

К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ВНУТРИЭТНИЧЕСКОЙ ЭВОЛЮЦИИ

Р.О. Кенетова, А.М. Нахушев

НИИ прикладной математики и автоматизации РАН, Нальчик

Предложена математическая модель внутриэтнической эволюции по Л.Н. Гумилеву.

Ю.Е. Аниконов [1] рассматривая этнос как статистический ансамбль особей в пространстве времени \mathbf{R}^{n+1} точек (x, t) , где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - точка евклидова пространства \mathbf{R}^n , t - время, предложил некоторую формализацию понятий этнического поля, пассионарности, пассионарного поля и их динамической связи посредством уравнения движения. В работе [1] этнос определяется по Л.Н.Гумилеву [2] как "естественный сложившийся на основе оригинального стереотипа поведения коллектива людей, существующий как энергетическая система (структура), противопоставляющая себя всем другим таким же коллективам, исходя из ощущения комплементарности", т.е. "ощущения подсознательной взаимной симпатии особей, определяющего деление на своих и чужих".

Предполагается, что особи этноса обладают пассионарностью: (y, z) , где $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ - векторная характеристика потенциальной возможности особи к активным действиям, $z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$ - вектор активности личности - пассионарный импульс, y и $z \in \mathbf{R}^m$, $m \geq 1$.

Здесь пассионарный импульс означает поведенческий импульс, направленный против инстинкта личного и видового самосохранения. Пассионарный импульс отождествляется с пассионарным импульсом поведения [2, с.608].

Пусть $\zeta = (x, y, z) \in \mathbf{R}^{2m+n}$; $w(\zeta, t)$ - плотность распределения особей данного ансамбля в пространстве Евклида \mathbf{R}^{2m+n} в момент времени t ; $H(\zeta, t)$ - энергия в точке ζ в момент времени t , определяющая пассионарное поле, т.е. поле, обусловленное наличием биохимической энергии - пассионарности; $P(\zeta, t)$ - функция характеризующая появление, исчезновение, перемещение, взаимодействие особей этноса.

Предложенное Ю.Е. Аниконовым [1] уравнение движения в фазовом пространстве точек (ζ, t) имеет вид

$$P * W + \sum_{j=1}^m \left[\frac{\partial H}{\partial z_j} * \frac{\partial W}{\partial y_j} - \frac{\partial H}{\partial y_j} * \frac{\partial W}{\partial z_j} \right] = 0, \quad (1)$$

где $*$ означает свертку по пространственно-временной переменной (x, t) , в частности

$$P * W = \int_{\mathbf{R}^{n+1}} P(x - \xi, y, z, t) w(\xi, y, z, t) d\xi dt,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D_0(y, z) \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} + D_1(y, z) w^2.$$

Этногенез - это “весь процесс от момента возникновения до исчезновения этнической системы под влиянием энтропийного процесса потери пассионарности” [2, с.611].

Очевидно, что предложенная Ю.Е. Аниконовым математическая модель этногенеза, “состоящая из трех, вообще говоря, априори неизвестных функций P, H, W , подчиненных условию (1)” является весьма абстрактной и трудно реализуемой в плане ее идентификации на реальных этносах. Более жизнеспособные модели этнических процессов видимо можно получить, если исходить из математической теории борьбы за существование В. Вольтерра [3] и нового научного направления “Синергетики” Г.Хакена [6]. Продемонстрируем это на процессах, связанных с внутриэтнической эволюцией.

Допустим, что в этносе из $N = N(t)$ человек, живущих в некоторой географической области с надежной и устойчивой системной связи в момент времени t внезапно появились $u_1 = u_1(t)$ пассионариев и $u_2 = u_2(t)$ субпассионариев.

Согласно Л.Н.Гумилеву [2], пассионарии - это особи, пассионарный импульс поведения которых превышает величину импульса инстинкта самосохранения, а субпассионарии - особи, пассионарный импульс которых меньше импульса самосохранения.

