} \quad \text{при } |z| < 2^{\frac{2}{1-n}},$$

w_1, w_2 - решение системы

$$w_1' = \frac{2}{1+n} \cdot w_2, \quad w_2' = -|w_1|^n \operatorname{sign} w_1, \quad . \quad (2)$$

с начальными условиями

$$w_1(0) = 0, \quad w_2(0) = \sqrt{c}, \quad 0 < c < \frac{1-n}{1+n} 2^{\frac{2(1+n)}{1-n}}. \quad (3)$$

Теорема 2 Пусть $n > 1$. Тогда нетривиальное решение $U(t)$ уравнения (1), начальные значения которого удовлетворяют неравенству

$$\left[t_0^{\frac{1}{2}} U'(t_0) \right]^2 - U(t_0) \cdot U'(t_0) + \frac{2}{1+n} \left| t_0^{-\frac{1}{2}} U(t_0) \right|^{1+n} \leq 0,$$

где $t_0 > 0$, является неколеблющимся. В противном случае решение - колеблющееся.

Для любого неколеблющегося решения $U(t)$ уравнения (1) справедливо одно из следующих утверждений:

a) $|U(t)| = 2^{\frac{2}{1-n}} t^{\frac{1}{2}}$;

б) $U(t) = c + o(1), \quad U'(t) = \left(\frac{2|c|^n \operatorname{sign} c}{1+n} + o(1) \right) t^{-\frac{1+n}{2}}, \quad c \neq 0, \quad t \rightarrow +\infty;$

в) $U(t) = t^{\frac{1}{2}} g^{-1} \left[\sqrt{c+c_1} \cos((c_0+o(1)) \ln t) \right],$

$$U'(t) = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} g^{-1} \left[\sqrt{c+c_1} \cos((c_0+o(1)) \ln t) \right] - \sqrt{c+c_1} t^{-\frac{1}{2}} \sin((c_0+o(1)) \ln t), \quad t \rightarrow +\infty,$$

где g^{-1} - функция обратная для

$$g(z) = \operatorname{sign} z \cdot \operatorname{sign} \left(|z|^{n-1} - \frac{1}{4} \right) \sqrt{\frac{2}{1+n} |z|^{1+n} - \frac{z^2}{4} + c_1}, \quad 0 < |z| < \left(\frac{1+n}{8} \right)^{\frac{1}{n-1}},$$

$-c_1 < c < 0 < c_0$,

$$c_1 = \frac{n-1}{n+1} \cdot 2^{-\frac{2(n+1)}{n-1}}.$$

Для любого нетривиального колеблющегося решения $U(t)$ уравнения (1) справедливы равенства:

$$U(t) = \pm t^{\frac{1}{2}} h^{-1} \left[\sqrt{c} \sin \alpha(\ln t) - \sqrt{c_1} \cos \alpha(\ln t) \right],$$

$$U'(t) = \pm \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} h^{-1} \left[\sqrt{c} \sin \alpha(\ln t) - \sqrt{c_1} \cos \alpha(\ln t) \right] + t^{-\frac{1}{2}} \left[\sqrt{c} \cos \alpha(\ln t) + \sqrt{c_1} \sin \alpha(\ln t) \right],$$

где α - периодическая и дифференцируемая функция с $\alpha(0) = 0$, $c > 0$, c_1 определено в пункте в) данной теоремы, h^{-1} - непрерывная ветвь функции обратной для

$$h(z) = \operatorname{sign} \left(|z|^{n-1} - \frac{1}{4} \right) \sqrt{\frac{2}{1+n} |z|^{1+n} - \frac{z^2}{4} + c_1}, \quad z \in \mathbf{R}.$$

Замечание 1. Если $n = 1$, то все решения уравнения (1) являются колеблющимися (см.[2], стр.367).

Замечание 2. Теоремы 1 и 2 дополняют соответствующие разделы справочников [2] и [3], касающиеся уравнений Эмдена - Фаулера.

Замечание 3. Все утверждения теорем 1 и 2 остаются в силе при $0 < t \leq t_0$, $t \rightarrow 0_+$, если пункт в) теоремы 1 поменять на пункт б) теоремы 2 и наоборот.