Пусть фаза подъема в процессе внутреннеэтнической эволюции начинается в момент времени $t = 0$ и заканчивается при $t = t_m$. Как известно [2, с.352] эта фаза характеризуется быстрым увеличением числа $u_1(t)$ пассионарных особей в результате либо размножения, либо инкорпорации.

Если поведение - это определенный способ существования в условиях постоянного соотношения “хищник” - “жертва” (см. [4, с.5]), то на фазе подъема пассионарное напряжение P_n таково, что взаимодействие пассионариев и субпассионариев носит синергетический характер и может быть formalизовано в рамках вольтерровской модели “хищник” - “жертва” [3], [5, с.115]. Иначе говоря, можно предположить, что синергетика пассионариев и субпассионариев носит характер сходный со взаимоотношением “хищник” - “жертва”. На фазе подъема в качестве “жертвы” выступает субпассионарии, а в роли “хищника” пассионарии.

При такой интерпретации этого процесса его уравнения движения могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} u'_1(t) &= [\mu_{11} - \gamma_{12}u_2(t)]u_1(t), \\ u'_2(t) &= -[\mu_{21} - \gamma_{21}u_1(t)]u_2(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где $0 \leq t \leq t_m$, μ_{11} и μ_{21} - неотрицательные параметры автоприроста пассионариев и субпассионариев, соответственно, а γ_{12} и γ_{21} - коэффициенты их взаимодействия или коэффициенты хищничества.

Из (2) легко видеть, что если вектор $u = (u_1, u_2)$ - решение системы (2), то

$$\gamma_{21}[u'_1(t) - \mu_{11}u_1(t)] = -\gamma_{12}[u'_2(t) - \mu_{21}u_2(t)]. \quad (3)$$

Следовательно, вектор u является синергетическим [7, с.18].

Для того, чтобы более заметно учесть предисторию этноса систему (2) можно заменить следующей

$$\begin{aligned} \int_0^1 D_{0,t}^\alpha \log U_1(\tau) d\alpha &= \mu_{11} - \gamma_{12}U_2, \\ \int_0^1 D_{0,t}^\alpha \log U_2(\tau) d\alpha &= -\mu_{21} - \gamma_{21}U_1, \end{aligned} \quad (4)$$

где $D_{0,t}^\alpha$ - оператор дробного дифференцирования порядка α [5, с.28].

Вектор $u = \left(\frac{\mu_{11}}{\gamma_{12}}, \frac{\mu_{21}}{\gamma_{21}} \right)$ является точкой равновесия или стационарным решением системы (2). Система (4) не имеет стационарного решения, если μ_{ij} и γ_{ij} не зависят от времени.

На акматической фазе пассионарии достигают своего максимума. Если допустить, что эта фаза начинается с момента времени t_m и в этот момент времени численность пассионариев достигает (локального) максимума, то как видно из первого уравнения (2), численность субпассионариев при $t = t_m$ будет равна

$\frac{\mu_{11}}{\gamma_{12}}; U_2(t_m) = \frac{\mu_{11}}{\gamma_{12}}$. Естественно предположить, что при $t = t_m$ численность субпассионариев достигает (локальный) минимум. Тогда из второго уравнения системы (2) получаем

$$U_1(t_m) = \frac{\mu_{21}}{\gamma_{21}}.$$

Допустим, что $N(t) = U_1(t) + U_2(t)$ и численность этноса развивается по логическому закону Ферхольста

$$N'(t) = [\mu - \gamma N(t)]N(t), t \geq 0.$$

Тогда при $t = t_m$ имеем

$$N(t_m) = \frac{\mu}{\gamma} = \frac{\mu_{11}}{\gamma_{12}} + \frac{\mu_{21}}{\gamma_{21}}.$$

Размер этноса, при котором скорость его роста равна нулю договоримся назвать (как принято в теории популяции) емкостью среды и обозначать буквой K . Очевидно, $\gamma = \mu / K$,

$$K = \frac{\mu_{11}}{\gamma_{12}} + \frac{\mu_{21}}{\gamma_{21}}.$$

Пусть акматическая фаза завершается в момент времени t_a и в этот же момент начинается фаза надлома, которая характеризуется резким уменьшением пассионариев и вытеснением их субпассионариями. На фазе надлома в качестве жертвы выступают пассионарии, а в роли хищника субпассионарии. Поэтому в модели (2) достаточно поменять U_1 и U_2 местами и считать, что время $t \in [t_a, t_i]$, где t_i - начало инерционной фазы, т.е. фазы медленного уменьшения числа пассионарных особей.

На инерционной фазе можно воспользоваться уравнениями движения вида:

$$\begin{aligned} U'_1(t) &= -[\mu_{11} - \gamma_{12}U_2(t)]U_1(t), \\ U'_2(t) &= [\mu_{21} - \gamma_{21}U_1(t)]U_2(t), \quad t_i \leq t \leq t_0, \end{aligned}$$

где t_0 - начало фазы обскурации.

На фазе обскурации происходит "почти полная замена пассионариев субпассионариями". На этой фазе численность $N(t)$ этноса практически совпадает с численностью субпассионариев и, поэтому в качестве уравнения их движения можно взять логическое уравнение

$$U'_2(t) = [\mu - \gamma U_2(t)]U_2(t), \quad t \geq t_0.$$

Если верить Л.Н.Гумилеву [2, с.352], то на фазе обскурации субпассионарии “в силу особенностей своего склада либо губят целиком, либо не успевают погубить его до вторжения иноплеменников извне”.

Рассмотренные модели этноса, интерпретируемого как система с сосредоточенными параметрами охватываются следующей обобщенной вольтерровской моделью, учитывающей эффект последействия

$$U'_i(t) = U_i(t) \left\{ \mu_i - \sum_{j=1}^n \left[\alpha_{ij} U_j(t) - \beta_{ij} U_j(t - \tau_j) - \int_{-\infty}^t U_j(\xi) \varphi_j(t - \xi) d\xi \right] \right\} \equiv BU_i, \quad (5)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

Здесь τ_j - неопределенные запаздывания, $\|\beta_{ij}\|$ - матрица, характеризующая сосредоточенное запаздывание, φ_j - эридиторная функция, $U = (U_1, U_2, \dots, U_n)$ - вектор состояния этноса в момент времени t .

Если этнос интерпретируется как система с распределенными параметрами, то роль уравнений движения будут играть системы уравнений в частных производных. Важную роль могут сыграть реактивно - диффузионные уравнения следующих видов

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial t} &= U_i(x, t) \left\{ \mu_i - \sum_{j=1}^n \left[\alpha_{ij} U_j(x, t) - \beta_{ij} U_j(x, t - \tau_j) - \int_{-\infty}^t U_j(x, \xi) \varphi_j(t - \xi) d\xi \right] \right\} + \\ &+ \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\alpha_{aj} U_i(x, t) + \beta_j) U_i(x, t) \right], i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (6)$$

где $U(x, t) = (U_1(x, t), U_2(x, t), \dots, U_n(x, t))$ - вектор состояния этноса в точке $(x, t) \in \mathbf{R}^{n+1}$, α_j и β_j - параметры, характеризующие эффект диффузии, как и в случае уравнения для плотности распределения w особей в пространстве \mathbf{R}^{2m+n+1} .

Л и т е р а т у р а

1. Аниконов Ю.Е.// Доклады Академии Наук, 1995, т.345, №1, с.7-9.
2. Гумилев Л.Н. Этногенез и биосфера земли. - М.: Танаис ДИ-ДИК, 1994.
3. Вольтерра В. Математические теории борьбы за существование. М.: Наука, - 1976.
4. Гумилев Л.Н. Тысячелетие вокруг Каспия. - М.: 36-1 ТОО “Мишель и К⁰”, 1993.
5. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. - М.: Высшая школа, - 1995.
6. Хакен Г. Синергетика. - М.: Мир, - 1985.
7. Нахушев А.М. Об уравнениях состояния непрерывных одномерных систем и их приложениях. - Нальчик: Логос, - 1995.

On mathematical modeling of innerethnic evolution

R.O. Kenetova, A.M. Nakhushev

Mathematical model of innerethnic evolution by L.N.Gumilev is suggested.