Доказательства теорем. С помощью преобразования

$$x(s) = t^{\frac{1}{2}} U'(t), \quad y(s) = t^{-\frac{1}{2}} U(t), \quad s = \ln t \quad (4)$$

уравнение (1) перепишем в виде

$$x' = \frac{1}{2} x - |y|^n \operatorname{sign} y, \quad y' = x - \frac{1}{2} y \quad (5)$$

Консервативная система (5) для $n \neq 1$ имеет три особые точки $(0,0)$, $\left(2^{\frac{1+n}{1-n}}, 2^{\frac{2}{1-n}}\right)$ и $\left(-2^{\frac{1+n}{1-n}}, -2^{\frac{2}{1-n}}\right)$.

При $0 < n < 1$ начало координат является центром, а остальные особые точки - седлами. Если же $n > 1$, то начало координат является седлом, а остальные особые точки - центрами.

Система (5) как и уравнение (1) обладает свойством единственности решения задачи Коши [4], [5].

Фазовый портрет системы (5) при $0 < n < 1$ дается на рис.1, а для $n > 1$ - на рис.2.

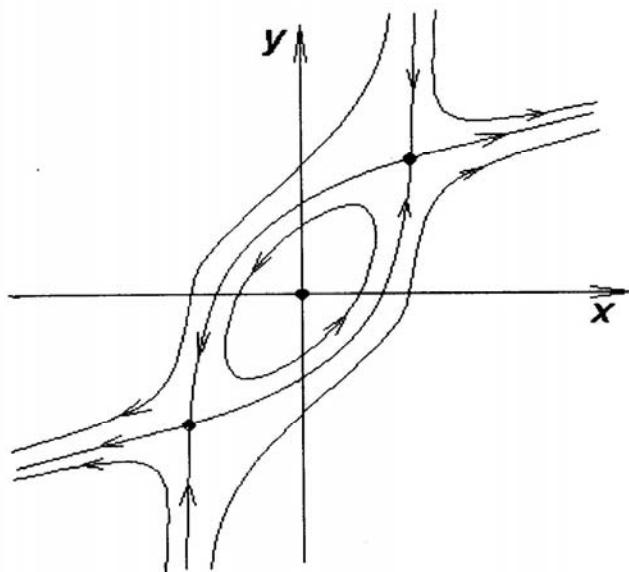


Рис.1

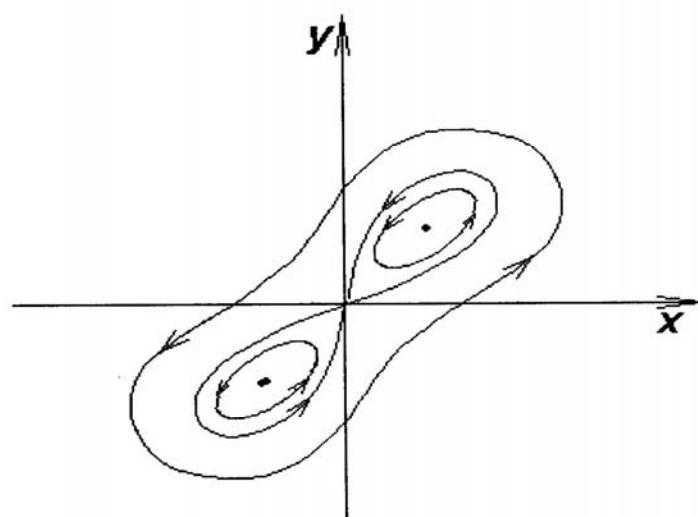


Рис.2

Утверждения теорем относительно разделения колеблющихся и неколеблющихся решений уравнения (1) по начальным данным легко получаются из фазового портрета системы (5).

Пункты а) и б) теоремы 1 непосредственно вытекают из рис.1. Докажем пункт в) теоремы 1. Пусть $x(s) \rightarrow \pm\infty$ и $y(s) \rightarrow \pm\infty$ при $s \rightarrow +\infty$. Так как $|y(s)| < 2|x(s)|$ при достаточно больших s , то

$$\frac{|y(s)|^n}{|x(s)|} = \frac{|y(s)|^n}{|x(s)|^n} \cdot \frac{1}{|x(s)|^{1-n}} \rightarrow 0 \text{ при } s \rightarrow +\infty. \quad (6)$$

Ввиду (6) и тождества

$$x^2(s) - x(s) \cdot y(s) + \frac{2}{1+n} |y(s)|^{1+n} \equiv const$$

справедливо равенство $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{y(s)}{x(s)} = 1$, а поэтому

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{x(s) - y(s)}{|y(s)|^n \operatorname{sign} y(s)} = -\frac{2}{1+n}. \quad (7)$$

В силу (4) равенство (7) можно переписать так

$$\frac{\frac{1}{2}U'(t) - t^{-\frac{1}{2}}U(t)}{\left|t^{-\frac{1}{2}}U(t)\right|^n \operatorname{sign} U(t)} = -\frac{2}{1+n} + o(1), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Следовательно,

$$\left(t^{-(1-n)}|U(t)|^{1-n}\right)' = \left(-\frac{2(1-n)}{1+n} + o(1)\right)t^{-\frac{3-n}{2}}, \quad t \rightarrow +\infty,$$

поэтому интегрирование от t до $+\infty$ дает

$$|U(t)|^{1-n} = c \cdot t^{1-n} + \left(\frac{4}{1+n} + o(1)\right)t^{\frac{1-n}{2}}, \quad c > 0, \quad t \rightarrow +\infty,$$

откуда получаем нужное утверждение.

Теперь докажем утверждение теоремы 1, касающееся колеблющихся решений. Нетривиальное колеблющееся решение $x(s), y(s)$ системы (5), определяемое начальными условиями $x(0) = \sqrt{c}, y(0) = 0, 0 < c < \frac{1-n}{1+n} 2^{\frac{2(1+n)}{1-n}}$, удовлетворяет тождеству

$$x^2(s) - x(s) \cdot y(s) + \frac{2}{1+n} |y(s)|^{1+n} \equiv c, \quad (8)$$

причем

$$|x(s)| < 2^{\frac{1+n}{1-n}}, \quad |y(s)| < 2^{\frac{2}{1-n}} \text{ при } -\infty < s < +\infty.$$

Введем функции

$$w_1(\tau) = \operatorname{sign} y(s) \cdot \sqrt[1+n]{\frac{2}{1+n} |y(s)|^{1+n} - \frac{y^2(s)}{4}},$$

$$w_2(\tau) = x(s) - \frac{1}{2} y(s),$$

где

$$\tau = \int_0^s \frac{1 - \frac{|y(\theta)|^{1-n}}{4}}{\left(\frac{2}{1+n} - \frac{|y(\theta)|^{1-n}}{4}\right)^{\frac{n}{1+n}}} d\theta.$$

Легко проверяется, что $w_1(\tau)$, $w_2(\tau)$ является решением задачи (2), (3).
В силу периодичности $y(s)$ существует конечный предел

$$c_0 = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\tau(s)}{s}$$

и так как $\tau'(s) > 0$, то $c_0 > 0$. Следовательно, теорема 1 доказана полностью.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Начнем с пункта б), касающегося неколеблющихся решений уравнения (1).

Пусть $x(s) \rightarrow 0$ и $y(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow +\infty$. Тогда справедливо тождество

$$x^2(s) - x(s) \cdot y(s) + \frac{2}{1+n} |y(s)|^{1+n} \equiv 0. \quad (9)$$

Так как $|x(s)| < 2|y(s)|^n$ при достаточно больших s , то

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{x(s)}{|y(s)|^n \operatorname{sign} y(s)} = 0. \quad (10)$$

Из (9) и (10) получаем

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{x(s)}{|y(s)|^n \operatorname{sign} y(s)} = \frac{2}{1+n}$$

или с учетом (4) имеем

$$\frac{U'(t) \operatorname{sign} U(t)}{|U(t)|^n} = \left(\frac{2}{1+n} + o(1) \right) t^{-\frac{1+n}{2}}, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (11)$$

Интегрирование последнего равенства от t до $+\infty$ дает

$$|U(t)|^{n-1} = \frac{1}{c + \left(\frac{4}{1+n} + o(1) \right) t^{-\frac{n-1}{2}}}, \quad c > 0, \quad t \rightarrow +\infty,$$

что в силу (11) доказывает пункт б) теоремы 2.

Теперь докажем пункт в). Неколеблющееся решение $x(s)$, $y(s)$ системы (5), для которого

$x(0) = \alpha$, $y(0) = 2\alpha$, $0 < |\alpha| \neq 2^{-\frac{n+1}{n-1}}$ удовлетворяет тождеству (8) и неравенству

$$0 < |y(s)| < \left(\frac{1+n}{8} \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad \text{при } -\infty < s < +\infty,$$

где $-c_1 < c < 0$. Введем функции

$$w_1(\tau) = \operatorname{sign} y(s) \cdot \operatorname{sign} \left(|y(s)|^{n-1} - \frac{1}{4} \right) \cdot \sqrt{\frac{2}{1+n} |y(s)|^{1+n} - \frac{y^2(s)}{4} + c_1},$$

$$w_2(\tau) = x(s) - \frac{1}{2} y(s),$$

где

$$\tau = \int_0^s \frac{\left(|y(\theta)|^n - \frac{|y(\theta)|}{4} \right) \operatorname{sign}(|y(\theta)|^{n-1} - \frac{1}{4})}{\sqrt{\frac{2}{1+n} |y(\theta)|^{1+n} - \frac{y^2(\theta)}{4} + c_1}} d\theta.$$

Очевидно, что $w_1(\tau)$, $w_2(\tau)$ является решением системы

$$w'_1 = w_2, \quad w'_2 = -w_1$$

удовлетворяющим начальным условиям

$$w_1(0) = \operatorname{sign} \alpha \cdot \operatorname{sign} \left(|2\alpha|^{n-1} - \frac{1}{4} \right) \cdot \sqrt{2^{2+n} (1+n)^{-1} |\alpha|^{1+n} - |\alpha|^2 + c_1} \neq 0,$$

$$w_2(0) = 0.$$

Следовательно,

$$w_1(\tau) = w_1(0) \cos \tau, \quad w_2(\tau) = -w_1(0) \sin \tau.$$

Ясно, что $w_1^2(0) = c + c_1$ и существует конечный предел

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\tau(s)}{s} = c_0 > 0,$$

поэтому получаем утверждение пункта б) теоремы 2.

Остается доказать утверждение теоремы 2, касающееся колеблющихся решений уравнения (1). Нетривиальное колеблющееся решение $x(s), y(s)$ системы (5), определяемое начальными условиями $x(0) = \sqrt{c}$, $y(0) = 0$ удовлетворяет тождеству (8), где $c > 0$. Введем функции

$$w_1(\tau) = \operatorname{sign} \left(|y(s)|^{n-1} - \frac{1}{4} \right) \cdot \sqrt{\frac{2}{1+n} |y(s)|^{1+n} - \frac{y^2(s)}{4} + c_1},$$

$$w_2(\tau) = x(s) - \frac{1}{2} y(s),$$

где

$$\tau = \int_0^s \frac{\left(|y(\theta)|^n \operatorname{sign} y(\theta) - \frac{y(\theta)}{4} \right) \operatorname{sign} \left(|y(\theta)|^{n-1} - \frac{1}{4} \right)}{\sqrt{\frac{2}{1+n} |y(\theta)|^{1+n} - \frac{y^2(\theta)}{4} + c_1}} d\theta. \quad (12)$$

Так как $w_1(\tau)$, $w_2(\tau)$ является решением задачи (см., например, [6], стр.41)

$$w'_1 = w_2, \quad w'_2 = -w_1$$

$$w_1(0) = -\sqrt{c_1}, \quad w_2(0) = \sqrt{c},$$

то

$$w_1(\tau) = \sqrt{c} \sin \tau - \sqrt{c_1} \cos \tau, \quad w_2(\tau) = \sqrt{c} \cos \tau + \sqrt{c_1} \sin \tau.$$

Пусть T - период функции $y(s)$. Тогда в силу симметрии кривой $x^2 - xy + \frac{2}{1+n} |y|^{1+n} = c > 0$ относительно начала координат будем иметь

$$y\left(s + \frac{T}{2}\right) = -y(s) = y\left(s - \frac{T}{2}\right) \text{ при } s \in \mathbf{R} \quad (13)$$

Для любой нечетной функции $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ввиду (13) справедливо равенство

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f[y(s)] ds = \int_0^T f\left[y\left(\eta - \frac{T}{2}\right)\right] d\eta = \int_0^T f[-y(\eta)] d\eta = - \int_0^T f[y(\eta)] d\eta = - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f[y(\eta)] d\eta = 0.$$

Следовательно, функция $\tau(s)$, определенная равенством (12), является дифференцируемой и Т-периодической. Теорема доказана.

Л и т е р а т у р а

1. Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений - М.: Наука, - 1990.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, - 1971.
3. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. - М. : Наука, - 1993.
4. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М. : Мир, - 1970.
5. Мирзов Дж. Д. Асимптотические свойства решений систем нелинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. - Майкоп: Адыг. кн. изд-во, - 1993.
6. Филиппов В.В. Что такое пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений ? -М.: Издательство МГУ, - 1996.

Asymptotic formulae for solutions of one equation of Emden-Fowler

J.D. Mirsov

In this article the author determines asymptotic formulae both for vibrating and nonvibrating solutions of one nonlinear equation.